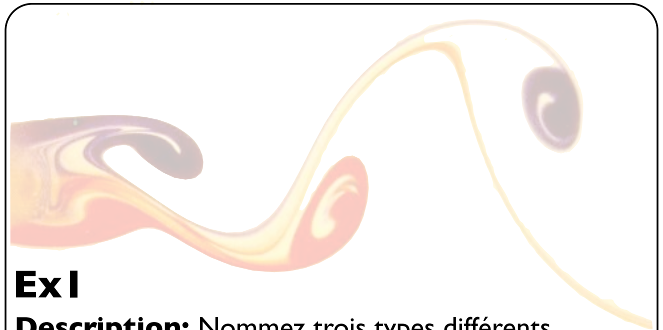
Stabilité Hydro. MSF21
J. Hoepffner & P. Carlès
Contrôle continu 10 mars 2010



Ex1

Description: Nommez trois types différents d'instabilités hydrodynamiques. Pour chacun:
- faites un schéma.
- Donnez les paramètres physiques dont dépend la stabilité.
- décrivez le mécanisme de déstabilisation en un paragraphe.
- Donnez un exemple d'occurence de cette instabilité.

Culture

Ex2

$$U_t = \mu U_{xx} + \frac{1}{\tau}(U^2 - 3U + 2)$$

Réaction-diffusion. Ce type d'équation est un modèle simple pour les phénomènes de combustion: ici U est la température, qui diffuse dans l'espace avec un paramètre de diffusion mu, la réaction de combustion est modélisée par le terme non linéaire du membre de droite. Le paramètre $\tau>0$ paramétérise la violence de la réaction de combustion.

1) Déterminer les deux états stationnaire constants. Ub1 et Ub2.
2) Linéariser le système autour de chacun de ces états de base: U=Ub+u.
3) On suppose un domaine infini, écrire la relation de dispersion pour chaque état de base.
4) En déduire les propriétés de stabilité de chacun des états en fonction de μ et τ.

Linéarisation

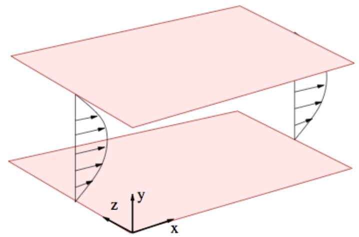
Ex3

$$u_{tt} + (1-r)u = u_{xx}$$

Zones de stabilité:
- Obtenez la relation de dispersion.
- Donnez l'équation de la courbe neutre.
- Tracez cette courbe neutre et précisez les propriétés de stabilité en fonction des zones: combien de modes, stationnaires ou propagatifs, stable ou instable...
- Donnez la vitesse de phase pour $\alpha=1$, $r=0$, et pour $\alpha=0$, $r=2$.

Courbe neutre

Ex4



Poiseuille
Ecrire les matrices E, A, C et q pour la stabilité d'un écoulement entre deux plans infinis. U, et Uy représentent l'écoulement de base et sa dérivée selon y.

$$\begin{aligned} &u_t + Uu_x + vU_y = -p_x + \Delta u/Re, \\ &v_t + Uv_x = -p_y + \Delta v/Re, \\ &u_x + v_y = 0 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u|_L &= 0 \\ u|_0 &= 0 \\ v|_L &= 0 \\ v|_0 &= 0 \end{aligned}$$

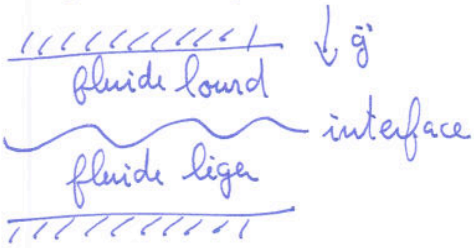
Formulation numérique

Contrôle continu
Instabilités Hydro. 2010

ex 1

Juste un exemple, pour d'autres voir cours :
Instabilité de Rayleigh-Taylor

Schéma :



paramètres physiques : le rapport de densité entre les deux fluides et la tension de surface.

mécanisme : La gravité tend à ramener le fluide le plus dense en dessous du fluide le plus léger. Donc lorsque l'interface est perturbée, cette perturbation peut augmenter, c'est l'instabilité. Cependant la tension de surface s'oppose à l'allongement de l'interface, c'est un effet stabilisateur.

exemple : Une couche de peinture fraîche sur le plafond peut se déstabiliser et donner naissance à des gouttes pendantes.

ex 2

1) $U_t = U_{xx} = 0 \longrightarrow U^2 - 3U + 2 = 0$, $U_1 = 1$, $U_2 = 2$

2) ① : $u_t = \nu u_{xx} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(1+u)^2 - 3(1+u) + 2}_{\cancel{1}+2u+\cancel{u^2}-\cancel{3}-3u+\cancel{2} \,=\, -u}\Big) \longrightarrow u_t = \nu u_{xx} - \frac{u}{2}$

