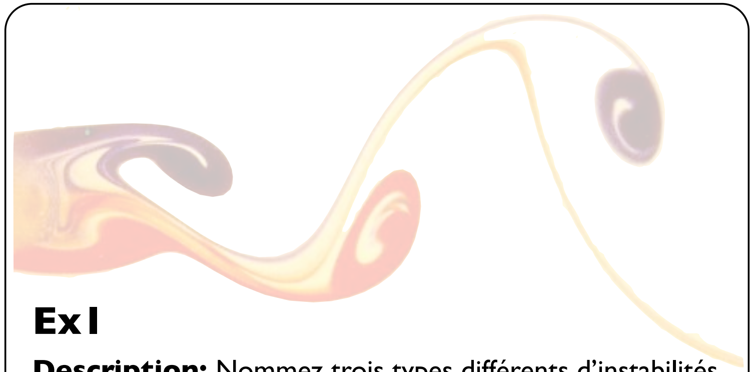
Stabilité Hydro. MSF21

J. Hoepffner & P. Carlès

Contrôle continu 10 mars 2010



Ex1

Description: Nommez trois types différents d'instabilités hydrodynamiques. Pour chacun:
- faites un schéma.
- Donnez les paramètres physiques dont dépend la stabilité.
- décrivez le mécanisme de déstabilisation en un paragraphe.
- Donnez un exemple d'occurence de cette instabilité.

Culture

Ex2

$$U_t = \mu U_{xx} + \frac{1}{\tau}(U^2 - 3U + 2)$$

Réaction-diffusion. Ce type d'équation est un modèle simple pour les phénomènes de combustion: ici U est la température, qui diffuse dans l'espace avec un paramètre de diffusion mu, la réaction de combustion est modélisée par le terme non linéaire du membre de droite. Le paramètre $\tau>0$ paramétérise la violence de la réaction de combustion.

1) Déterminer les deux états stationnaire constants. Ub1 et Ub2.
2) Linéariser le système autour de chacun de ces états de base: U=Ub+u.
3) On suppose un domaine infini, écrire la relation de dispersion pour chaque état de base.
4) En déduire les propriétés de stabilité de chacun des états en fonction de μ et τ.

Linéarisation

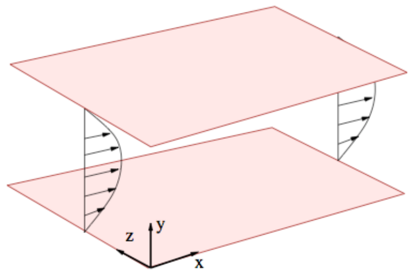
Ex3

$$u_{tt} + (1-r)u = u_{xx}$$

Zones de stabilité:
- Obtenez la relation de dispersion.
- Donnez l'équation de la courbe neutre.
- Tracez cette courbe neutre et précisez les propriétés de stabilité en fonction des zones: combien de modes, stationnaires ou propagatifs, stable ou instable...
- Donnez la vitesse de phase pour $\alpha=1$, r=0, et pour $\alpha=0$, r=2.

Courbe neutre

Ex4



Poiseuille
Ecrire les matrices E, A, C et q pour la stabilité d'un écoulement entre deux plans infinis. U, et Uy représentent l'écoulement de base et sa dérivée selon y.

$$\begin{aligned} u_t + Uu_x + vU_y &= -p_x + \Delta u/Re, \\ v_t + Uv_x &= -p_y + \Delta v/Re, \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u|_L &= 0 \\ u|_0 &= 0 \\ v|_L &= 0 \\ v|_0 &= 0 \end{aligned}$$

Formulation numérique

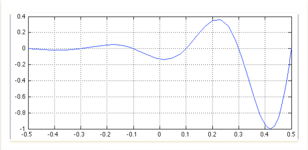
Stabilité Hydro. MSF21

J. Hoepffner & P. Carlès. 2010

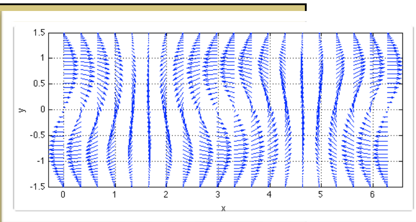
```
clear all; format compact; clf

% paramètres
N=50 % nombre de points de grille
L=1 % hauteur du domaine

%%%% matrices de dérivation
scal=2/(L);
[y,DM] = chebdif(N,2);
D1=scal*DM(:,:,1); D2=scal^2*DM(:,:,2);
y=(y)/scal;

I=eye(N); Z=0*I;
```

