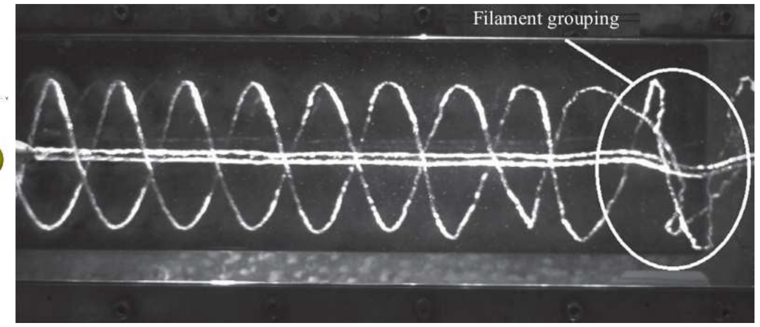
Matlab : Applications en mécanique.
LA207, TP6, Noté
Université Pierre et Marie Curie.
Licence d’ingénierie mécanique.



Introduction : Dynamique tourbillonnaire

On voit partout des tourbillons, par exemple dans les sillages des avions et des bateaux, et également dans l’atmosphère sous la forme de cyclones et d’anticyclones.

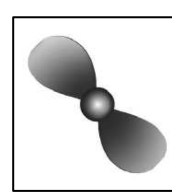
Dans ce TP nous allons étudier la structure d’un sillage tourbillonnaire. Nous ferons une application au sillage de bulles d’air que l’on observe derrière les hélices de bateaux. Les bulles sont générées à l’extrémité de chaque pale constituant l’hélice, par la présence d’une zone de dépression au bord de fuite. Ce phénomène s’appelle la cavitation hydrodynamique. Il y a donc génération d’un mouvement d’air (tourbillon) qui peut être observé lors des essais d’une hélice en tunnel de cavitation (comme sur la figure ci-dessus : on distingue bien sur cette photo le sillage que crée l'air dans l'eau, la cavitation restant accrochée en bout de pales. On voit bien aussi le sillage du moyeu central. Une fois lâché en bout de pales, le tourbillon se déplace ensuite, et on observe un sillage tourbillonnaire.

Nous considérerons d’abord le cas des hélices à 2 pales, puis des hélices avec un plus grand nombre de pales.

Nous considérerons un modèle simplifié, celui d’un fluide sans viscosité. Le mouvement d’un tel fluide est décrit par les équations d’Euler, qui ont une solution particulière que nous utiliserons comme modèle pour un tourbillon, c’est le tourbillon ponctuel. Chaque tourbillon est décrit par la position (x_0,y_0) de son centre, et par son intensité Γ. Nous avons trois propriétés pour ce type de tourbillon:

1) Chaque tourbillon induit tout autour de lui un champ de vitesse (champ induit)

$$u(x,y) = \frac{-\Gamma(y-y_0)}{2\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\delta]},$$
$$v(x,y) = \frac{\Gamma(x-x_0)}{2\pi[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\delta]}$$



Ici, δ est un paramètre qui évite que la vitesse tende vers l’infini en (x_0,y_0). Nous prendrons dans ce TP la valeur $\delta = 0.05$.

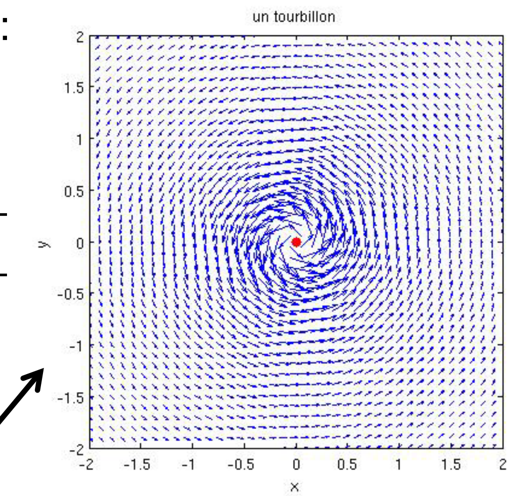
2) Le champ de vitesse induit par plusieurs tourbillons est la somme des champs de vitesse induit par chaque tourbillon (linéarité du champ de vitesse)

3) Chaque tourbillon se déplace à la vitesse induite en son centre par tous les autres tourbillons (advection du tourbillon.

1) Manipulations

Tracer avec la fonction *quiver* le champ de vitesse :
$u(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, $\quad v(x,y) = -\cos(x)\sin(y)$,
pour $x \in [0,2\pi]$ et $y \in [0,2\pi]$. Pour ceci, utiliser la fonction *meshgrid* pour générer le maillage (la grille).

