KTH Mechanics

Contrôle et estimation en écoulements cisaillés

Jérôme Hœpffner

KTH, Sweden

En collaboration avec

Dr. Mattias Chevalier(KTH, FOI), Prof. Thomas Bewley(UCSD), Espen Åkervik(KTH)

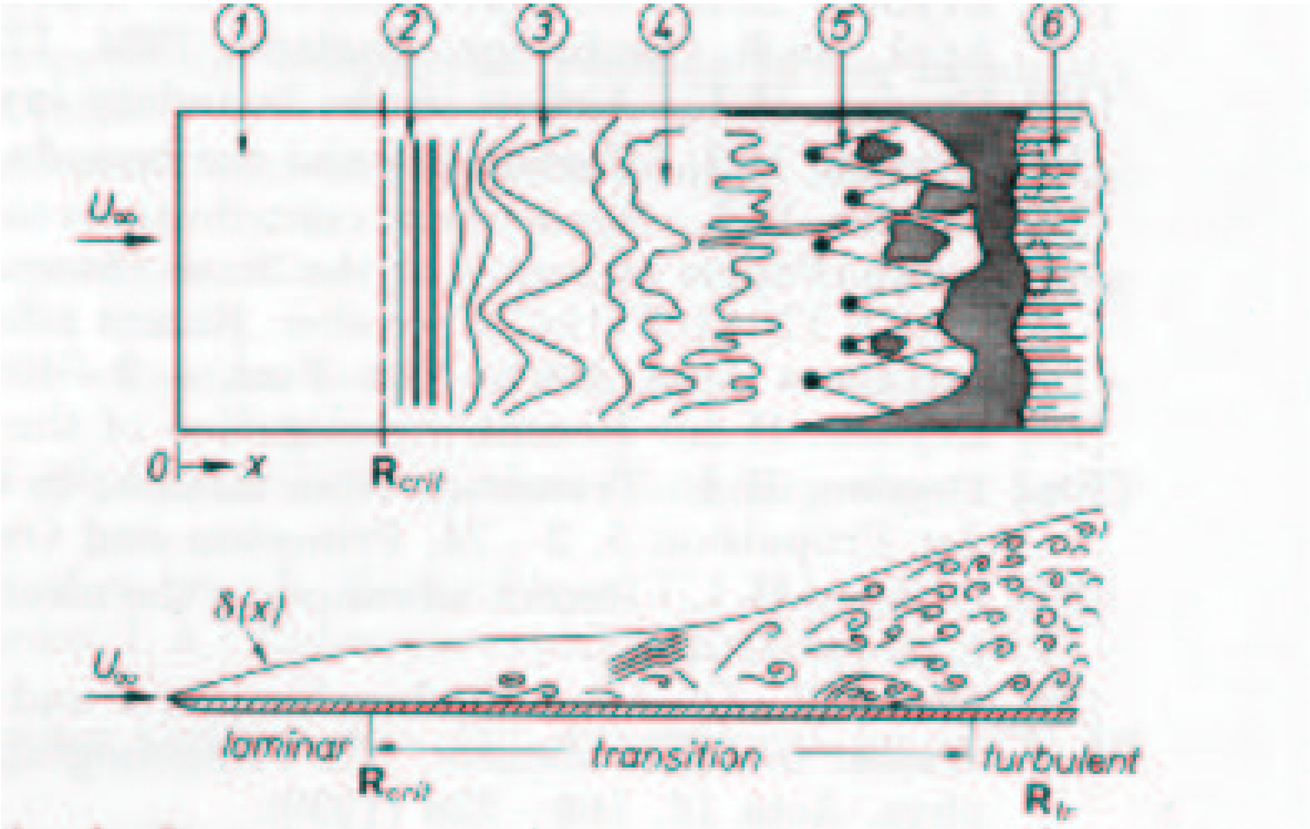
Superviseur de thèse: **Dan Henningson**

