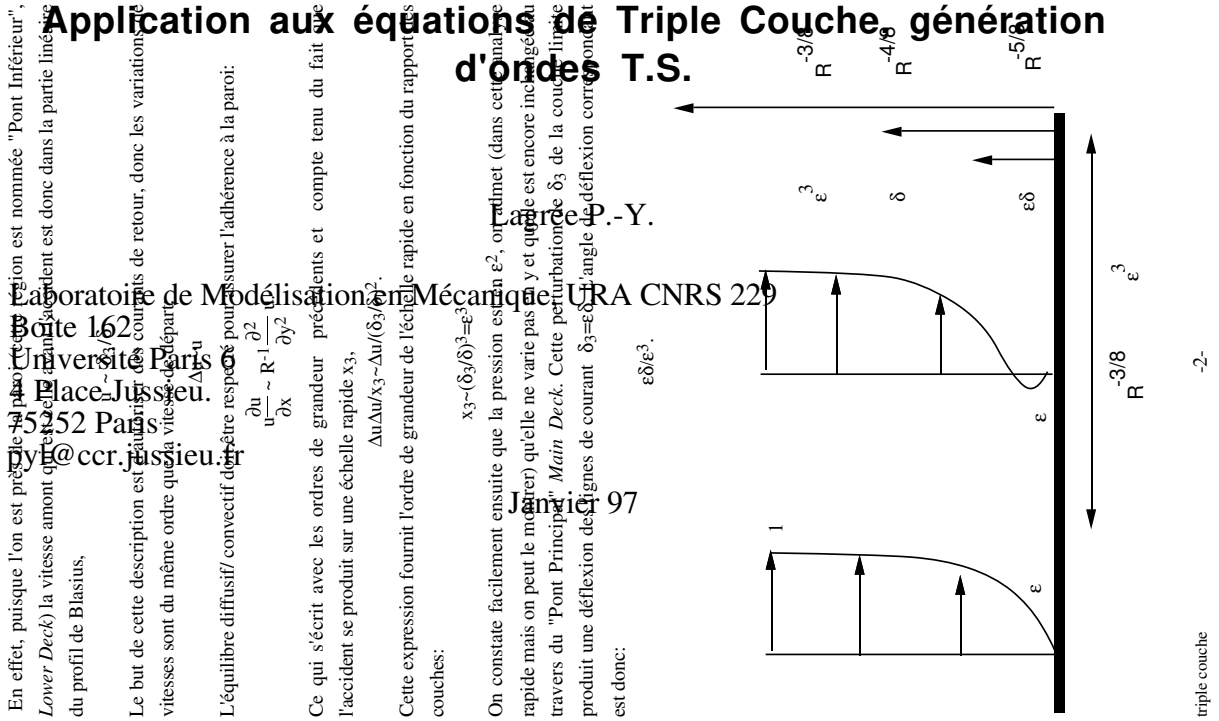
Application aux équations de Triple Couche, génération d'ondes T.S.

Lagrée P.-Y.

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, URA CNRS 229
Boîte 162
Université Paris 6
4 Place Jussieu.
75252 Paris
pyl@ccr.jussieu.fr

Janvier 97



Dans cette partie nous allons réexaminer les équations de couche limite instationnaire dans le cadre de la triple couche. Nous commençons par quelques rappels sommaires: d'une part sur le fait que la séparation stationnaire à haut nombre de Reynolds se décrit par les équations de triple couche, et d'autre part sur le fait que la branche inférieure des ondes de Tollmien Schlichting (T.S.) à haut nombre de Reynolds est décrite par ces mêmes équations. Nous verrons qu'il n'y a plus de singularité en temps fini, mais que l'instabilité d'onde courte demeure. Ceci étant, l'idée est de créer dans un premier temps des d'ondes T.S. en faisant vibrer une petite bosse plongée dans un écoulement subsonique, supersonique ou de convection thermique mixte. Puis dans un second temps de créer des ondes T.S. par transformation d'une onde acoustique incidente (réceptivité). Le but ultime étant un éventuel contrôle de la couche limite par annihilation d'ondes TS.

1. RAPPELS

Les deux hypothèses principales sont que la séparation d'une couche limite de Blasius se produit près de la paroi (au voisinage d'une bosse par exemple) à une échelle transverse δ_3 plus mince que l'épaisseur de couche limite δ, et que cela induit des variations longitudinales à une échelle rapide x_3 plus petite que l'échelle L (qui est l'ordre de grandeur de l'abscisse de la bosse). Les autres échelles suivent alors par analyse phénoménologique (Neiland 69).

(From out of the blue...)

Cette perturbation est alors ressentie par le fluide parfait comme une bosse de longueur ε^3 et d'épaisseur $\varepsilon\delta$. Le fluide parfait linéarisé rétroagit donc avec ε^3 comme échelles transverses et longitudinales ("Pont Supérieur" *Upper Deck*) à cette bosse d'angle $\varepsilon\delta/\varepsilon^3$. La perturbation de pression de fluide parfait est donc proportionnelle à l'angle de la bosse en $\varepsilon\delta/\varepsilon^3$. Or l'ordre de grandeur de la pression compatible dans le Pont Inférieur est ε^2, donc pour qu'il y ait rétroaction, il faut que ces deux pression soient égales:

$$\varepsilon^2=\varepsilon\delta/\varepsilon^3$$

Ce qui donne le paramètre magique $\varepsilon=\delta^{-1/4}=R^{-1/8}$.

