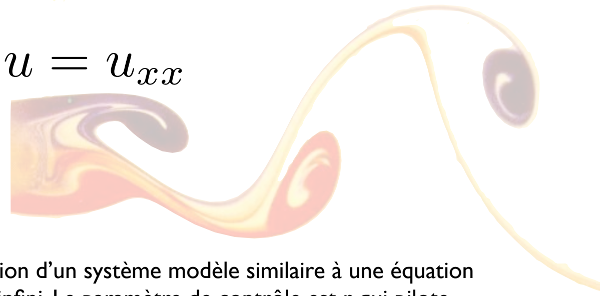
Stabilité Hydrodynamique. MSF21
J. Hoepffner & P. Carlès
Université Pierre et Marie Curie.
TD5, année 2011-2012.

Ex1

$$u_{tt} + (1-r)u = u_{xx}$$



Zones de stabilité:
On vous donne ci dessus l'équation d'un système modèle similaire à une équation des ondes dans un domaine 1D infini. Le paramètre de contrôle est r qui pilote l'intensité de la production.
- Obtenez la relation de dispersion.
- Donnez l'équation de la courbe neutre.
- Tracez cette courbe neutre et précisez les propriétés de stabilité en fonction des zones: combien de modes, stationnaires ou propagatifs, stable ou instable...
- Donnez la vitesse de phase pour $\alpha=1$, $r=0$, et pour $\alpha=0$, $r=2$.

Ex2

$$U_t = \mu U_{xx} + \frac{1}{\tau} U(1-U)$$

Réaction-diffusion. Ce type d'équation est un modèle simple pour les phénomènes de combustion: ici U est la température, qui diffuse dans l'espace avec un paramètre de diffusion mu positif, la réaction de combustion est modélisée par le terme non linéaire du membre droite. Le paramètre tau positif paramétérise la violence de la réaction de combustion.

1) Déterminer les deux états stationnaire constants. Ub1 et Ub2.
2) Linéariser le système autour de chacun de ces états de base: U=Ub+u.
3) On suppose un domaine infini, écrire la relation de dispersion pour chaque état de base.
4) Tracer la courbe neutre dans le plan nombre-d'onde/tau, avec mu fixé. Indiquer les zones stable et instable.

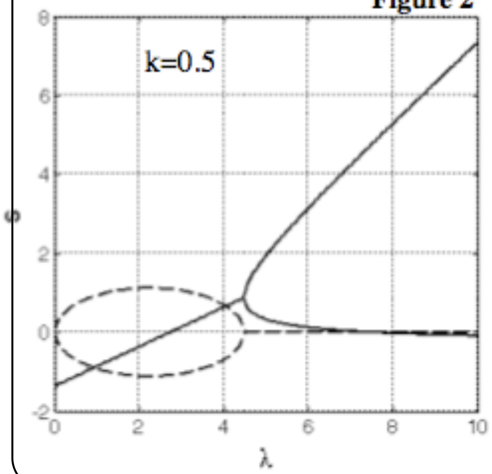
Ex3

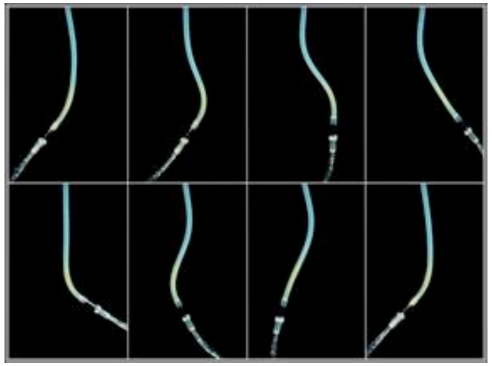
$$U_t = 1 - (\lambda+1)U + 2U_{xx} + U^2V$$
$$V_t = \lambda U + V_{xx} - U^2V$$

Le Bruxellateur. Ce système à été rendu célèbre dans le contexte des réactions chimiques auto-catalytiques oscillantes. U et V sont les concentrations de deux composants chimiques, qui varient dans le temps et dans une direction spatiale x. Lambda est un paramètre chimique donné.

1) Trouver la solution stationnaire et constante Ub,Vb de ce système.
2) Obtenez les équations linéarisées autour de cet état de base: U=Ub+u, V=Vb+v.
3) En supposant un domaine infini, écrire la relation de dispersion.
4) La relation de dispersion a deux solutions: deux modes propres. La partie réelle (lignes continues) et la partie imaginaire (lignes hachurées) des deux valeurs propres sont représentées sur la figure 2 pour k=0.5. Décrire les différents régimes visités lorsque lambda varie: stable, instable, ondes stationnaires, ondes propagatrices...

Figure 2





Ex5

Tuyau d'arrosage. On suppose un tuyau très long (infiniment), dans lequel coule un liquide non visqueux. On peut observer une instabilité dans laquelle le tube se déforme sous la forme d'une onde. Deux effets physiques pilotent l'instabilité: le débit liquide et la rigidité en flexion du tube. L'image à gauche représente un cas un peu différent d'instabilité: lorsque le tube est fini et le liquide sort sous la forme d'un jet, c'est l'instabilité de l'arroseur arrosé.
1) Ecrire la relation de dispersion.
2) Dans le plan alpha/xi, tracer la courbe des ondes stationnaires (s=0) et la courbe neutre.
3) Indiquez les zones instables dans ce plan.

$$f_{xxxx} + (1-\xi) f_{xx} + 2\sqrt{\beta} f_{xt} + f_{tt} = 0$$

Ex4

$$\begin{aligned} u_t &= -g\eta_x - bu \\ \eta_t &= -(Hu)_x \end{aligned}$$

Equations de Saint-Venant. Ce système d'équations décrit la dynamique des vagues dont la longueur d'onde est plus grande que la profondeur (houle, marées...). g est l'accélération de la gravité et H est la profondeur d'eau. La hauteur de la surface est H+eta, et u est la vitesse du fluide moyennée sur la profondeur. b est le coefficient d'atténuation visqueuse, qu'on supposera tout d'abord nul.
1) En domaine infini, écrire la relation de dispersion. En déduire la vitesse de phase des vagues.
2) Quel est la relation de phase entre la déformation de l'interface eta et la vitesse u?
3) Mêmes questions avec b non nul.

Ex6

Saint-venant. On considère maintenant l'effet de la force de Coriolis, modélisée par la constante f.
1) Dérivez la relation de dispersion pour les vagues telles que β=0. On supposera le paramètre b de dissipation visqueuse nul.
2) Tracez la variation de la vitesse de phase en fonction de α pour un f donné. b est encore nul.

$$u(x,y,t) = \hat{u} e^{\imath\alpha x + \imath\beta y + st} + c.c.$$

$$\begin{aligned} u_t - fv &= -g\eta_x - bu, \\ v_t + fu &= -g\eta_y - bv, \\ \eta_t &= -Hu_x - Hv_y \end{aligned}$$

Image: calcul de la variation de hauteur d'eau due aux marées à l'échelle de la planète. Les "points amphidromiques", ou se rejoignent les lignes de niveaux correspondent aux points ou la hauteur reste constante, à cause des résonances avec la forme des continents et la force de Coriolis.