Plan du séminaire

- Présentation des écoulements
- Du contrôle
- Encore du contrôle

Instabilités et transition:
1) Tollmien–Schlichting

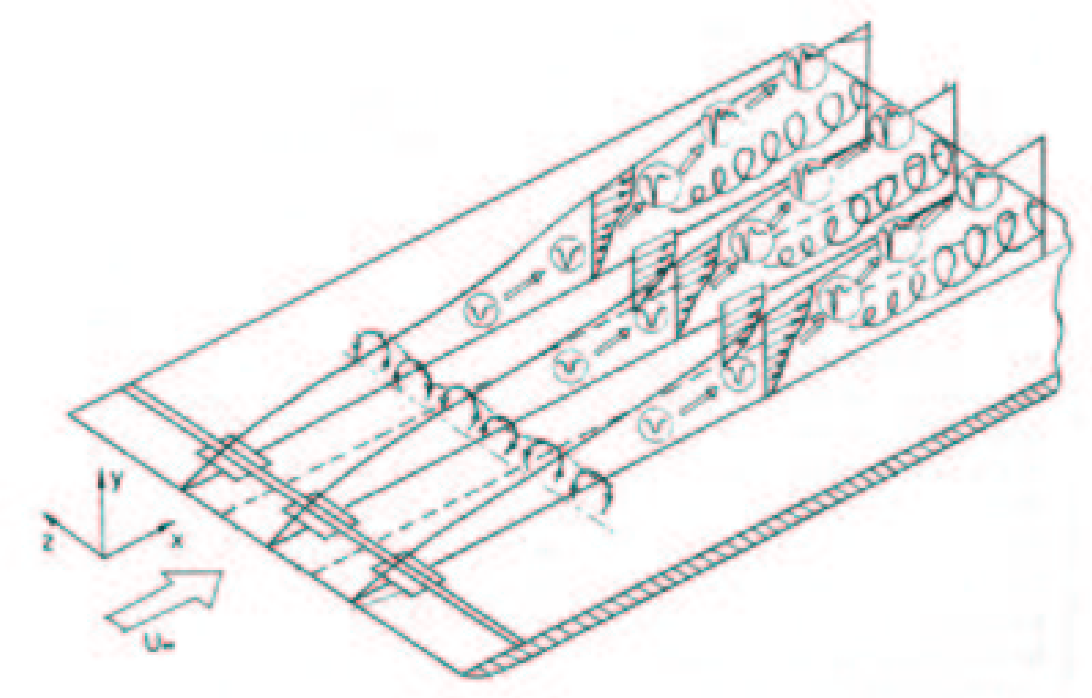
Faible niveau de perturbations exterieures



Instabilité de mode normal: croissance exponentielle.

Instabilités et transition:
2) Croissance transitoire

Niveau modéré de perturbations exterieures

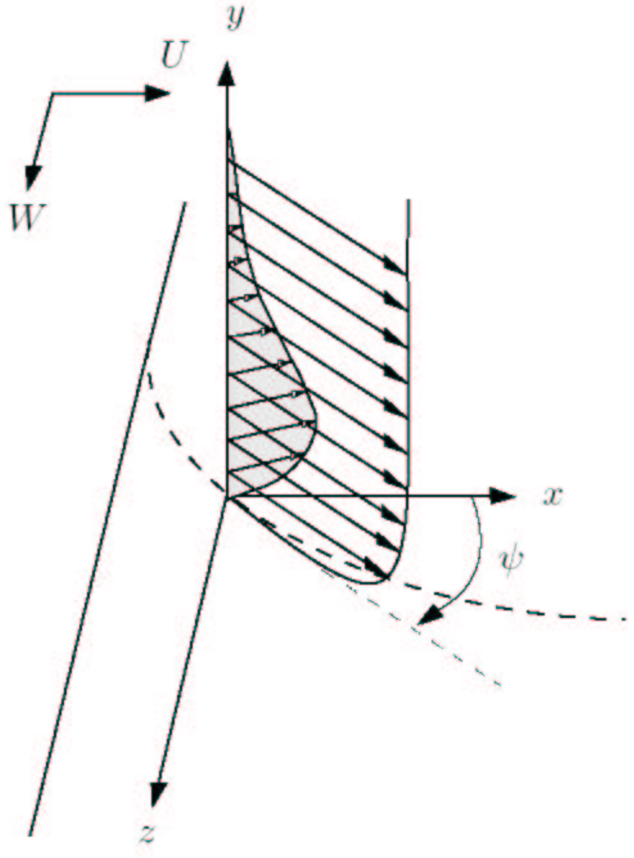


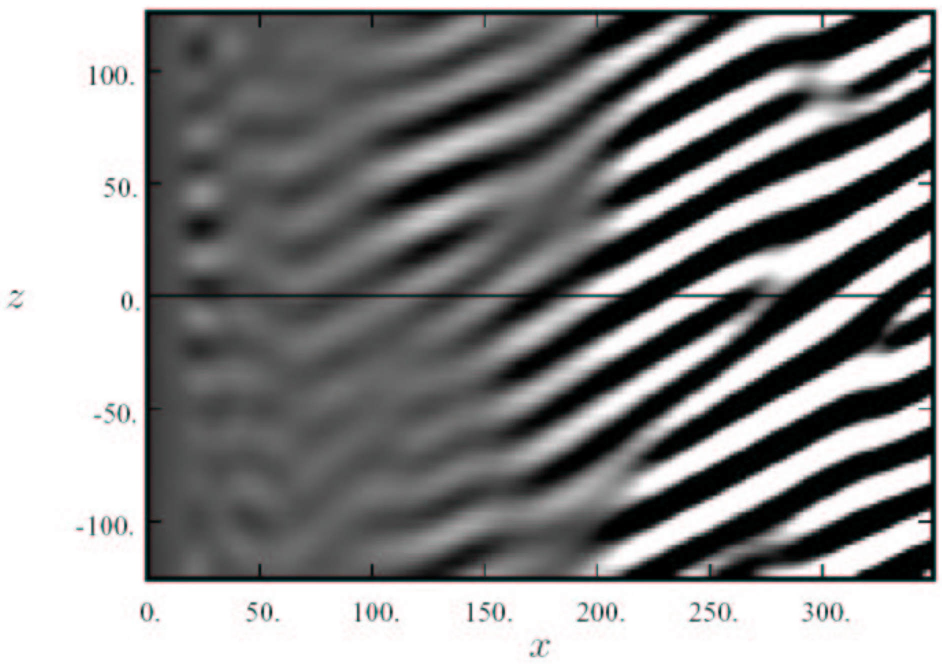
Croissance algebrique transitoire, pouvant mener à la transition

KTH Mechanics

Instabilités et transition:
3) “cross flow”

Couche limite 3D: point d’inflection en direction transverse





Instabilité de mode normal: croissance exponentielle.