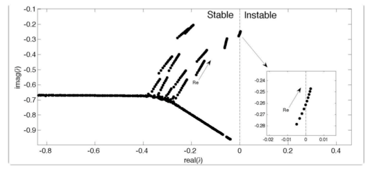
Initialisation des paramètres et construction des matrices de dérivation avec la fonction chebdif.m

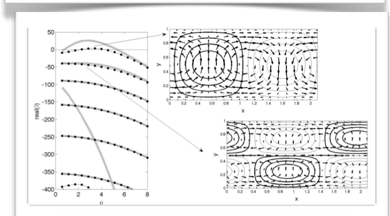
```
disp('advection-diffusion en 1D')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u=1; mu=0.1;
A=-u*D1+mu*D2; E=I;

% conditions limites
loc=[1,N];
C=I(loc,:);
E(loc,:)=0; A(loc,:)=C;

% modes propres
[U,S]=eig(A,E);
s=diag(S); rem=abs(s)>1e3|isnan(s); s(rem)=[]; U(:,rem)=[];
[t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); U=U(:,o);

% graphiques
subplot(1,2,1)
for ind=1:length(s)
    h=plot(real(s(ind)),imag(s(ind)),'*');
    ttt=['subplot(1,2,2);num=' num2str(ind) ';plot(y,U(:,num));grid on'];
    set(h,'buttondownfcn',ttt);
    hold on
end
grid on; hold off
```



```
disp('stokes en 2D')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha=1; rho=1;mu=1;
x=linspace(0,2*pi/alpha,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

dy=D1; dyy=D2;
dx=i*alpha*I; dxx=-alpha^2*I;

% matrices
delta=dxx+dyy;
E=[rho*I, Z, Z; Z, rho*I, Z; Z, Z, Z];
A=[mu*delta, Z, -dx; Z, mu*delta, -dy; dx, dy, Z];

% conditions limites
III=eye(3*N);
loc=[1, N, N+1, 2*N];
C=III(loc,:);
E(loc,:)=0; A(loc,:)=C;

% modes propres
[U,S]=eig(A,E);
s=diag(S); rem=abs(s)>1e3|isnan(s); s(rem)=[]; U(:,rem)=[];
[t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); U=U(:,o);

% graphiques
subplot(1,2,1)
for ind=1:length(s)
    h=plot(real(s(ind)),imag(s(ind)),'*');
    t0=['subplot(1,2,2);num=' num2str(ind) ';'];
    t1=['quiver(X,Y,real(U(1:N,num)*exp(i*alpha*x)),real(U(N+1:2*N,num)*exp(i*alpha*x)));'];
    t2='xlabel("x"); ylabel("y");grid on; axis equal; axis tight';
    set(h,'buttondownfcn',[t0 t1 t2]);
    hold on
end
grid on; hold off
```

