Introduction aux instabilités hydrodynamiques
MSF21. Master 1. 2010.
Pierre Carlès & Jérôme Hoepffner

Nom:.............................. Prénom:..................................
A rendre pour la séance du jeudi 11 février

Considérons les équations qui décrivent la stabilité d'une couche de fluide au repos, chauffée par en bas: instabilité de Rayleigh-Bénard. Le fluide est confiné entre deux plaques planes horizontales infinie à $x=0$ et $x=L$, sur lesquelles la conditions de non-glissement est vérifiée pour la vitesse et la température T est imposée. Les variables sont $u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)$ les trois composantes du champ de vitesse, $p(x,y,z,t)$ la perturbation de pression vis à vis de la pression hydrostatique, et $\theta(x,y,z,t)$ la perturbation de température vis-à-vis de la distribution de température due à la diffusion entre les deux plaques.

$$
\begin{array}{l}
\rho u_t = -p_x + \mu\Delta u, \\
\rho v_t = -p_y + \mu\Delta v - \rho g d\theta, \\
\rho w_t = -p_z + \mu\Delta w, \\
u_x + v_y + w_z = 0 \\
\theta_t + vT_y = \Delta\theta
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{l}
u|_0 = 0 \\
u|_L = 0 \\
v|_0 = 0 \\
v|_L = 0 \\
w|_0 = 0 \\
w|_L = 0 \\
\theta|_0 = 0 \\
\theta|_L = 0
\end{array}
$$

Les paramètres sont donnés: ρ la densité moyenne du fluide, μ sa viscosité, g l'accélération de la gravité, d le coefficient de dilatation thermique du fluide, et T_y le gradient de température au repos, $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ est le Laplacien.

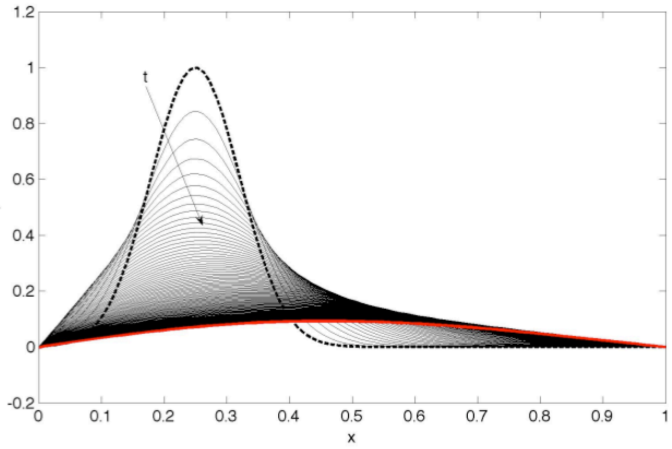
Nous supposerons une dépendance harmonique de toutes les variables dans les deux directions homogènes y et z:

$$u(x,y,z,t) = \hat{u}(x,t)\exp(\imath\alpha y + \imath\beta z) + c.c.$$

Nous pouvons écrire ce système sous la forme

$$Eq_t = Aq, \quad Cq = 0.$$

En notant I la matrice identité, D et D^2 les matrices de dérivée première et seconde, donner l'expression de A, E, C, q. Vous donnerez sur cette feuille les étapes de la construction de ces matrices, comme vu en cours.



Script Matlab:

1) Construire une matrice de dérivation:

```
N=50; L=1;
x=linspace(0,L,N)'; dx=x(2)-x(1);
D=zeros(N,N);
D(1,1:3)=[-1.5,2,-0.5]/dx;
for ind=2:N-1;
    D(ind,ind-1:ind+1)=[-1,0,1]/(2*dx);
end
D(N,N-2:N)=[0.5,-2,1.5]/dx;
```

2) Opérateur de dérivée seconde et conditions limites:

```
A=D^2;
I=eye(N)
A([1,N],:)=I([1,N],:);
E=I;
E([1,N],:)=0;
```

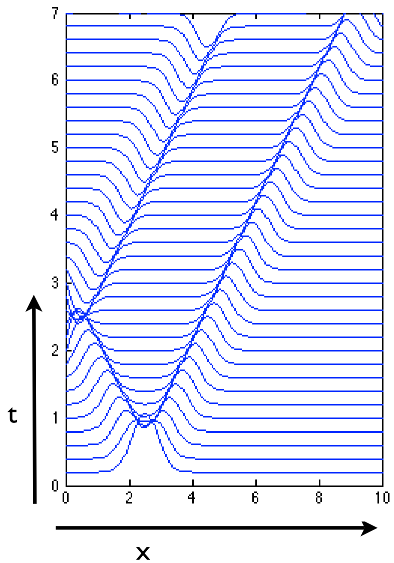
3) Opérateur de marche en temps:

```
dt=0.001;
Mm=E-A*dt/2;
Mp=E+A*dt/2;
M=Mm\Mp;
```

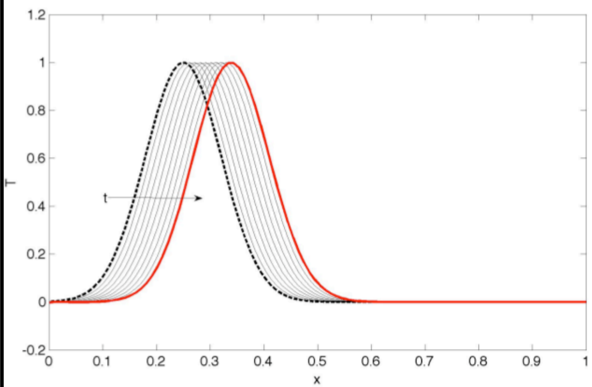
4) Marche en temps et graphe:

```
hold off
T=exp(-(x-L/4).^2/0.01);
for ind=1:100
  plot(x,T,'k');
  T=M*T;
  drawnow; hold on
end
```

Diffusion pure pour x dans [0,1], avec conditions limites de Dirichlet homogène

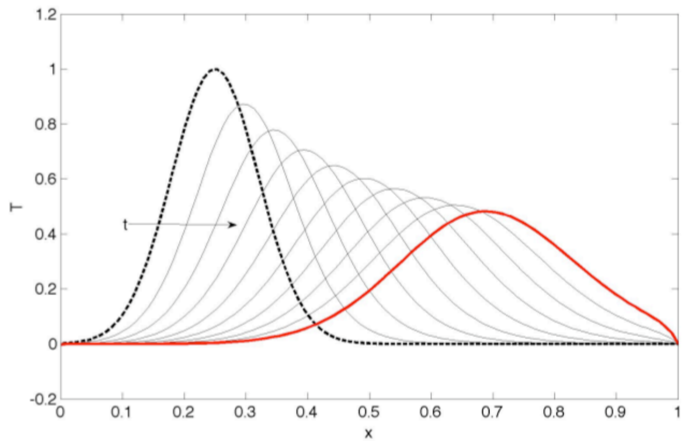


Evolution d'une condition initiale pour une corde vibrante.



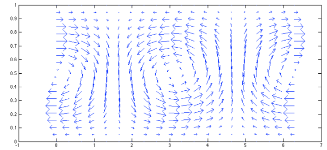
Advection pure

Advection et diffusion

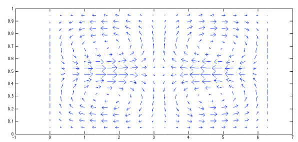


Modes propres équation de Stokes entre deux plaques

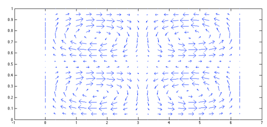
Mode 1:



Mode 2:



:Mode 3



Mode 4: