ÉCOULEMENT

Interacting Boundary

COMPARAISON DE DIFFÉRENTES

LAGRÉE P.-Y.

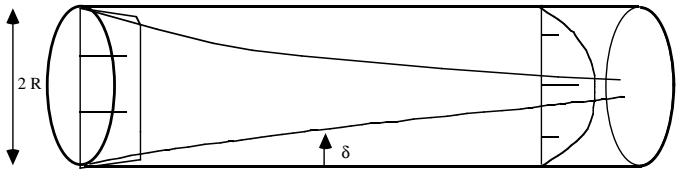
Laboratoire de Modélisation en Mécanique
UMR 7607
4 place jussieu - Boîte 162
75252 Paris
pyl@ccr.jussieu.fr

Hypothèses **RÉDUCTRICES**!!!

- écoulement laminaire - *transitionel...*
- écoulement stationnaire - *pulsé...*
- écoulement newtonien - *le sang n'est pas de l'eau...*
- écoulement axisymétrique - *les sténoses sont tordues et 3D...*
- parois fixes - *les tissus se déforment...*

MAIS faute de mieux ces hypothèses sont utilisées pour résoudre les équations de Navier Stokes.

1.1. Problème d'entrée dans un tuyau



On adimensionne avec le U_0 max du Poiseuille
x est mesuré avec R R_e et $R_e=U_0R/\nu$
r est mesuré par R

On résout

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{r\,\partial r}(rv)=0\ ;\quad (u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial r}u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{r\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}u),\quad \frac{\partial}{\partial r}p = 0$$

u=v=0 en r=1 et ∂u/∂r=0 et v=0 pour r=0.
u(0,r)=1/2 et v(0,r)=0 en entrée

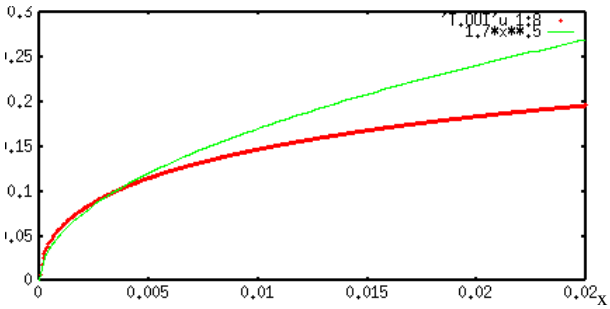
* résolution en différences finies, avancée en x (implicite en x). A chaque pas il faut trouver la pression qui permet d'assurer la vitesse v nulle en r=0 et 1.

1.2. Problème d'entrée dans un tuyau: résultats

* près de l'entrée on retrouve Blasius!

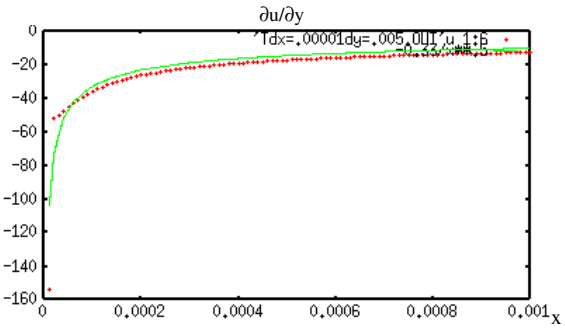
$$\psi(x,r) = \int_0^r r\,u\,dr;\quad \text{donc } \left(\int_0^h 1\,r\,dr\right) - \psi(x,h)/u(x,0)$$

qui peut s'interpréter comme une épaisseur de déplacement.



"épaisseur "de déplacement $(1/2-\int_0^1 r\,u/u(x,0)\,dr$ et solution de Blasius.

déplacement $\delta_1(x)$, près de l'entrée



frottement pariétal ∂u/∂y à la paroi

DANS UNE STÉNOSE

Layer Flow in a Stenosis

MÉTHODES DE TYPE COUCHE LIMITE.

LORTHOIS S.

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse,
UMR CNRS 5502,
Allée du Professeur Camille Soula
31400 Toulouse Cedex.
lorthois@imft.fr

Analyse Asymptotique.

Nouvelle hypothèse : $R \to \infty$

Les ordinateurs sont de plus en plus puissants, c'est bien...
Les algorithmes de résolution de N.S. sont de plus en plus puissants, c'est bien...

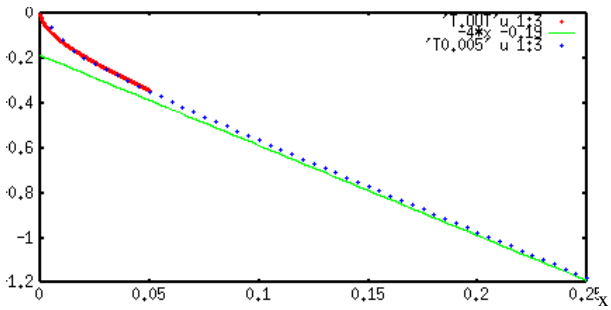
MAIS il est bon de toujours connaître les méthodes asymptotiques:
- car elles permettent de savoir où il faut "raffiner"
- car elles extraient les équations minimales et donc les mécanismes
- car elles extraient les échelles et les nombres sans dimensions pertinents
- car elles sont rapides

- utilisation: variation des paramètres/ méthodes inverses... simulateurs temps réels?

1.3. Problème d'entrée dans un tuyau: Evolution de la pression

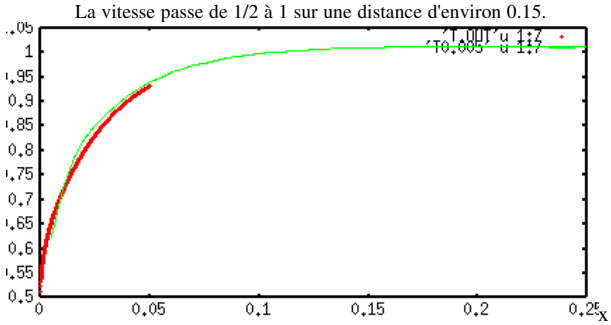
* à la sortie au loin: on observe (en adimensionné) Poiseuille:

$$p = -0.19 - 4x, \qquad u = 1-r^2.$$



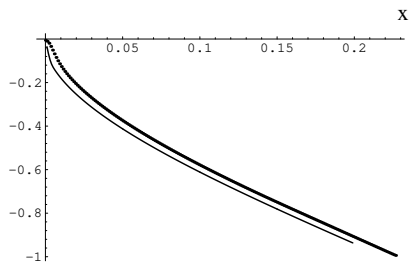
évolution de la pression, asymptote et chute de pression d'entrée (p(x))

La vitesse passe de 1/2 à 1 sur une distance d'environ 0.15.

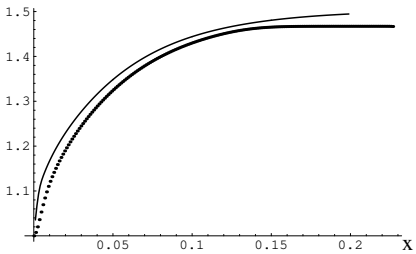


1.4. Problème d'entrée dans un tuyau:
Comparaison avec un code commercial

On retrouve le résultat avec Fluent (ici dans le cas plan).
On trace ici les mêmes courbes sans dimensions.



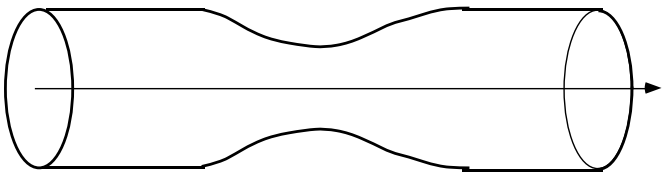
p(x) sans dimensions.



u(x) adim

Les résultats sont comparables.

2.1. cas de la sténose



x mesuré avec $R\ U_0R/\nu$
r mesuré avec R,
u avec U_0 et v avec U_0 /(U_0R/ν)

en pratique on pose $\eta=r/h$

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{h\eta\partial\eta}(\eta v) - \eta\frac{h'}{h}\frac{\partial}{\partial\eta}u = 0$$

$$(u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{h\partial\eta}u - \eta u\frac{h'}{h}\frac{\partial}{\partial\eta}u) = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(\frac{\partial}{\partial\eta}u) + \frac{1}{h^2}\frac{1}{\eta}(\frac{\partial}{\partial\eta}u),$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}p = 0$$

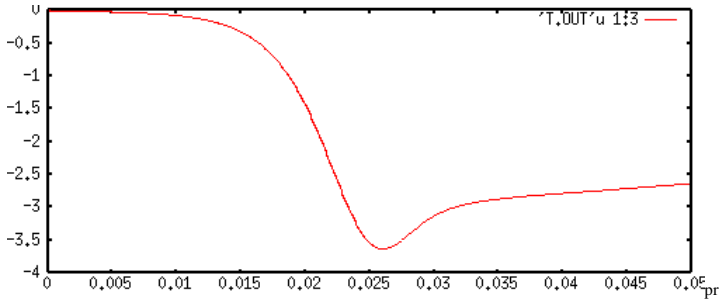
$u=v=0$ en $\eta=1$ et $\partial u/\partial\eta=0$ et $v=0$ pour $\eta=0$.

$u(0,\eta)=(1-\eta^2)$ et $v(0,\eta)=0$ en entrée
h(r) fonction donnée (forme relative de la sténose)

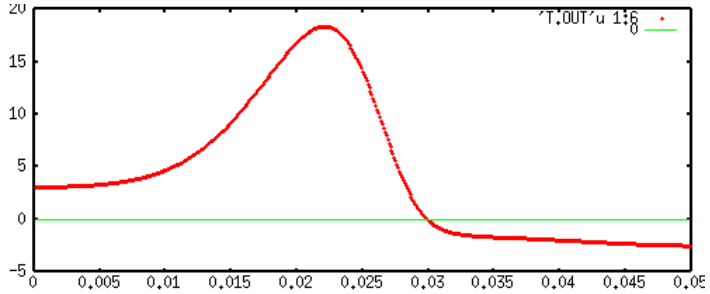
Équations "Reduced Navier Stokes p(x)"

Résolution par différences fines (marche en avant)

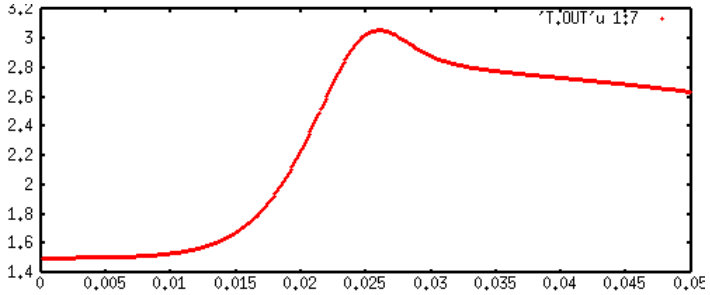
2.2. cas de la sténose: exemples de résultats



Pression P(x)



frottement



vitesse au centre

3.1 équations de couche limite interactive

"Interacting Boundary Layer"

décomposition à grand nombre de Reynolds:
Fluide Parfait/ Couche limite:

Fluide parfait:

nouvelle hypothèse réductrice: Fluide parfait linéarisé (justification: il suffit d'une petite bosse pour faire décoller la couche limite).

si h/L->0 la vitesse dans un tube délié où il y a une bosse d'épaisseur εh est:

$$u(x,0) = 1 + \varepsilon\ f$$

attention f est en réalité f augmenté de l'épaisseur de déplacement...

Couche limite

x mesuré avec L_e y mesuré avec $L_e/R_e^{1/2}$

i) continuité

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0.$$

ii) quantité de mouvement:

$$u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$

iii) u=v=0 sur y=f(x) et condition de raccord

on calcule

$$\delta_1(x) = \int_0^\infty (1 - u)\,dy. \text{ et } \tau = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$$

condition de raccord ("de couplage" avec le fluide parfait)

$$u = 1+\varepsilon(f+\delta_1).$$

3.2 comparaison IBL & RNS p(x)

sur simplification **méthode intégrale**: les équations sont intégrées transversalement

$$U_0^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\delta_1}{H}) + (\delta_1)(1+\frac{2}{H})\ U_0\frac{\partial}{\partial x}U_0 = \frac{f_2\ H}{R\ \delta_1}\ U_0.$$

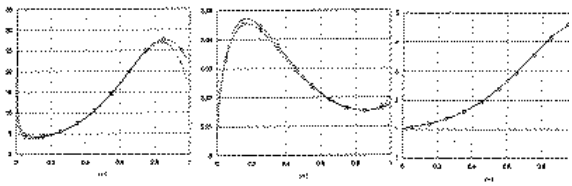
problème de la "fermeture": on prend les profils de Falkner Skan

Résolution couplée en mode "semi inverse"
permet de calculer la séparation de la couche limite
couplage fort

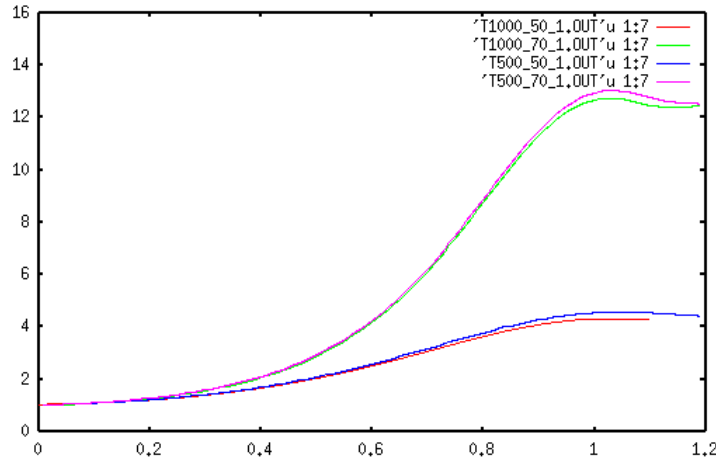
méthode itérative:

δ_1^n	donne par la couche limite	u_{cl}^n
δ_1^n	donne par le fluide parfait	u_{fp}^n

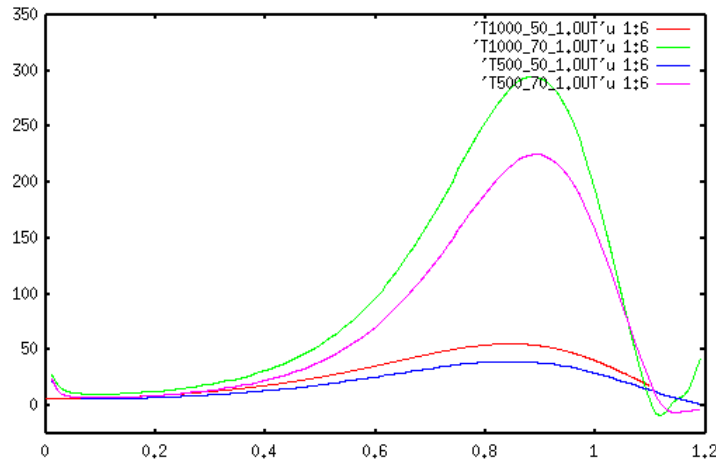
$$\delta_1^{n+1} = \delta_1^n + (\lambda\frac{d}{dx} + \mu)\ (u_{cl}^n - u_{fp}^n)$$