2. CAS SUBSONIQUE

2.1 Problème canonique en subsonique:

Ayant dégagé le paramètre magique $\varepsilon=R^{-1/8}$, on obtient après le changement d'échelles suivant:

$$u^* = \lambda^{1./4}\varepsilon\, u\, U_\infty,\ v^* = \lambda^{3./4}\varepsilon^3\, vU_\infty,\ p^* = \varepsilon^2 p\, \rho_\infty U_\infty^2,\ A^* = \lambda^{-3/4}\,\varepsilon^5 A$$

$$(x^*-x_0^*)=x\,\lambda^{-5./4}\,\varepsilon^3\,L,\ y^* = y\,\lambda^{-3./4}\,\varepsilon^5\,L,\ t^* = t\,\lambda^{-3/2}\,\varepsilon^2\,L/U_\infty.$$

le "problème canonique" issu de l'analyse asymptotique des ENS:

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u,$$

$$u(x,0)=0\quad v(x,y_w(x,t))=0\quad u(x,y\to\infty)\to y+A(x),\ A(-\infty)=0.$$

$$p = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-A'(\xi)d\xi}{x-\xi}.$$

On consultera Stewartson 74 pour les détails. Ce que l'on retiendra c'est que ces équations proviennent des Équations de Navier Stokes. On a fait un changement d'échelle rapide en x, ce qui permet d'aboutir aux équations de Prandtl à une distance de la paroi inférieure à l'épaisseur de la couche limite appelée "pont inférieur". La fonction -A(x,t) qui apparaît traduit le déplacement des lignes de courant au travers de l'ex couche limite ("pont principal"), cela se traduit par une perturbation de fluide parfait ("pont supérieur") qui fait rétroagir la pression selon l'intégrale de Hilbert. Cette description permet de lever les difficultés rencontrées par les équations IBL. Comme montré dans Smith et all 81 et dans Roget 96 ces équations sont très générales et décrivent les interactions entre une bosse et une couche limite pour une large étendue des paramètres dont certains mènent à la séparation.

2.2 Résolution linéarisée.

On peut chercher des solutions sous forme modes propres (vérifiant déjà l'incompressibilité):

$$u = y - a\,f'(y)e^{i\alpha x-i\omega t},\ v = k\,a\,f(y)e^{i\alpha x-i\omega t},\ p = a\,e^{i\alpha x-i\omega t},\ a<<1$$

En substituant dans l'équation de quantité de mouvement et en dérivant par rapport à y:

$$i\omega\, f'' - y\, i\alpha\, f'' + i\alpha\, f' = -f'''$$

On y reconnaît l'équation différentielle de la fonction d'Airy

$$(d^2/dy^2 - i\alpha y - \sigma + i\omega)f''(y)=0.$$

D'où:

$$f'(y) = -(i\alpha)^{2/3}/Ai'(\zeta_0)\int_{\zeta_0}^{y}Ai(\zeta)d\zeta,\ \text{avec}\ \zeta_0=-i^{2/3}\omega/\alpha^{2/3}.$$

On en tire le rapport -A/p en faisant tendre y vers ∞. D'autre par la transformée de Fourier de la relation de Hilbert donne $p=|\alpha|A$, on en déduit la relation de dispersion:

$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{(i\alpha)^{2/3}}{Ai'(\zeta_0)}\int_{\zeta_0}^{+\infty}Ai(\zeta)d\zeta.$$

Sa résolution donne le mode $\omega=2.296$ $\alpha=1.001$ (Smith 1980). Si maintenant on étudie la branche inférieure des solutions de l'équation de Orr Sommerfeld pour la couche limite de Blasius lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini , on obtient exactement ce résultat après de laborieux calculs (Reid 65).

La triple couche instationnaire fournit donc le comportement asymptotique des ondes TS à grand Reynolds et donc à grande longueur d'onde dans la description de OS. On note que l'instabilité naît du couplage entre deux régions (Baines & all 96).

2.3 cas instationnaire non linéaire

Lorsqu'il y a une paroi mobile, les conditions sont à imposer sur celle ci. On a:

$$u(x,f(x,t))=0,\ \text{et}\ v(x,f(x,t))= \partial f/\partial t\ .$$

On rappelle que l'astuce consiste à utiliser la transformation de Prandtl. On change y en y -f(x,t) et on garde x et t. L'idée de la transformation est d'aplatir la bosse pour se ramener à un problème plan! Si on pose

$$\tilde{y}=y-f(x,t)\ \text{et si on garde}\ \tilde{x}=x;\ \tilde{t}=t$$

$$\partial/\partial x = 1\,\partial/\partial\tilde{x} - \partial f/\partial x\,\partial\tilde{y}\ ;\ \partial/\partial y = 0 + \partial\tilde{y};\ \partial/\partial t = 1\,\partial/\partial\tilde{t} - \partial f/\partial t\,\partial\tilde{y}\ ;$$

si on pose:

$$\tilde{v} = v - u\frac{\partial}{\partial x}f - \frac{\partial}{\partial t}f$$

la continuité devient: $\partial\tilde{u}/\partial\tilde{x} + \partial(v - \partial f/\partial x\, u)/\partial\tilde{y} = 0$. ($\partial f/\partial t$ n'intervient pas) et la dérivée totale de u devient (la conservation de qt de mvt en x):

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}u + u\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}u + (v - \partial f/\partial t - u\partial f/\partial x)\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}u$$

On constate que les équations de pont inférieur sont invariantes par cette transformation ainsi que les conditions aux limites en y=0. Si on travaille en ψ (pseudo fonction de courant) on posera:

$$\psi = \int_0^{\tilde{y}} u \, d\tilde{y} \ , \ \& \ \tilde{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

à l'infini on a:

$$u \to y + A \Rightarrow \tilde{y} + f(x,t) + A(x).$$

on pose donc $\tilde{A} = A + f$ et on a donc $u \to \tilde{y} + \tilde{A}$. Puis pour le fluide parfait on remplace -A par $-\tilde{A} + f$

Le problème canonique devient en oubliant les tildes:

$$\psi = \int_0^{y} u \, dy, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \ \frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u \ ;$$

$$u(x,0)=0 \ \ \psi(x,0)=0 \ \ u(x,y\to\infty)\to y+A(x), \ A(-\infty)=0;$$

f(x,t) donnée, et la relation de couplage entre la pression et la déviation:

$$p = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-A'(\xi)+\partial f(\xi,t)/\partial \xi}{x-\xi} d\xi.$$

2.4 résolution

2.4.1 discrétisation

La méthode numérique est toujours à peu près la même: on discrétise en implicitant en y (de manière centrée) et on itère sur un indice N.

On se donne les deux premiers profils linéaires en y, et on n'y touche jamais.

La première itération est avec $u_{ij}^{N=0}=u_{ij}^{n}$ $p_i^{N=0}=p_i^{n}$ *etc.*

Il faut résoudre pour tous les i (indice des x) et pour 0<=j<=ny (indice des y) le système tridiagonal suivant:

$$\frac{u_{ij+1}^{N+1} - 2\,u_{ij}^{N+1} + u_{ij-1}^{N+1}}{\Delta y^2} - \frac{3\,u_{ij}^{N+1}}{2\,\Delta t} = -\frac{4\,u_{ij}^{n}}{2\,\Delta t} + \frac{1\,u_{ij}^{n-1}}{2\,\Delta t}$$

$$+ v_{ij}^{N}\frac{u_{ij+1}^{N}-u_{ij-1}^{N}}{2\,\Delta y} + u_{ij}^{N}\frac{3\,u_{ij}^{N} - 4\,u_{i-1j}^{N} + u_{i-2j}^{N}}{2\,\Delta x} + \frac{3\,p_i^{N} - 4\,p_{i-1}^{N} + p_{i-2}^{N}}{2\,\Delta x}$$

avec une valeur imposée en 0 et un flux en ny:

$$u_{i0}^{N+1}=0 \quad u_{iny}^{N+1}-u_{iny}^{N+1}=dy$$

On a un classique système tridiagonal que l'on résout par double balayage. Puis on calcule la fonction de courant pour trouver la vitesse transverse:

$$\psi_{ij}^{N+1}=\psi_{ij-1}^{N+1} + (1/2)\,(u_{ij}^{N+1} + u_{ij-1}^{N+1})dy \text{ avec } \psi_{i0}^{N+1}=0$$

et

$$v_{ij}^{N+1} = -\frac{3\,\psi_{ij}^{N+1} - 4\,\psi_{i-1j}^{N+1} + \psi_{i-2j}^{N+1}}{2\,\Delta x}.$$

S'il y a soufflage on impose sa valeur en j=0, sinon $v_{i0}^{N+1}=0$. Le déplacement s'obtient à la frontière supérieure par différence:

$$A_i^{N+1} = u_{iny}^{N+1} - ny\,\Delta y,$$

Sa dérivée en x que l'on centre (1 0 -1) (sauf pour le dernier point (3 -4 1)) :

$$A_i'^{N+1} = \frac{A_{i+1}^{N+1} - A_{i-1}^{N+1}}{2\,\Delta x}$$

va servir pour la relation de couplage qui relie la pression au déplacement. On en déduit donc p^{N+1} en calculant l'intégrale de Hilbert pour $-A_i'^{N+1} + \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\,\Delta x}$.

Lorsque la variation du $\max_i \left| A_i^{N+1} - A_i^{N} \right|$ est assez petite (par exemple .000001), on dit que l'on a convergé vers la solution, d'où $u_{ij}^{n+1}=u_{ij}^{N+1}$. et on recommence...

2.4.2 Remarques sur le choix de centrage des dérivées.

Ce schéma est par construction du second ordre en x, y et t. Il est à trois niveaux de temps (3 -4 +1). Les dérivées sont centrées en y (1 0 -1). L'avancée en temps avec des perturbations non nulles à la sortie n'a été possible qu'en décentrant les dérivées en x en aval (3 -4 +1) dans la partie Prandtl. On a donc une marche en avant en x avec dérivation suivant le flot pour la partie Prandt des équations. Centrer les dérivées en x (1 0 -1) est cependant possible mais ne permet pas à une perturbation de sortir. En revanche la dérivation en x de A est centrée et fait intervenir l'amont et l'aval (1 0 -1), on a choisi de la laisser ainsi car elle intervient dans l'intégrale qui dépend de tout le domaine (de l'amont à l'aval). Nous confessons une certaine incohérence dans ce choix de dérivation et celui de la couche limite interactive, mais dans ce nouveau cas le centrage s'est avéré néfaste pour la bonne prise en compte des conditions aux limites.

2.4.3 Conditions aux limites

Les deux premiers profils sont imposés et sont linéaires. Il n'y a pas de condition de sortie (elle est contenue dans la dérivation de A). Cela pose un problème qui vient de l'intégrale de Hilbert elle même. Cette intégrale est calculée sur le domaine de calcul x_{min} à x_{max} (typiquement de -6 à 30), ce qui fait que plus on se rapproche de la sortie moins on tient compte de ce qui se passe en aval. Or la contribution à l'extérieur du domaine peut être importante (dans les cas stables où l'onde TS meurt, cela ne pose pas de problèmes). Pour éviter ces ennuis Bodonyi & all 89 résolvent directement le Laplacien de pression (plutôt que d'écrire l'intégrale de Laplace) en mettant une condition de rayonnement à la sortie. Ne le faisant pas, nous avons donc des problèmes de réflexion à la sortie de notre

domaine. Pour les atténuer, les 5 dernières unités du domaine (x>x[nx]-5) sont résolues de manière linéarisées:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + y\,u + v\,1 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}u.$$

Cela permet de confiner les réflexions à la sortie dans une zone tampon. Dans les cas avec la naissance de "solitons" nous n'avons pas utilisé ce "truc" (cas non forcés), mais le calcul s'est arrêté avant qu'ils ne sortent...

2.4.4 Stabilité

Ce schéma est inconditionnellement stable en Δy. On doit avoir Δt assez petit car il est explicite en x,t. Le Δt maximum est limité par la condition de CFL qui dépend de la taille en y du domaine! En effet la vitesse maximale est nyΔy, on doit imposer:

$$\Delta t < \Delta x / ny\Delta y.$$

(en pratique on impose un domaine tel que y_{max}=nyΔy=6. On peut alors choisir Δx=.2 Δt=.035, ou Δx=.1 Δt=.018 ou Δx=.05 Δt=.009. Le code est construit de manière à augmenter la hauteur si nécessaire. Le nombre de points est ajusté de manière à avoir

(A + 6 +abs(alpha)))dy

points.

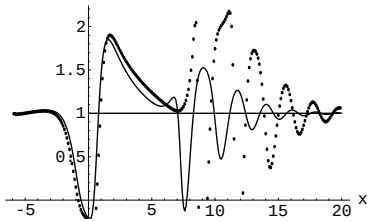
2.4.5 résultats: comparaison avec Duck

Duck 86 utilise Δt=.005; il résout en modes de Fourier avec k_{max}=14, ce qui donne un pas équivalent Δx~.22, nous prenons Δx=.1

On obtient pour les temps courts <2.75 des résultats apparemment identiques à ceux de Duck. Il s'agit d'une bosse qui naît en:

$$f(x,t) = \frac{-5}{(1+x^2)}\mathrm{th}^2(t)$$

frottement t=2.5 traits / t=2.75 points



On observe la naissance de deux nouvelles séparations. *cf* plus loin. Il n'y a pas de singularité en temps fini contrairement à ce que suggère Smith 89. Du moins pour la partie de l'écoulement près de la bosse, l'évolution du paquet transitoire réserve quant à elle d'autres problèmes...

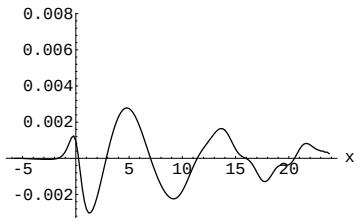
2.4.6 création d'ondes TS par vibration de bosse

Si maintenant on laisse évoluer plus longtemps mais avec une bosse pas trop haute pour éviter la séparation, et que cette bosse varie avec le temps de manière sinusoïdale:

$$f(x,t) = \frac{\alpha}{1+x^2}\cos(\omega t)$$

on obtient une onde TS forcée atténuée pour les fréquences inférieures à la fréquence critique, par exemple ω=1.5:

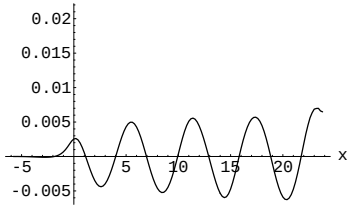
d placement t=11.0 incompressible w=1.5



dt=.0025 dx=.2 nx=150 x0=-6 dy=.2 ny=100 alpha=.01 omega=1.5

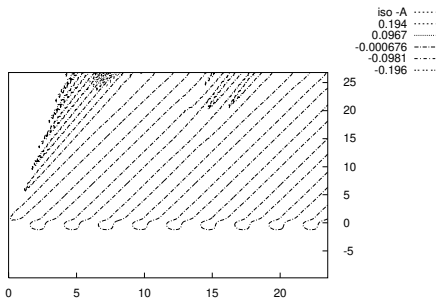
Ou au contraire amplifiée pour les fréquences supérieures à la fréquence critique, par exemple pour ω=2.5:

d placement t=10.0 incompressible, w=2.5

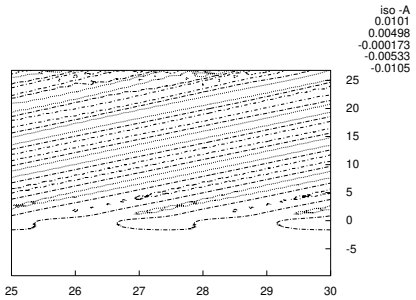


dt=.0025 dx=.2 nx=150 x0=-6 dy=.2 alpha=.01 omega=2.5

On représente ici les lignes iso -A en fonction de t et de x (valeurs où la fonction A constante)



Calculs pour dt=.01 dx=.2 nx=185 x0=-10 dy=.25 ny=100 alpha=-0.01250 omega=2.5 Bosse vibrante.
On observe à la sortie du domaine pour t~5 et x~25 le paquet d'onde dû au phénomènes transitoires qui sortent mal. Pour t~15 et x~25 on voit encore des réflexions parasites.
Pour des temps ultérieurs on observe toujours de légers problèmes à la sortie.

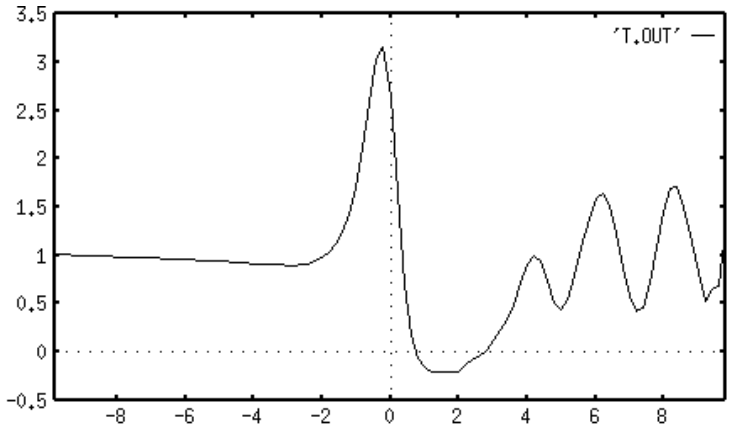


2.4.7 évolution ultérieure

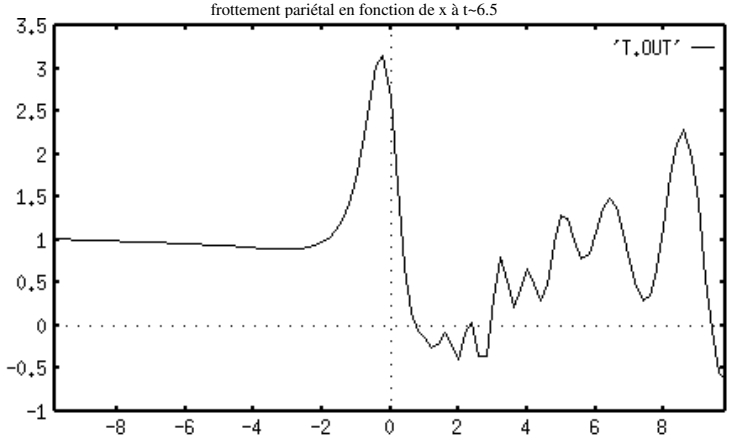
Si on attend assez longtemps la partie transitoire est évacuée sous formation d'un paquet d'ondes TS. C'est d'ailleurs un gros problème car la partie transitoire contient toutes les fréquences temporelles et explose de plus en plus tout en étant convectée (*cf* point suivant). Si ce paquet arrive à sortir du domaine, on obtient la solution stationnaire (ou forcé). Bien entendu on retrouve toujours le même problème d'instabilité d'onde courte dépendant du maillage (Cowley & Tutty) dans la partie présentant un courant de retour.
On ne peut donc pas calculer la séparation stationnaire par cette méthode.
Au temps t~6.5 pour le jeu suivant:

$$f(x,t) = \frac{5}{(1+x^2)}(1-e^{-t/2})$$

dt=.005 dx=.2 nx=100 x0=-10 dy=.25 alpha=5 omega=0. On observe les oscillations prenant naissance dans la partie où il y a un courant de retour:



