

# Notes de cours

## Introduction à la recherche scientifique par le projet

Jérôme Hoepffner  
Maître de conférences  
Université Pierre et Marie Curie.

Avec:  
José-Maria Fullana  
Régis Wunenburger  
Anne Mongruel  
Arnaud Antkowiak  
Pierre-Yves Lagrée

Version 1.0

---

Table des matières:

### 1) Introduction

Le projet de ce cours

La précision

Capter et représenter un phénomène

Faire varier les paramètres

### 2) Théorie

Analyse dimensionnelle

Exemples d'analyse dimensionnelle

#) Volume d'une sphère

#) Le pendule pesant

#) La chute libre

#) Oscillations de l'eau dans un récipient

#) Le diapason

#) Flexion d'une poutre sous l'effet d'un poids en son bout

### 3) La technique

Utilisation de la caméra

Les montages avec statif

Traitement des images avec ImageJ

Prises de mesures dans ImageJ

---

# 1) Introduction

## Le projet de ce cours

La science c'est: des phénomènes dont on peut mesurer des choses, par exemple la position d'une pomme qui chute en fonction du temps; et des modèles qui nous proposent des valeurs quantitatives pour ce que l'on peut observer, par exemple le  $x=gt^2$  de Galilée: la hauteur de chute augmente comme à peu près 9.81 fois le temps de chute au carré. Les phénomènes peuvent être extrêmement complexes, comme par exemple l'explosion d'une supernovae, et on peut passer des vies à les observer. Les modèles peuvent être extrêmement complexes, comme par exemple les équations de Navier-Stokes pour un écoulement fluide, et on peut passer des vies à les manipuler. Mais il ne faut pas se perdre dans une seule des deux moitiés de la science: il faut comparer les phénomènes aux modèles. Une fois qu'on sait faire cela, on peut dire que d'une certaine manière on a "le compas dans l'oeil", et c'est avec cet oeil là qu'on va regarder la nature.

L'enseignement universitaire insiste traditionnellement sur la partie "modèle": les équations différentielles, les intégrales dans le plan complexe, les méthodes numériques de résolution itératives d'équations, les techniques de discrétisation et ainsi de suite. Pourquoi? Probablement parce que c'est moins coûteux de faire des cours théoriques que des cours pratiques. Probablement parce que c'est beaucoup plus de travail de préparer des travaux pratiques, et qu'il faut plus de personnel pour l'encadrement, plus de matériel, plus de place: des salles adaptées et sécurisées. Alors qu'on se blesse rarement avec un tableau ou une feuille blanche. Aussi peut-être parce que c'est un véritable défi de faire de la Science avec un grand S: faire ce grand écart entre la nature vivante et une formule mathématique. Un défi dur à relever pour les étudiants, et dur à relever pour les enseignants. Dur à relever dans le temps et l'espace qui nous sont impartis. Ce cours c'est une occasion d'essayer.

Pour cela, on va circonscrire le problème. On va se focaliser comme outil de mesure sur l'appareil photo/caméra. C'est un outil très puissant avec lequel la plupart des étudiants sont familiarisés. Très puissant? Des millions de capteurs serrés densément derrière l'objectif. On dit souvent quand on a compris "ah oui, je vois...". Familiarisés? Vous avez presque tous un appareil photo dans votre poche. Pour en faire un instrument de mesure scientifique, il faudra juste connaître un peu mieux ce que c'est que l'ouverture, l'exposition, la profondeur focale, choses dont vous avez déjà une intuition pratique. Pour manipuler ces photos/films on va utiliser le logiciel libre ImageJ. On va tracer des graphiques avec des tableurs ou bien Matlab/octave/gnuplot. Les montages expérimentaux, les "manipes" ce sera à vous de les monter; Il faudra vous forger une expérience de ce que vous pouvez faire avec le matériel et de combien de temps ça va vous prendre. Les travaux pratiques ne sont pas découpés en petites questions techniques successives. Au lieu de cela, on se focalise sur un phénomène dont on rappelle/décrit quelques propriétés, et on pose des questions générales. Ce sera à vous de choisir ce que vous allez mesurer, c'est à dire mettre le phénomène "dans la boîte"; et de comment vous aller représenter ces mesures pour en faire une étude quantitative.

Pour la théorie aussi, il nous faut un outil très général. Nous allons nous baser sur les merveilles que l'on peut tirer de l'analyse dimensionnelle. Il nous faudra un peu de temps pour nous familiariser avec la subtilité de cet outil. Pour ne pas trop restreindre notre champ d'action on s'autorisera aussi quelques loi de conservation: le débit est constant dans le filet d'eau qui coule du robinet par exemple, alors que le fluide est en chute libre (les particules accélèrent).

L'énoncé de travaux pratiques c'est une feuille simple. Et votre compte rendu ce sera aussi une feuille simple, avec des photos, des montages de films, des graphiques avec des points de mesures expérimentaux et des formules théoriques, des commentaires, des questions laissées ouvertes, des résultats acquis.

Comme le but de ce cours est très général et ne se base pas en particulier sur des compétences acquises, il s'adresse à tous les niveaux: L2, L3, M1. Vous cherchez en trinômes, composés d'un étudiant de L2, un étudiant de L3 et un étudiant de M1. Ça permettra un échange entre ces niveaux qui sont encore très hiérarchisés.

Vous trouverez dans ces notes de cours une base pour les outils techniques et pour fixer les idées sur le but de ce cours. Lisez les avec attention. Je vous dirigerai vers ces chapitres lorsque nous sentirons que vous avez les idées floues.

## La précision

La question de la précision c'est une des questions centrales de la science. La précision c'est dans les faits: "la marge qui nous permet de dire si deux valeurs sont différentes ou bien égales". Si Jean à 37 ans deux mois et 7 jours, et Michel à 37 ans deux mois et 15 jours, alors Jean et Michel ont le même âge. Par contre si un neutrino arrive 60 milliardièmes de seconde trop tôt sur un trajet de 730 kilomètres, alors sa vitesse n'est pas égale à la vitesse de la lumière.

A retenir: il n'existe pas de chose telle que la "précision parfaite". C'est un idéal naïf que la science a banni. Les valeurs sont toujours relativement précises. Relativement à quoi? C'est ça la question la plus importante. En général, une mesure doit être assez précise pour nous permettre de dire s'il y a accord entre une mesure expérimentale et un modèle: Faut-il que je continue à travailler pour améliorer la qualité des mes mesures, faut-il que je continue à travailler sur ma théorie pour rajouter plus de fidélité à mon modèle? La précision c'est ce qui nous permet de répondre à cette question, c'est avant tout une question d'action: "je m'arrête là et je suis content?" ou bien "je continue à travailler?", "J'ai des arguments assez solides pour convaincre mes amis mes collègues mes ennemis que j'ai vu juste?", "J'ai des preuves qui me confortent dans mon idée de ce qu'il se passe, ou bien mes observations de la journée me jettent dans le flou et l'incertitude et je n'ai plus qu'à rentrer chez moi pour aujourd'hui?"

La conclusion c'est que la précision c'est un phénomène itératif: on commence à faire les mesures et les modèles avec simplicité, on essaye des choses on teste des hypothèses préliminaires, et on regarde ce que ça donne. Si c'est bon, les résultats sont convainquants, alors on passe à la suite, à autre chose, à des choses plus difficiles et inconnues. Si la comparaison modèle/mesure nous laisse dans le vague sur la validité de tout cela, alors il faut se creuser la tête et voir ce que l'on peut améliorer. Si le premier montage

expérimental nous a pris 30 minutes de réflexion et de montage, alors on se donne une ou deux heures pour l'améliorer. Et ainsi de suite. Pour les méthodes numériques---résolutions d'équations matricielles par exemple---les méthodes itératives nous offrent énormément plus de possibilités et de flexibilité que les méthodes directes. Il faut vous accaparer cette richesse de l'itératif pour votre travail scientifique.

De plus: le désir de précision ce n'est pas seulement quelque chose de couteux en temps, en efforts et parfois en argent, c'est souvent une barrière infranchissable. On se dit: "ce n'est même pas la peine d'essayer", "ça ne va pas marcher", "ça ne sera pas assez précis". C'est une barrière psychologique qui fait que au lieu de faire des choses intéressantes et de se lancer des défis, et bien on ne fait rien. Ou alors on reste dans un monde théorique abstrait dans lequel tout marche bien, mais qui n'a peut-être absolument rien à voir avec ce qui se passe dans la nature. Il faut oser essayer. Il faut oser "lever le rideau" comme le dit Christophe Clanet (chercheur parisien, laboratoire: LadHyx). La connaissance c'est un processus itératif et nonlinéaire: avant d'avoir essayé, on ne sait pas grand chose. Une fois qu'on a essayé quelque chose et que ça n'a pas marché, on commence à voir un nouveau paysage qui nous donne de nouvelles idées et ainsi, de proche en proche, on progresse et on finit par découvrir de beaux phénomènes et proposer des modèles astucieux auxquels personne n'avait pensé. On fait du beau travail et on se fait plaisir dans une vie d'explorations. Churchill, dont on compte de nombreuses citations, nous dit: "le succès c'est d'aller d'échec en échec sans jamais perdre son enthousiasme". La recherche c'est beaucoup d'échecs, parce que si on savait d'avance ce que ça va donner alors ce n'est pas de la recherche.

Pourquoi on n'ose pas mesurer les choses? Si on vous dit que la pomme tombe comme  $gt^2$  (l'accélération de la gravité fois le carré du temps de chute) ça vous semble familier et vous êtes probablement d'accord. Si on vous demande de prendre une pomme ou quelque chose qui y ressemble, une bille de verre par exemple, et qu'on vous demande de le montrer, alors vous êtes paralysés! Peut-être parce que en fait cette loi nous semble trop simple pour être possible dans les faits. Eh bien non! Il faut un peu de savoir faire d'expérience et de pratique. C'est ce que nous vous proposons dans ce cours. Et on pourra mesurer des choses moins balisées que la chute libre aussi, pour se donner l'impression d'être des pionniers, et, qui sait peut-être, se donner les moyens de le devenir.

## Capter et représenter un phénomène:

Quand on s'intéresse à un phénomène, par exemple la rotation de la terre, la première chose c'est de se familiariser avec ce que l'on sait sur la question et de se demander quels sont les observables: quels sont les choses que nous sommes capables d'observer qui sont témoins de ce phénomène. Ensuite, la première action à prendre pour l'analyse, c'est de "mettre le phénomène dans la boîte". Une grande partie de l'habileté d'un expérimentateur consiste à imaginer un protocole pour capturer ce qu'il se passe. Dans ce cours, ce sera principalement par le biais de l'appareil photo. L'avantage de cette capture visuelle c'est que si on se débrouille bien avec le cadrage l'éclairage, la photo ou le film peut être immédiatement explicite. On peut mettre ces photos dans une présentation openoffice ou powerpoint et votre auditoire saura tout de suite de quoi vous parlez. Par exemple pour la rotation de la terre, vous pouvez prendre une série de photos de la voûte

céleste sur laquelle on voit l'étoile polaire, superposer ces photos et montrer que les étoiles tracent des arcs de cercle autour de cette étoile polaire qui est presque alignée avec l'axe de rotation de la terre. Les deux images ci-dessous montrent clairement ce phénomène. On peut même en tirer la vitesse de rotation de la terre (la "vraie", pas celle qui dure 24h, n'est-ce pas?).