Avec une boucle et la fonction *drawnow*, faire l’animation du champ de vitesse évoluant dans le temps, pour $t \in [0,4\pi]$, en posant:
$$u(x,y,t) = \sin(x)\cos(y-t)$$
$$v(x,y,t) = -\cos(x)\sin(y-t)$$



2) Champ de vitesse induit par des tourbillons

1 tourbillon : Tracer avec la fonction *quiver* le champ de vitesse induit par un tourbillon ponctuel solitaire localisé en $(x_0,y_0) = (0,0)$ et d’intensité $\Gamma_0 = 1$. Pour ceci, choisir une grille en x et une grille en y de sorte que le champ induit soit bien visible. Ajouter un point rouge pour indiquer la position du centre du tourbillon.

2 tourbillons :Tracer le champ de vitesse induit par deux tourbillons aux positions $(x_1,y_1) = (1,0)$ et $(x_2,y_2) = (-1,0)$, de même intensité $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$. Ajouter des points de couleurs pour marquer sur le graphique la position de chaque tourbillon.

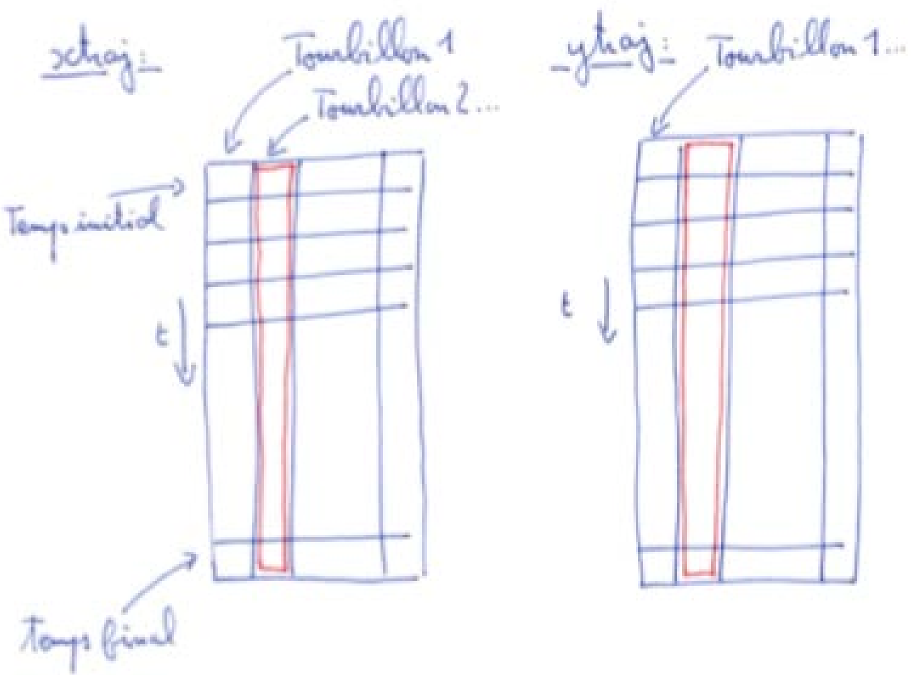
Hélice à 2 pales : On considère une hélice de bateau constituée de 2 pales de longueur *a*=1 et d’un moyeu central. Un tourbillon de même intensité $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ est généré à chaque extrémité des pales, et un tourbillon d’intensité $\Gamma_0 = -(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ est généré par le moyeu . Tracer le champ de vitesse induit par l’ensemble des 3 tourbillons, en marquant la position de chaque tourbillon.

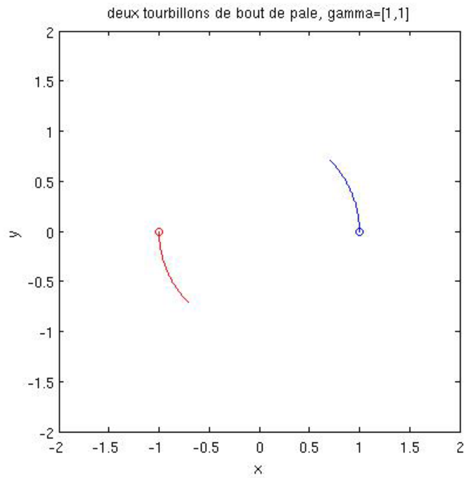
Nous allons maintenant étudier comment les tourbillons se déplacent dans le temps (en utilisant la propriété 3). Pour cela, nous vous fournissons une fonction qui calcule les trajectoires d'un ensemble de tourbillons (copiez-là dans votre répertoire de travail):