frottement pariétal en fonction de x à t~6.5



frottement pariétal en fonction de x à t~8

2.4.7 reformulation du problème de triple couche

Mis à part ce grave problème lié à la séparation, examinons celui du paquet lié au comportement transitoire de la naissance de la bosse. Le développement non linéaire ultérieur, semble générer des solitons. En effet Zhuk 92 Kachanov & all 93 Smith & Burggraf 85 observent que les hautes fréquences présentes sont amplifiées et -A grandit lorsque l'on se déplace en amont. Il apparaît une nouvelle couche plus fine que le pont inférieur dans laquelle on retrouve les équations de Prandtl. En effet si on utilise une fréquence réduite (par rapport aux ondes TS) élevée Ω comme jauge, l'équilibre instationnaire/ diffusif nous donne une épaisseur $\Omega^{-1/2}$ transverse, la contribution de A devient de plus en plus importante dans le raccord u->y+A, u est donc de même jauge que A, et la longueur est donc de (jauge de A)/Ω par l'équilibre instationnaire/ non linéaire. La pression est donc de même jauge que A^2 par l'équilibre de gradient de pression et de terme non linéaire, or elle est toujours déterminée par la relation de couplage qui compte tenu de la jauge de x donne l'ordre de grandeur Ω pour la pression. On trouve alors que la jauge de A est grande comme $\Omega^{1/2}$ et que l'échelle transverse est petite comme $\Omega^{-1/2}$ (ce sont des échelles relatives vis à vis des échelles classiques). Dans ces nouvelles jauges, on a:

$$\psi = \int_0^y u\,dy, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u\ ;$$

$$u(x,0)=0 \quad \psi(x,0)=0 \quad u(x,y\text{->}\infty)\text{->}A(x) \text{ et } p = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-A'(\xi)}{x-\xi}d\xi.$$

Lorsque l'on s'éloigne de la paroi, il ne reste que:

$$\frac{\partial}{\partial t}A + A\frac{\partial}{\partial x}A = -\frac{\partial}{\partial x}p \ ; \text{et} \quad p = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-A'(\xi)}{x-\xi}d\xi.$$

On aura remarqué que cette dégénérescence des équations correspond à la branche identifiée par Rouget 96 mais pas par Smith & all 81. Il s'agit de la réponse de la couche limite à une bosse telle que le produit de sa longueur par sa hauteur soit R^{-1}.

2.4.formation de solitons?

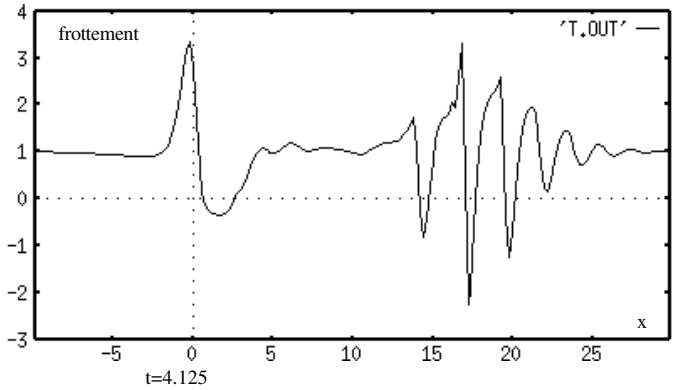
Les équations précédentes deviennent l'équation de Benjamin - Ono:

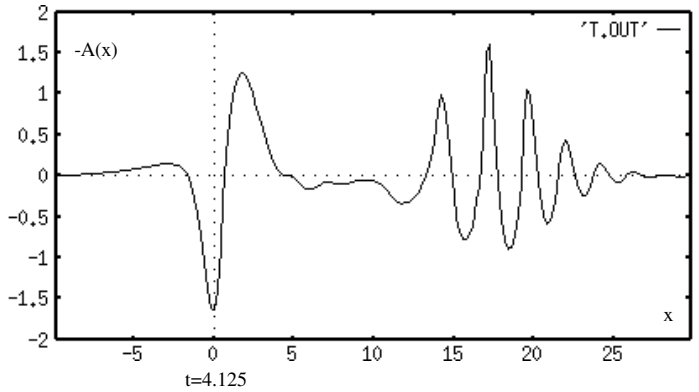
$$\frac{\partial}{\partial t}A + A\frac{\partial}{\partial x}A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-A''(\xi)}{x-\xi}d\xi.$$

L'originalité de cette équation est le comportement de son équation de dispersion pour des ondes linéaires qui est présentée de manière *ad hoc* par Benjamin 67; les ondes en eau peu profonde fournissent une relation de dispersion en $\omega=kc_0(1-\beta k^2)$, d'où l'idée de regarder la relation de dispersion en $\omega=kc_0(1-\beta|k|)$ qui celle de l'équation ci dessus ($\beta=1/c_0$).

Cette équation admet des solutions en ondes solitaires. Expérimentalement, on observe dans la couche limite transitionnelle des structures dont la forme ressemble beaucoup à celle qui provient de la résolution de l'équation de BO (Kachanov & all 93). Il s'agit de la formation de "spike- soliton" dans le mécansime de "K- breakdown". Cela pousse même Kachanov 94 à dire: "Ce résultat représente un cas unique où une solution analytique d'une théorie essentiellement non linéaire décrit le comportement de perturbations observées dans une expérience de transition."

Le paquet en évoluant crée de nouvelles région séparées (ou le frottement pariétal instantané est négatif). dt=.005 dx=.2 nx=200 x0=-10 dy=.25 alpha=6





Le calcul s'est stoppé peu après car la vitesse maximale devenait trop grande et la condition de CFL n'était plus respectée.

Ryzhov & Timofeev voient dans ces pics qui se développent l'émergence des solitons vérifiant ultérieurement l'équation de Benjamin - Ono. Il est à noter qu'ils ne dépassent pas le temps t=5.5 eux non plus. Il serait intéressant de bien comprendre comment on passe de la description TS à BO de manière à associer le soliton à la bosse (c'est ce qui a été fait par Bogdanova- Rhyzhova et Rhyzov 96 de manière asymptotique, en calculant la réponse d'une bosse dont la longueur par la hauteur est R^{-1}, *cf.*Roget 96) et estimer Ω.

2.5 Réceptivité de la couche limite (ondes sonores-> ondes TS)

2.5.1 réceptivité due à une bosse, analyse linéarisée.

Goldstein 85 a montré que les échelles de triple couche permettait de comprendre la transformation d'une onde acoustique en une onde TS.