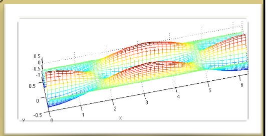




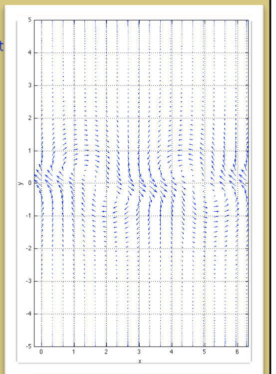


Scripts Matlab pour le calcul des modes propres des différents systèmes fluides vus dans le cours. Pour les graphiques: cliquer sur la valeur propre dans le plan complexe, et on obtient une visualisation de la fonction propre associée.

```
disp('diffusion en 2D')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
mu=0.1; alpha=1;
x=linspace(0,2*pi/alpha,50);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

A=mu*(-alpha^2*I+D2); E=I;

% conditions limites
loc=[1,N];
C=I(loc,:);
E(loc,:)=0; A(loc,:)=C;

% modes propres
[U,S]=eig(A,E);
s=diag(S); rem=abs(s)>1e3|isnan(s); s(rem)=[]; U(:,rem)=[];
[t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); U=U(:,o);

% graphiques
subplot(1,2,1)
for ind=1:length(s)
    h=plot(real(s(ind)),imag(s(ind)),'*');
    t0=['subplot(1,2,2);num=' num2str(ind) ';'];
    t1='mesh(X,Y,real(U(:,num)*exp(i*alpha*x)));';
    t2='xlabel("x"); ylabel("y");grid on; axis equal; axis tight';
    set(h,'buttondownfcn',[t0 t1 t2]);
    hold on
end
grid on; hold off
```



```
disp('fluide avec écoulement de base')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alpha=1; Re=200;
x=linspace(0,2*pi/alpha,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

%%%% écoulement de base: couche de cisaillement
u=0.5*tanh(2*y)+1.5; % base flow
up=1./cosh(2*y).^2;% first derivative of base flow

$$$    %%%% écoulement de base: poiseuille
$$$    u=1-y.^2; % base flow
$$$    up=-2*y;% first derivative of base flow

dy=D1; dyy=D2;
dx=i*alpha*I; dxx=-alpha^2*I;
delta=dxx+dyy;

% matrices
S=-diag(u)*dx+delta/Re;
A=[S, -diag(up), -dx; Z, S, -dy; dx, dy, Z];
E=blkdiag(I,I,Z);

% conditions limites
III=eye(3*N);
loc=[1, N, N+1, 2*N];
C=III(loc,:);
E(loc,:)=0; A(loc,:)=C;

%modes propres
[U,S]=eig(A,E);
s=diag(S); rem=abs(s)>1e3|isnan(s); s(rem)=[]; U(:,rem)=[];
[t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); U=U(:,o);

% graphiques
subplot(1,2,1)
for ind=1:length(s)
    h=plot(real(s(ind)),imag(s(ind)),'*');
    t0=['subplot(1,2,2);num=' num2str(ind) ';'];
    t1=['quiver(X,Y,real(U(1:N,num)*exp(i*alpha*x)),real(U(N+1:2*N,num)*exp(i*alpha*x)));'];
    t2='xlabel("x"); ylabel("y");grid on; axis equal; axis tight';
    set(h,'buttondownfcn',[t0 t1 t2]);
    hold on
end
grid on; hold off
```



```
disp('Rayleigh-Benard')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Pr=10 % Prandtl number
Ra=2000 % Rayleigh number
rho=1,  % top fluid density and viscosity
g=10 % gravity
k=1 % thermal diffusivity
mu=Pr*rho*k % fluid viscosity
dt=1 % difference de temperature haut/bas
di=Ra*mu*k/(rho*g*dt*L^3) % thermal dilatation
gt=-dt/L % base field temperature gradient in y
alpha=3 % wavenumber

x=linspace(0,2*pi/alpha,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);

dy=D1; dyy=D2; dx=i*alpha*I;  dxx=-alpha^2*I;  lap=dxx+dyy;
z=zeros(1,2*N);

% matrices
A=[mu*lap, Z, -dx, Z; ...
   Z, mu*lap, -dy, rho*g*di*I; ...
   dx,dy,Z,Z; ...
   Z,-gt*I,Z, k*lap];

E=[rho*I,Z,Z,Z; ...
   Z,rho*I,Z,Z; ...
   Z,Z,Z,Z; ...
   Z,Z,Z,I];

% conditions limites
loc=[1 N N+1 2*N 2*N+1 3*N 3*N+1 4*N];
II=blkdiag(I,I,I,I);
C=[II(loc,:)];
A(loc,:)=C; E(loc,:)=0;

% modes propres
[U,S]=eig(A,E);
s=diag(S); rem=abs(s)>1e3|isnan(s); s(rem)=[]; U(:,rem)=[];
[t,o]=sort(-real(s)); s=s(o); U=U(:,o);

% graphiques
subplot(1,2,1)
for ind=1:length(s)
    h=plot(real(s(ind)),imag(s(ind)),'*');
    t0=['subplot(1,2,2);num=' num2str(ind) ';'];
    t1=['quiver(X,Y,real(U(1:N,num)*exp(i*alpha*x)),real(U(N+1:2*N,num)*exp(i*alpha*x)));'];
    t2=['hold on; contour(X,Y,real(U(3*N+1:4*N,num)*exp(i*x*alpha))); xlabel("x"); ylabel("y");'];
    t3='grid on; hold off; axis equal; axis tight';
    set(h,'buttondownfcn',[t0 t1 t2 t3]);
    hold on
end
grid on; hold off
```