Dans nos travaux pratique, on ne vous liste pas une série de mesures à prendre, on vous propose d'étudier un phénomène. Par exemple comme un exercice de manipulation de la caméra, on peut vous poser la question "combien de temps prend le clignement de l'oeil". Dans ce cas il ne s'agit pas simplement de filmer un clignement d'oeil rapide et de mesurer le temps que cela a pris, et de nous livrer un scalaire; il s'agit de beaucoup plus: "montrer des images et des graphiques qui montrent combien de temps prend le clignement d'un oeil". Il faut donc filmer le phénomène, mais aussi traiter les données obtenues, le film pour en faire une représentation qui montre explicitement tout ce qui se passe et dont nous pouvons également tirer un information quantitative.

A partir d'un film, c'est très pratique de faire ce que ImageJ nomme un "montage", c'est à dire de mettre les unes à côté de l'autres les images successives du film sur une grande image. Mais il y a trop d'images dans la plupart des cas: il faut choisir souvent de sauter des images. Il faut donc choisir de prendre par exemple une image sur 10. Il faut faire ce choix de sorte à ce que les images tiennent sur une seule page, et que le phénomène soit clairement visible. On peut aussi choisir de découper le film de sorte à isoler la partie de l'image où ce que se passe est le plus significatif. Par exemple on peut extraire du film une ligne verticale de pixels qui traverse la paupière l'iris et la pupille, et d'en faire un montage en mettant les unes à côté des autres les lignes de pixels successives dans le temps. Ainsi on crée un "diagramme spatio-temporel" du phénomène qui est quasiment déjà un graphique quantitatif. On peut y voir si le mouvement de la paupière est symétrique: la descente est-elle plus rapide ou plus lente que la remontée? On peut peut-être en déduire les actions musculaires qui sont responsable de ce mouvement très rapide.

<http://thedoc777.free.fr/pageastro.htm>



[http://omnilogie.fr/O/Constellation\\_\(3\):\\_La\\_petite\\_Ourse](http://omnilogie.fr/O/Constellation_(3):_La_petite_Ourse)

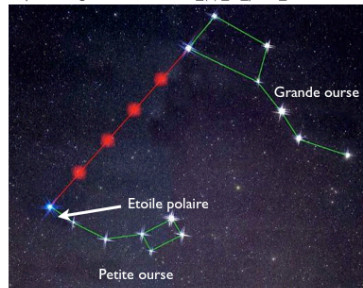
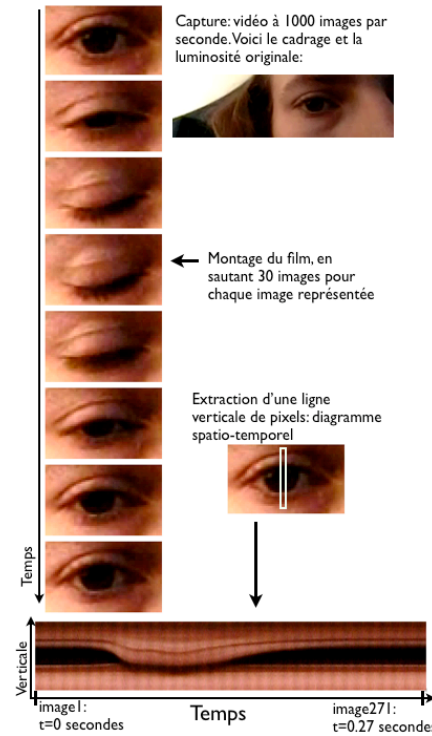


Photo à longue pose: toutes les étoiles tournent autour de la polaire.

Comment trouver l'étoile polaire en utilisant la grande ourse

Il faut donc choisir de prendre par exemple une image sur 10. Il faut faire ce choix de sorte à ce que les images tiennent sur une seule page, et que le phénomène soit clairement visible. On peut aussi choisir de découper le film de sorte à isoler la partie de l'image où ce que se passe est le plus significatif. Par exemple on peut extraire du film une ligne verticale de pixels qui traverse la paupière l'iris et la pupille, et d'en faire un montage en mettant les unes à côté des autres les lignes de pixels successives dans le temps. Ainsi on crée un "diagramme spatio-temporel" du phénomène qui est quasiment déjà un graphique quantitatif. On peut y voir si le mouvement de la paupière est symétrique: la descente est-elle plus rapide ou plus lente que la remontée? On peut peut-être en déduire les actions musculaires qui sont responsable de ce mouvement très rapide.

On peut poursuivre cette analyse en traçant un graphique. On prend une vingtaine de points de mesure en plaçant des pointeurs sur l'image du montage. Les coordonnées des points sont extraits sous la forme d'un tableau, puis tracés, ici avec matlab. Le temps est

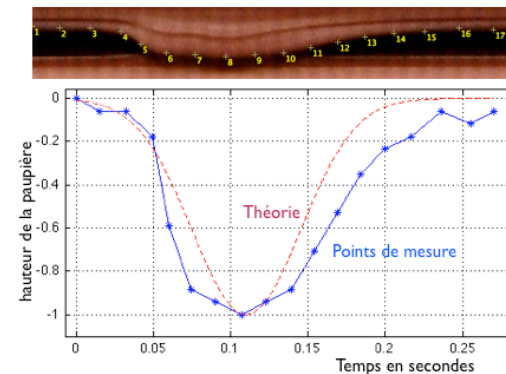


affiché en secondes, et on a normalisé le mouvement de la paupière de sorte à ce que la position oeil ouvert correspond à la hauteur 0 et oeil fermé correspond à -1.

Le mouvement de la paupière est une descente-montée, on peut imaginer de la comparer avec une formule mathématique qui suit le même mouvement, par exemple  $-\exp(-((t-t_0)/s)^2)$ , en choisissant les valeurs de  $t_0$  et  $s$  qui sont deux paramètres libres. Pour le moment, cette formule n'est pas justifiée par une analyse dynamique, c'est juste pour donner un premier élément de comparaison, un embryon de théorie.

Dans notre cours, on ne trace jamais de données toutes seules: il faut toujours les comparer à quelque chose, même si ce quelque chose ce n'est pas grand chose. Une théorie fausse est déjà une théorie. Le graphique montrera qu'elle est fausse et c'est déjà une information. Une idée de formule mathématique c'est déjà un début de travail de formalisation qui peut donner ensuite une théorie.

Prise de 18 points de mesure sur le montage



Pour tous les renseignements techniques sur le traitement des images, voir la section plus bas "traitement des images avec ImageJ".

Voilà le code matlab/octave que nous avons écrit pour tracer le graphique:

```

% traitement du clignement d'oeil pour les notes de cours:
% le tableau de mesures extrait de ImageJ:
d=[1 0 19 0 1 0 0 NaN
2 15 20 0 1 0 0 NaN
3 32 20 0 1 0 0 NaN
4 49 22 0 1 0 0 NaN
5 60 29 0 1 0 0 NaN
6 74 34 0 1 0 0 NaN
7 90 35 0 1 0 0 NaN
8 107 36 0 1 0 0 NaN
9 123 35 0 1 0 0 NaN
10 139 34 0 1 0 0 NaN
11 154 31 0 1 0 0 NaN
12 169 28 0 1 0 0 NaN
13 184 25 0 1 0 0 NaN
14 200 23 0 1 0 0 NaN
15 217 22 0 1 0 0 NaN
16 236 20 0 1 0 0 NaN
17 255 21 0 1 0 0 NaN
18 270 20 0 1 0 0 NaN
]
% extraction des données de position des pointeurs
t=d(:,2)/1000;
h=d(:,3);
h=h(1)-h;h=h/max(abs(h));
% une formule mathématique pour comparer
tvec=linspace(t(1),t(end),1000);
htheo=-exp(-(tvec-0.11)/0.05).^2);
% On trace le graphique
plot(t,h,'b*-',tvec,htheo,'r--');
grid on

```

Ici nous avons étudié un phénomène qui est l'évolution dans le temps de quelque chose, le matériau brut de mesure est une vidéo. En général ce n'est pas forcément du temps que les choses dépendent, mais d'un paramètre quelconque. Par exemple la flexion sous son propre poids d'une poutre dépend de sa longueur. Dans ce cas on fait varier la longueur de la poutre et on fait à chaque fois une photo. On représente de la même manière le phénomène avec un montage, un diagramme, un graphique. Le fait que notre phénomène dépende de L la longueur plutôt que de t le temps ne change rien au principe de la représentation.

## Faire varier les paramètres:

Dans la représentation quantitative des phénomènes que nous essayons de maîtriser, l'aspect central et récurrent c'est: "comment les paramètres dépendent-ils les uns des autres?":

- Comment la vitesse de chute d'une pomme dépend elle de la masse de la pomme?
- Comment la vitesse de chute d'une pomme dépend elle de l'intensité de la gravité?
- Comment la flexion de la poutre dépend du poids appliqué en son bout?
- Comment est-ce que le destin de l'univers dépend de la quantité de matière noire qu'il contient?
- Comment la forme du jet d'eau qui s'écoule de mon robinet dépend du débit?

Le débit d'eau je peux le mesurer avec un chronomètre et un récipient gradué, et la forme du jet liquide je peux la mesurer avec un appareil photo. Je peux aussi décider, plutôt que de mesurer toute la forme du filet liquide, mesurer seulement la distance au robinet à

laquelle le diamètre a diminué de moitié: la "demi-longueur". Si je fais varier un paramètre progressivement, le débit par exemple, je peux mesurer cette demi-longueur progressivement, et tracer cette relation sous la forme d'une fonction: un graphique dans un plan cartésien. C'est un résultat quantitatif et il est absolument primordial que ce type de mesure vous soit routinière.

Pour cela quelques bonnes règles. Lorsque vous faites une série de mesures, il faut faire varier un seul paramètre à la fois. Si vous en faites varier plusieurs, vous ne savez pas quel paramètre est responsable des variations de votre mesure. Ensuite, il faut choisir au préalable combien de valeurs du paramètre vous aller tester; c'est à dire combien de fois vous allez répéter le même protocole expérimental. Cela, vous le décidez en fonction du temps que cela prend. Par exemple, si chaque mesure prend 10 minutes: faire changer la longueur de la poutre, fixer le point d'attache, vérifier que tout est bon, prendre la photo, noter la valeur de la longueur sur votre cahier; alors vous ne pourrez faire qu'une dizaine de mesures dans le temps qui vous est imparti pour ce cours.

De plus lorsque vous faites ces choix, il faut déjà avoir en tête le graphique que vous allez tracer. En général on ne sait pas exactement à quoi va ressembler le graphique une fois que toutes les mesures sont prises, mais on a toujours une petite idée. Donc, à chaque fois que vous lancez une série de mesure, il faut d'abord tracer à la main le graphique et en fonction de cela, choisir le nombre de points de mesures que vous allez faire, et choisir comment vous allez répartir ces points de mesure entre la valeur max et la valeur min du paramètre à faire varier. C'est en faisant cela et avec un peu de pratique que vous allez devenir efficaces, précis et rapides.

