Stabilité Hydrodynamique. MSF21
J. Hoepffner & P. Carlès
Université Pierre et Marie Curie.
TD4, année 2011-2012.

Ex1

Film sur paroi inclinée:

On considère l'écoulement d'un film liquide sur une paroi inclinée comme représenté sur le croquis. Ici la gravité est le moteur du mouvement, et la viscosité s'y oppose. On peut modéliser cet écoulement avec les équations de Saint-Venant

$$
\begin{aligned}
H_t + (HU)_x &= 0 && (1)\\
\rho(HU_t + UHU_x &= -\rho H \cos(\theta) H_x - \tau + \rho g \sin(\theta) H && (2)
\end{aligned}
$$

La première traduit la conservation du débit, et la seconde tradtui la conservation de la quantité de mouvement. $H(x,t)$ est l'épaisseur du film liquide et $U(x,t)$ est la vitesse moyennée selon l'épaisseur. On impose le débit moyen $Q = UH$. ρ est la densité du fluide, et τ est le coefficient de frottement visqueux, qui s'écrit

$$\tau = 3\mu U/Q$$

ou μ est la viscosité du fluide. Nous allons étudier la stabilité de cet écoulement.

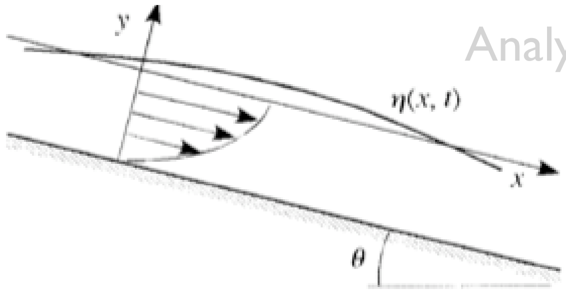
1. On impose le débit Q. Calculer la solution stationnaire uniforme U_0, H_0 en fonction des paramètres physiques du problème.
2. Le problème est décrit par deux paramètres sans dimensions, le nombre de Reynolds et le nombre de Froude :

   $$Re = \rho Q/\mu, \quad Fr = U_0^2/(g H_0 \cos(\theta))$$

   En écrivant $U = U_0 \tilde{U}, H = H_0 \tilde{H}, t = (H_0/U_0)\tilde{t}, x = H_0 \tilde{x}$, ou les variables avec $\tilde{\cdot}$ sont sans dimensions, obtenir les équations sans dimensions et faites apparaitres les paramètres Re et Fr.
3. Ici, puisque l'écoulement est dû à la gravité, on peut écrire une relation entre Re et Fr, écrivez là.
4. Analyse de stabilité : On écrit une équation aux perturbations avec $\tilde{H} = 1 + h$ et $\tilde{U} = 1 + u$ ou h et u sont des perturbations de petite amplitude. Etablissez l'expression des équations linéarisées pour h et u.
5. On suppose les domaine infini selon la direction x, établir les équations pour les coefficients harmoniques de h et u.
6. Ecrire ce système d'équations sous la forme

   $$E \begin{pmatrix} h_t \\ u_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}$$

   et donner l'expression des matrices E et A.



Analyse complète