Pour cela on se donne une onde sonore produite par un haut parleur situé en amont du bord d'attaque de la plaque plane. Il s'agit donc d'une perturbation de pression variant sur une grande longueur d'onde (par rapport aux échelles que nous allons dégager). Tout varie "en bloc" à nos échelles courtes. On se place de plus à fréquence élevée, compatible avec la branche inférieure de la courbe de stabilité marginale des ondes TS donc ε^{-4}, soit S_0 fréquence réduite. Si on se place près de la paroi, le profil linéaire de la couche limite est perturbé par l'onde acoustique et on retrouve le problème de Stokes:

$$\partial_t u = -d_x p + \partial_y{}^2 u, \text{ donc } u = y + (1 - \exp(i^{3/2}\, S_0{}^{1/2} y)\, e^{-i\, t\, S0}.$$

Le gradient de pression est proportionnel à:

$$dp/dx \sim i\, S_0\, e^{-i\, t\, S0}.$$

Maintenant on met une bosse de hauteur h dans l'écoulement, le problème linéarisé de TC s'écrit alors:

$$u = (y + h\, U_1) + ((1 - \exp(i^{3/2}\, S_0{}^{1/2} y)\, e^{-i\, t\, S0} + h\, u_1)$$

décomposé en partie stationnaire et instationnaire.

Pour la partie instationnaire, on retrouvera des termes donnant Airy, plus d'autres, formellement:

$$f''' + i(S_0 - ky)f' = G; \qquad A[f] = G$$

$f = A^{-1}[G]$ A, le miracle des transformées de Fourier fait que le pôle de A^{-1} fait apparaître l'onde TS. On consultera Goldstein 85 pour les détails.

2.5.2 mise en oeuvre

On décompose la vitesses en deux parties. Une partie "Stokes" et une partie "Non Stokes".

$$u = u_{ns} + ((1 - \exp(i^{3/2}\, S_0{}^{1/2} y)\, e^{-i\, t\, S0} = u_{ns}(x,y,t) + u_s(y,t).$$

La partie Stokes vérifie dans le pont inférieur:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_s = -\frac{\partial}{\partial x} p_s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_s$$

Dans le pont principal elle vérifie simplement $u_s=1$. Si on substitue dans les équations de triple couche de pont inférieur on obtient pour la partie "Non Stokes" des équations:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{ns} + \frac{\partial}{\partial y} v_{ns} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{ns} + u_{ns} \frac{\partial}{\partial x} u_{ns} + v_{ns} \frac{\partial}{\partial y} u_{ns} = -\frac{\partial}{\partial x} p_{ns} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{ns} -$$

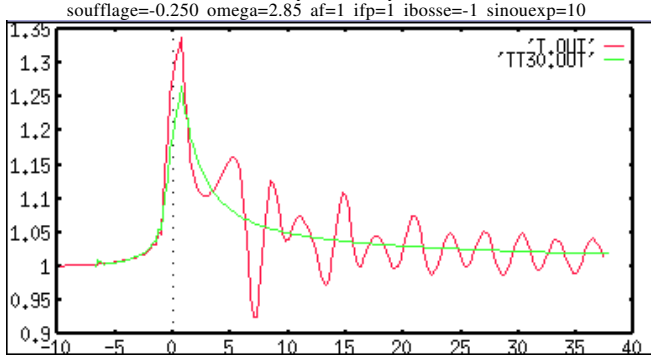
$$- (u_s \frac{\partial}{\partial x} u_{ns} + v_{ns} \frac{\partial}{\partial y} u_s).$$

$u_{ns}(x,0)=0$, $v_{ns}(x,y_w(x,t))=0$ sauf où on souffle, $u_{ns}(x,y\to\infty)\to y+A(x)$, $A(-\infty)=0$.

$$p_{ns} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-A'(\xi)d\xi}{x-\xi}.$$

C'est donc le problème de triple couche standard avec un terme source lié à la solution de Stokes. Nous présentons ici un exemple de résolution:

réceptivité frottement pariétal avec et sans soufflage, omega=2.85
dt=.005 dx=.25 nx=190 x0=-10 dy=.33333 ny=100 itmax=5000 ittmax=25
soufflage=-0.250 omega=2.85 af=1 ifp=1 ibosse=-1 sinouexp=10



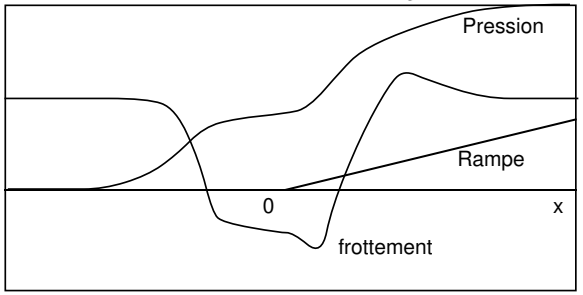
À noter Duck et all 96 qui mettent non pas un profil de Stokes en entrée mais une superposition d'ondes de vorticité. De même Ryzhov & Timofeev 95 font interagir un petit vortex avec une bosse, créant ainsi un train d'ondes.
Le cas avec une bosse est calculé par Bodonyi & all 89. Ils comparent une méthode de différences finies du genre de la nôtre à un code avec décomposition de Fourier.

3. CAS SUPERSONIQUE

Il faut réécrire la relation pression déviation sous la forme:

$$p = -\frac{dA}{dx} = -\frac{d(\tilde{A} - f(x))}{dx} = -\frac{d\tilde{A}}{dx} + f'(x);$$

On se donne une rampe, f(x)=0 pour x<0 f(x)=αx pour x>0. C'est la relation de couplage qui récupère les information de l'aval sur l'amont. On dérive A en centrant la dérivée (1,0,-1). En stationnaire on obtient des résultats du genre de ceux ci dessous:



la pression croît en amont de la rampe et forme un "plateau" dans la région avant la rampe où le fluide présente un frottement négatif (courant de retour), la pression se fixe ensuite à la valeur de fluide parfait imposée par l'angle de la rampe.

On observe qu'au delà d'un angle d'environ α=4 il n'y a plus de solution stationnaire. Le plateau commence à avancer. Il se produit un pincement de la pression identifié par Smith et Khorrami. Cependant eux n'ont pas obtenu d'avancée du plateau car ils ont fixé leur domaine à une hauteur trop faible!!!