Le protocole de mesure et de variation du paramètre, il faut le décider à l'avance. Si on fait les choses très précautionneusement, c'est bien contrôlé mais c'est très lent. Il faut choisir un niveau de précaution à l'avance et s'y tenir pour toute la série de mesure. La première série est vite faite, et on avise ensuite une fois qu'on a le premier graphique. La précision est un phénomène itératif, voir plus haut. C'est fondamental de garder exactement le même protocole expérimental pour chaque mesure d'une série de mesures: tous les points sont mesurés avec la même succession de gestes. C'est comme ça que le graphique est une représentation cohérente de ce qui se passe. C'est parfois fastidieux, mais c'est un aspect du métier. De plus pour qu'un graphique ait une valeur informative, il faut que ce protocole expérimental que vous avez choisit soit décrit dans votre compte-rendu.

## 2) Théorie:

Les phénomènes sont souvent liés à des formes géométriques ou des lois de comportement connues, on peut donc prédire en manipulant ces éléments constitutif quelles vont être les dépendances entre les paramètres. C'est une théorie. Si cette théorie est assez simple, on en tire une formule explicite: la valeur de la hauteur de chute d'une bille qu'on lâche par exemple est égale à  $g(t-t_0)^2$  si  $(t-t_0)$  est le temps de chute de la bille. Cette formule on peut la tracer et la comparer à la même chose tirée de l'expérience: mesuré avec une caméra et un étalon de longueur (un objet que l'on voit sur le film et dont on connaît la taille). Faire une théorie c'est comme construire une maquette. On invente

une sortie de copie idéale du phénomène qui nous intéresse. Si cette copie---avec laquelle on peut jouer comme on veut et autant qu'on veut---se comporte comme le phénomène, si elle reproduit la manière dont les paramètres dépendent les uns des autres, alors en étudiant la copie, on en apprend beaucoup sur le phénomène. On se retrouve donc ainsi "dans la nature". Ici on discute d'une méthode très utile et générique pour faire des théories: l'analyse dimensionnelle.

## Analyse dimensionnelle:

Comme toutes les lois de la physique sont homogènes: on ne peut égaliser et additionner que des choses dont la dimension est la même, comme de plus les lois de comportement sont des lois physiques, alors les coefficients physiques ont des dimensions qui sont correctes. Alors il y a déjà beaucoup d'information dans ces coefficients physiques. Et il s'avère ainsi que si on sait quels sont les coefficients physiques qui vont jouer pour le phénomène, alors on peut dans beaucoup de circonstances tirer des théories tout simplement de la connaissance de la dimension des coefficients. C'est le principe de l'analyse dimensionnelle. Les étudiants utilisent en général l'analyse dimensionnelle uniquement pour vérifier a posteriori la validité de la formule que l'on a obtenue par le calcul (mais souvent ils oublient de le faire). C'est ce qu'on appelle l'homogénéité des formules.

La science décrit la nature de manière quantitative via des lois élémentaires:

- **Inertie** la masse fois l'accélération d'un point matériel est égale à la somme des forces appliquées (principe fondamental de la dynamique, Newton). Le coefficient physique qui agit ici c'est la masse, dimension: M.

- **Éirement élastique** dans un corps élastique soumis à des forces, la contrainte est égale au module de Young fois l'allongement relatif (loi de Hooke). Pour un barreau élastique allongé,  $(L-L_0)/L$  (l'allongement relatif: (longueur du barreau-longueur au repos)/longueur au repos) =  $F/S$  (la contrainte: force appliquée /surface de section du barreau). Le coefficient physique ici c'est le module de Young, qui a la dimension d'une pression:  $M/LT^2$ .

- **Flexion élastique:** Une barre élastique à laquelle on applique un moment de flexion se courbe, et la loi est que le moment appliqué est égal à la courbure de la barre fois le module de flexion. En fait le module de flexion c'est le module de Young ( $M/LT^2$ ) fois le moment quadratique ( $L^4$ , l'intégrale d'une longueur au carré sur une surface) donc sa dimension c'est  $ML^3/T^2$ .

- **Diffusion** pour une quantité qui diffuse (température, colorant...) la variation dans le temps de la concentration est égale au coefficient de diffusivité fois la dérivée spatiale seconde de la concentration. Le coefficient physique ici c'est le coefficient de diffusion, dimension:  $L^2/T$ .

- **Capillarité** Une interface entre deux fluides non miscibles est le lieu d'une tension, à peu près comme celle d'un ballon de baudruche, c'est ce qui fait que les petites gouttes d'eau ont une forme sphérique. La tension qu'une interface fait sur un solide, c'est une force qui est égale à la tension de surface fois la longueur de la ligne. Le coefficient physique ici c'est la tension de surface, dimension:  $M/T^2$

Il y en a beaucoup plus, mais voici là celles qui vont être les plus présentes dans nos travaux pratiques. Chacune de ces lois correspond en fait à une manipe simple (qui nous semble aujourd'hui simple parce que bien balisée), et c'est grâce à ces manipes simples que ces lois ont été établies, le plus souvent de manière empirique.

Pour un phénomène en général, tous ces différents effets physiques sont en fait mélangés, c'est à dire, que le phénomène physique va être piloté par une combinaison de ces différents coefficients physiques. La force de l'analyse dimensionnelle, c'est que juste en connaissant quelles sont les dimensions des paramètres physiques qui interviennent dans la loi que l'on cherche à établir, on peut déjà trouver en partie ces lois.

Cela a été formalisé par le théorème Pi, aussi connu sous le nom de théorème de Buckingham. Le théorème dit tout simplement que si on a un phénomène physique qui est piloté par  $n$  paramètres physiques, et que ces paramètres physiques font intervenir  $p$  dimension indépendantes, alors on peut décrire le problème avec  $n-p$  paramètres, qui sont des nombres sans dimension (ce sont des nombres). La loi qui lie ces paramètres s'écrit

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots) = 0$$

ici on a appelé les nombres sans dimensions selon la notation historique et la loi est écrite sous forme implicite. On peut aussi choisir de transformer cela en une notation explicite si on s'intéresse plus particulièrement à un paramètre, disons  $\pi_1$ :

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots)$$

Étudions un certain nombre d'exemples pour se faire une idée de ce que l'on peut tirer de ce résultat. Dans le système classique des unités de la mécanique, on a trois dimensions de base indépendantes: M, L, T. La masse la longueur et le temps.

## Exemples d'analyse dimensionnelle

### #) Volume d'une sphère

Supposons que nous ne savions rien sur la loi du volume d'une sphère en fonction de son rayon. Nous avons deux paramètres que nous cherchons à lier par une loi physique, le rayon de la sphère, et son volume:

$$r(L), v(L^3)$$

il y a deux paramètres ( $n=2$ ) et une seule dimension indépendante, la longueur ( $p=1$ ), donc il y a un unique ( $n-p=1$ ) nombre sans dimension, qui est:

$$v/r^3$$

(ou bien n'importe quelle puissance de cette expression, par exemple  $v^6/r^{18}$  est aussi sans dimension) Nous savons donc qu'il existe une loi physique de la forme

$$\phi(v/r^3)=0$$

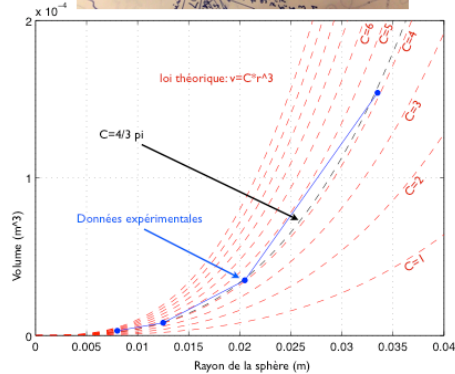
ici écrite sous forme implicite, et que nous pouvons réécrire

$$v/r^3=C$$

puisque phi doit être constante, alors son argument doit être constant; cette constante C, nous l'appelons le "préfacteur".

Nous allons vérifier cette loi expérimentalement en prenant plusieurs billes dont nous allons mesurer le diamètre avec un pied à coulisse et le volume en les immergeant dans un bescher gradué.

Une fois les mesures faites (ici en à peu près 20 minutes), On trace les points expérimentaux (rayon,volume) en bleu avec des marqueurs, et on superpose à ce graphique des courbes de la forme  $y=C r^3$  (telles que prédites par notre analyse), en rouge pointillés, pour plusieurs valeurs du préfacteur dont nous ne connaissons pas encore la valeur numérique. On voit que nos données expérimentales collent bien avec une loi cubique, et le préfacteur semble être légèrement supérieur à 4. Ce préfacteur est en fait  $4/3 \pi$  qui est à peu près 4.18.



Nous pouvons aller un peu plus loin avec le graphique ci-dessous. Tout d'abord, nous traçons le même graphique en échelle logarithmique (fonction loglog dans octave/matlab, ou bien en traçant le logarithme base 10 des paramètres: le rayon et le volume), et la courbe doit être une droite de pente 3, puisque c'est une loi cubique qui lie le volume au rayon.

Tracer les courbes en loglog c'est très utile pour identifier/vérifier les lois de puissance, puisque par exemple, si j'ai une loi

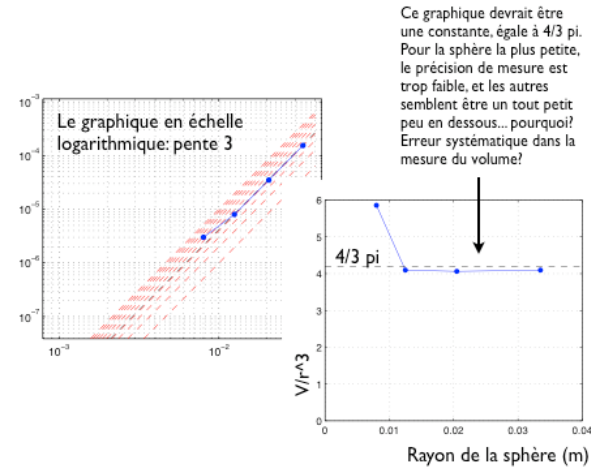
$$a=Cb^3$$

alors  $\log(a)=\log(Cb^3)=\log(C)+3\log(b)$ , donc si je trace  $\log(a)$  en fonction de

$\log(b)$  je vois une droite de pente 3 et d'ordonnée à l'origine  $\log(C)$ .

Pour continuer encore, nous traçons  $v/r^3$ , c'est à dire que nous devrions voir ainsi une fonction constante  $y=C$  comme graphique, et la hauteur de cette fonction doit être  $4/3 \pi$ . En fait, le premier point n'y est pas du tout, la raison en est que nous avons mesuré son volume (3ml) dans un bescher de 600ml, ce qui fait une variation de hauteur de moins

d'un millimètre, plus petit que le ménisque capillaire que fait la surface de l'eau au contact de la paroi de verre. Ensuite il semble que le volume mesuré soit légèrement inférieur selon une erreur systématique, il faudrait investiguer plus longtemps pour trouver l'origine de cette différence vis à vis de la loi théorique. J'ai probablement mal pris l'étalon de mesure en traitant les images.



Ce graphique devrait être une constante, égale à  $4/3 \pi$ . Pour la sphère la plus petite, la précision de mesure est trop faible, et les autres semblent être un tout petit peu en dessous... pourquoi? Erreur systématique dans la mesure du volume?

