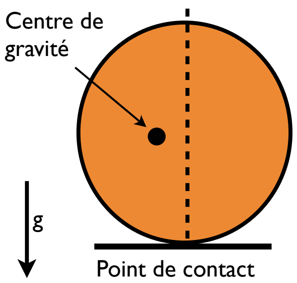
Stabilité Hydrodynamique. MSF21
J. Hoepffner
Université Pierre et Marie Curie.
Examen final avril 2010.
Durée: 2 heures, aucun document autorisé.
La note tiendra compte de la présentation.

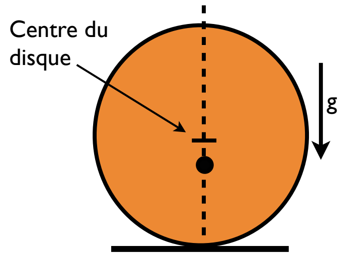
Ex2

Contact sur un support

1) Expliquez pourquoi cette situation n'est pas un état stationnaire:



2) Un cercle de rayon R sur un support plan: si le centre de gravité est au centre du cercle, l'état stationnaire est neutre. Discuter de la stabilité si le centre de masse est au dessus du centre du cercle ou bien en dessous.



Ex3

Questions de cours

Donnez une définition pour les notions ci-dessous, donnez des exemples. Faites des schémas et rédigez des paragraphes: profitez de cette occasion pour montrer que vous êtes familier avec les questions de stabilité hydrodynamique.

1) Etat stationnaire
2) Approximation de lubrification
3) Courbe neutre
4) Instabilité de Kelvin-Helmholtz
5) Mode propre
6) Invariance par translation
7) Matrice de dérivation
8) Instabilité de Rayleigh-Taylor
9) Instabilité de Rayleigh-Bénard
10) Tension de surface

Ex1

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xy$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

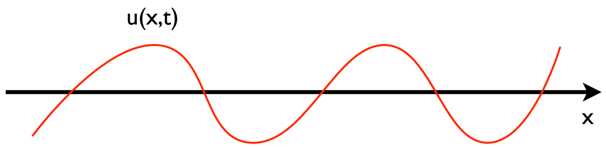
Linéarisation et matrices:

Ce système d'équations est l'oscillateur de Lorenz. Les variables d'état sont x,y et z (trois scalaires qui évoluent dans le temps) et il y a trois paramètres: sigma, r et b.

1) Donnez la position des deux états stationnaires de ce système.
2) Choisissez un de ces deux états stationnaires et linéarisez le système dans le voisinage de ce point.
3) Ecrivez ce système linéarisé sous la forme matricielle:

$$\dot{q} = Aq$$

Donnez l'expression du vecteur q et de la matrice A.



$$u_t = \mu u_{xx} + \cos(\pi u)/\tau$$

Ex4

Courbes neutres

On considère l'évolution d'une variable u(x,t) décrite par l'équation nonlinéaire ci-dessus. Mu et tau sont deux paramètres positifs.

1) Donnez les états stationnaires uniformes de ce système.
2) Pour chacun de ces états, linéarisez autour de l'état stationnaire
3) Pour chacun de ces états, donnez la relation de dispersion: donnez l'équation puis tracez le graphique. Sur le graphique, vous distinguerez les ondes stables et les ondes instables.
4) Pour un des états stationnaires, donnez l'équation de la courbe neutre et tracez là. Vous distinguerez les zones stables, instables et neutres.

Stabilité Hydro

Exam 2011-2012 13 avril

Correction

RAPPEL DU
N° DE PLACE

Ex 1 : $\begin{cases} \dot x = \sigma(y-x) \\ \dot y = rx - y - xy \\ \dot z = xy - bz \end{cases}$:

1) Etats stationnaires :

$\dot x = \dot y = \dot z = 0 \longrightarrow$
- $x = y = a$
- $ra - a - a^2 = 0 \longrightarrow a = 0$ et $\underbrace{r - 1 - a = 0}_{a = r-1}$
- $(r-1)^2 - bz = 0 \rightarrow z = \dfrac{(r-1)^2}{b}$ si $a = r-1$

  $0 - bz = 0 \rightarrow z = 0$ si $a = 0$

2 etats stat. $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_0}$ et $\underbrace{\begin{pmatrix} r-1 \\ r-1 \\ (r-1)^2/b \end{pmatrix}}_{E_1}$

2) Linéarisation autour de E_0 :