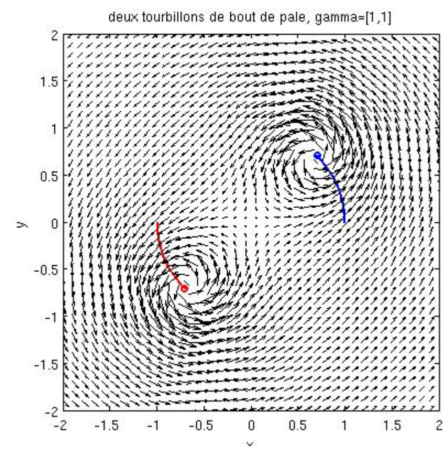
[xtraj,ytraj,tvec]=tourbitraj(xloc,yloc,gamma,tmax)

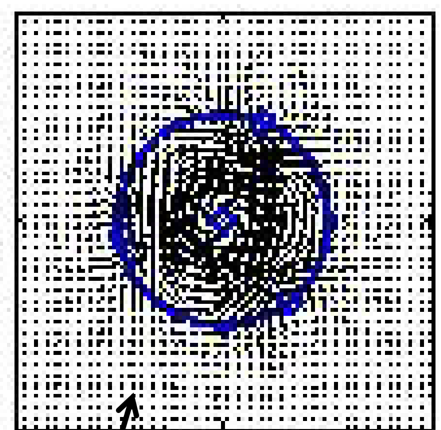
Arguments d'entrée:
- **xloc** : vecteur des positions *x* initiales des tourbillons. On peut avoir autant de tourbillons que l'on veut. Si on a *n* tourbillons, ce vecteur sera donc de longueur *n*.
- **yloc**: vecteur des positions *y* initiales des tourbillons. Ce vecteur aussi aura *n* éléments.
- **gamma** : vecteur des intensités de chaque tourbillon. C'est un vecteur à *n* éléments.
- **tmax :** temps final du calcul: on calcule les trajectoires jusqu'à ce temps-là.

Arguments de sortie:
- **xtraj** : tableau des trajectoires des tourbillons selon la coordonnée *x*. Chaque colonne de ce tableau correspond à l'évolution dans le temps de la position *x* d'un tourbillon.
- **ytraj** : tableau des trajectoires des tourbillons selon la coordonnée *y*. Chaque colonne de ce tableau correspond à l'évolution dans le temps de la position *y* d'un tourbillon.
- **tvec**: le vecteur du temps.









3) Interaction et déplacement des tourbillons

(a) Utilisez la fonction *tourbitraj* donnée pour calculer la trajectoire des deux tourbillons de la question 2 jusqu'à $t_{max} = 10$ localisés initialement aux points donnés $(1{,}0)$ et $(-1{,}0)$. Tracez les deux trajectoires sur le même graphe. Prendre des couleurs différentes pour distinguer les tourbillons. Ajouter des points de couleur pour marquer les positions initiales. Les tourbillons sont corrotatifs (ils tournent dans le même sens).

(b) Réalisez maintenant l'animation du déplacement des deux tourbillons, avec une boucle et la fonction *drawnow*

(c) Réalisez de nouveau l'animation des trajectoires, mais en traçant également le champ de vitesse induit avec la fonction *quiver.*

(d) Reproduire les étapes (a)(b)(c) pour l'hélice à deux pales et un moyeu. Que devient le tourbillon central? Que font maintenant les tourbillons de pale? Est-ce que vous comprenez la forme du sillage? (On voit bien sur l'image du sillage le lien entre la progression en temps et le déplacement spatial suivant l'axe du sillage).

Ex. pour hélice à 3 pales

4) Hélice à N pales

Ecrire une boucle permettant de reproduire les étapes (a)(b)(c) de la question (4) pour une hélice composée d'un moyeu central et un nombre N (pour $3 \leq N \leq 8$) de pales de même longueur 1, réparties régulièrement autour du moyeu, de telle sorte que les extrémités des pales forment un polynôme régulier à N côtés.

Pour aller plus loin (question bonus)

Pour N=8, on suppose que suite à un problème de réglage, l'extrémité de l'une des pales a été déplacée d'un angle de 0.001 rad. Réaliser de nouveau la simulation. Que constatez-vous? Se passe-t-il le même phénomène pour N=4?