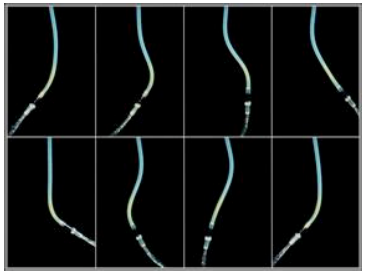
Exercice 1

Le tuyau d'arrosage

$f_{xxxx} + (1-\xi) f_{xx} + 2\sqrt{\beta}\, f_{xt} + f_{tt} = 0$

$f(x,t) = \hat{f}\, e^{i\alpha x + st} + c.c.$

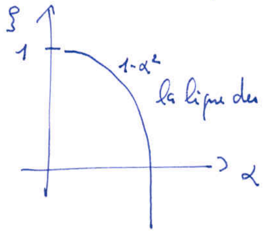
ξ correspond à la tension du tube et β correspond à la vitesse du fluide dans le tuyau. Normalement une grande tension est stabilisatrice et une grande vitesse est destabilisatrice.



$\to s^2 + s(2i\alpha\sqrt{\beta}) + \alpha^2(\alpha^2 - (1-\xi)) = 0$

donc $s = -i\alpha\sqrt{\beta} \pm \alpha^2\sqrt{1-\xi-\beta-\alpha^2}$ ☆ → c'est la relation de dispersion.

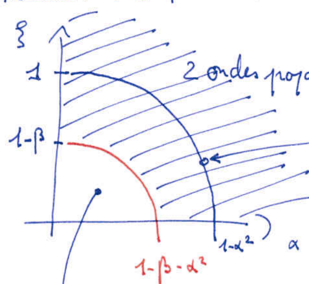
ondes stationnaires : pas d'évolution dans le temps $s = 0 \to \alpha^2(\alpha^2 - (1-\xi)) = 0$
$\to \xi = 1-\alpha^2$.



la ligne des ondes stationnaires.

courbe neutre : Ça dépend de l'argument de la racine de ☆ : $1-\xi-\beta-\alpha^2$
si c'est négatif, s est imaginaire pur : deux ondes propagatives neutres. si c'est positif : une onde stable et une onde instable, toutes les deux de vitesse de phase $c = +\sqrt{\beta}$ → ondes non dispersives.

neutre : $1-\xi-\beta-\alpha^2 < 0 \to \xi > 1-\beta-\alpha^2$ — on fixe une valeur de $\beta = 0{,}5$:



2 ondes propagatives neutres

une onde stationnaire

une onde stable et une onde instable. Vitesse de phase $+\sqrt{\beta}$

si $\beta > 1$, toutes les ondes sont stables $\forall \alpha$. (lorsque la tension est grande).
Lorsque on augmente la tension, les grandes longueurs d'ondes sont les dernières à se stabiliser.

Ex2

$u_{tt} + (1-r)u = u_{xx}$ $\qquad u(x,t) = \hat{u}\, e^{i\alpha x + st} + c.c.$

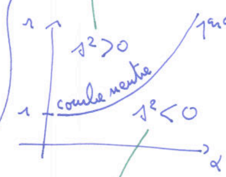
1) $s^2 + 1 - r = -\alpha^2 \to s^2 = \underbrace{r-1-\alpha^2}$ négatif si $\alpha^2 > r-1$ $\to r < \alpha^2+1$

2) courbe neutre :
$r = \alpha^2+1$

3) ok

4) $\alpha = 1, r = 0 \to s^2 = -2 \to s = \pm i\sqrt{2}$
vitesse de phase $c = -\frac{s_i}{\alpha} = \underline{\pm\sqrt{2}}$

$\alpha = 0, r = 2 \to s^2 = 1$ $\quad s_i = 0 \to \underline{c = 0}$



deux solutions réelles une positive et une négative

un mode stable et un mode instable
→ instable

deux solutions purement imaginaires

deux modes propagatifs.
stable

Exercice 3

$u(x,t) = \hat u \, e^{i\alpha x + st} + c.c.$

$\eta(x,t) = \hat \eta \, e^{i\alpha x + st} + c.c.$

$\rightarrow \begin{cases} s\hat u = -g i\alpha \hat\eta - b\hat u \longrightarrow s^2 \hat u = -i\alpha g (s\hat\eta) - sb\hat u \\ s\hat\eta = -H i \alpha \hat u \quad ☆ \end{cases}$

1) $\rightarrow s^2 + sb + gH\alpha^2 = 0$
la relation de dispersion.

si $b=0 \rightarrow s = \pm i\alpha\sqrt{gH}$ donc la vitesse de phase : $c = \pm\sqrt{gH}$ non dispersif.

si $b\neq 0 \rightarrow s = \underbrace{-\frac{b}{2}}_{\text{partie réelle négative : ondes atténuées}} \pm i \underbrace{\sqrt{\alpha^2 gH - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}_{\text{partie imaginaire légèrement réduite à cause de l'atténuation}}$ en supposant $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < 4\alpha^2 gH$: faible atténuation.

→ vitesse de phase réduite.

2) Rapport de phase entre u et η

☆ $\rightarrow s\hat\eta = -i\alpha H \hat u$

$s = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{\alpha^2 gH - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

donc $\hat u = \underbrace{\left(\frac{-\frac{b}{2} \pm i\sqrt{\alpha^2 gH - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{-i\alpha H}\right)}_{\text{la phase de ce nombre complexe donne le rapport de phase entre } \hat u \text{ et } \hat\eta \in \mathbb{C}} \hat\eta$

$\rightarrow \underbrace{-\frac{ib}{\alpha H} \pm \sqrt{\frac{g}{H} - \frac{b^2}{4\alpha^2 H^2}}}$

si $b\neq 0$ il y a un déphasage à cause du terme $-\frac{ib}{\alpha H}$

si $b = 0 \rightarrow \hat u = \underbrace{\pm\sqrt{\frac{g}{H}}}_{\in\mathbb{R}} \hat\eta$

$\in \mathbb{R}$ donc u et η sont en phase ou en opposition de phase selon la direction de propagation de l'onde.

Exercice 4

$U_t = \mu U_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} U(1-U) \qquad \varepsilon > 0$

1) stationnaire et constant : $U_t = 0$ $U_x = 0 \longrightarrow U(1-U) = 0 \longrightarrow U_b^1 = 0 \quad U_b^2 = 1$

2) linéarisation : $U = U_b + u$

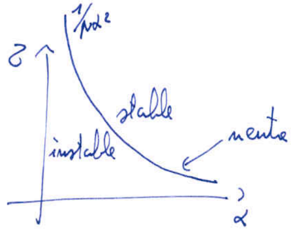
U_b^1 : $u_t = \mu u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{u(1-u)}_{u - \cancel{u^2} \text{ négligeable}} \longrightarrow \boxed{u_t = \mu u_{xx} + \frac{u}{\varepsilon}}$

U_b^2 : $u_t = \mu u_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{(1+u)(1-1-u)}_{-u - \cancel{u^2} \text{ négligeable}} \longrightarrow \boxed{u_t = \mu u_{xx} - \frac{u}{\varepsilon}}$

3) Relation de dispersion

U_b^1 : $s = -\mu\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}$

U_b^2 : $s = -\mu\alpha^2 - \frac{1}{\varepsilon}$



4) U_b^1 : instable si $s > 0 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > \mu\alpha^2 \rightarrow \varepsilon < \frac{1}{\mu\alpha^2}$

U_b^2 : s est toujours négatif
donc le système est toujours stable.

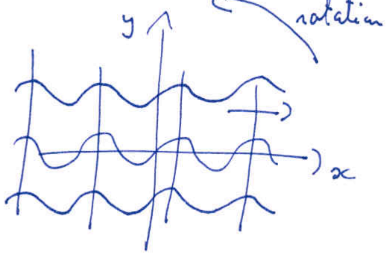
Exercice 5

Saint Venant avec la force de coriolis.

La force de Coriolis c'est : $2\rho\omega \begin{vmatrix} v \\ -u \end{vmatrix}$ où ρ est la densité du fluide et ω la vitesse de rotation locale.

La vitesse de rotation locale sur la planète est nulle à l'équateur et maximum aux pôles.

on suppose $b=0$ pas de dissipation, de plus $\beta=0$ → <u>les vagues sont selon x :</u>



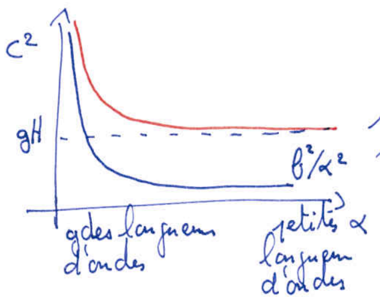
$$\left|\begin{array}{l} u_t - fv = -g\eta_x - \cancel{bu} \\ v_t + fu = -\cancel{g\eta_y} - \cancel{bv} \\ \eta_t = -Hu_x - \cancel{Hv_y} \end{array}\right. \quad b=0, \ \beta=0$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{l} s\hat{u} - f\hat{v} = -i\alpha g\hat{\eta} \longrightarrow s^2\hat{u} - sf\hat{v} - i\alpha g(s\hat{\eta}) \longrightarrow s^2\hat{u} + f^2\hat{u} = -\alpha^2 gH\hat{u} \\ s\hat{v} + f\hat{u} = 0 \longrightarrow -sf\hat{v} = f^2 u \\ s\eta = -i\alpha Hu \end{array}\right.$$

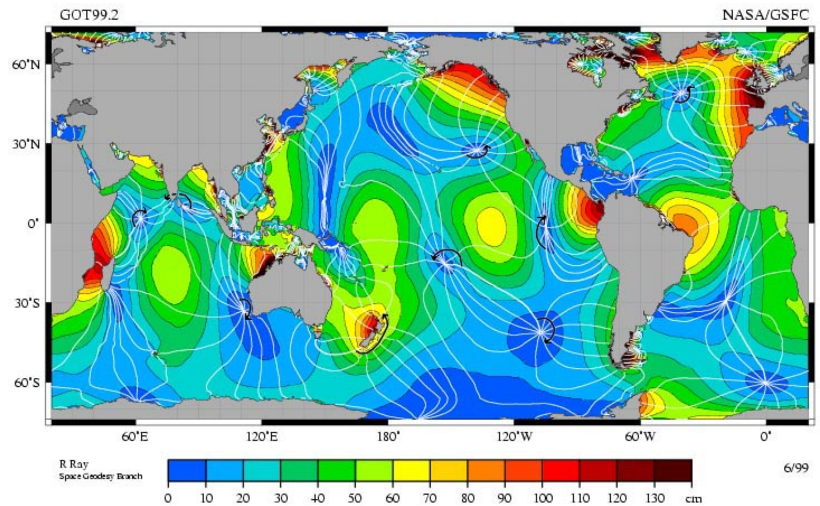
$\Rightarrow s = \pm i\sqrt{f^2 + \alpha^2 gH}$ (si $f=0$ on retrouve $c = \pm\sqrt{gH}$ de l'exercice 3)

vitesse de phase : $\boxed{c = \pm\sqrt{\left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 + gH}}$

la vitesse des vagues est plus grande que sans rotation. Ce sont maintenant des ondes dispersives à cause du terme en $\left(\frac{f}{\alpha}\right)^2$.



pour les petites longueurs d'onde, la rotation n'a pas d'effet, mais les vagues à grandes longueurs d'ondes vont plus vite en propagation.



Ex6

1) État stationnaire :

a) pas de variation dans l'espace et dans le temps : $U_t = V_t = U_{xx} = V_{xx} = 0$

$$\begin{cases} 0 = 1 - (\lambda+1)U_b + U_b^2 V_b \\ 0 = \lambda U_b - U_b^2 V_b \end{cases}$$

solution : $U_b = 1$, $V_b = \lambda$

b) interprétation de λ :
concentration relative à l'équilibre

2) Linéarisation

On injecte $U = U_b + u$, $V = V_b + v$ dans le système et on ne garde que les termes d'ordre 1 en les petites perturbations u et v :

$$\begin{cases} u_t = (\lambda-1)u + 2u_{xx} + v \\ v_t = -\lambda u + v_{xx} - v \end{cases}$$

exemple : $U^2V = (U_b+u)^2(V_b+v)$
$= (U_b^2 + 2U_b u + u^2)(V_b + v)$
$= \cancel{U_b^2 V_b} + U_b^2 v + 2U_bV_b u + \cancel{2U_b u v} \cancel{+ u^2 V_b} \cancel{+ u^2 v}$

$U_b^2 v \to v$, $2U_bV_b u \to 2\lambda u$

3) Dispersion

On injecte la forme en mode normal dans le système linéarisé : $\begin{cases} u = \tilde{u} \exp(st + ikx) \\ v = \tilde{v} \exp(st + ikx) \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} s\tilde{u} = (\lambda-1)\tilde{u} - 2k^2\tilde{u} + \tilde{v} \\ s\tilde{v} = -\lambda\tilde{u} - k^2\tilde{v} - \tilde{v} \end{cases} \longrightarrow \tilde{v} = (1 + 2k^2 + s - \lambda)\tilde{u}$$

on réinjecte cette expression pour $\tilde{v}$

$$\longrightarrow 0 = s^2 + s(2 + 3k^2 - \lambda) + 1 + k^2(3-\lambda) + 2k^4$$

4) États neutres

Avec $s = \sigma - i\omega$ on suppose $\sigma = 0$ et on cherche quelles sont les λ qui correspondent dans la relation de dispersion :

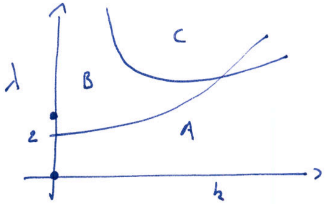
$$0 = -\omega^2 - i\omega(2 - \lambda + 3k^2) + k^2(3 + 2k^2 - \lambda) + 1$$

partie réelle : $\omega^2 = 1 + k^2(3 + 2k^2 - \lambda)$ ①
partie imaginaire : $\omega(2 - \lambda + 3k^2) = 0$ ②

si $\omega = 0$ (mode stationnaire), ① donne : $\lambda = 2k^2 + 1/k^2 + 3$
si $\omega \neq 0$ (mode propagatif), ② donne : $\lambda = 2 + 3k^2$

voici des courbes dans le plan (k, λ) pour lesquelles il existe un mode neutre.

5) Zones de stabilité



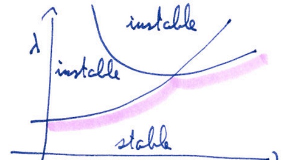
a) On évalue la relation de dispersion pour des points de chaque zone :

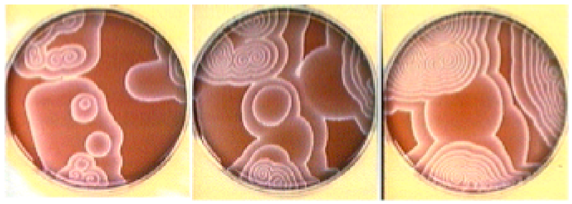
A : $\lambda = k = 0$: $s^2 + 2s + 1 = 0$
$\rightarrow s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$ deux modes stables (ici stationnaires)

B $\lambda = 3$, $k = 0$: $s^2 - s + 1 = 0$
$s = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ deux modes instables (ici instationnaires)

C $\lambda = 10$, $k = 1$: $s^2 - 5s - 4 = 0$
$s = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$ un mode stable, un mode instable (ici stationnaires)

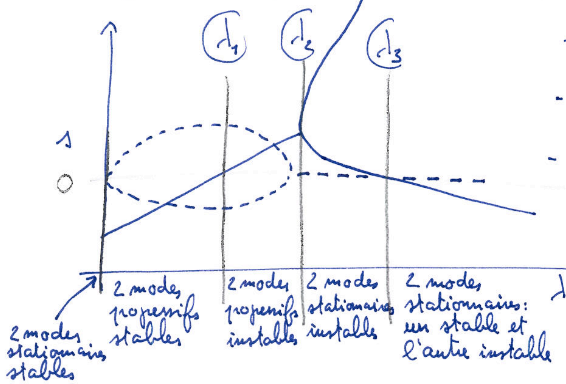
b) La courbe neutre :





7) Pour k = 0,5

Changements de comportement de stabilité en variant λ :



- en λ_1, les deux modes se déstabilisent en même temps.
- en λ_2, les deux modes instables deviennent stationnaires
- en λ_3 un des deux modes se stabilise, l'autre continue à être instable.