### #) Le pendule pesant

Une bille de masse  $m$  pend au bout d'un fil de longueur  $l$ . Je l'éloigne de son point d'équilibre de sorte à ce que le fil fasse un angle de  $\alpha$  degrés par rapport à la verticale. Je sais par expérience que le mouvement est périodique et peu amorti. Je me demande quelle est la période  $p$  de ces oscillations, c'est à dire, comment cette période dépend des autres paramètres. Je néglige l'amortissement.  $g$  c'est l'accélération de la gravité.

Les paramètres:  
 $m(M), l(L), p(T), \alpha(1), g(L/T^2)$

J'ai 5 paramètres que j'essaie de lier par une loi, j'ai trois dimensions indépendantes:  $M, L, T$ , donc d'après le théorème, j'ai deux nombres sans dimension. J'ai plusieurs choix pour former ces deux nombres à partir des paramètres sans dimension, mais le choix suivant est le plus naturel, pour le premier:

$\alpha$  (qui est déjà sans dimension),

pour le second,  $m$  ne peut pas intervenir puisque c'est le seul paramètre avec de la masse, il ne me reste plus que  $p, l$  et  $g$ . Je cherche à construire un temps avec  $l$  et  $g$  de sorte à diviser  $p$  par ce temps, ça me donne un nombre sans dimension:  $\sqrt{l/g}$  c'est un temps. On peut appeler ce temps le temps caractéristique du problème, puisque c'est le seul temps que nous pouvons construire avec les paramètres du problème (essayez...); voici donc notre second nombre sans dimension:

$$p' = p / \sqrt{l/g}$$

J'appelle ce nombre sans dimension  $p'$  puisque c'est juste la "période sans dimension": la vraie période dont je ne connais pas la valeur, divisée par le temps caractéristique du problème. Le théorème Pi nous dit que la loi physique qui lie les paramètres sans dimension est forcément de la forme:

$$\phi(\alpha, p') = 0$$

C'est écrit ici sous la forme d'une fonction implicite. Cette loi je peux en général la ré-écrire sous forme explicite, par exemple:

$$p' = f(\alpha)$$

C'est à dire que quoi qu'il arrive, la période normalisée ne dépend que de  $\alpha$ . La fonction  $f$  ça peut être une fonction très compliquée, l'analyse dimensionnelle ne nous apprend rien du tout sur cette fonction puisque cette fonction n'a pas de dimension. Pour la connaître, on peut ou bien faire des manipes: prendre une valeur de  $\alpha$ , mesurer la période, puis prendre une autre valeur de  $\alpha$  et encore une fois mesurer la période et ainsi de suite. Ou bien on peut construire un modèle mathématique qui nous donnera avec un peu de chance une formule mathématique. On peut aussi faire un modèle numérique et l'utiliser un peu comme on fait une expérience pour mesurer cette fonction  $f$ .

Pour le cas du pendule, c'est un peu particulier. Galilée à la fin du seizième siècle s'est rendu compte que la période du pendule, si  $\alpha$  n'est pas trop grand, ne dépend pas de l'amplitude du mouvement. A cette époque, on n'avait pas encore d'horloge, puisque pour faire des horloges on utilise cette propriété. Galilée à la messe mesurait la période d'oscillation des lustres dans les courants d'air en comptant les battements de son coeur.

Si  $f$  ne dépend pas de  $\alpha$ , c'est à dire que en fait  $f$  est une fonction plus ou moins constante, alors cela veut dire que nous pouvons écrire plus simplement:

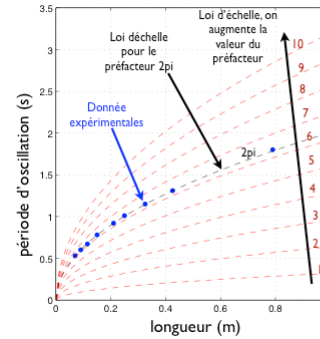
$$p' = C$$

ou  $C$  est une constante. C'est un résultat important puisque on peut maintenant en déduire notre loi de puissance:

$$p = C \sqrt{l/g}$$

C'est à dire que si  $l$  augmente alors la période augmente, et si  $g$  augmente alors la période diminue. Pour la constante  $C$ , l'analyse dimensionnelle ne peut rien nous apprendre puisque  $C$  est sans dimension. On appelle  $C$  le "préfacteur", et  $\sqrt{l/g}$  la "loi de puissance". L'analyse dimensionnelle donne en général des lois sous cette forme: un paramètre est égal à un préfacteur sans dimension fois une loi de puissance. Pour obtenir  $C$  il faut faire une manipe: on le mesure sur le graphe ci dessous, ou bien on fait un modèle. En utilisant la loi de l'inertie et en regardant comment le poids et la traction du fil s'applique sur la masse, on obtient une équation différentielle d'ordre 2 qui nous dit finalement que le préfacteur  $C$  a la valeur de  $2\pi$ .

Les points de mesure sont tracés sur le graphique. Nous avons fait varier la longueur du pendule en changeant la longueur d'u fil, et mesuré la longueur entre le point d'attache et



le centre de la boule. Puis ensuite on a chronométré la durée de dix périodes et divisé par dix. L'analyse dimensionnelle nous dit que la loi doit être comme  $\sqrt{l/g}$ , donc on a tracé sur le graphique cette loi théorique pour plusieurs valeurs du préfacteur encore inconnu, entre 1 et 10. Il semble que la bonne valeur du préfacteur soit un peu plus grande que 6. En

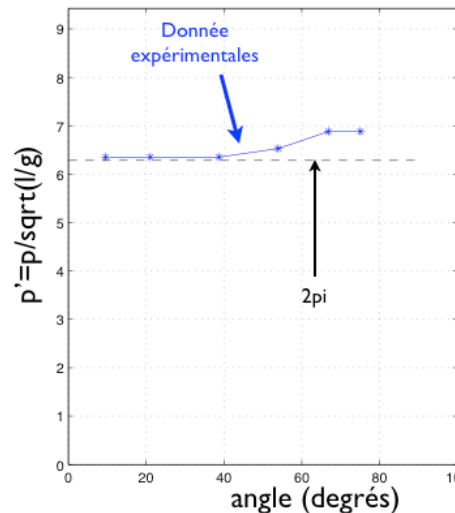
effet, le modèle inertiel nous donne  $C=2\pi$ .

Pour voir plus directement la loi d'échelle  $\sqrt{l/g}$ , on peut tracer le graphique sur une échelle logarithmique:

Avec cette représentation, les lois de puissances sont des droites dont la pente est égale à la puissance. Ici donc puisque nous faisons varier  $l$ , la pente doit être de  $1/2$ , c'est bien le cas sur le graphique.

On peut également vérifier que la fonction  $f$  est bien une constante, ou en tout cas qu'elle

varie peu. Pour cela, on lance le pendule avec un grand angle initial, on filme les oscillations avec une lente atténuation, donc l'angle diminue progressivement. Ainsi on peut mesurer comment la période dépend de l'angle, et pour cela il suffit de le faire pour une seule longueur de pendule, puisque nous connaissons déjà la loi de puissance. Le graphique ci-dessous montre ces résultats. Pour un angle proche de 80 degrés,  $f$  est à peu près 7, puis décroît vers  $2\pi$  lorsque l'angle diminue. La valeur théorique de  $2\pi$  est obtenue pour une amplitude d'oscillation infinitésimale (pour laquelle  $\sin(\alpha)$  est quasiment égal à  $\alpha$ ). On observe un léger biais sur notre graphique: une légère surestimation de  $f$ , il faudrait aller voir plus en détail ou est-ce que la manipe diffère du modèle. Peut-être une erreur de prise de référence de longueur ou bien de mesure des



périodes...

### #) la chute libre

Un corps tombe en chute libre d'une hauteur  $l$ , avec une gravité  $g$ , et sa masse est  $m$ . Quel est le temps  $p$  que prend cette chute? Et bien ce sont exactement les mêmes paramètres que pour le cas du pendule pesant (avec  $\alpha$  en moins). Donc on a juste un seul paramètre sans dimension, le même:

$$p' = p / \sqrt{l/g}$$

Donc le temps de chute c'est

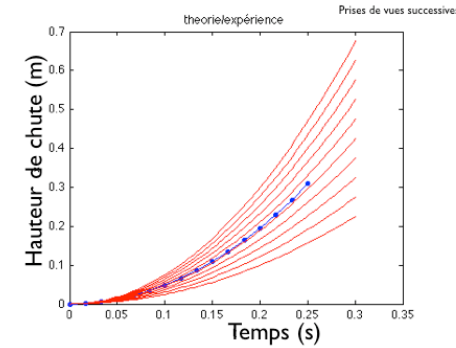
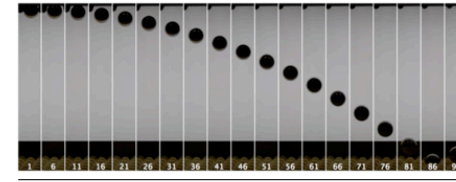
$$p = C \sqrt{l/g}$$

ce temps de chute augmente comme la racine carrée de la hauteur de chute et comme l'inverse de la racine carrée de la gravité. On ne connaît pas encore le préfacteur, mais on peut faire juste une manipe pour le mesurer, ou bien on fait un modèle dynamique avec la loi de l'inertie.

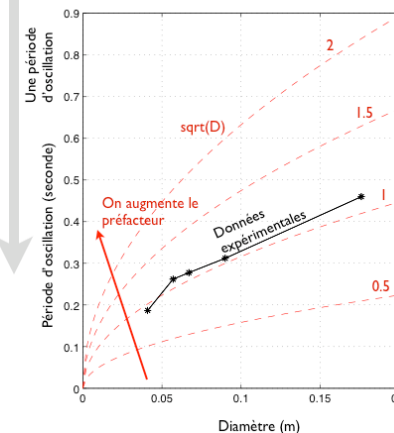
Procédons différemment pour vérifier plus simplement cette loi et obtenir le préfacteur: si le temps de chute vérifie cette loi, alors la hauteur de chute vérifie la loi:

$$l = gp^2 / C^2$$

La manipe que nous faisons consiste à filmer une boule qui chute et à vérifier que la hauteur de chute augmente comme le carré du temps ( $p$  est le temps). On a fait un montage avec le film, en extrayant une bande verticale qui montre la boule qui tombe. On



Montage de l'oscillation pour un des Bescher



a mesuré la hauteur de chute et tracé sur un graphique, en superposant ces points de mesures avec des paraboles en faisant varier le préfacteur inconnu  $C$ . On voit que la boule satisfait bien la loi d'échelle tirée de l'analyse dimensionnelle, et le facteur de la parabole est  $1/2$ , donc  $C = \sqrt{2}$ , c'est effectivement ce que donne la théorie inertielle en résolvant les équations du mouvement.