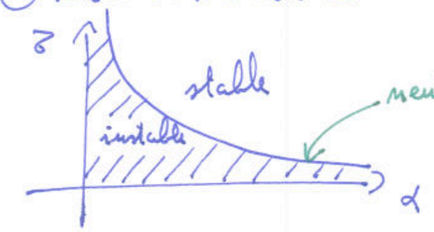
② $u_t = \nu u_{xx} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(2+u)^2 - 3(2+u) + 2}_{\cancel{4}+4u+\cancel{u^2}-\cancel{6}-3u+\cancel{2} \,=\, u}\Big) \longrightarrow u_t = \nu u_{xx} + \frac{u}{2}$

3) $u(x,t) = \hat{u}\, e^{i\alpha x + st} + c.c.$

① $s = -\nu\alpha^2 - \frac{1}{2}$

② $s = -\nu\alpha^2 + \frac{1}{2}$

4) s est toujours réel, instable si $s>0$.
on a $\tau>0$. donc ① toujours stable
② mode de nombre d'onde α instable si $\frac{1}{\tau} > \nu\alpha^2$ $\rightarrow \tau < \frac{1}{\nu\alpha^2}$



quel que soit τ, il existe toujours des ondes instables.
$\rightarrow$ toujours instable.

exc 3

$u_{tt} + (1-r)u = u_{xx}$ $\qquad u(x,t) = \hat{u}\, e^{i\alpha x + st} + \text{c.c.}$

1) $s^2 + 1 - r = -\alpha^2 \rightarrow s^2 = \underbrace{r - 1 - \alpha^2}$
négatif si $\alpha^2 > r-1$
$\rightarrow r < \alpha^2 + 1$

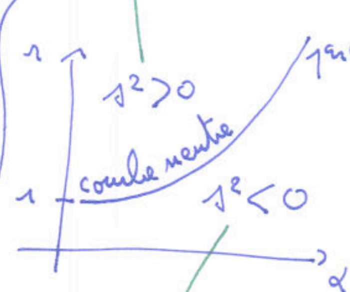
2) courbe neutre :
$r = \alpha^2 + 1$

3) ok

4) $\alpha = 1, r = 0 \rightarrow s^2 = -2 \rightarrow s = \pm i\sqrt{2}$
vitesse de phase $c = -\frac{s_i}{\alpha} = \underline{\pm\sqrt{2}}$

$\alpha = 0, r = 2 \rightarrow s^2 = 1 \quad s_i = 0 \rightarrow \underline{c = 0}$

deux solutions réelles
une positive et une négative



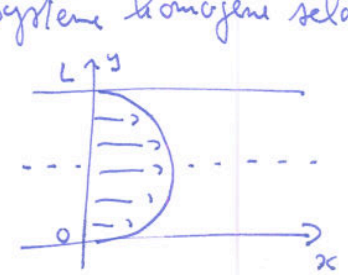
deux solutions
purement imaginaires

un mode stable
et un mode instable
$\rightarrow$ instable

deux modes
propagatifs.
stable

exc 4

Système homogène selon x, mais pas selon y à cause des parois.



$u(x,y,t) = \hat{u}(y)\, e^{i\alpha x + st} + \text{c.c.}$

$$\left| \begin{array}{ll} s\hat{u} + i\alpha U \hat{u} + U_y \hat{v} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re}\left(-\alpha^2\hat{u} + D^2\hat{u}\right) \\ s\hat{v} + i\alpha U \hat{v} = -D\hat{p} + \frac{1}{Re}\left(-\alpha^2\hat{v} + D^2\hat{v}\right) \\ i\alpha\hat{u} + D\hat{v} = 0 \end{array}\right.$$

$$s\,\overbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E} \overbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix}}^{\hat{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -i\alpha U + \frac{1}{Re}(-\alpha^2 I + D^2) & -U_y I & -i\alpha I \\ 0 & -i\alpha U + \frac{1}{Re}(-\alpha^2 I + D^2) & -D \\ i\alpha I & D & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix} ; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = 0$$

Notes contrôles continu instabilités Hydrodynamiques

Chibane	Wassila	2
Cordeiro	Stéphanie	11
Crozet	Kevin	9
El Weshahy	Farid	9
Gignac	Antoine	4
Gineau	Audrey	10
Hanna	Patrick	5
Jalali	Zahra	12
Janssens	Philippe	7
Ma	Lin	10
Marie	Olivier	4
Meyer	Virgile	12
Piquet	Romain	14
Serre	Renan	15
Thandavamoorthy	Gayathiri	3