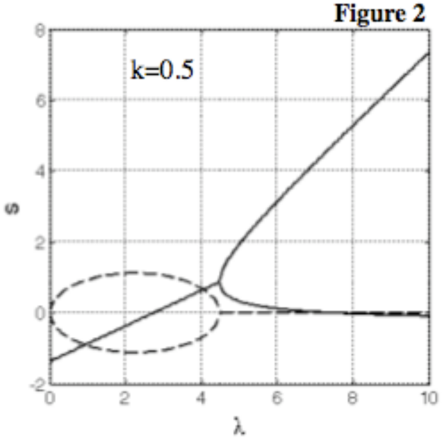
Stabilité Hydro. TD 2009
J. Hoepffner & P. Carlès

Ex4

$$U_t = 1 - (\lambda+1)U + 2U_{xx} + U^2 V$$
$$V_t = \lambda U + V_{xx} - U^2 V$$

Figure 2

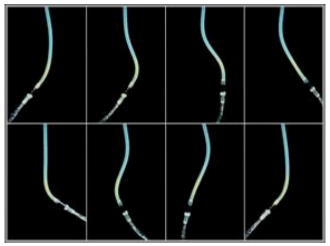


Le Bruxellateur. Ce système à été rendu célèbre dans le contexte des réactions chimiques auto-catalytiques oscillantes. U et V sont les concentrations de deux composants chimiques, qui varient dans le temps et dans une direction spatiale x. Lambda est un paramètre chimique donné.

1) Trouver la solution stationnaire et constante Ub, Vb de ce système.
2) Linéariser les équations autour de cet état de base: U=Ub+u, V=Vb+v.
3) En supposant un domaine infini, écrire la relation de dispersion.
4) La relation de dispersion a deux solutions: deux modes propres. La partie réelle (lignes continues) et la partie imaginaire (lignes hachurées) des deux valeurs propres sont représentées sur la figure 2 pour k=0.5. Décrire les différents régimes visités lorsque lambda varie: stable, instable, ondes stationnaires, ondes propagatrices...

5) On considère maintenant un domaine de taille finie entre x=0 et x=L, avec deux conditions de Dirichlet. Ecrire les équations linéarisées sous la forme E, A, C, q.

Ex1



Tuyau d'arrosage. L'instabilité du tuyau d'arrosage est modélisée par cette équation: f(x,t) est la déviation du tuyau par rapport à la position rectiligne. Ecrivez la relation de dispersion.

$$f_{xxxx} + (1-\xi) f_{xx} + 2\sqrt{\beta} f_{xt} + f_{tt} = 0$$

Ex2

$$U_t = \mu U_{xx} + \frac{1}{\tau} U(1-U)$$

Réaction-diffusion. Ce type d'équation est un modèle simple pour les phénomènes de combustion: ici U est la température, qui diffuse dans l'espace avec un paramètre de diffusion mu, la réaction de combustion est modélisée par le terme non linéaire du membre droite. Le paramètre tau paramétérise la violence de la réaction de combustion.

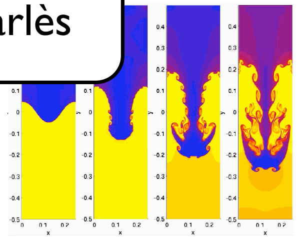
1) Déterminer les deux états stationnaire constants. Ub1 et Ub2.
2) Linéariser le système autour de chacun de ces états de base: U=Ub+u.
3) On suppose un domaine infini, écrire la relation de dispersion pour chaque état de base.
4) En déduire les propriétés de stabilité de chacun des états en fonction de mu et tau.

Ex3

$$\begin{aligned} u_t &= -g\eta_x - bu \\ \eta_t &= -(Hu)_x \end{aligned}$$

Equations de Saint-Venant. Ce système d'équations décrit la dynamiques des vagues en eau peu-profonde. g est l'accélération de la gravité et H est la profondeur d'eau. La hauteur de la surface est H+eta, et u est la vitesse du fluide moyennée sur la profondeur. b est le coefficient d'atténuation visqueuse, qu'on supposera tout d'abord nul.
1) En domaine infini, écrire la relation de dispersion. En déduire la vitesse de phase des vagues.
2) Quel est la relation de phase entre la déformation de l'interface eta et la vitesse u?
3) Mêmes questions avec b non nul.

Stabilité Hydro. TD 2009
J. Hoepffner & P. Carlès

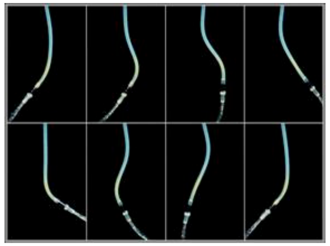


Ex2

Rayleigh-Taylor. Ecrire les matrices E, A, C et q pour le système d'équations décrivant l'instabilité de Rayleigh-Taylor. η est la position de l'interface, initialement à la hauteur y=L, et Py est le gradient de pression hydrostatique.

$$\begin{array}{ll} \rho u_t = -p_x + \mu \Delta u, & 0 = -p(L) - \eta P_y \\ \rho v_t = -p_y + \mu \Delta v, & 0 = \mu(u_y(L)) + v_x(L)) \\ u_x + v_y = 0 & 0 = u(0) \\ \eta_t = v & 0 = v(0) \end{array},$$

$$Eq_t = Aq, \quad Cq = 0$$



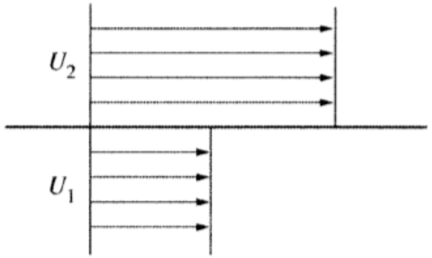
Ex1

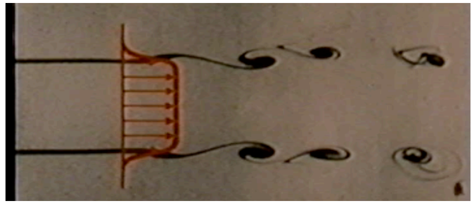
Tuyau d'arrosage. Ecrire la relation de dispersion. Dans le plan alpha/xi, tracer la courbe des ondes stationnaires (s=0) et la courbe neutre. Indiquez les zones instables dans ce plan.

$$f_{xxxx} + (1-\xi) f_{xx} + 2\sqrt{\beta} f_{xt} + f_{tt} = 0$$

Ex3

Kelvin-Helmholtz. Dérivez la relation de dispersion comme nous l'avons fait en cours, en supposant une épaisseur de cisaillement nulle: discontinuité de vitesse en y=0.





Ex4

Saint-venant. On considère maintenant l'effet de la force de Coriolis, modélisée par la constante f. Dérivez la relation de dispersion pour les vagues telles que β=0.
Tracez la variation de la vitesse de phase en fonction de α pour un f donné.

$$u(x,y,t) = \hat{u} e^{\imath \alpha x + \imath \beta y + st} + c.c.$$

$$\begin{aligned} u_t - fv &= -g\eta_x - bu, \\ v_t + fu &= -g\eta_y - bv, \\ \eta_t &= -Hu_x - Hv_y \end{aligned}$$

Kelvin-Helmholtz fluide parfait, profil brisé:

$$4(k\delta)^2(c-U_m)^2 - \Delta U^2\left((2k\delta-1)^2 - e^{-4k\delta}\right) = 0.$$

$$\begin{array}{ll} \overline{U} = U_1, & y < -\delta, \\ \overline{U} = U_m + \Delta U\, y/\delta, & -\delta < y < \delta, \\ \overline{U} = U_2, & \delta < y, \end{array}$$

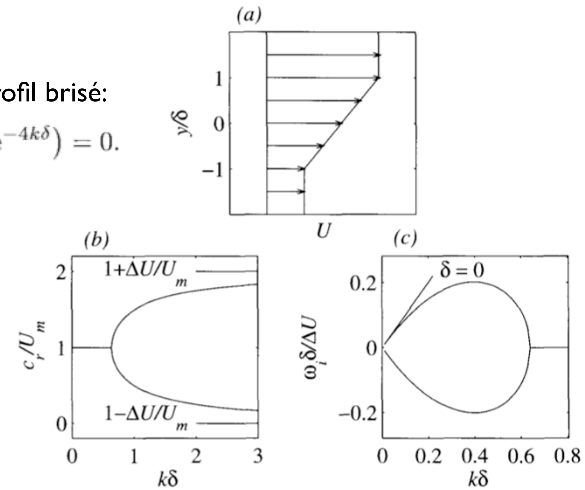
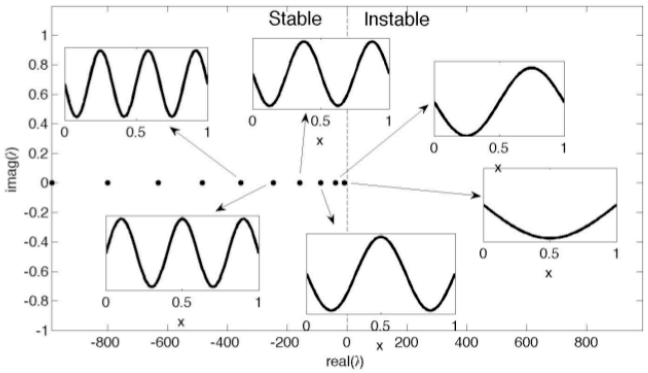
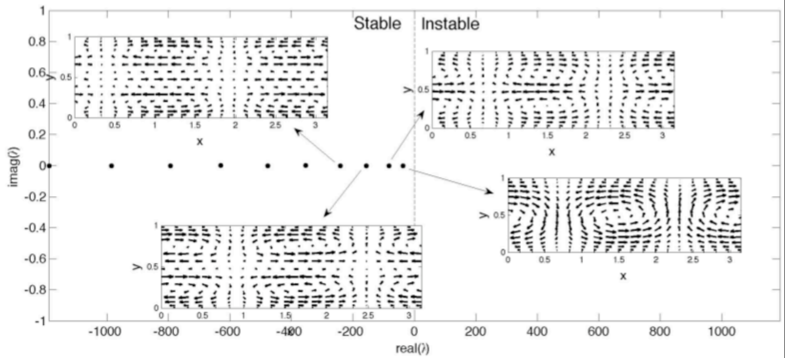