### #) Oscillations de l'eau dans un récipient

Si vous mettez de l'eau dans un récipient, et que vous le secouez, l'eau va osciller pendant un certain temps,



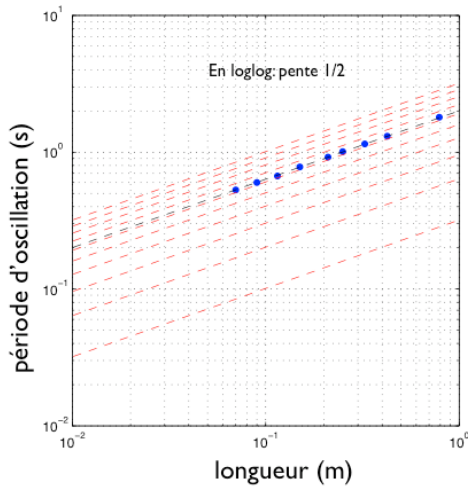
puis l'oscillation s'atténue progressivement. C'est un phénomène d'oscillation analogue au pendule pesant. On considère un récipient cylindrique, comme par exemple un Bescher, de diamètre  $l$  avec de l'eau jusqu'à une hauteur  $h$ . On ne secoue pas trop pour éviter que l'eau déborde, donc la hauteur du récipient ne joue pas: les oscillations vont se faire comme si la hauteur du récipient était infinie. La densité de l'eau est  $\rho$ , la gravité c'est  $g$ . Est-ce que cela nous donne la loi de la période d'oscillation  $p$ ? On va essayer, la paramètres sont:

$$l(L), h(L), \rho(M/L^3), g(L/T^2), p(T)$$

Il y a 5 paramètres, et trois dimensions indépendantes, donc deux paramètres sans dimensions sont nécessaires et suffisants pour décrire ce problème: par exemple le rapport d'aspect de l'eau  $l/h$ , et la période adimensionnée par le temps gravitaire  $p' = p/\sqrt{l/g}$ . L'analyse dimensionnelle nous dit que la loi doit être

$$p = \sqrt{l/g} f(l/h)$$

ou  $f$  est la fonction qui décrit comment la période va dépendre du rapport d'aspect. Cette fonction, nous ne pouvons rien en dire avec l'analyse dimensionnelle, mais ce que je connais comment varie la période à condition de ne pas faire varier le rapport d'aspect. Si je fais varier la taille de mon Bescher en gardant  $l/h$  constant, je devrais obtenir une loi en racine de  $l$ . J'ai réalisé cette manipe avec quatre Bescher, secoué de la même manière mes quatre Bescher remplis de sorte à ce que le rapport d'aspect  $l/h$  soit

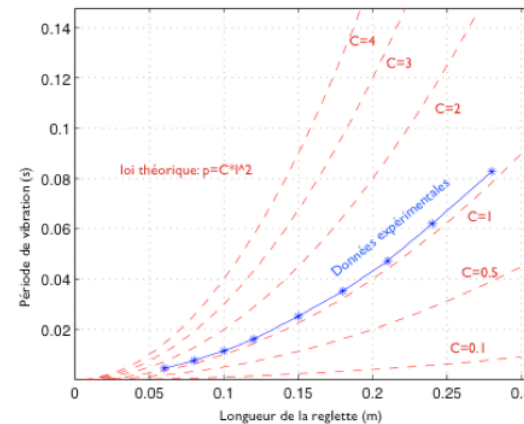
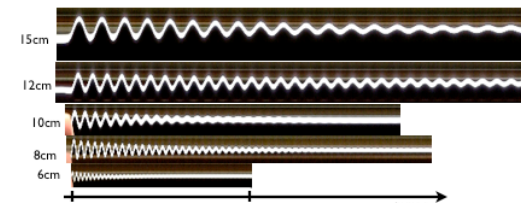
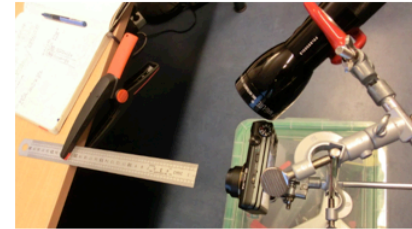


constant, et j'en tire le résultat suivant:

La loi semble donc être  $p = \sqrt{l/g}$  pour  $g = 9.81$  et  $l/h = 1$ . Pour ces expériences, j'ai seulement mesuré pour  $l/h = 1$ , donc je sais au moins que  $f(1) = \sqrt{g} = 3.1$ . Pour avoir plus de points sur  $f$  il faudrait faire varier  $l/h$ , mais on sait au moins qu'on aura a priori pas besoin de faire varier  $\sqrt{l/g}$ . Ici, la précision de la mesure n'est pas très bonne, on ne peut pas vraiment dire si la loi mesurée expérimentalement est bien une racine, mais en tout cas, on n'observe pas un désaccord criant.

Ici nous avons de bonnes raisons de penser que si le rapport d'aspect est grand: bien plus haut que large, alors  $f$  ne va plus dépendre du rapport d'aspect, elle tend vers une constante. Pourquoi? Parce que le mouvement d'oscillation sera probablement localisé proche de l'interface, et n'ira pas jusqu'au fond, donc la distance entre le fond et l'interface

ne joue plus, tant que cette distance est grande. C'est quelque chose qu'il faudrait vérifier. Ceci c'est une propriété récurrente des nombres sans dimensions: les fonctions sans dimension comme  $f$  en général dépendent peu des nombres sans dimensions lorsque ceux-ci sont très grand ou bien très petit. Par exemple la fourmi agit très peu sur l'éléphant (à moins que l'éléphant soit malade et les fourmis en très grand nombre). La goutte d'eau agit très peu sur la montagne (à moins qu'ils y ai une très grand nombre de gouttes d'eau et pendant très longtemps). Vous voyez ainsi que si un nombre est très petit, il faut pouvoir le multiplier avec un nombre très grand. A méditer.



### #) Le diapason

La diapason, c'est l'oscillation de flexion d'une barre élastique. Les paramètres sont,  $l$  la longueur de la barre,  $\lambda$  sa masse linéique,  $B$  son module de rigidité. On dit que l'on considère des oscillations de petite amplitude, donc l'amplitude ne va pas jouer sur la période, de manière analogue au pendule pesant. Cette analogie est en fait une propriété très générique des oscillations de faible amplitude: si ces amplitudes sont faibles, on peut linéariser les équations. Ces équations nous donnent les fréquences de vibration, et ces fréquences ne peuvent pas dépendre de l'amplitude. On a comme famille de paramètres:

$$l(L), \lambda(M/L), B(ML^3/T^2), p(T)$$

Donc quatre paramètres et trois dimensions indépendantes, ce qui nous fait un seul paramètre sans dimension. Ce paramètre on le construit comme la période qui nous intéresse, divisée par un temps caractéristique de notre problème, c'est à dire un "temps élastique", par opposition au "temps gravitaire"  $\sqrt{l/g}$  qui nous a servi

pour les exemples précédents; ce temps élastique, son expression c'est (essayez d'en trouver d'autres, ce n'est pas possible puisqu'il y a une seul nombre sans dimension)

$$\sqrt{l^4 \lambda / B}$$

donc le paramètre sans dimension, que l'on peut également appeler la "période adimensionnée", c'est

$$p' = p / \sqrt{L^4 \lambda / B}$$

donc la loi physique qui lie les paramètres du phénomène de vibration, s'écrit  $\Phi(p') = 0$ , ou encore  $p' = C$ , avec C un préfacteur sans dimension dont notre analyse ne peut pas nous donner la valeur. Ceci revient à dire que

$$p = C L^2 \sqrt{\lambda / B}$$

Donc la période de vibration augmente comme le carré de la longueur de la barre, et décroît comme la racine carrée de la rigidité. Donc plus c'est long plus c'est lent, et plus c'est rigide, plus c'est rapide.

On peut tester cette loi facilement en prenant une règle métallique que l'on plaque en une extrémité sur une table, on la fait vibrer et on filme avec notre appareil photo, et on fait progressivement varier la longueur libre de vibrer, on filme, on mesure sur le film et on trace. On pourrait également faire cette manipe avec un stroboscope plutôt qu'avec la caméra, mais l'avantage de la caméra, c'est qu'on voit tout, et que une fois qu'on l'a vu, c'est déjà "dans la boîte." On filme de face le bout de la règle avec une lampe torche. Pour filmer des phénomènes rapides, il faut un éclairage intense pour avoir une image claire malgré le court temps d'exposition.

Sur le film, on a tracé la loi théorique par dessus les données expérimentales, pour plusieurs valeurs du préfacteur inconnu, et on voit que  $C \sqrt{\lambda / B}$  est légèrement plus grand que 1. Pour obtenir la valeur universelle du préfacteur, il faudrait mesurer les valeurs numériques de  $\lambda$  et B.

#### Remarques conclusives sur ce cas:

Remarquez que on s'est débrouillé pour bien choisir les paramètres de sorte à ce que ça marche bien et que l'on en tire un résultat. Comme famille de paramètres, on aura pu choisir: S la section de la poutre cylindrique, l sa longueur, E son module de Young plutôt que le module de rigidité,  $\lambda$  sa densité linéique. On aura eu alors:

$$S(L^2), l(L), E(M/LT^2), \lambda(M/L), p(T)$$

Cinq paramètres et trois dimensions indépendantes, Donc deux nombres sans dimension. Le premier, ce peut être par exemple le rapport d'aspect de la poutre, c'est souvent utile d'avoir comme cela un paramètre sans dimension qui nous renseigne sur la forme géométrique de notre objet

$$r = l / \sqrt{S}$$

et pour le second, un temps élastique basé sur E et la densité linéique. Je suis obligé de combiner E et  $\lambda$  puisque ce sont les seuls paramètres qui ont de la masse, je les combine pour faire disparaître cette dimension de masse pour faire un nombre sans dimension

$$p' = p / \sqrt{\lambda / E}$$

J'ai donc d'après le théorème une loi physique

$$p = \sqrt{\lambda / E} * f(l / \sqrt{S})$$

et je suis embêté parce que je ne peux pas connaître la fonction f, donc je ne sais pas comment la période va varier si j'augmente la longueur de la poutre en gardant tous les autres paramètres constants. Par contre je sais comment la période va dépendre de la densité linéique et la rigidité E du matériau qui constitue ma poutre.

Donc ce choix particulier de nombres sans dimension n'était pas judicieux. Que peut-on apprendre de cette mésaventure? Et bien que il faut considérer la poutre comme un objet élancé, qui est très long par rapport à sa section, et c'est dans cette limite que l'on peut avoir une loi simple pour laquelle la valeur de la section n'intervient pas directement, mais via un paramètre B qui prend déjà en compte le fait que il y a une section: pour la poutre, ce n'est pas E qui compte, c'est B.