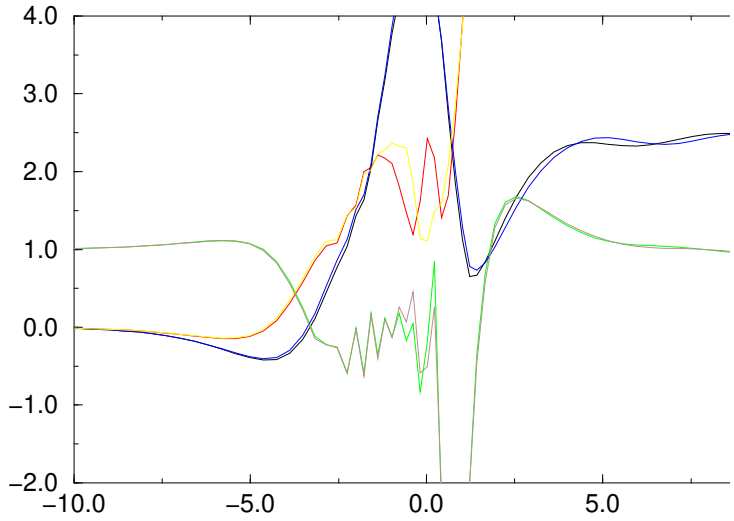
Le déplacement croit beaucoup avec le temps; il semble qu'il n'existe pas de solution stationnaire. En fait, on espérait retrouver les solitons de Zhuk 92 en augmentant l'angle α, ces solitons se trouvent en faisant la même analyse que plus haut, mis à part la relation pression déviation qui est ici:

$$\frac{\partial}{\partial t}A + A\frac{\partial}{\partial x}A = -\frac{\partial}{\partial x}p \quad ; \text{et} \quad p = -\partial A(x,t)/\partial x + \alpha H(x).$$

Donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}A + A\frac{\partial}{\partial x}A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}A - \alpha\,\delta(x).$$

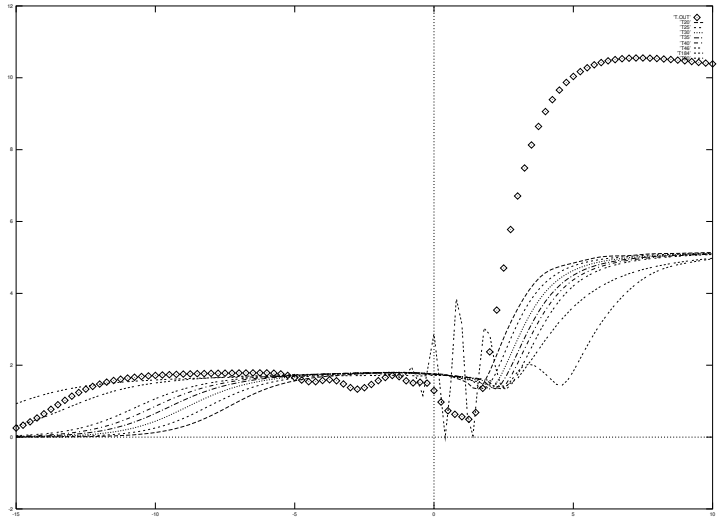
Cette équation admet un saut de pression qui évolue en remontant le courant sans se déformer.



Le mécanisme que nous aurions aimé observer aurait été celui de la formation du plateau supersonique (classique), puis sont pincement et l'expulsion du soliton.
un jeu de paramètre pour la rampe:

dt=.01 dx=.25 nx=90 x0=-15 dy=.25 ny=160 alpha=6.0

Le frottement pariétal change de signe. Il y a séparation. Mais malheureusement l'instabilité de Cowley réapparaît, d'où les oscillations qui empêchent la suite de l'évolution.



(pression pour α=5 au temps t=20 25 30 35 46 80 et 184 ainsi t=10 α=10). Nous avons vu après coup que cela avait été déjà vu par Cassel & all 95.

4. CAS THERMIQUES

4.1 équations

$$u = \lambda^{1./4}\varepsilon\, u,\ v = \lambda^{3./4}\varepsilon^3 v,\ p = \varepsilon^2 p,\ A = \lambda^{-3/4}\,\varepsilon^5 A$$

$$x = (x-x_0)\,\lambda^{-5./4}\,\varepsilon^3,\ y = y\,\lambda^{-3./4}\,\varepsilon^5,\ t = t\,\lambda^{-3/2}\,\varepsilon^2$$

$$\varepsilon = |J|,\ \text{et}\ J = \frac{g\alpha\Delta T_0}{U_\infty^2}\,\frac{L}{R^{1/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial x}u + v\frac{\partial}{\partial y}u = -\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u$$

$$u(x,0)=0\quad v(x,y_w(x,t))=0\quad u(x,y\to\infty)\to y+A(x),\ A(-\infty)=0.$$

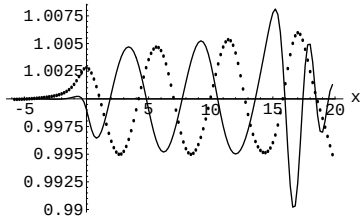
p = A paroi chaude

p = -A paroi froide

4.2 cas p=A

Ce cas est sans remontée de l'information (Lagrée 95). Son ω critique quasiment le même que celui de la couche limite standard. Il est présent aussi dans les écoulement dans un tuyau (Ruban & Timoshin 86).

frottement / t=9.0 points/ t=15.0 traits

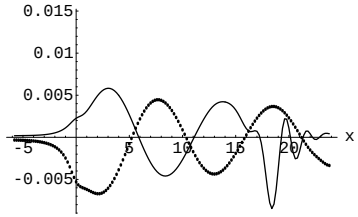


dt=.0025 dx=.2 nx=130 x0=-6 dy=.2 ny=100 itmax=100 ittmax=100 alpha=.01 omega=2.5

L'amplitude augmente légèrement

ici un cas atténué:

pression / t=10.0 points/ t=16.0 traits



dt=.0025 dx=.2 nx=130 x0=-6 dy=.2 ny=100 itmax=100 ittmax=100 alpha=.01 omega=1.5

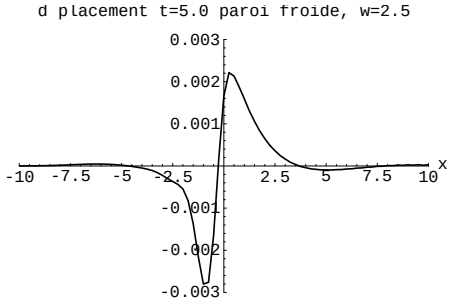
L'amplitude diminue légèrement

4.3 cas p=-A

Ce cas est aussi présent dans les écoulements hypersoniques. Il faut revoir les dérivations! En effet le cas p=-A admet une solution de branchement. Or notre écriture des dérivées pour le pont inférieur ne fait aller l'information que de l'amont vers l'aval. C'est la relation de couplage qui récupère les information de l'aval sur l'amont. On est obligé de recourir à l'astuce suivante:

$$p_i = - (A_{i+1} + A_i)/2.$$

Cette moyenne permet la remontée de l'information:



La solution reste localisée.