KTH Mechanics

Modélisation de la dynamique

1. Equations de Navier–Stokes incompressibles
2. Croissance, instabilité d'ondes $\rightarrow$ transformée de Fourier
3. Considère processus initiaux de la transition $\rightarrow$ équations linéarisées

Equation : Orr–Sommerfeld/Squire

$$\begin{cases} \text{vitesse normale:} & \dot{v} = \Delta^{-1}(-ik_x U\Delta + ik_x U'' + \Delta^2/Re)v \\ \text{vorticité normale:} & \dot{\eta} = -i(k_x U\Delta/Re)\eta + -ik_z U'v \end{cases}$$

Mécanismes de transition

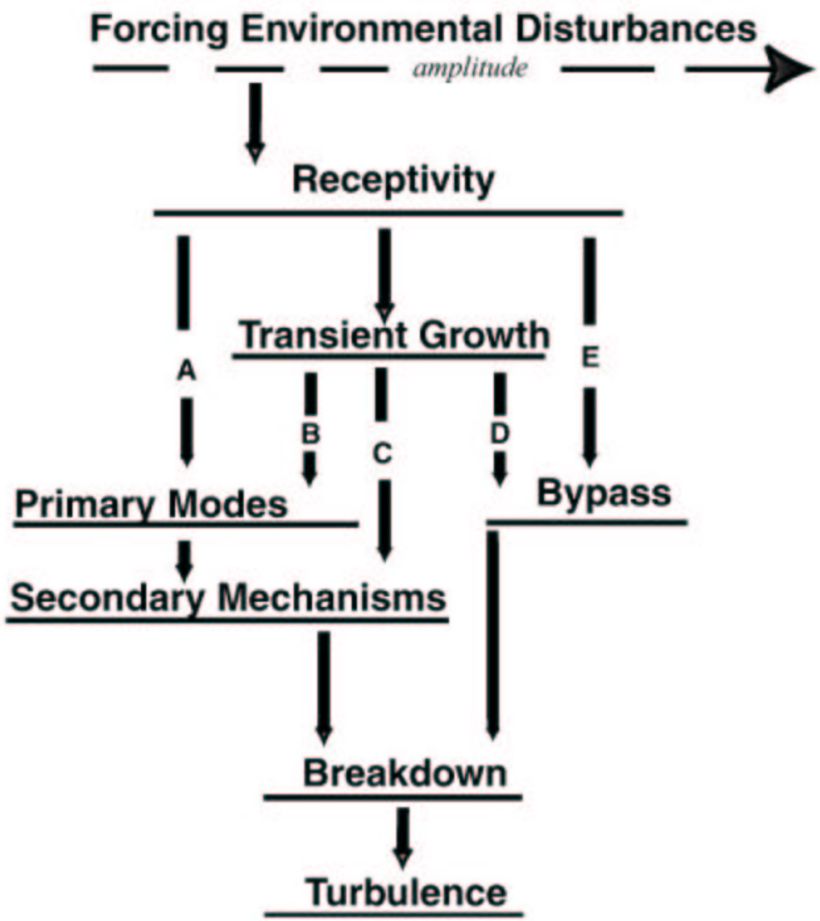


Image: Saric et al, 2002, Annu. Rev. Fluid Mech.

Beaucoup de chemins possibles vers la turbulence en fonction des perturbations

Modélisation des perturbations

Écoulement sensible aux excitations exterieures

$\longrightarrow$ Description stochastique des perturbations

$$\underbrace{f(y,t)}_{\boxed{\text{perturbations}}} = \sum_k \underbrace{\lambda_k(t)}_{\boxed{\text{évolution temporelle}}} \underbrace{l_k(y)}_{\boxed{\text{structure spatiale}}}$$

Perturbations décrites par leur matrice de corrélation R:

$$R(y,y') = \mathrm{cov}(f) = E[f(y,t)\overline{f(y',t)}] \tag{1}$$

PARTIE I

Challenge: évitons (retardons) la transition vers la turbulence

Differents types de contrôles: Passif/actif

passif Pas de dépense énergetique

- optimisation de la géometrie (profil d'aile...)
- Génerateurs de tourbillons
- "compliant surface"
- ...

actif Avec dépense énergetique

- aspiration constante à la paroi
- jet pulsé
- ...

Contrôle actif: boucle ouverte/boucle fermée

Boucle ouverte Pas d'info instantanée

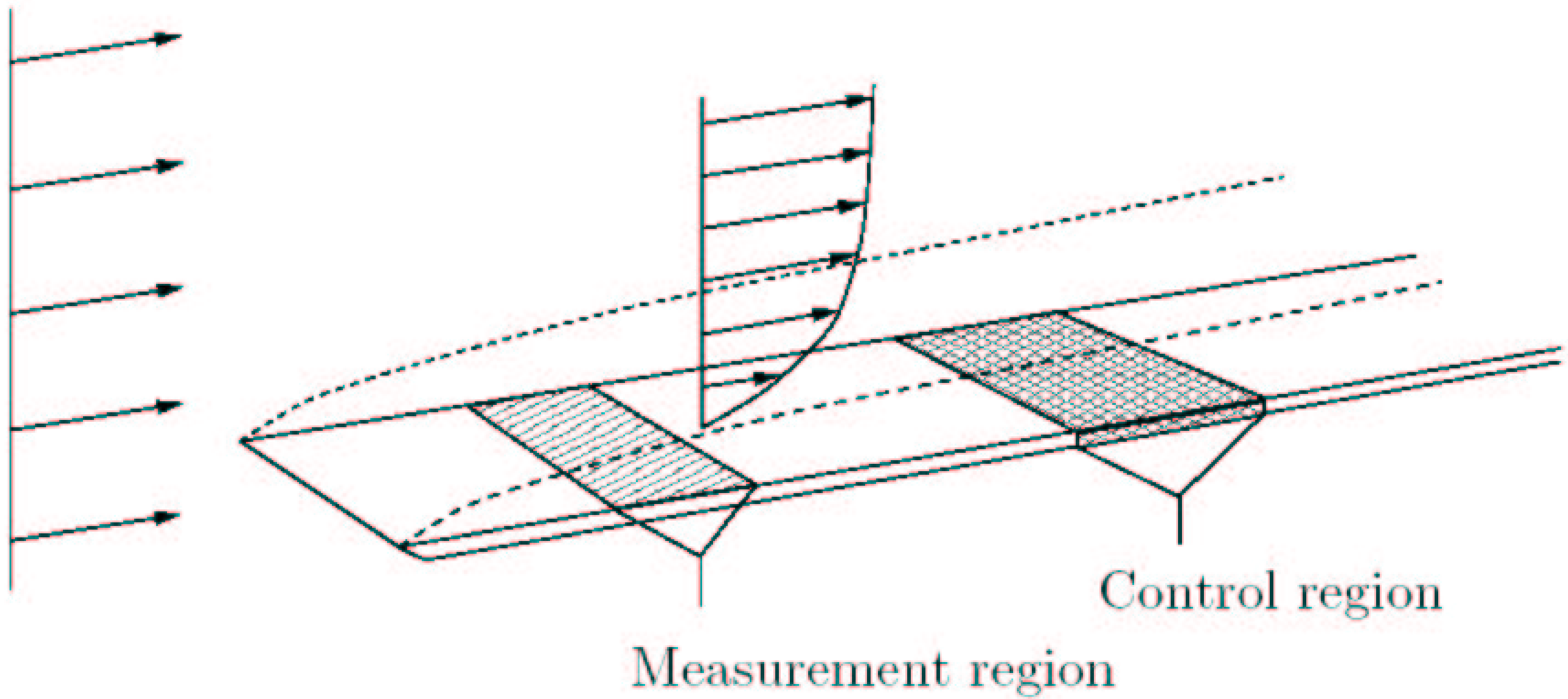
Connaissance à priori des évenements

Boucle fermée Avec info instantanée

Le contrôleur réagit aux évenements $\rightarrow$ mesure

KTH Mechanics

Mesure et actuation



Mesure la **friction** et la **pression** à la paroi

Contrôle par **aspiration/soufflage** à la paroi.

La boucle se ferme

$$\text{Ecoulement}\left\{\underbrace{\dot{q}}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\substack{\text{évolution}\\ \text{intrinsèque}}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{contrôle}}}\right.$$

La boucle se ferme

$$\text{Ecoulement}\left\{\underbrace{\dot{q}}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{évolution}\\ \text{intrinsèque}\end{array}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{contrôle}}}\right.$$

Fermons la boucle: L'actuation u est fonction de l'état:

$$u = Kq$$

KTH Mechanics

La boucle se ferme

$$\text{Ecoulement}\begin{cases}\underbrace{\dot q}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\text{évolution intrinsèque}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{contrôle}}}\end{cases}$$

Fermons la boucle: L'actuation u est fonction de l'état:

$$u = Kq$$

$$\text{Ecoulement contrôlé}\begin{cases}\underbrace{\dot q}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{(A + B_2 K)q}_{\boxed{\text{nouvelle évolution intrinsèque}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}}\end{cases}$$

Contrôle optimal

Minimise la fonction objective:

$$\underbrace{\mathcal{J}}_{\boxed{\text{Fonction objective}}} = \int \Big(\underbrace{q^H Q q}_{\boxed{\text{pénalisation de l'état}}} + \underbrace{\ell^2 u^2}_{\boxed{\text{pénalisation de l'effort de contrôle}}} \Big)\, \mathrm{d}t,$$

Utilise multiplicateurs de Lagrange, le gain optimal K s'obtient:

équation de Riccati:

$$\begin{cases} A^* X + XA - \frac{1}{l^2} X B_2 B_2^* X + Q = 0, \\ \text{Gain de contrôle } K = -\frac{1}{l^2} B^* X, \end{cases}$$

Le gain est calculé une fois pour toutes, “offline”

Estimation

Contrôle $u = Kq$, mais q n'est pas disponible! ... Il faut l'**estimer**

$$\text{Ecoulement}\left\{\begin{array}{l} \underbrace{\dot{q}}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{évolution}\\ \text{intrinsèque}\end{array}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{Contrôle}}} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Estimation

Contrôle $u = Kq$, mais q n'est pas disponible! ... Il faut l'**estimer**

$$
\text{Ecoulement} \begin{cases}
\underbrace{\dot{q}}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\substack{\text{évolution} \\ \text{intrinsèque}}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{Contrôle}}} \\
\underbrace{r}_{\boxed{\text{mesure}}} = \underbrace{Cq}_{\boxed{\text{fonction de l'état}}} + \underbrace{g}_{\boxed{\text{bruit de mesure}}}
\end{cases}
$$

Estimation

Contrôle $u = Kq$, mais q n'est pas disponible! ... Il faut l'**estimer**

$$\text{Ecoulement}\begin{cases} \underbrace{\dot q}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\text{évolution intrinsèque}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{Contrôle}}} \\ \underbrace{r}_{\boxed{\text{mesure}}} = \underbrace{Cq}_{\boxed{\text{fonction de l'état}}} + \underbrace{g}_{\boxed{\text{bruit de mesure}}} \end{cases}$$

$$\text{Estimateur}\begin{cases} \underbrace{\dot{\hat q}}_{\boxed{}} = \underbrace{A\hat q}_{\boxed{}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{}} \\ \underbrace{\hat r}_{\boxed{}} = \underbrace{C\hat q}_{\boxed{}} \end{cases}$$

Estimation

Contrôle $u = Kq$, mais q n'est pas disponible! ... Il faut l'**estimer**

$$\text{Ecoulement}\begin{cases}\underbrace{\dot{q}}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{Aq}_{\boxed{\text{évolution intrinsèque}}} + \underbrace{B_1 f}_{\boxed{\text{perturbations}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\text{contrôle}}} \\ \underbrace{r}_{\boxed{\text{mesure}}} = \underbrace{Cq}_{\boxed{\text{fonction de l'état}}} + \underbrace{g}_{\boxed{\text{bruit de mesure}}}\end{cases}$$

$$\text{Estimateur}\begin{cases}\underbrace{\dot{\hat{q}}}_{\boxed{\phantom{\text{dynamique}}}} = \underbrace{A\hat{q}}_{\boxed{\phantom{\text{évolution}}}} + \underbrace{L(r-\hat{r})}_{\boxed{\text{feedback d'estimation}}} + \underbrace{B_2 u}_{\boxed{\phantom{\text{contrôle}}}} \\ \underbrace{\hat{r}}_{\boxed{\phantom{\text{mesure}}}} = \underbrace{C\hat{q}}_{\boxed{\phantom{\text{fonction de l'état}}}}\end{cases}$$

Evolution de l'erreur d'estimation

Soustrayons les deux équations précédentes:

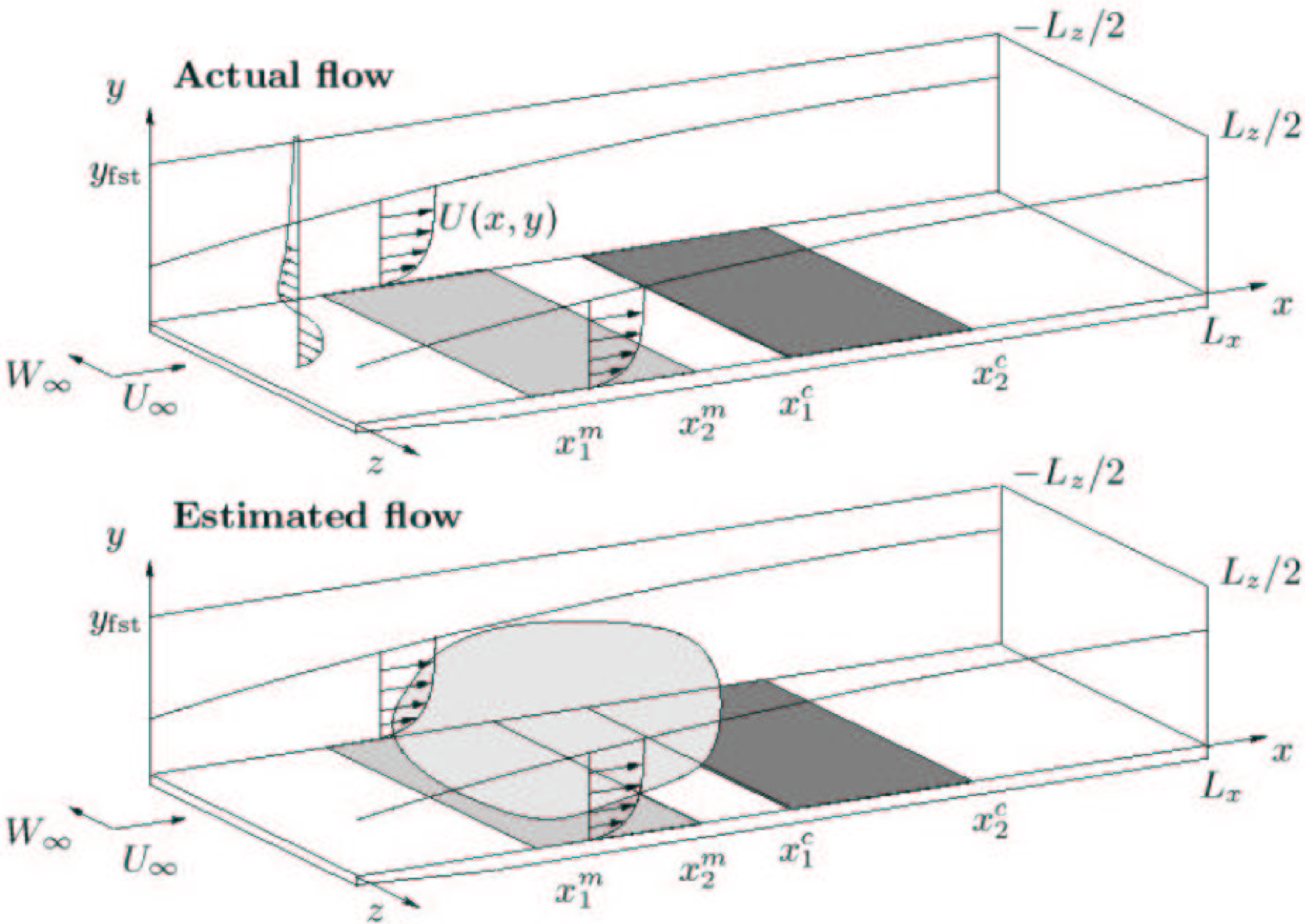
Equation dynamique:

$$\underbrace{\dot{\tilde{q}}}_{\boxed{\text{dynamique}}} = \underbrace{(A+LC)\tilde{q}}_{\boxed{\text{évolution intrinsèque}}} + \underbrace{B_1 f - LCg}_{\boxed{\text{perturbations}}}$$

L'erreur d'estimation subit les perturbations $B_1 f - LCg$

Ecoulement et estimateur

L'estimateur est un système dont l'état tend vers l'état de l'écoulement:



Estimation optimale

Cherchons à minimiser l'erreur d'estimation.

Equations moyennées $+$multiplicateurs de Lagrange,

le gain optimal L s'obtient:

équation de Riccati:

$$\begin{cases} AP + PA^* + B_1 R B_1^* - PC^* G^{-1} CP = 0, \\ \text{Gain d'estimation } L = -PC^* G^{-1}. \end{cases}$$

Le gain est calculé une fois pour toutes, “offline”

La boucle est fermée

L'estimateur est un système linéaire,

input: mesure (r) , **output:** actuation (u)

$$\text{Estimateur} \begin{cases} \dot{\hat{q}} = (A + B_2K + LC)\hat{q} - Lr, \\ u = K\hat{q}. \end{cases}$$

Relation input-output:

$$u(t) = \int_0^\infty \underbrace{-K\mathrm{e}^{(A+B_2K+LC)\tau}L}_{G(\tau)} r(t-\tau)d\tau.$$

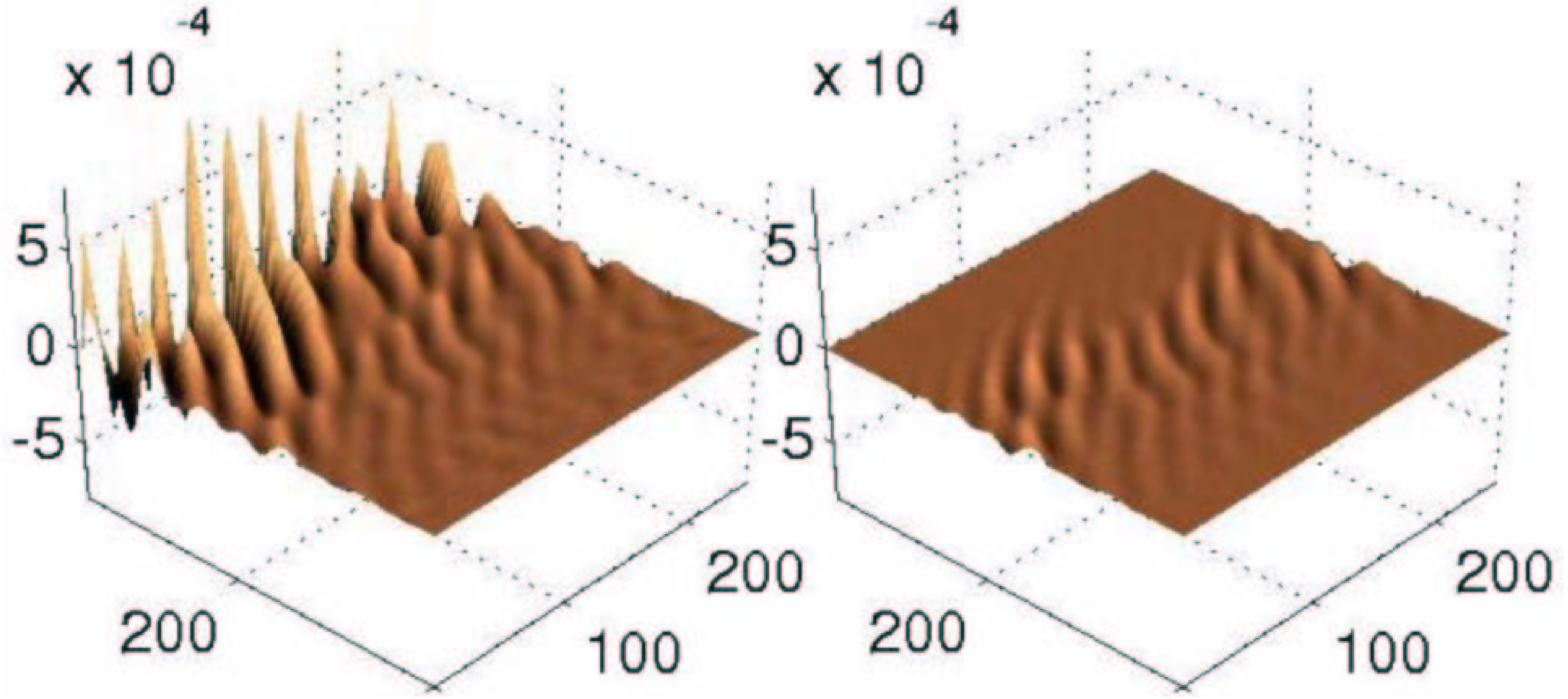
L'actuation depend de l'historique de la mesure

KTH Mechanics

Un example: couche limite 3D

Ecoulement et estimateur:

Dévelopement, estimation, contrôle



PARTIE II

Quand le modèle dynamique est simplifié

KTH Mechanics

Raisons d'avoir un modèle dynamique simplifié

1. Le modèle dynamique doit être linéaire...
2. Imperfection de la réalité non prises en compte
3. Pour que l'optimisation soit rapide (ou même possible...)
4. pour que la réaction soit rapide (feedback!)

Par expérience : moindre exigence pour un modèle à fin de contrôle

Les élements en jeu

Interplay de quatres élements:

- Le système réel
- le modèle dynamique
- le modèle de perturbations
- la fonction objective

A discuter:

1. Imperfection du modèle et estimation
2. Imperfection du modèle et contrôle

1) Imperfection du modèle et estimation

$$\begin{cases} \dot{q} = (A \qquad\qquad)q + (B_1 \qquad\qquad)f + (B_2 \qquad\qquad)u \\ r = (C \qquad\qquad)q + g. \end{cases}$$

1) Imperfection du modèle et estimation

$$\begin{cases} \dot{q} = (A + A^{imp})q + (B_1 + B_1^{imp})f + (B_2 + B_2^{imp})u \\ r = (C + C^{imp})q + g. \end{cases}$$

Les imperfections de modèle introduisent des perturbations additionelles

Ces perturbations peuvent être

prises en compte par le terme stochastique

Un example: estimation de canal turbulent

KTH Mechanics

Estimation de la turbulence en canal, $Re_\tau = 100$

Le modèle dynamique est linéaire:

Les perturbations sont le forcage dû aux termes non-linéaires:

$$\frac{\partial \breve{u}}{\partial t}+U\frac{\partial \breve{u}}{\partial x}+\breve{v}\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \breve{p}}{\partial x}+\frac{1}{Re}\Delta\breve{u}-\breve{u}\frac{\partial \breve{u}}{\partial x}-\breve{v}\frac{\partial \breve{u}}{\partial y}-\breve{w}\frac{\partial \breve{u}}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

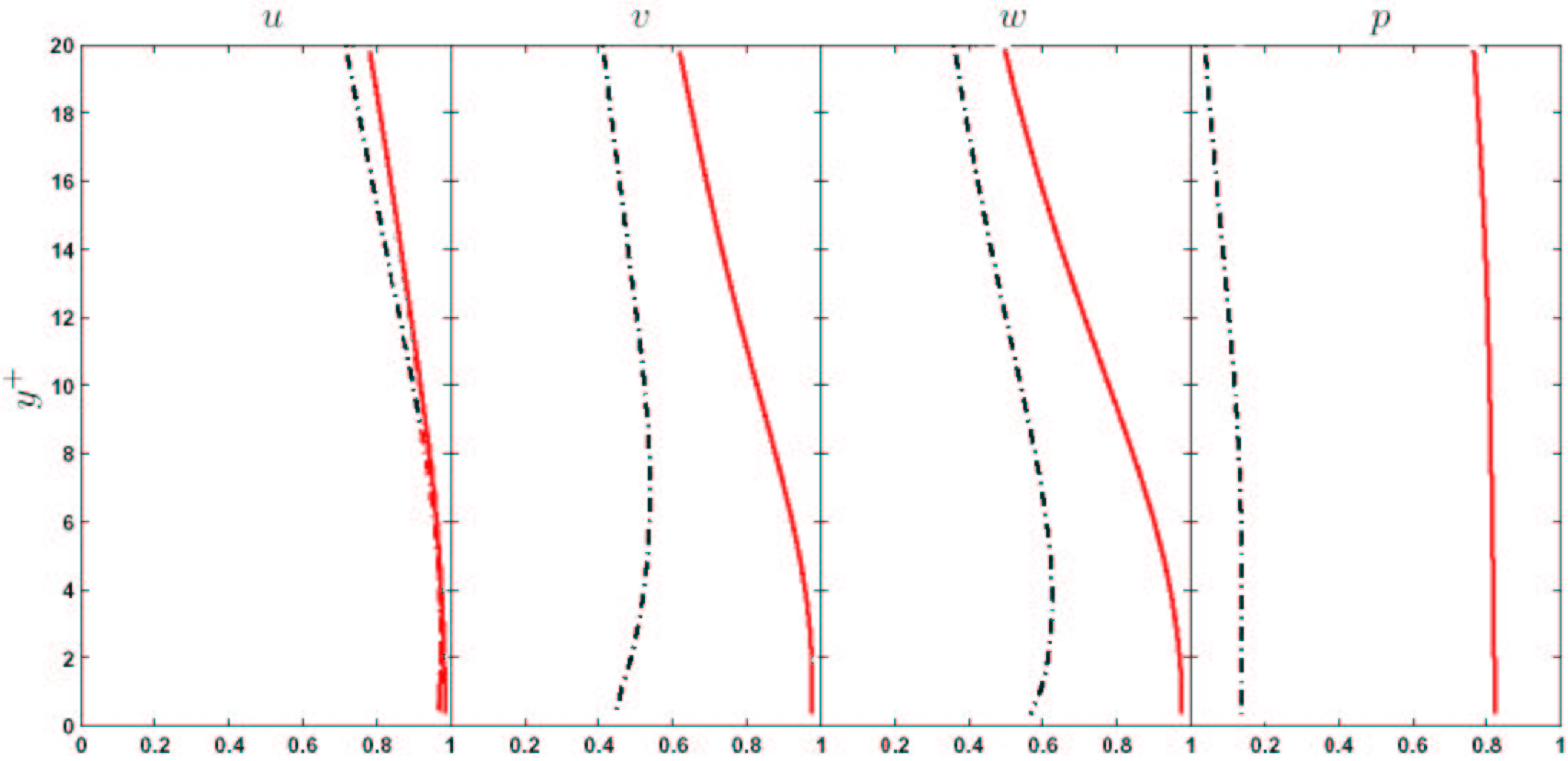
$$\frac{\partial \breve{v}}{\partial t}+U\frac{\partial \breve{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \breve{p}}{\partial y}+\frac{1}{Re}\Delta\breve{v}-\breve{u}\frac{\partial \breve{v}}{\partial x}-\breve{v}\frac{\partial \breve{v}}{\partial y}-\breve{w}\frac{\partial \breve{v}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \breve{w}}{\partial t}+U\frac{\partial \breve{w}}{\partial x} = -\frac{\partial \breve{p}}{\partial z}+\frac{1}{Re}\Delta\breve{w}-\breve{u}\frac{\partial \breve{w}}{\partial x}-\breve{v}\frac{\partial \breve{w}}{\partial y}-\breve{w}\frac{\partial \breve{w}}{\partial z}$$

$\rightarrow$ calcule leur covariance avec une DNS, et utilise pour l'estimation.

Performance de l'estimation

Correlation écoulement/estimateur à différentes distances de la paroi.



noir: modèle décorellé,

rouge: avec les statistiques des termes non-linéaires

2) Imperfection du modèle et contrôle

Un example:

1. Les processus de transition à la turbulence sont non-linéaires
2. Je ne peux pas les exprimer dans le cadre de mon optimisation
3. Il faut donc viser un objectif intermédiaire ...

Avez-vous des idées?

Conclusion

- Le contrôle optimal en boucle fermée s'obtient par la séparation estimateur/contrôleur
- L'actuation est fonction de l'historique de la mesure
- Résolution numérique: deux equations de Riccati

- Les élements déterminants sont
  - Le modèle dynamique
  - le modèle de perturbations
  - la fonction objective

- Un bon choix de modèle de perturbations et de fonction objective relève les exigences sur le modèle dynamique