#### #) Flexion d'une poutre sous l'effet d'un poids en son bout

Plutôt que de regarder ses vibrations, je soumet son bout à un poids connu, et je regarde de combien cette poutre ploie. Plus le poids est grand plus elle ploie, et plus la longueur est grande plus elle ploie aussi. Par contre lorsque la rigidité augmente, elle ploie moins. Quels sont les paramètres qui vont être liés par la loi que je cherche? La rigidité en flexion B, la force p en son bout, sa longueur l. Ici la gravité et la densité linéique ne jouent pas puisque je suppose que cette densité est assez faible pour que son effet soit faible par rapport à la flexion due à la force au bout. Le dernier paramètre c'est de combien elle ploie en son bout: y. Les paramètres sont donc

$$l(L), B(ML^3/T^2), F(ML/T^2), y(L)$$

Nous avons 4 paramètres et 2 dimensions indépendantes, il nous reste donc 2 nombres sans dimension. On voit qu'il n'y a que deux dimensions indépendantes, parce que avec du L et avec du  $ML^3/T^2$  on peut faire la dimension d'une force. Pour nombres sans dimensions, on va prendre le rapport d'aspect longueur/déflexion

$$y/l$$

et pour le second nombre, on construit une force avec la rigidité B et la longueur l, c'est  $F_c = B/l^2$ , c'est une "force caractéristique" pour notre problème. Le second nombre est donc:

$$Fl^2/B.$$

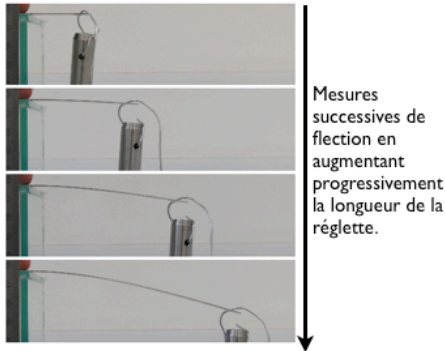
Donc nous devrions pouvoir exprimer la loi physique sous la forme

$$\phi(y/l, Fl^2/B)=0$$

que nous pouvons réécrire de façon explicite

$$y/l=f(Fl^2/B).$$

Et là il semble en comparaison avec les exemples précédents que nous sommes coincés. Il ne nous est pas possible de faire varier juste un paramètre, de mesurer y, puis de tracer les données obtenues pour les comparer avec une loi de puissance. Cela nous ne le pouvons pas parce que tous les paramètres sont présent dans l'argument de f. On aurait pu croire qu'on peut écrire la loi

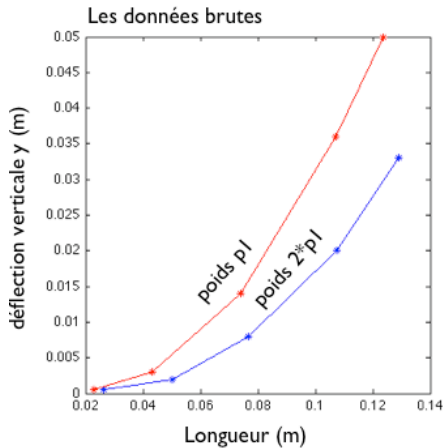


Mesures successives de flexion en augmentant progressivement la longueur de la réglette.

$$y=l*f(Fl^2/B)$$

et comparer avec une loi linéaire en l, mais non, puisque l intervient également comme argument de f. Et c'est pareil pour F et B.

Mais, il ne faut pas désespérer pour autant, car il y a quelque chose que nous pouvons faire tout de même pour tester cette loi et nous donner une comparaison entre nos mesures et cette théorie. Je vais faire une première série de mesures en augmentant progressivement la longueur de la poutre (une réglette) avec un poids donné en son bout. Ensuite je fais une seconde série de mesures avec un autre poids en son bout. Ensuite je trace les données brutes comme cela:



J'ai tracé deux séries de mesures: la première en rouge avec un poids p1, et la seconde en bleu avec un poids p2. J'ai maintenant de quoi tester ma théorie tirée de l'analyse dimensionnelle; puisque cette théorie me dit que y/l dépend exclusivement de  $Fl^2/B$ , alors si je trace y/l en fonction de  $Fl^2/B$ , je devrais voir une seule "courbe maîtresse": toutes les courbes se

superposent et c'est la fonction f qui apparaît ainsi. Ici je ne connais pas la valeur numérique de B que je n'ai pas mesurée, mais ce n'est pas grave puisque je ne l'ai pas fait varier. je trace donc y/l en fonction de  $Fl^2$ :

Dans le jargon du métier, nous disons que les courbes "collapsent". C'est "naturel", puisque les données brutes ne sont rien d'autre que des réalisations particulières d'une loi générale, une loi maîtresse, qui pilote les nombres sans dimension du problème. Cela veut également dire que le graphique ci-dessus est un représentation de f. f est une fonction qui est peut-être très complexe, sur laquelle l'analyse dimensionnelle telle que nous la faisons ici ne nous apprendra rien. On pourrait l'obtenir avec un modèle mathématique ou bien un modèle numérique, mais en fait nous l'avons déjà, puisque c'est la fonction qui est représentée ci-dessus (à part le fait que nous aurions dû mesurer B pour que l'axe des abscisses soit correct, il aurait fallu que l'argument de f soit  $Fl^2/B$ ).

## 3) La technique

### Utilisation de la caméra

Pour ce cours nous avons acheté quatre caméras qui coutent chacune 200 euros, et qui ont la particularité de pouvoir faire des films à haute vitesse: max 1000 images par seconde. Bien sur on paye cette haute vitesse par un nombre réduit de pixels, mais cela nous permet tout de même de capturer des phénomènes très rapides, comme par exemple le rebond d'une balle, le détachement d'une gouttelette d'un robinet, la brisure d'un spaghetti... L'appareil, c'est le Exilim ZR100 de chez Casio.

Les choses de base:

Pour faire des mesures scientifiques, utiliser le mode "manuel": on choisit nous même l'ouverture du diaphragme (la quantité de lumière qu'on laisse rentrer; si on ouvre trop, l'image sera sur-exposée: trop claire, et si on ouvre trop peu, l'image sera trop sombre) et le temps d'exposition: combien de temps on laisse les pixels exposés. Si le temps d'exposition est trop long, l'image sera probablement floue parce que l'image de l'objet sur le capteur aura eu le temps de bouger de plusieurs pixels pendant le temps d'acquisition.

**Exposition et ouverture**

Il y a sur la plupart des appareils photo trois modes de base: A: vous choisissez l'ouverture (entre F3 le plus ouvert, et F7.9 le plus fermé, pour notre appareil), et c'est l'appareil qui choisit le temps d'exposition de sorte à ce que l'image soit bien éclairée: ni surexposée ni sous exposée (trop sombre). Pour le mode S, c'est vous qui choisissez le temps d'exposition et l'appareil choisit l'ouverture de sorte à avoir la bonne luminosité. Pour le mode manuel, appelé le mode M, c'est vous qui fixez les deux paramètres de la photo: l'ouverture et le temps d'exposition.



On choisit le mode A ou le mode S ou le mode M grâce à cette molette

On appuie sur «SET» pour avoir ce menu à l'écran, et on bouge de haut en bas avec les flèches pour choisir A pour régler l'ouverture et S pour régler l'exposition

Ici l'exposition est 1/1000, les pixels accumulés de la lumière pendant 1 millième de seconde.

Le mode manuel est le mieux pour nos mesures, même s'il faut ajuster les deux paramètres, parce que sinon les photos peuvent changer d'aspect en fonction de la variation de la luminosité extérieure pendant la manipe.

Effet de l'ouverture: plus c'est ouvert plus c'est lumineux, donc ça veut dire que on aura besoin d'un temps d'exposition plus court à luminosité égale, donc ça veut dire que la photo sera moins floue si ce que l'on prend en photo bouge vite. Cependant, l'ouverture change aussi la profondeur focale: plus l'objectif est ouvert, plus le plan focal est fin: si l'objet est un peu plus loin ou un peu plus près que le plan focal, alors il sera flou. Dans l'autre sens, si l'objectif est très fermé, le plan focal est très profond: on peut avoir net à l'image à la fois un objet lointain et un objet proche. Cette profondeur du plan focal est un des paramètres très importants pour la photographie. C'est avec cela que l'on peut rendre des effets de profondeur avec une image 2D: le flou et le net donnent cette impression de premier plan/second plan. C'est important par exemple pour les portraits: un visage net sur un plan flou c'est la règle de l'art.

La plupart des appareils photo proposent aussi un mode automatique pour lequel l'appareil choisi lui même l'ouverture et l'exposition (ainsi que le focus, voir plus bas).

**Pour les films:**

On peut choisir différentes fréquences d'acquisition, notées en nombre d'images par seconde. Pour cela, appuyer sur le bouton "menu" en bas à droite de l'écran. Dans les têtes de listes il y a "REC", "Qualité" et "Réglage". Choisir "Qualité". On y choisit la taille des photos pour le premier choix en haut de liste, et la qualité des films pour le second choix. On peut choisir:

- 240 ips (432\*320 pixels)
- 480 ips (224\*160 pixels)
- 1000 ips (224\*64 pixels)

Bien sûr, plus la fréquence est élevée, moins on peut avoir de pixels, parce que sinon, on génère trop de flux d'information. C'est souvent ce flux qui limite la vitesse des caméras. Dans le menu, on lit HS240 ou HS480. Ici HS signifie High Speed, par opposition à STD pour "standard" ou bien FHD pour Full High Definition, avec beaucoup de pixels qui sont deux modes à 30 images par seconde.



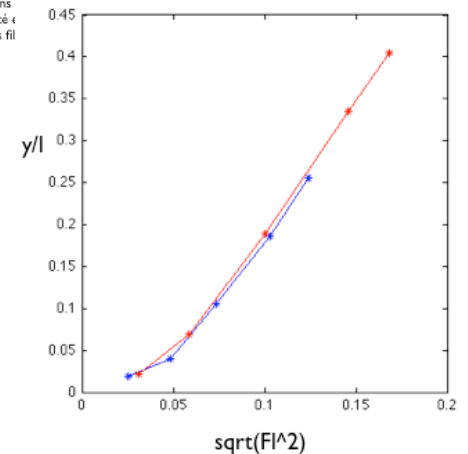
Ce premier choix c'est pour régler la résolution des photos

Le déclencheur photo est là

On déclenche et on arrête les films en appuyant sur ce bouton, et non pas en appuyant sur le déclencheur des photos

Second choix pour régler la qualité des films.

On choisit dans menu la qualité et fréquence des fil l'on va faire.



**Trépied:**

Nous avons acheté des pieds "GorillaPod" pour maintenir en place l'appareil photo. C'est utile parce que on a souvent besoin de le mettre dans une position avec un angle, une hauteur, de biais ou bien à plat. le gorillapod est flexible et permet cela facilement. Lors d'une manipe, on prend souvent plusieurs photos à des instants différents ou bien après avoir fait varier la valeur d'un paramètre, par exemple la température ou bien l'angle d'une cellule par rapport à la verticale, et il faut garder pour toutes les photos le même point de référence: la même position de l'appareil photo. Donc il convient de bien choisir la

position de l'appareil photo par rapport à la manipe, de faire les réglages de zoom d'exposition d'ouverture, de focus. Et ensuite tout garder pareil et prendre les différentes photos de l'expérience que l'on pourra ensuite traiter avec l'ordinateur.

### Le focus

Le focus gère la distance entre l'objet et l'objectif à laquelle l'objet est net sur l'image. Plus proche ou plus loin que le plan focal, l'objet sera flou. Par défaut, les appareils utilisent le mode "autofocus" pour lequel c'est l'appareil qui gère lui-même la distance du focus, de sorte à rendre net la partie centrale de l'image. Ce n'est pas toujours ce que nous voulons faire, et dans ce cas on peut utiliser le focus manuel, c'est le troisième paramètre que nous devons gérer (ouverture, exposition et focus).

Pour mettre l'appareil en mode auto-focus: menu->REC->Mise au point->MF (pour Manual Focus). Une fois ce choix fait, on règle le focus avec les flèches droite (pour augmenter la distance du focus pour photographier ou filmer des objets lointains) et gauche (pour diminuer: photographier ou filmer des objets proches).

On peut aussi choisir d'autres modes: AF pour Auto Focus, Macro pour prendre des objets proches, Super macro pour prendre des objets très proches (à un centimètre de l'objectif, note: il ne faut pas zoomer en macro, le zoom est fixé par le mode macro). On peut choisir aussi le mode "infini" pour photographier par exemple la lune ou les montagnes très lointaines. C'est utile pour la lune, parce que l'auto-focus a du mal à se régler sur un objet petit comme cela et sur un fond complètement noir, donc il faut le régler soi-même.

Retardateur:

Dans le menu->REC->Retardateur, on peut régler le retardateur.

## Les montages avec statif

Lorsque l'on veut faire des montages expérimentaux, la difficulté principale c'est de tenir les uns par rapport aux autres différents éléments: tenir une seringue sur le piston de laquelle on va appuyer pour faire tomber une goutte d'eau, en faisant en sorte que cela se passe juste devant la lampe pour que le phénomène soit très généreusement éclairé, et en mettant l'appareil photo juste devant en mode super-macro pour que la goutte soit la plus grosse possible sur le capteur et l'image enregistrée. Tout cela doit être raisonnablement stable pour ne pas vibrer. L'arrangement doit être facile à faire évoluer parce que l'on se rend compte une fois le montage fait que en fait il aurait fallu un peu plus d'espace ici ou là... Pour tout cela on peut utiliser les statifs qui sont une barre verticale tenue sur un support. Sur cette barre verticale on vient placer des bras au bout desquels sont des pinces. On attache les pinces avec des "noix de serrages". Nous en avons de deux types: un type avec un angle fixé à 90°, et l'autre pour lequel l'angle entre les deux barres peut être changé continûment. On peut aussi maintenir deux statifs l'un avec l'autre en faisant passer une barre transversale. Une grande partie de la précision et l'évolutivité de votre manipe dépendra de manière critique de votre habileté à imaginer un montage pratique. Vous gagnerez beaucoup de temps à une bonne utilisation de ces statifs, noix et pinces. Le statif c'est notre légo

## Traitement des images avec ImageJ

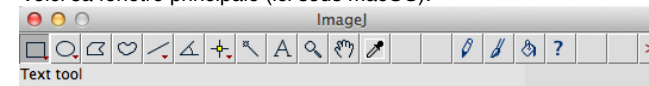
ImageJ est un excellent logiciel de manipulation d'images et de films qui est multi-plateforme (facile à installer sous windows, linux, mac) qui est gratuit (lorsque vous savez l'utiliser il est à vous, rien à payer, issu du travail collaboratif), qui est open-source (vous avez accès au code et vous pouvez le modifier pour proposer des améliorations ou bien faire vos propres applications). C'est notre outil principal de traitement.

Vous pouvez le télécharger ici:

<http://rsbweb.nih.gov/ij/>

Vous trouverez aussi à cette adresse un mode d'emploi beaucoup plus complet que les quelques manipulations particulières que je décris ici. Vous y trouverez beaucoup d'exemples et beaucoup plus de possibilités que vous n'aurez probablement le loisir d'utiliser.

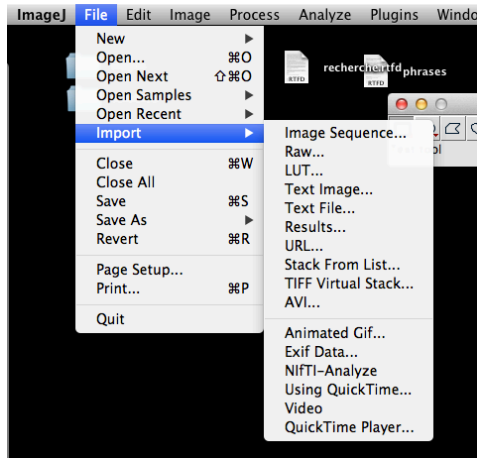
Voici sa fenêtre principale (ici sous macOS):



Et voici sa liste de menu:



Pour ouvrir une image ou un film: File-> open. Parfois plutôt qu'ouvrir un fichier, on veut importer quelques chose: File -> import, ce qui vous propose les possibilités suivantes:

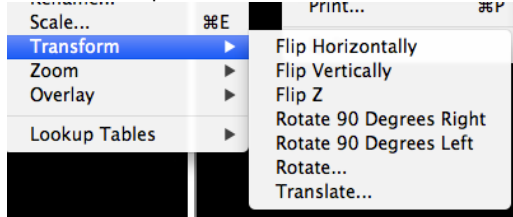


Le plus intéressant ici c'est pour importer une "image séquence", c'est à dire une liste d'images qui sont stockées dans un répertoire.

Manipulations de base pour des images:

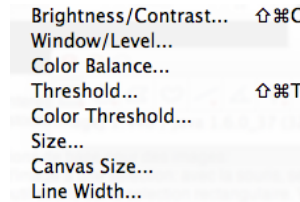
Réduire l'image à une sélection: avec la souris, sélectionner un rectangle de votre image, par défaut l'outil souris est la sélection rectangulaire. Vous pouvez choisir d'autres outils dans la fenêtre principale de ImageJ. Une fois la sélection faite, menu -> Image -> crop, qui réduit l'image à votre sélection. Ceci marche aussi avec les films. On peut sélectionner d'un seul coup toutes les images.

Une autre manipulation de base: rotation. Menu -> Image -> Transform:

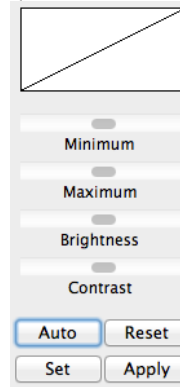


On vous propose de retourner l'image verticalement ou horizontalement, ou bien selon "Z" qui est la dimension du temps pour les films (le film ira alors dans le sens inverse). Vous pouvez faire tourner l'image ou le film de 90 degrés à gauche ou à droite, ou bien d'une valeur que vous donnerez vous-même en choisissant "Rotate...".

Vous pouvez aussi facilement agir sur le contraste et la luminosité, avec menu -> Image -> adjust, qui vous propose le sous-menu suivant:



Si vous choisissez "Brightness/contrast", vous avez accès à la nouvelle fenêtre suivante qui est très utile:



avec laquelle vous pouvez jouer un peu pour vous familiariser intuitivement avec ce qu'elle peut faire.

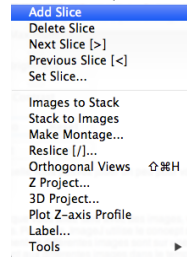
Tout ce que vous allez faire avec des images, vous pouvez aussi le faire très simplement avec des films. Pour cela, ImageJ utilise le concept des "Stacks", un stack c'est une pile. Tout simplement les différentes images sont sur une pile. D'ailleurs cette pile ne correspond pas forcément aux différentes images dans le temps d'un film caméra. Il peut aussi par exemple s'agir des 17 photos successives que vous avez pris d'une manipe en faisant varier progressivement un paramètre. Pour cela vous faire Menu -> File -> Import -> Image séquence, et vous sélectionnez le répertoire dans lequel sont stockées toutes les photos de votre manipe.

Quand vous avez votre stack, soit que vous ayez ouvert un film ou importé une séquence d'images, vous pouvez faire différentes manipulations, par exemple ajuster la luminosité ou découper des sélections ou appliquer une rotation à tout l'ensemble.

La première chose à faire est de se déplacer dans les images de votre stack, pour cela vous avez une barre en dessous de l'image, voici un exemple pour la chute libre d'un filet liquide:

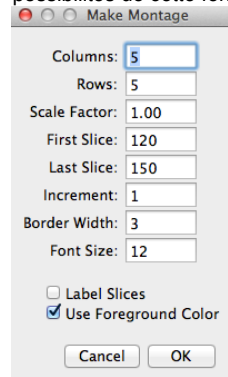
Si vous cliquez sur le petit triangle "play", le film défilera automatiquement.

Une chose très intéressante à faire avec un stack, c'est un "montage". Menu -> Image -> Stack, ce qui vous propose les possibilités suivantes:



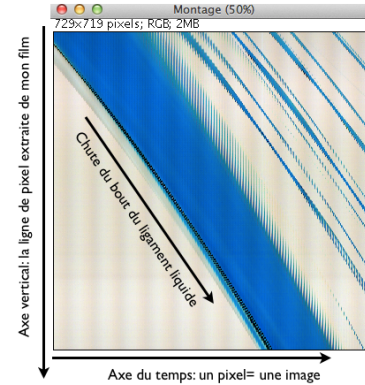
Un montage, c'est faire un tableau avec les différentes image d'un film, en choisissant le nombre de colonnes et le nombre de lignes, et l'intervalle d'images. Ce montage:

A été obtenu pour mon film expérimental avec les paramètres: 5 lignes et 5 colonnes, depuis l'image 120 jusqu'à 150, avec un saut de 1 entre chaque image, et un espace laissé entre les images de 3 pixels. On peut aussi choisir de mettre le numéro de l'image sur chaque image, pour cela on active l'option "Label slices". Il faut jouer avec les possibilités de cette fenêtre pour s'y familiariser intuitivement.



Voici maintenant une utilisation un peu plus subtile de "make montage". Avec l'outil de sélection rectangulaire j'ai sélectionné une ligne de pixels verticale qui coupe mon ligament liquide:

ensuite j'ai découpé cette zone avec "crop" comme décrit plus haut. J'ai donc un film composé uniquement d'une ligne verticale de pixels. Ensuite je fais un montage avec une seule ligne et autant de colonnes que j'ai d'images dans mon film. Ceci me fait un "diagramme spatiotemporel" de la chute de mon ligament liquide:

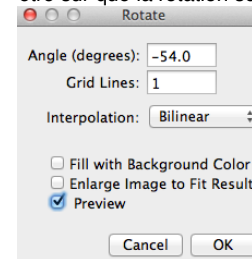


Sur cette image, la verticale c'est la verticale de mon film, mais l'horizontale c'est le temps, je peux donc voir en une seule image l'histoire de la chute de mon fluide (pour la ligne verticale centrale: j'ai perdu toute l'information des pixels latéraux...).

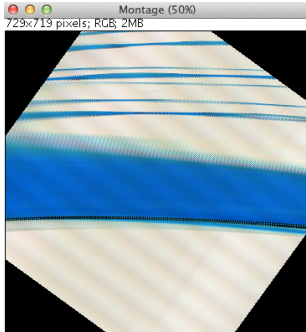
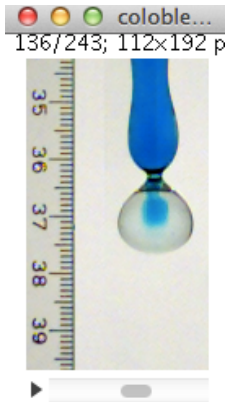
La ligne de chute du ligament c'est ce qui m'intéresse le plus, je voudrais faire un zoom dessus. La première chose à faire c'est de la remettre à l'horizontale. Pour cela dans la fenêtre principale je sélectionne l'outil de mesure d'angle:



Je mesure l'angle que fait la chute du bout avec l'horizontale (la valeur de la mesure est indiquée dans la fenêtre principale). Ensuite je fait la rotation de mon image de cet angle comme décrit plus haut. Dans le fenêtre de rotation, je sélectionne l'option "preview" pour être sûr que la rotation se fait dans le sens que je veux:

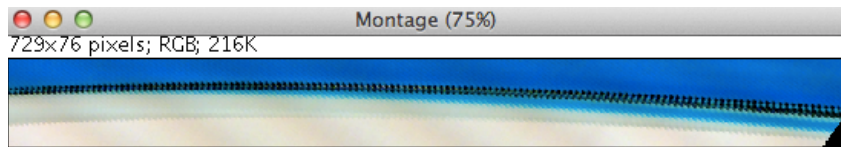


Ici l'angle de rotation est de -54 degrés, avec une interpolation bilinéaire (linéaire selon x et selon y). Ce qui me donne:

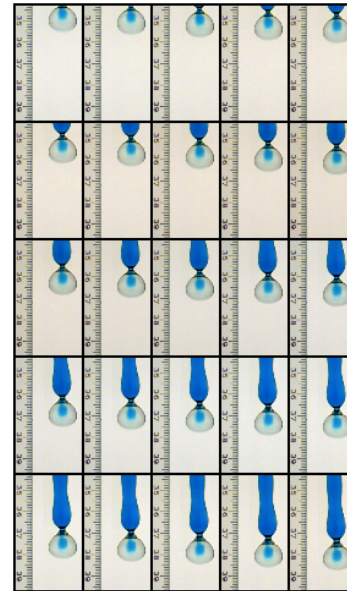
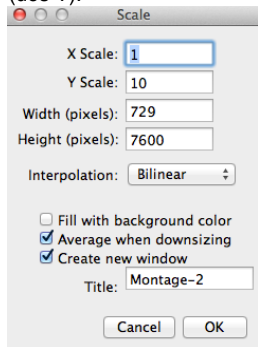


ImageJ a mis du noir là ou il ne savait pas quoi mettre. On peut changer cette couleur si on veut avec Menu -> Image -> Color -> color picker.

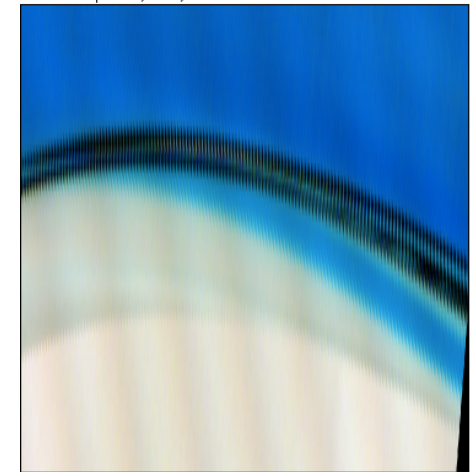
Ensuite je sélectionne la zone rectangulaire qui correspond au bout de mon ligament liquide et je "crope":



Maintenant je veux changer le rapport d'aspect de cette image pour que ce soit plus proche d'un carré, pour cela: Menu -> Image -> scale. Ici je magnifie 10 fois l'axe vertical (des Y).

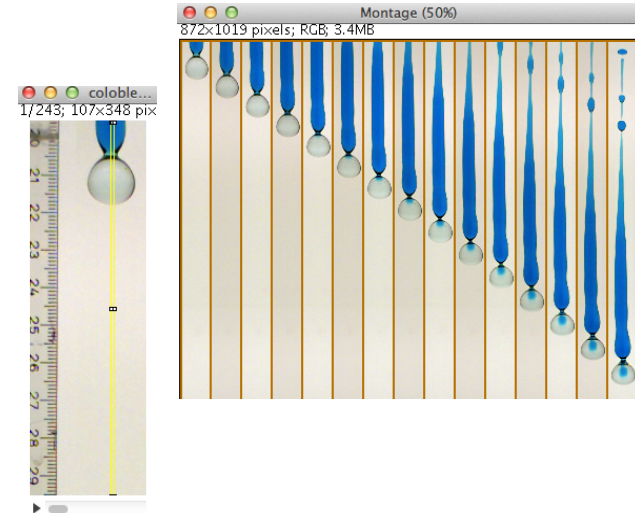


ce qui me donne ceci;  
Montage-1 (50%)  
729x760 pixels; RGB; 2.1MB



Sur cette image je vois bien le colorant qui entre dans le bulbe final du ligament.

Voilà une autre vue:



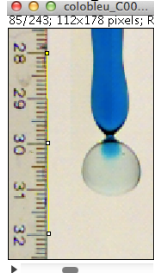


# Prises de mesures dans ImageJ

A partir du moment où le phénomène est "dans la boîte": on a bien choisi tous les paramètres photographiques et tout est capturé, on peut utiliser ces données pour faire des mesures quantitatives avec ImageJ, pour tracer des graphiques et comparer cela à des formules théoriques: voir si notre phénomène correspond bien à notre modèle. Si ça correspond bien c'est que nous avons compris le phénomène: il est quantitativement reproduit par notre modèle. Si les courbes ne sont pas en bon accord, alors ou bien notre mesure a été mal faite: imprécise ou bien nous avons fait varier un paramètre indésirable sans nous en rendre compte, ou alors c'est la théorie qu'il faut remettre en question: changer de modèle, y rajouter des possibilités... C'est la partie technique du travail du scientifique.

Dans notre stack, si c'est un film, alors chaque couche de la pile est une image successive du film, donc nous connaissons l'intervalle de temps entre chaque image (nous l'avons choisi lorsque nous avons fait le film). Il nous faut maintenant connaître la taille des objets à l'image: la taille des pixels. Pour cela il faut toujours avoir à l'image un "étalon de longueur", c'est à dire un objet visible dont on connaît la taille avec précision, et qui occupe une taille assez grande sur l'image pour être une référence précise.

Sur l'image suivante j'ai un étalon de longueur: c'est mon décimètre:

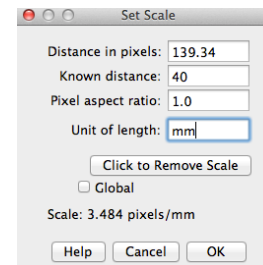


Avec l'outil

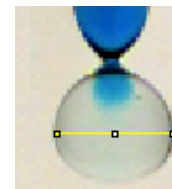


de "straight line" proposé dans la fenêtre principale, je trace un segment sur l'objet dont je connais la taille, sur l'image ci dessus entre les cotations 28 et 32 de mon décimètre. Je sais que la longueur physique de ce segment est 4 centimètres. Ensuite je vais utiliser

cela comme référence de longueur dans ImageJ, pour cela: Menu -> Analyze -> Set scale, ce qui me donne la fenêtre suivante:

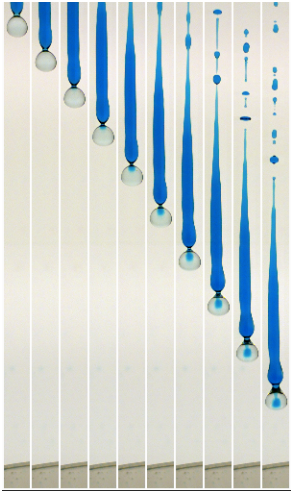


Elle me dit que la longueur en pixels de mon segment est de 139.34 pixels, et moi je lui dis que cette longueur correspond à 40mm, ce qui me fait donc 3.484 pixels par millimètre. Voici mon échelle. une fois que je clique sur OK, alors toutes les mesures seront prises avec cette référence, ce qui est très pratique. Par exemple, maintenant je trace un segment le long de la largeur du bulbe de mon ligament liquide



et la fenêtre principale m'indique toutes les choses: angle par rapport à l'horizontale de ce segment par exemple et position, mais aussi sa longueur qui est de 12.63 (millimètres).

Maintenant je vais utiliser cela pour tracer le graphique de l'évolution dans le temps de la longueur de mon ligament, ce qui me renseignera sur la vitesse à laquelle il chute. Pour cela je prend le résultat d'un montage:



et je mesure successivement avec l'outil pour tracer des segments, la distance entre le haut de l'image et le bas du bulbe. je pourrais noter dans un fichier texte les valeurs successives, mais ce serait fastidieux. ImageJ propose la commande Menu -> Analyze -> mesure, qui met les mesures actuelles à la suite dans un tableau. Il y a un raccourcis clavier qu'il est pratique de connaître pour ne pas aller chercher la commande à chaque fois dans les menus déroulant. Sur macOS, c'est pomme-m.

Voici le résultat, j'ai tracé successivement 10 segments, et à chaque fois j'ai lancé la commande de mesure:

	Area	Mean	Min	Max	Angle	Length
1	5.802	157.624	24	252	-90	21.273
2	11.083	125.650	12.387	252	-89.226	40.367
3	16.140	109.899	0.278	215.370	-89.469	58.912
4	22.463	112.717	4.333	252	-90	82.364
5	28.785	109.680	0	252	-89.703	105.274
6	34.736	111.101	0	252	-89.754	127.092
7	41.579	131.997	22.247	252	-89.795	152.183
8	48.645	134.541	0	252	-90	178.364
9	55.488	149.525	0	252	-90	203.455
10	63.149	150.611	0.906	252	-90.135	231.273

La seule qui nous intéresse là dedans c'est la valeur de "Length" pour le moment. les colonnes de ce tableaux, on peut les recopier et les mettre dans un fichier texte pour les stocker, ou bien dans un tableau pour les tracer, ou bien dans Matlab/octave pour comparer cette courbe avec une éventuelle théorie:

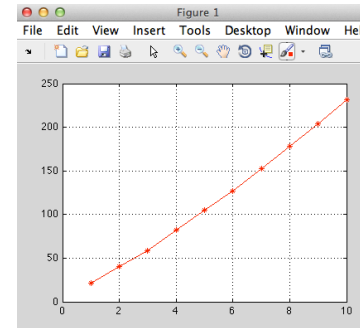
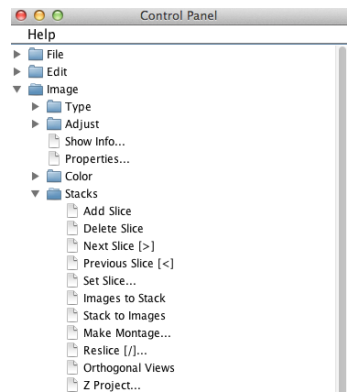


figure faite avec les commandes ci-dessous. Je met tout le tableaux dans la variable "m", puis je trace la colonne 7 en fonction de la colonne 1 qui est le numéro de la mesure:

```
>> m=[1 5.802 157.624 24 252 -90 21.273
2 11.083 125.650 12.387 252 -89.226 40.367
3 16.140 109.899 0.278 215.370 -89.469 58.912
4 22.463 112.717 4.333 252 -90 82.364
5 28.785 109.680 0 252 -89.703 105.274
6 34.736 111.101 0 252 -89.754 127.092
7 41.579 131.997 22.247 252 -89.795 152.183
8 48.645 134.541 0 252 -90 178.364
9 55.488 149.525 0 252 -90 203.455
10 63.149 150.611 0.906 252 -90.135 231.273
];
>> plot(m(:,1),m(:,7),'r*-')
>> grid on
```

Voilà pour ImageJ. Vous pouvez faire beaucoup plus que ça, mais c'est déjà la base pour notre cours. Juste une dernière chose, pour éviter d'aller à chaque fois chercher les commandes, apprenez les raccourcis claviers qui sont indiqués dans les menus à côté des commandes, ou bien utilisez: Menu -> Plugins -> Utilities -> control panel, qui vous propose l'arborescence des menus déroulants sous la forme d'un tableau; par exemple:



(et vous pouvez avoir plusieurs de ces fenêtres ouvertes à la foi).