$\underbrace{\left.\begin{array}{l} x = 0 + \hat x \\ y = 0 + \hat y \\ z = 0 + \hat z \end{array}\right\}}_{\text{décomposition}} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\hat x} \\ \dot{\hat y} \\ \dot{\hat z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(\hat y - \hat x) \\ r\hat x - \hat y - \cancel{\hat x \hat y} \\ \cancel{\hat x \hat y} - b\hat z \end{pmatrix}$

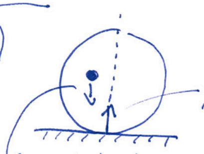
on néglige les termes quadratiques

3) formulation matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\hat x} \\ \dot{\hat y} \\ \dot{\hat z} \end{pmatrix}}_{\dot q} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat x \\ \hat y \\ \hat z \end{pmatrix}}_{q}$$

Ex 2

1)



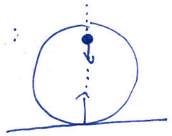
réaction du support verticale

le poid du disque qui s'exerce au centre de masse

le disque

$\overbrace{\text{Le système}}^{}$ est soumis à un moment extérieur, il est donc mis en mouvement → cette situation n'est pas stationnaire.

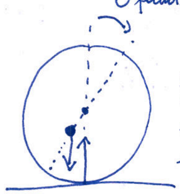
en revanche, cette situation est stationnaire : le moment des forces externes est nul.



2)

moment des forces

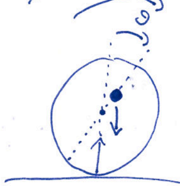
θ perturbation



ici le centre de masse est en dessous du centre du disque et on suppose une petite perturbation d'angle θ par rapport à l'etat stat. Le moment des forces ramenne le système vers son état stat. → STABLE

moment des forces

θ



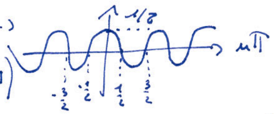
Maintenant le centre de masse est au dessus du centre du disque, le moment des forces éloigne le système de son état stationnaire → INSTABLE.

Ex 3 : Voir cours.

Ex 4 : $u_t = \mu u_{xx} + \cos(\pi u)/\varepsilon$, $\mu \geq 0$ $\varepsilon \geq 0$

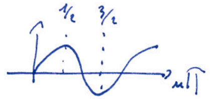
1) Etat stat. unif. $u_t = u_x = 0 \rightarrow \cos(\pi u)/\varepsilon = 0$

$\rightarrow u = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots = \frac{1}{2} + k, \ k \in \mathbb{Z}$



2) Linéarisation :

$$\frac{\cos(\pi u + \delta u)}{\varepsilon} = \frac{\cos(\pi u)}{\varepsilon} + \delta u\left(-\frac{\sin(\pi u)\pi}{\varepsilon}\right) + O(\delta u^2)$$



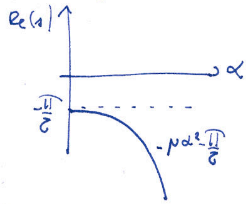
donc $\dfrac{\cos\left(\pi\left[\left(\frac{1}{2}+k\right)+\delta u\right]\right)}{\varepsilon} = 0 - \delta u \dfrac{\pi}{\varepsilon} \underbrace{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}_{}$

$= -1$ si k est ~~pair~~ impair

$= +1$ si k est pair

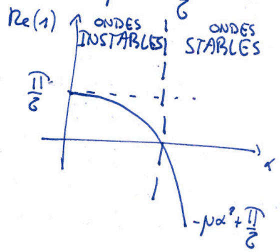
donc si $k = 0, \pm 2, \pm 4 \dots$ $\quad u_t = \nu u_{xx} - \frac{\Pi}{\tau} u \longrightarrow s = -\nu\alpha^2 - \frac{\Pi}{\tau} \in \mathbb{R}^-$

si $k = \pm 1, \pm 3 \dots$ $\quad \underbrace{u_t = \nu u_{xx} + \frac{\Pi}{\tau} u}$



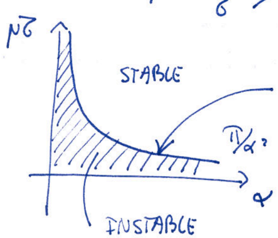
$\downarrow$

$s = -\nu\alpha^2 + \frac{\Pi}{\tau} \in \mathbb{R}$



4) pour k impair, il existe des ondes instables :

instable si $-\nu\alpha^2 + \frac{\Pi}{\tau} > 0 \to \frac{\Pi}{\nu\tau} > \alpha^2 \to \nu\tau < \frac{\Pi}{\alpha^2}$



neutre si $\nu\tau = \frac{\Pi}{\alpha^2}$ (la courbe neutre)