5. CONCLUSION

Le code que nous avons construit permet de retrouver certains effets de la littérature et nous a permis d'aller un peu plus loin pour d'autres (supersonique, p=-A ou réceptivité avec soufflage). Le sujet n'est pas clos pour autant. On pourrait encore étudier d'autres effets notamment l'évolution du paquet correspondant au transitoire mériterait plus d'attention, car celui ci est particulièrement dangereux. Cette connexion entre ces ondes TS et ces solitons est elle possible, ou existe t-il encore une singularité en temps fini? C'est ce que se demandent Smith & Burggraf 85. Pour notre part dans les cas supersonique et subsonique ce sont les instabilités de Cowley Tutty qui empêchent la résolution. La singularité en temps fini n'a pas été observée dans les cas triple couche que nous avons étudiés.

bibliographie

Quelques animations montrant la séparation et la réceptivité sont disponibles sur:
`http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/lagree.html`

BAINES P.G., MAJUMDAR S.J. & MITSUDERA H. 1996 "the mechanics of the Tollmien- Schlichting wave" *JFM*, vol 312, pp 107- 124.

BENJAMIN T.B. 1967 "Internal waves of permanent form in fluids of great depth" *J.F.M.,* vol 29, p3, *pp* 559- 592.

BODNYI R.J., WELCH W.J.C. DUCK P.W. & TADJFAR M. 1989 A numerical study of the interaction between unsteady free- stream disturbances and localized variations in surface geometry, *J. Fluid Mech. vol*209 *pp 285- 308.*

BODONYI R.J. DUCK P.W. 1992 boundary - layer receptivity due to a wall suction and control of Tollmien- Schlichting waves *Phys. Fluids* A 4 (6).

BOGDANOVA- RYZHOVA E.V. & RYZHOV O.S. 1996 "Forced non linear disturbances in incompressible boundary layers" Phys. Fluids 8, (1),

BROWN S.N. CHENG H.K. & LEE C.J. 1990 Inviscid viscous interaction on triple-deck scales in a hypersonic flow with strong wall cooling *JFM* (1990), vol 220, pp 309- 337.

CASSEL K.W., RUBAN A.I. WALKER J.D.A. 1995 An instability in supersonic boundary layer flow over a compression ramp *J. Fluid Mech. vol* 300, pp 265- 285.

DUCK P. W . 1990 triple deck flow over unsteady surface disturbances: the three-dimensional development of Tollmien Schlichting waves *Computers & Fluids* Vol 18, No 1, pp 1- 34

DUCK P.W. 1986 Unsteady triple deck flows leading to instabilities pp2917 312 in "Boundary layer separation" F.T . Smith S.N. Brow ed. IUTAM Symp LondonSpringer Verlag.

DUCK P.W. RUBAN A.I. ZHIKHAREV 1996 The generation of TS waves by free stream turbulence *J. Fluid Mech., vol*312, *pp* 341- 371

GOLDSTEIN M.E. 1985 "Scattering of acoustic waves into Tollmien- Schlichting waves by small streamwise variations in surface geometry *J. Fluid Mech.* vol 154 pp 509-529

KACHANOV Y.S. , RYZHOV O. S., SMITH F.T. 1993 Formation of solitons in transitional boundary layers: theory and experiment *JFM* Vol. 251 *pp*273- 297

KACHANOV Y.S. 1994 "physical mechanisms of laminar boundary- layer transition" *Ann. Rev.*Fluid Mech. 26, pp 411- 482.

LAGRÉE 1995, "Upstream Influence in mixed convection at small Richardson number on triple, double and single deck scales."Springer Verlag, Lecture Notes in Physics 442, "Asymptotic Modelling in fluids".

LIPATOV 1995 Internal "shock" formation in the laminar boundary layer due to upercritical subcritical transition *AIAA* FD Conf., June 95, San Diego

NEILAND V.Ya 1969 "Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flows" *Mekh. Zhid. Gaz.*Vol 4, pp53- 57.

REID W.H. 1965 "The stability of parallel flows" in Basic developments in fluid dynamics, Academic Press, Ed M.Holt p 249- 307.

ROGET C 1996 "Sturctures asymptotiques et calculs d'écoulements sur des obstacles bi et tri dimensionnels" thèse Univ P. Sabatier Toulouse.

RUBAN A.I. TIMOSHIN S.N. 1986 "Propagation of perturbations in the boundary layer on the walls of a flat channel" *Fluid Dynamics* No 2, pp 74-79

RYZHOV O.S. & TIMOFEEV S.V. 1995 Interaction of a potential vortex with a local roughness on a smooth surface *J. Fluid Mech.* vol 287 pp 21- 58
SMITH F.T. & BURGGRAF O.R. 1985 "On the development of large sized short scaled disturbances in boundary layer" *Proc. R. Soc Lond.* A 399, *pp* 25-55.
SMITH F.T., BRIGHTON P.W. M. JACKSON P.S. & HUNT J.C.R. 1981 "On boundary layer flow past wo dimensional obstacles", *J.F.M.* 110, *pp 1-37.*
SMITH F.T. 1989 "finite time break up can occur in any unsteady interacting boundary layer" Mathematika 35, 256-273
Smith et Khorrami
STEWARTSON K. & WILLIAMS P.G.1969 "Self induced separation", *Proc Roy. Soc* A 312, 181- 206.
ZHUK V.I. 1992 Asymptotic model of a closed separation zone in supersonic flow *MZG* no 2, pp 76-84