2.3. cas de la sténose: exemples de résultats

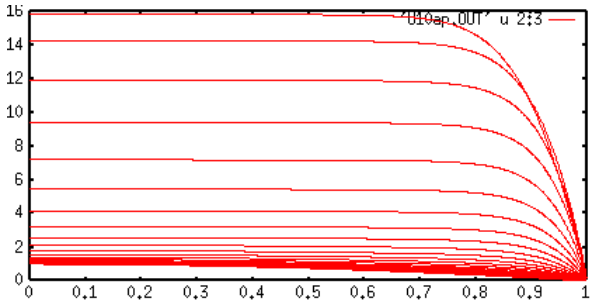


vitesse au centre



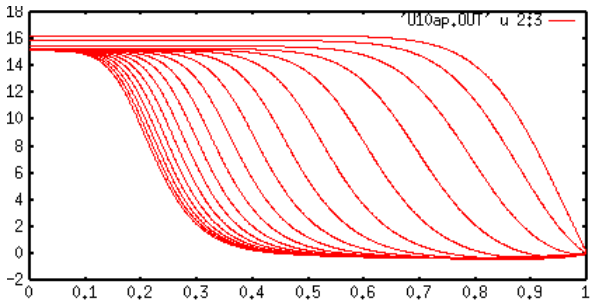
cisaillement pariétal $\tau(x)$ dimensionné par Poiseuille.

2.4. profils de vitesse....



$u(x,\eta)$ pour différents $x<2.5$,

on note que l'on passe de Poiseuille à un profil plat (α=0.8)



$u(x,\eta)$ pour différents $x>2.5$,

on note que l'on passe d'un profil plat à un jet... (α=0.8)

apparition de profils plats: disparition de Poiseuille...

3.3 Estimation du frottement maximal

Equation reduite pour le frottement pariétal issue de la méthode intégrale

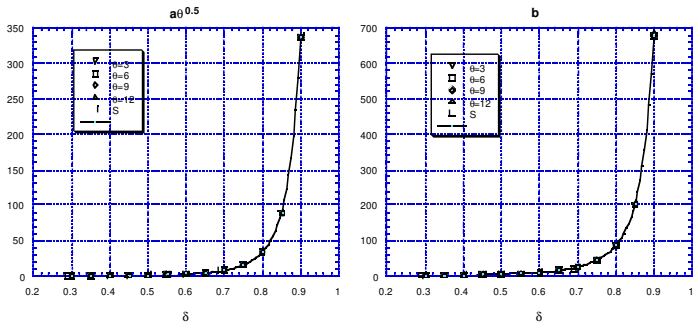
$$\tau = \frac{1}{4} f_2 \, H \frac{U_e \, R}{\Delta_1} \sqrt{Re_0}$$

"formule magique" pour la

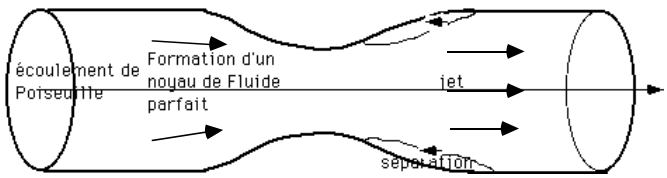
contrainte de cisaillement pariétale max:

$$\sim \frac{\kappa}{(1-(R_0-R_{col})/R_0)^3}((Re_0 \, R_0/L_{stenose})^{1/2}+3)$$

Bon accord avec les valeurs de la littérature (Navier Stokes!!!)



3.4 Conclusion



suite de simplifications

NS

Équations Reduced Navier Stokes p(x)

Interacting Boundary Layer

Integral Interacting Boundary Layer

avantage

Compréhension de l'écoulement

Bonnes variables sans dimensions

Comparaisons excellentes avec NS complet!

biblio

Fletcher C.A.J. (1991) "Computational techniques for fluid dynamics", Springer Verlag
Le Balleur J.-C. (1982), VKI lecture series 1982-04:: 1-87.
Lorthois S, Lagrée P.-Y., Marc-Vergnes & J.-P., Cassot F. submitted to the J. Biomech.
Lorthois S, Lagrée P.-Y., CRAS 99 to appear
Rubin S.G. HIMANSU A. (89) Int J. Num meth fluids 1395-1411
Siegel J.M, Markou C.P., Ku D.N. & Hanson, S.R (1994), ASME J. of Biomech. Eng, Vol. 116: 446-451.
Smith F.T. (1979), J.F.M. vol 90, part 4: 725-754.