FIG. 4.11 – (a) Couche de mélange d'épaisseur 2δ; (b) célérité et (c) taux de croissance des deux modes propres.

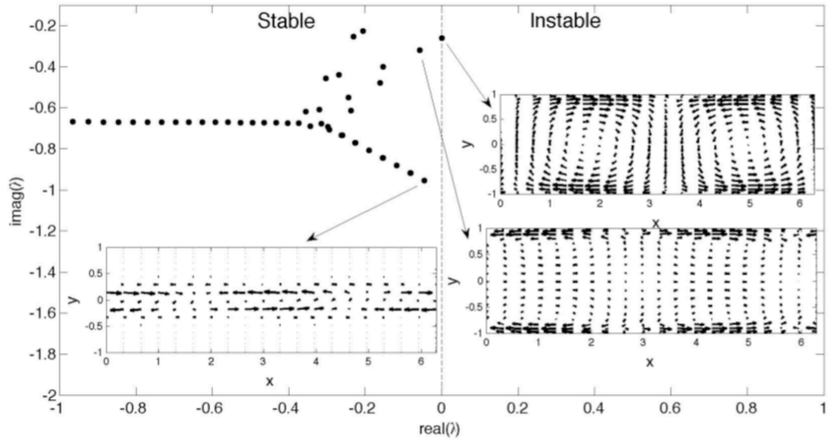
Modes propres équation de diffusion pour x entre 0 et 1



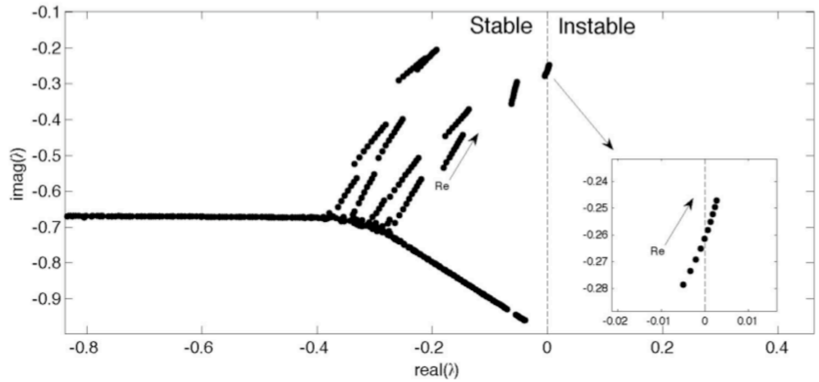
Modes propres équation de Stokes entre deux plans



Poiseuille: modes propres Navier-Stokes dans un canal plan, Re=6000

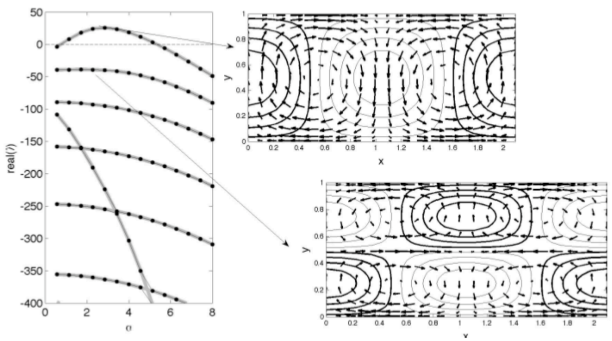


On augmente le Reynolds de 4000 à 8000:



Modes propres Rayleigh-Bénard. Glissement aux parois (en gris: la solution analytique)

$$s = -\frac{1}{2}(1+Pr)(j^2\pi^2+\alpha^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(Pr-1)^2(j^2\pi^2+\alpha^2)^2 + \alpha^2\frac{RaPr}{j^2\pi^2+\alpha^2}}$$



Pr=10, Ra=2000

Avec non-glissement aux parois: