

# Équations de couche limite instationnaire.

P.-Y. Lagrée

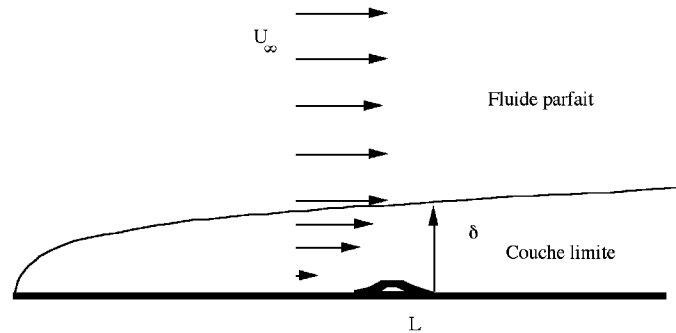
Janvier 1997

## 1 Introduction

Nous cherchons à décrire des écoulements instationnaires de fluide newtonien dans lesquels la variable longitudinale varie plus lentement que la variable transversale. Ce cas se produit lorsque le nombre de Reynolds est grand (aérodynamique externe ou interne...) ou dans le cas où une longueur transversale est petite par rapport à une autre longueur longitudinale qui est imposée (film mince, artère ...). La démarche habituelle consiste à résoudre d'abord un problème de "fluide parfait" loin de la paroi, puis ayant la vitesse de glissement à la paroi, on introduit très classiquement une "couche limite" pour annuler cette vitesse sur une région très fine où les gradients verticaux sont importants. Dans le cas de l'artère le rôle du fluide parfait est joué par la paroi.

Nous présentons un résumé d'exemples provenant de la littérature que nous pouvons traiter au moyen d'un code de résolution des équations de couche limite interactive. Nous constaterons donc que les équations de couche limite non séparées sont une très bonne alternative à la résolution complète des équations de Navier Stokes, malheureusement dès qu'il y a un courant de retour les équations de couche limite tombent en défaut. D'une part nous verrons que les équations de couche limite classique explosent au bout d'un temps fini (supérieur au temps d'apparition du courant de retour), d'autre part que les équations de couche limite interactive, si elles n'explosent pas présentent une instabilité intrinsèque qui rend leur résolution impossible quelques instants après la séparation.

Globalement tous ces exemples sont désormais classiques, et notre travail ne présente pas d'originalités si ce n'est le calcul effectif de la position et de l'intensité du tourbillon dans le cas du cylindre, la mise en oeuvre dans les cas classiques d'une méthode non physique qui lisse la singularité en la transformant en choc et enfin les interactions entre deux tourbillons et une paroi. Le code que nous présentons est discrétisé de manière très simple en



description Eulérienne et nous avons exploré différentes manières de dériver en  $x$  les équations menant à des résultats légèrement différents; au final il nous semble soutenir la comparaison avec tous ceux de la littérature qui sont écrits en différences finies. Il est bien entendu inférieur à la méthode la plus performante vis à vis de l'étude locale de la singularité qui est celle de résolution en description Lagrangienne.

## 2 le problème de la couche limite instationnaire

### 2.1 équations de couche limite classique instationnaire

On se donne un obstacle plongé dans un écoulement  $U_\infty$ . La solution de fluide parfait nous donne une vitesse de glissement sur l'obstacle  $u_e^*(x^*, t^*)$  que l'on cherche à annuler par la couche limite.

Après changement d'échelle classique (Schlichting 79):

$$x^* = Lx, \quad y^* = \delta y, \quad u^* = U_\infty u, \quad v^* = \delta U_\infty / Lv, \quad t^* = L/U_\infty t,$$

les équations de Navier Stokes deviennent, si on choisit par moindre dégénérescence  $\delta = L/\sqrt{R_\infty}$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

avec pour conditions aux limites:

$$u(x, y = 0, t) = 0, \quad v(x, y = 0, t) = 0,$$

et comme condition de raccord:

$$u(x, y \rightarrow \infty, t) = u_e(x, t),$$

Il manque  $u(x, y, t = 0)$ , nous l'examinerons au cas par cas. Souvent ce sera un départ impulsif:  $u(x, y > 0, t = 0) = u_e(x, t = 0)$ . De même la vitesse de fluide parfait  $u_e(x, t)$  sera imposée au temps  $t = 0$ ; c'est peut être là un point délicat car on ne parlera jamais de temps d'établissement du fluide parfait.

On en déduira deux quantités importantes (fonctions de  $x$  et  $t$ ) qui sont l'épaisseur de déplacement ainsi que le frottement pariétal (lorsqu'il change de signe cela traduit l'apparition d'un courant de retour, c'est la séparation de la couche limite.

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy; \quad \tau = \frac{\partial u}{\partial y}_{y=0}.$$

## 2.2 équations de couche limite interactive instationnaire

La démarche précédente peut porter le nom de "couplage faible", elle est parfaitement fondée dans le cadre des développements asymptotiques raccordés, mais elle ne permet pas de comprendre la séparation de la couche limite.

Dans un cadre asymptotique strict, pour calculer la séparation de la couche limite il faut faire appel aux équations de "triple couche/ *Triple Deck*" (Neiland 69, Stewartson & Williams 69). Dans un cadre asymptotique moins fort on fait appel aux équations de couche limite interactive. L'idée (qui d'ailleurs est celle de la triple couche) est que le fluide parfait fait se développer la couche limite, mais que la couche limite en s'épaississant est ressentie par le fluide parfait comme une sorte de "paroi" épaissie, le fluide parfait face à cette "nouvelle géométrie" modifie sa pression et donc la couche limite *etc.* ... La méthode est très efficace en stationnaire Le Balleur 78, 80 et 82, Lock & Williams 87 et Hsiao & Paulley 94. Elle permet de calculer la séparation de la couche limite sur une bosse d'épaisseur  $f^*(x)/L$  au plus égale à l'épaisseur de couche limite. En instationnaire nous allons voir qu'elle pose d'autres problèmes. L'épaississement de la couche limite qui induit un déplacement des lignes de courant de fluide parfait est *a priori* un effet du second ordre de couche limite, mais si il se produit sur une échelle courte, c'est un effet de Triple Couche.

La couche limite rétroagit sur le fluide parfait et réciproquement selon:

$$ue(x) = 1 + \frac{1}{\pi\sqrt{R_\infty}} \int \frac{\partial(ue(\delta_1 + f(x)\sqrt{R_\infty}))}{\partial x} \frac{1}{x - \xi} d\xi$$

qui provient de la résolution d'un écoulement de fluide parfait légèrement perturbé à la paroi par une vitesse de transpiration reliée à l'épaississement de la couche limite et au profil.

### 3 résolution numérique

#### 3.1 vue générale

La méthode numérique sera toujours à peu près la même que ce soit dans les cas IBL couche limite classique, triple couche ou artère. Nous avons choisi la simplicité des différences finies avec des pas de discrétisation constants ( $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ), avec pour indices respectifs  $(n, i, j)$ . Les variations diffèrent dans la discrétisation des termes en  $\partial/\partial x$  et éventuellement du terme en  $\partial/\partial t$ . On verra que les résultats sont suffisants au vu de la simplicité (et donnent des résultats meilleurs que ceux de Henkes & Veldman 87).

La discrétisation consiste à impliciter les dérivées en  $y$  (en centrant), et expliciter en  $x$  (on va voir plus loin les différents choix). La non linéarité est traitée en faisant une boucle interne d'itération, cette itération porte sur un indice  $m$ , tel que pour le dernier  $m$  on ait  $u^{m+1} = u^{n+1}$ . On discrétise à l'ordre 2 en temps (en gardant la vitesse pour les deux pas de temps précédents  $u^n$  et  $u^{n-1}$ ):

$$\partial u/\partial t = \frac{3u_{ij}^{m+1}}{2\Delta t} - \frac{4u_{ij}^n}{2\Delta t} + \frac{u_{ij}^{n-1}}{2\Delta t}$$

(dans le cas du 5<sup>ème</sup> essai la discrétisation est prise à l'ordre un. Dans chacun des cas étudiés on ramène le problème à une résolution d'un système tridiagonal (par double balayage classique) à l'étape d'itération  $m$ :

$$L_j^m u_{ij}^{m+1} = S_j^m$$

Dans les termes source (S) on a la variation de vitesse extérieure, le terme non linéaire  $(u\partial u/\partial x)^m$  et les vitesses précédentes divisées par  $2\Delta t$ . Le terme  $v\partial u/\partial y$  a été mis dans le membre de gauche, sous la forme centrée de:

$$v^m (u_{ij+1}^{m+1} - u_{ij-1}^{m+1})/(2\Delta y)$$

Les conditions aux limites sont  $u_{i0}^{m+1} = 0$ , et  $u_{ijMax}^{m+1} = u_e(x_i, t^{m+1})$ .

La vitesse transversale est obtenue par dérivation en  $x$  (cohérente avec la dérivée de  $u\partial u/\partial x$ , voir plus loin) de la fonction de courant, elle même obtenue auparavant par intégration par la méthode des trapèzes en  $y$  de la vitesse longitudinale.

### 3.1.1 dérivations en x

Le point qui a particulièrement retenu notre attention est celui de la dérivation en x.

**1er essai** Une première tentative a été faite en conservant le côté parabolique des équations de couche limite stationnaire et donc en discrétisant les dérivées en x comme suit:

$$u\partial u/\partial x = u_{ij}^m \left( \frac{3u_{ij}^m}{2\Delta x} - \frac{4u_{i-1j}^m}{2\Delta x} + \frac{u_{i-2j}^m}{2\Delta x} \right)$$

De même avec Ue.

**2ème essai** Un excès de précaution (partagé par de nombreux auteurs dont Cassel et al 96, Henkes & Veldman 87) nous a fait aussi discrétiser les dérivées en x suivant la valeur du signe de la vitesse:

$$u_{ij}^m > 0 \implies u\partial u/\partial x = u_{ij}^m \left( \frac{3u_{ij}^m}{2\Delta x} - \frac{4u_{i-1j}^m}{2\Delta x} + \frac{u_{i-2j}^m}{2\Delta x} \right),$$

$$u_{ij}^m < 0 \implies u\partial u/\partial x = u_{ij}^m \left( \frac{-3u_{ij}^m}{2\Delta x} - \frac{-4u_{i+1j}^m}{2\Delta x} + \frac{-u_{i+2j}^m}{2\Delta x} \right).$$

De même pour la dérivation de  $\psi$  qui intervient dans le calcul de la vitesse transverse. On fait attention au dernier point qui est pris dans le sens gauche/droite même si il y a séparation. Avec cette dérivation en prenant des quantités aval lorsqu'il y a un courant de retour, on prétend que l'information suit le courant.

En fait nous avons observé que si ce schéma semblait correct dans le cas de la plaque plane avec départ impulsif (pas de séparation, c'est donc la même discrétisation que plus haut!), le cas du cylindre ne permet pas d'approcher suffisamment près de la singularité.

**3ème essai** Une troisième tentative a été faite en centrant les dérivées en x comme suit:

$$u\partial u/\partial x = u_{ij}^m \left( \frac{u_{i+1j}^m - u_{i-1j}^m}{2\Delta x} \right)$$

De même avec Ue.

Nous avons observé que si ce schéma semblait correct dans le cas du cylindre: on s'approche plus de la singularité et retrouve mieux son comportement algébrique local.

**4ème essai** Une quatrième tentative peut être faite en utilisant la discrétisation de Phillips et Akenberg 1973. Cette méthode est citée aussi par Shen 78. Il indique que cette discrétisation (ainsi que celle en zig zag) permet d'introduire un terme d'erreur de troncature en  $-\partial u/\partial t$  qui lisserait les instabilités dans la partie courant de retour:

$$u_{ij}^m < 0 \implies u\partial u/\partial x = u_{ij}^m \left( \frac{u_{i+1j}^{n-1} - u_{ij}^m}{\Delta x} \right)$$

$$u_{ij}^m > 0 \implies u\partial u/\partial x = u_{ij}^m \left( \frac{u_{ij}^m - u_{i-1j}^m}{\Delta x} \right)$$

L'astuce est de prendre la vitesse au temps précédent à l'abscisse suivante. Nous n'avons pas réussi à obtenir de résultats probants avec cette discrétisation.

**5ème essai** Dans les cas précédents on a discrétisé  $u\partial u/\partial x$ . L'idée de Voitkova & Lunev 91 est d'écrire ce terme sous forme conservative et de discrétiser en conséquence. A noter que Matsushita & *all* 84 écrivent aussi leur équation sous forme conservative (mais sous forme intégrale).

$$u\partial u/\partial x = 1/2\partial u^2/\partial x.$$

On discrétise comme Voitkova & Lunev 91 à l'ordre un en  $\Delta x$  (et aussi à l'ordre 1 en  $\Delta t$ ), et par une méthode de différentiation amont simple:

$$(u_{i+1j}^m + u_{i-1j}^m)/2 > 0 \implies \partial u^2/\partial x = \left( \frac{(u_{ij}^m)^2 - (u_{i-1j}^m)^2}{\Delta x} \right)$$

$$(u_{i+1j}^m + u_{i-1j}^m)/2 < 0 \implies \partial u^2/\partial x = \left( \frac{(u_{i+1j}^m)^2 - (u_{ij}^m)^2}{\Delta x} \right)$$

La vitesse se calcule alors en décentrant de même la dérivée de  $\psi_{ij}^m$ . Mais le choix du décentrement est imposé par la valeur à la paroi de la vitesse  $(u_{i+11}^m + u_{i-11}^m)/2$ . Là encore nous suivons Voitkova & Lunev 91.

Ce schéma diffusif permet de capturer un choc et de suivre son évolution. Bien entendu cette discrétisation ajoute une viscosité artificielle d'ordre  $\Delta x/2$   $(u_{i+1j}^m + u_{i-1j}^m)/2$  qui va lisser la singularité.

## 4 exemples

### 4.1 application au départ impulsif de plaque plane

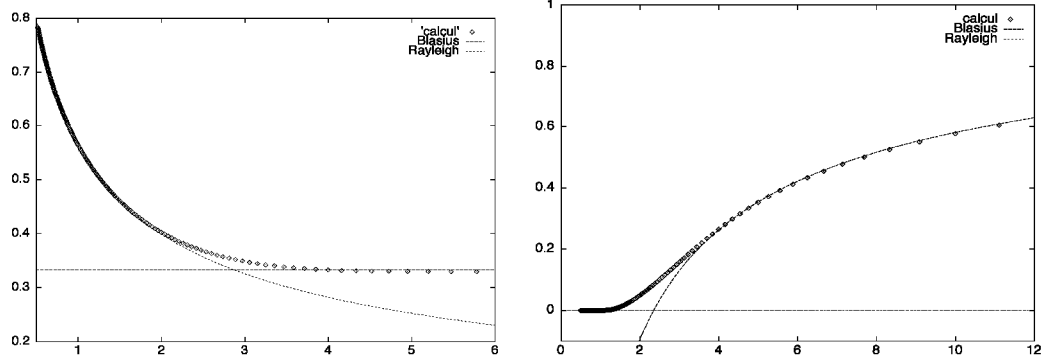
Nous commençons par un premier exemple semblant assez simple (Stewartson 51 et 73, Smith 70 & 72 et Hall 69). Au temps  $t = 0$  on met en mouvement une plaque plane semi infinie. On se place dans le repère de la plaque, on obtient instantanément  $u_e = 1$  pour le fluide parfait. Pour une station  $x$  fixée on observe l'écoulement de Rayleigh pour les temps courts:

$$\partial_t u = \partial_y^2 u; \quad u(y > 0, t = 0) = 1, u(0, t) = 0, u(y \rightarrow \infty, t) = 1$$

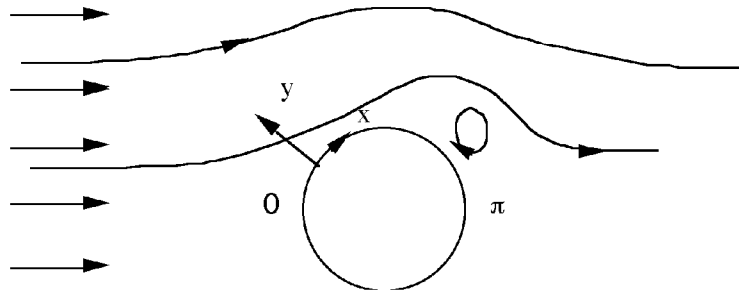
et l'écoulement de Blasius pour les temps longs. La variable pertinente est  $\tau = t/x$ . Suivant que cette variable est petite ou grande, on passe de l'écoulement Rayleigh à celui de Blasius. La transition se produit pour  $\tau = 1$  temps qu'il faut pour que l'information (de vitesse unité) arrive au point considéré; pour  $1.5 < \tau < 4$ , l'écart entre les deux régimes est notable. On le voit sur la figure suivante (obtenue pour la première fois par Hall 69 avec une méthode spécifique utilisant les variables de similitude et uniquement valable pour  $\tau \geq 1$ ) où l'on a tracé  $\frac{\partial u(x, y=0, t)}{\partial y} \sqrt{x}$

$$\tau \gg 1 \quad \tau_w = .332/\sqrt{x}, \delta_1 = 1.732\sqrt{x}; \quad \tau \leq 1 \quad \tau_w = 1/\sqrt{\pi t}, \delta_1 = 2\sqrt{\frac{1}{\pi t}}$$

Sur la seconde figure on a tracé  $2\sqrt{\frac{1}{\pi}} - \delta_1\sqrt{\frac{1}{t}}$ , qui vaut 0 pour la solution de Rayleigh ( $\tau \leq 1$ ) et qui est une fonction de  $\tau$  dans le cas Blasius ( $2\sqrt{\frac{1}{\pi}} - 1.732\sqrt{\frac{1}{\tau}}$ , expression valable pour  $\tau \gg 1$ ). (dt=.01 dx=.1 nx=100 x0=.1 dy=.33 ny=100, t=10).



L'étude analytique précise de la transition entre les deux écoulements est à tel point ardue que Stewartson s'y est repris à deux fois (51 & 73) pour la résoudre. La difficulté vient de l'apparition d'une singularité essentielle dans



les développements autour de  $\tau = 1$ , c'est à dire que tous les termes de la série de Taylor sont nuls.

Parmi les problèmes que nous avons rencontré:

- nous n'avons pas retrouvé le comportement des résultats fins de Stewartson en  $\tau = 1$ , mais les valeurs qu'il présente ne sont pas en accord avec la formule qu'il propose et que nous ne savons pas redémontrer.

- pour les grands  $\tau$  on devrait avoir un écart entre le frottement réduit et .332 évoluant en  $e^{-0.03\tau^3}$ , l'écart que l'on observe est plutôt en  $e^{-0.04\tau^3}$ .

- les premiers pas de temps sont mal calculés par notre code car on impose à  $t = 0$   $u = 1$ , sauf à la paroi, et sauf au premier point du maillage où on impose déjà et continuellement un écoulement de Blasius sur quelques points de maillage en  $y$ .

Les deux premiers points nécessiteraient une étude précise en fonction des pas de temps et d'espace.

## 4.2 écoulement autour d'un cylindre

### 4.2.1 problème

On se donne un cylindre que l'on met en mouvement uniforme à la vitesse unité au temps  $t = 0$ . Il s'agit encore d'un départ impulsif que l'on va traiter par la méthode classique de décomposition fluide parfait/ couche limite.

D'une part la solution de fluide parfait est supposée être instantanément la solution non visqueuse potentielle irrotationnelle classique. La vitesse sur le cylindre est donc  $u_e(x, t) = \sin(x)$ . Bien entendu, on pourrait s'interroger sur la pertinence de cette hypothèse, mais nous l'admettons; le cas de la plaque plane était de ce point de vue plus clair puisque l'on avait  $u_e(x, t) = 1$ . D'autre part, la couche limite, sous l'impulsion de vitesse  $u(x, y > 0, t = 0) = \sin(x)$  se développe quant à elle le long du cylindre en suivant les équations classiques de Prandtl. ( $x$  est pris le long du cylindre et mesuré par  $R$ , c'est en fait l'angle  $\theta$ , et  $y$  perpendiculairement c'est  $((r - R)/R)\sqrt{Re}$ . Le nombre



de Reynolds est construit avec le rayon et la vitesse à l'infini. Le cylindre se retrouve aplati car la couche limite est bien plus mince que le rayon (les effets de courbure sont des effets du second ordre).

### 4.2.2 bibliographie, singularité

Les temps courts peuvent être résolus par une série de Taylor en temps (série de Blasius, voir Schlichting 79). Mais au delà il faut résoudre numériquement. C'est qui a été fait par Van Dommeln & Shen 80 par une méthode Lagrangienne.

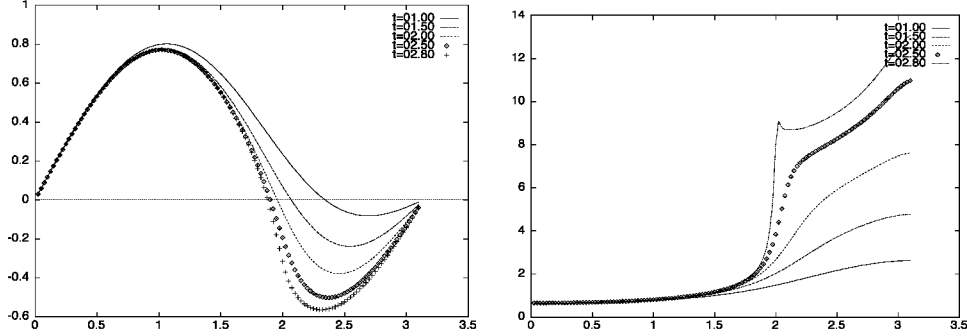
Ils ont ainsi précisé le temps de séparation  $ts = .64$  et observé un comportement singulier en  $t \sim 3.0$ . C'est à dire que le calcul ne peut être poursuivi au-delà de ce temps, certaines variables tendant vers l'infini. Ils ont ensuite caractérisé ce comportement singulier en montrant que la vitesse en haut de la couche limite varie avec un comportement en  $(ts - t)^{-7/4}$ . Cowley 83 a résolu ce problème en mettant 48 termes dans le développement de Blasius. L'astuce consiste à écrire le développement de Taylor sous la forme d'un développement de Padé ce qui lui permet de s'éloigner de  $t = 0$ . Il obtient avec une grande précision le temps de séparation initial  $ts = .64383978$ . La singularité se produit lorsque deux pôles (complexes conjugués) du développement en fraction rationnelle de la vitesse traversent l'axe réel. Ingham 84 traite le problème en effectuant non pas un développement en série temporelle mais en série de  $\sin(nx)$ , il retrouve numériquement l'exposant  $-7/4$  près de la singularité. Henkes & Veldman 87 présentent aussi ce calcul, mais en Eulérien.

Enfin, Peridier 95, qui s'est spécialisé dans la résolution Lagrangienne, nous présente un petit film montrant la séparation. A noter toutefois le cas particulier de Cebeci 86 qui prétend qu'il n'y a pas de singularité, mais il n'a peut être pas assez poussé son calcul.

### 4.2.3 résolution numérique

Nous utilisons notre code et nous observons en fonction du temps l'épaississement de l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  (Vers  $t \sim .65$ , la couche limite sépare et  $\delta_1$  devient de plus en plus épais ce qui est caractéristique d'une séparation). Pour les faibles valeurs de  $x$  on retrouve la solution de point d'arrêt de Hiemenz (vitesse =  $x$ ) et on a bien  $\delta_1 = 0.648$ . Plus loin un pic se forme, notre code ne marche plus car l'échelle en  $x$  devient trop petite pour pouvoir capter le phénomène. La méthode Lagrangienne des différents auteurs est plus précise et permet de se rapprocher beaucoup plus de la singularité. Nos calculs tombent en défaut avant la singularité. C'est prin-

cipalement un problème de résolution en x (avec 62 points on va jusque  $t \simeq 2.75$ , 100  $t \simeq 2.85$ , 314  $t \simeq 2.9$ ).



#### 4.2.4 caractérisation de la singularité

Pour détecter la singularité, on trace en échelles logarithmiques le maximum de la vitesse de déplacement ( $\partial(\delta_1 u e)/\partial x$ ) en fonction de l'écart au temps (inconnu avec précision de l'explosion). Bien entendu on se place dans la région non aberrante trop proche de la singularité.

Le meilleur coefficient de corrélation (r) est obtenu pour  $t_s=3.055$  (Ingham 3.0, Veldman 3.0045) et on obtient presque le comportement en  $-7/4=-1.75$ . Notre corrélation nous semble plus probante que celle de Ingham 84 où on voit que l'écart entre ses calculs et ce comportement est important.

On trouve donc:

$$-\log(v e) = -1.705 \log(t - 3.055) + 2.2197$$

Pour seul résultat original sur ce problème désormais classique nous avons étudié la position du point de  $-\partial u/\partial y$  maximum (vorticité maximale), ce point se rapproche du point singulier en:

$$x(t) = 2.0147 + 0.978(ts - t) - 0.4542(ts - t)^{3/2}; \quad t_s \sim 3.054$$

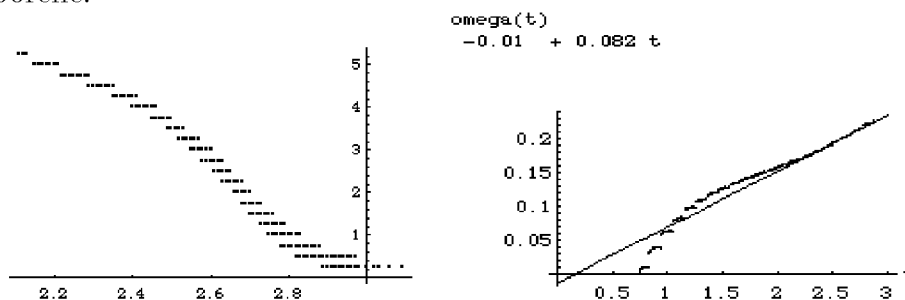
L'ordonnée semble être quasi- linéaire pour tous les temps et suivre la loi:

$$y(t) = -1.54 + 2.33t.$$

La comparaison de ces deux résultats nous donne une "vitesse d'éjection" finale du tourbillon de -0.5 en x et 2.3 en y, il a remonté le courant. La valeur de  $\omega$  augmente régulièrement, pour  $t > 2$  elle est presque linéaire:

$$\omega = -0.01 + 0.082t.$$

D'où les figures suivantes (l'épaissement est dû à un manque de décimales dans le fichier) montrant la trajectoire du maximum de  $\omega$  et son évolution temporelle:



Au vu de ces résultats il paraît difficile de "dégager" clairement un tourbillon.

#### 4.2.5 possibilité d'un choc

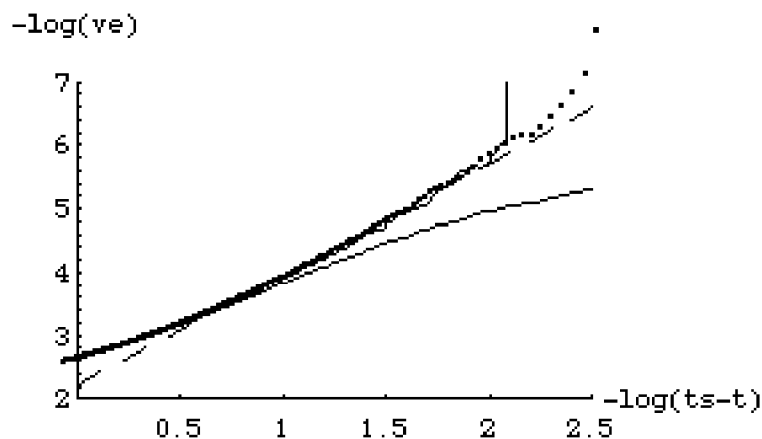
Si on utilise la discrétisation conservative de Voitkova & Lunev (*cf* 5ème essai pour les dérivées en  $x$ ) on n'obtient pas une singularité mais un choc. Ce choc permet de dépasser le temps  $t=3$ ; si on continue à suivre l'évolution de la couche limite on aboutit à une configuration finale non physique et dépendant fortement du nombre de points en  $y$ . Le choc se stabilise en  $x = \pi/2$ . et près de la paroi, l'écoulement est complètement symétrique en  $x$ , c'est à dire que le courant de retour crée une vitesse égale à  $-\sin(x)$ . Loin de la paroi une couche cisailée est éjectée, elle permet de passer de la vitesse  $-\sin(x)$  à  $\sin(x)$ .

Si on trace la courbe représentant le logarithme de la vitesse maximale en fonction de l'écart au temps de singularité, on observe que le cas de la résolution conservative se place en dessous des résolutions centrées (points, *cf* 3ème essai) décentrées (traits, *cf* 1er essai), l'écart est notable pour  $t_s - t \simeq e^{-1} \simeq .37$ . Pour  $t > 2.7$  les résultats sont donc nettement différents si on utilise la résolution conservative (*cf* 5ème essai).

Le choc est lissé par la viscosité artificielle introduite dans la discrétisation... (on pourrait essayer de centrer et d'ajouter un terme de dérivée seconde  $\partial u^2 / \partial x^2$  que l'on contrôlerait mieux que la différentiation à la cosaque de Voitkova & Lunev, ce que l'on a pas fait mais que l'on devrait faire).

Mis a part Voitkova & Lunev 91 et Cousteix 86, il y a aussi Matsushita & all 84 qui évoquent la possibilité d'un choc dans la couche limite. Ces derniers écrivent les équations sous forme intégrale conservative, les profils choisis sont ceux de Falkner Skan avec glissement à la paroi. Les résultats qu'ils obtiennent sont remarquables (ils sont comparés à ceux de Cebecchi 86 et de Van Dommelen & Shen 80) jusqu'à un peu avant la singularité.

Figure 1:  $-\log(ve) = -1.705\log(t - 3.055) + 2.2197$  en traits pointillés comparé aux autres résolutions.



Ils tracent les caractéristiques et observent leur focalisation qu'ils comparent à l'apparition d'un choc. *"Cela signifie que pour  $t > 3$ , les solutions discontinues qui sont les solutions faibles du problème sont capturées numériquement sans explosion, sans parler de la signification physique"*.

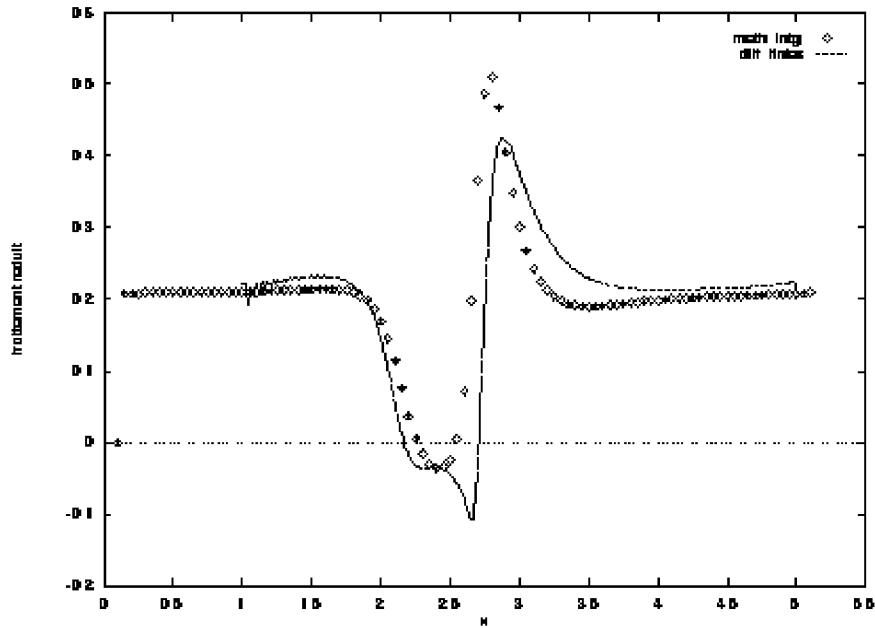
#### 4.2.6 Conclusion

Les simulations de type Navier Stokes se comparent bien pour les temps  $t < 2.6$  comme l'a montré Henkes & Veldman 87. (Quoique nous mettions en doute leur résolution interactive comme nous l'expliquerons plus loin, cf. Tutty & Cowley 86). Sur de récents calculs de Wang 96, on observe que le frottement pariétal est légèrement différent et surtout qu'un nouveau petit tourbillon se crée. Il tourne en sens inverse du précédent. Il est déjà formé au temps  $t = 2$  à  $Re = 3000$ . Il faudrait faire une comparaison fine de différents calculs de Navier Stokes pour essayer de mettre en évidence les termes qui ne conviennent plus.

La question est comment modifier la description de couche limite pour faire partir ce tourbillon et comment le caractériser?

### 4.3 cas du creux

Un second cas qui a retenu notre attention est celui du creux de Carter & Wornom (Cousteix 89). Il s'agit d'une plaque dont la forme est:

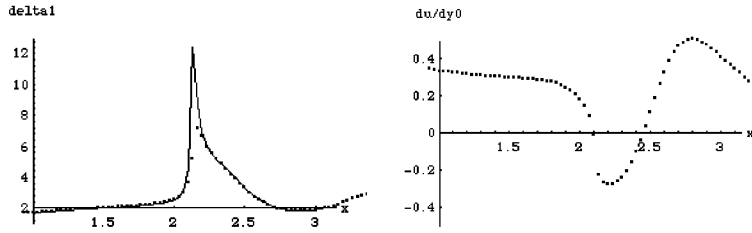


$$y = \frac{\alpha}{ch^2(4(x - 2.5))}.$$

Ce cas nous est bien connu car nous savons le résoudre avec la méthode IBL *stationnaire* avec couplage "semi- inverse" de type Le Balleur. Sur le dessin suivant nous présentons le frottement pariétal réduit à  $R = 1.5 \cdot 10^5$ , et  $\alpha = -0.03$ .

On note l'accord fort correct entre les méthodes intégrales (symboles) avec une fermeture provenant des solutions de Falkner Skan et une résolution en différences finies (Keller Box).

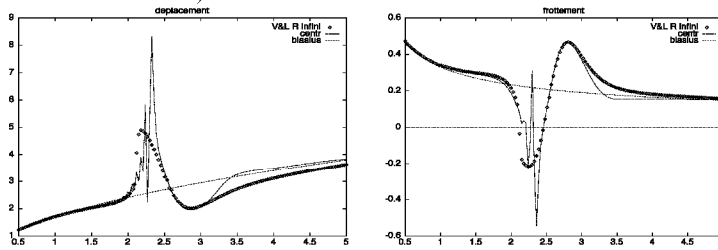
**calcul instationnaire classique** Au temps  $t=0$  on se donne une couche limite sans réalité physique: des profils de Blasius mais une vitesse extérieure égale à la vitesse de fluide parfait associée au creux. On observe ensuite l'adaptation de la couche limite après ce départ impulsif. Le frottement pariétal se creuse régulièrement puis la séparation se produit environ au temps  $t \sim 0,75$ . Le bulbe croît; l'épaisseur de déplacement augmente, et au bout du temps  $t \simeq 2.5$  un pic se forme comme dans le cas du cylindre.



Ce comportement est observé si on utilise les dérivées en x centrées (+1, 0, -1) (essai 3) ou décentrées (3,-4,+1) (essai 2).

### 4.3.1 possibilité d'un choc

Si on utilise la discrétisation conservative de Voitkova & Lunev 91 (*cf* 5ème essai) pour les dérivées en x on n'obtient pas une singularité mais un choc. Ce choc permet de dépasser la singularité. Nous présentons sur la figure suivante la superposition des différents cas (V & L 5ème essai; à Reynolds infini, et la résolution centrée à Reynolds fini  $5e5$ , voir plus loin (essai 3) et la solution de Blasius)

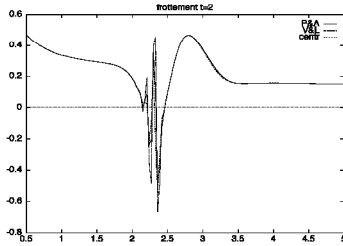


### 4.3.2 calcul instationnaire interactif

Cette fois on permet la rétroaction de la couche limite sur le fluide parfait selon la formule interactive. On constate que la calcul ne forme pas de singularité (Henkes & Veldman 87); tout semble bien se passer au début, le frottement pariétal se creuse régulièrement puis la séparation se produit environ au temps  $t \sim 0,75$ . Le bulbe de courant de retour évolue ensuite et semble se stabiliser sur la solution stationnaire. Malheureusement un deuxième phénomène néfaste apparaît: des oscillations. Dans le cas interactif centré, dans le cas conservatif Voitkova & Lunev 91 et dans une discrétisation inspirée de Phillips et Ackerberg 73 on prend les paramètres numériques suivants:

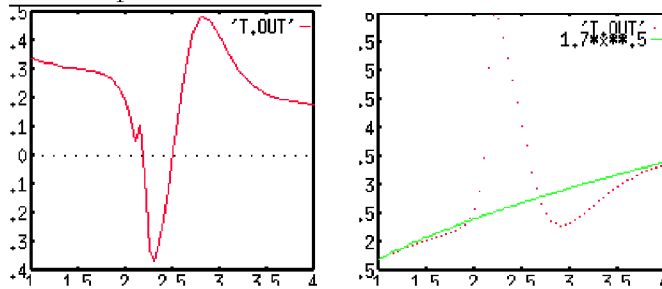
$$dt=.0050 \quad dx=.03 \quad nx=150 \quad x0=.50 \quad dy=.25 \quad ny=50 \quad \alpha=-0.035 \quad Re=5e5$$

Et on obtient les résultats suivants pour le frottement pariétal au temps  $t=2$ .



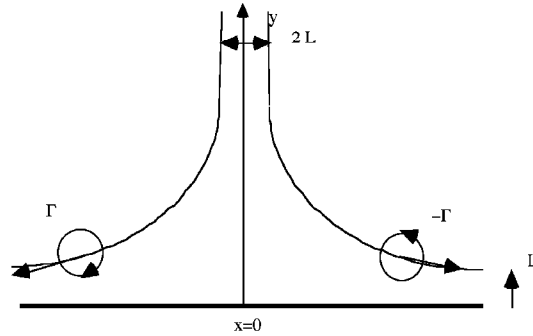
Shen 78 prétend qu'en utilisant l'astuce de la dérivation aval avec la valeur au temps précédent (Philips & Akenberg 73) ou le "zig zag" on évite les oscillations. Nous n'avons pas réussi à les éviter en implantant leur discrétisation (cf 4ème essai).

La naissance d'une oscillation se présente typiquement sous la forme suivante par une "remontée" du frottement pariétal. Elle évolue ensuite comme sur le dessin précédent.



Cowley Hocking & Tutty 85 ont montré qu'il s'agissait d'une instabilité de Rayleigh (d'ondes courtes). Pour ce faire ils développent une analyse de stabilité linéaire des équations de couches limites instationnaires avec comme profil de base un profil séparé (avec point d'inflexion). Il arrivent à la conclusion que toutes les longueurs d'ondes sont instables et que leur taux de croissance en temps est proportionnel à la fréquence spatiale. Donc ils remarquent que "cette instabilité amplifie les inévitables petites erreurs de toute simulation numérique. De plus raffiner le maillage est souvent contre productif parce que cela permet aux petites longueurs d'ondes d'être résolues et il en résulte une croissance encore plus rapide de l'instabilité".

En conséquence de quoi, les résultats de Henkes & Veldman 87 sont douteux. On peut voir effectivement des oscillations sur leurs résultats du cylindre avec interaction. Leur cas de creux interactif semble résolu, en fait il ne l'est que parce que leur maillage est trop grossier. Des oscillations sont visibles pour les grands Reynolds, il est vraisemblable qu'elles exploseraient si ils attendaient plus longtemps.



## 4.4 Interaction vortex paroi

### 4.4.1 deux vortex contre une paroi

On se donne une plaque plane infinie et un couple de deux tourbillons contrarotatifs singuliers ponctuels. Cette configuration est en fait proche de celle de Walker & all 87 où le tourbillon est annulaire. Au temps  $t=0$ , ces deux lignes tourbillonnaires sont loin de la paroi et se rapprochent de celle-ci en interagissant mutuellement. La diffusion des vortex est bien entendu négligée, ceux-ci restent singuliers ponctuels. La distance qui les sépare (lorsqu'ils sont loin du mur) est de  $2L$  (dans les échelles choisies cela fait 2). Ils se déplacent à la vitesse  $\Gamma/2L$  dirigée vers le bas. Cette vitesse va servir pour construire le nombre de Reynolds  $Re = \Gamma/(2\nu)$ . On le suppose grand. Si les deux vortex n'interagissent pas avec la couche limite ( $Re$  infini), ils finissent par s'éloigner, l'un vers la droite, l'autre vers la gauche, en longeant la paroi à la hauteur  $L$ . Leur vitesse est  $\pm\Gamma/2L$ .

Nous examinons en fait un problème qui est une modification des articles de Peridier, Smith & Walker 1991 et Dologalski & Walker 84. Dans ces derniers, un seul tourbillon se déplace au-dessus d'une paroi (ils se placent dans le repère du vortex et toujours en utilisant une résolution Lagrangienne). Il s'agit encore d'un départ impulsif. Notre configuration est en fait la même pour les temps grands, puisque les tourbillons s'éloignent l'un de l'autre, et finissent par ne plus interagir (Bien entendu ils interagissent avec leur image par rapport à  $y=0$ ). Notre configuration nous permet de mieux nous affranchir du départ impulsif. La couche limite associée est une nouvelle fois singulière et se termine au bout d'un temps (cf Peridier et coll 1991a):

$$t \sim .9, \text{ et } \delta_1 \sim (-t + ts)^{-1/4}.$$



## 4.5 résolution

Les équations de couche limite sont inchangées, la condition de raccord en revanche compte 3 termes, les deux premiers sont les contributions des vortex placés en  $(xv, yv)$  et  $(-xv, yv)$  ainsi que de leurs images, le troisième terme est la vitesse de transpiration causée par l'épaississement de la couche limite  $V_0$ :

$$u(x, \infty, t > 0) -> u_e(x, t) = \frac{4yv}{(x - xv)^2 + yv^2} - \frac{4yv}{(x + xv)^2 + yv^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0}{(xv - \xi)^2 + yv^2} d\xi.$$

Cette vitesse  $V_0$  étant toujours définie à partir de l'augmentation de  $\delta_1$ :

$$V_0 = R^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} (u_e \delta_1).$$

Les vortex ont été positionnés en  $(xv = \pm 1, yv = 10)$  au temps  $t = 0$ , la vitesse du fluide étant prise nulle. Leurs positions sont actualisées à chaque pas de temps car ils sont entraînés par leurs images et par le courant créé par l'épaississement de la couche limite.

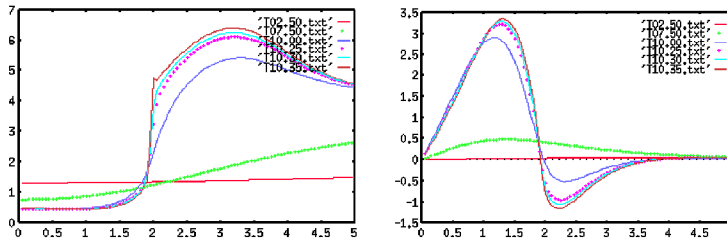
$$\frac{dxv}{dt} = \left( \frac{1}{yv} - \frac{4xv}{4xv^2 + 4yv^2} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(xv - \xi)V_0}{(xv - \xi)^2 + (yv)^2} d\xi.$$

$$\frac{dyv}{dt} = \left( -\frac{1}{yv} + \frac{4xv}{4xv^2 + 4yv^2} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(yv)V_0}{(xv - \xi)^2 + (yv)^2} d\xi.$$

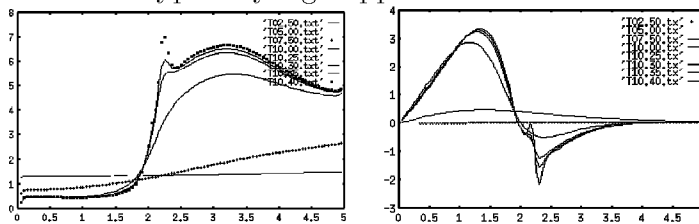
On retrouve les formules de Peridier & all 91b lorsque l'on se place près du vortex du premier quadrant (cas IBL); on retrouve les formules de Peridier & all 91a si de plus on fait tendre le Nombre de Reynolds vers l'infini (pas d'interaction); et celles de Chang & Comlisk 89 pour un seul vortex et si on impose en plus un écoulement uniforme.

### 4.5.1 résultats

Bien entendu on retrouve la singularité si on se place dans le cas classique. Nous observons l'explosion vers le temps  $t=10.4$  (il faut un temps  $t \simeq 10$  aux tourbillons pour se rapprocher de la paroi, et quand ils y sont, l'explosion se produit pour un temps  $\simeq 1$ ).



Le cas interactif ( $R=10^5$ ) est encore explosif (contrairement au cas du creux où le fait d'introduire l'interaction enlève la singularité). De plus l'oscillation de type Rayleigh apparaît!!



## 4.6 conclusion

L'interaction tourbillon/ paroi mérite d'être poursuivie en détails en poursuivant la démarche de Chang & Comlisk 89 qui calculent la couche limite interactive due à un vortex plus un écoulement uniforme. Ils disent voir la naissance d'un troisième tourbillon juste avant la singularité. Au vu de leurs résultats numériques très chahutés nous n'aurions pas osé affirmer cela. Ce même problème est étudié par un code Blob sophistiqué de Pellerin & Giovaninni 96 qui observent le rebond du vortex sur la couche limite. La question est de savoir si cette configuration explose toujours (ce qui correspond à un enroulement de la couche limite autour du vortex *cf* Pellerin et Giovaninni 96), ou si elle est régulière pour un tourbillon assez faible. Même si elle explose, l'étude des temps courts par rapport à cette explosion (mais d'ordre du temps convectif) est intéressante (Atassi & all 96); ils étudient la déformation d'une couche cisailée sous l'interaction faible d'un vortex.

Un autre phénomène important est celui de la réceptivité de la couche limite sous l'action d'un vortex. Efremov & Savenkov 91 proposent un mécanisme qui se décompose comme suit:

- introduction impulsive du tourbillon dans la couche limite dont l'échelle longitudinale est  $\varepsilon^3 = R^{-3/8}$ , (ils choisissent cette échelle car il ont l'idée de retomber sur la génération d'ondes Tollmienn Schlichting dans le cadre de la triple couche). Ce tourbillon est convecté à la vitesse de l'écoulement. Le temps associé est  $t_2 = \varepsilon^{-3}t$ .

Ce mouvement est purement un entraînement non visqueux de la vorticité initiale dans la couche limite. Une couche de Stokes croît (en  $t^{1/2}$ ) qui permet

l'adhérence de la vitesse à la paroi. Le temps suivant qu'il faut considérer est  $\tilde{t} = \varepsilon^{-2}t = t_2\varepsilon$ . Lorsque  $t_2- > \infty$  on a  $\tilde{t}- > 0$ . Ce temps correspond au temps de la triple couche, il y a alors interaction forte en la couche de Stokes qui s'est épaissie et le fluide parfait. La condition initiale à l'échelle de temps  $\tilde{t}$  est celle au temps  $t_2- > \infty$ . On a alors création d'ondes TS provenant de l'amplification du "reste" de la perturbation initiale.

Le cas du rebond des deux tourbillons peut être repris dans le même esprit. On superpose cette fois un écoulement de point d'arrêt. Si celui ci est assez important, il peut être éviter l'explosion ou du moins justifier des études aux temps courts vis à vis de l'enroulement.

## 4.7 Autres cas

### 4.7.1 cas laminaire

Il existe certainement d'autres cas, par exemple celui du point d'arrêt inversé de Hommel 83 conduisant à une croissance exponentielle de l'épaisseur de couche limite, ou celui de la séparation au bord d'attaque sur une aile parabolique de Degani & all 95 conduisant à la singularité. Enfin, il faudrait examiner les solutions semblables instationnaires de Ma & Hui 90.

### 4.7.2 cas turbulent

A notre connaissance, les seuls cas turbulents traités le sont par des méthodes intégrales. Par exemple Cousteix 86 et Cousteix & Houdeville 81 arrivent à une singularité (sous forme d'un choc), d'autres ne franchissent pas le point de séparation (mais le temps est un pseudo temps) de Maqueville 95. Mais d'autres exemples ne sont pas singuliers comme ceux de Le Balleur & Girodroux La Vigne 84 ou Swafford 92 ou Drela & all 97. Le problème consiste à trouver les bonnes fermetures turbulentes (Swafford 83 Whitfiel 79). Il nous serait possible d'adapter notre code avec une formulation de type longueur de mélange, ce qui n'a pas encore été fait.

## 5 comportement asymptotique près de la singularité

### 5.1 comportement local

Le comportement près de la singularité est maintenant assez bien compris, sa gestation a été longue (Smith 82, Smith 89, Smith & Bowles 92, Vick-

ers & Smith 94, Cassel & all 96). Pour résumer disons que localement, en s'inspirant des résultats numériques, il faut écrire le développement suivant:

$$x = x_s + K(t_s - t) + (t_s - t)^M X, \quad y = (t_s - t)^{-N} Y, \quad u = -K(t_s - t)^{M-1} U$$

avec  $(2N-1)/(M-1)$  entier relatif. Le choix serait, au vu des résultats numériques, celui qui donne le plus petit taux de croissance de la couche limite:  $M=3/2$  et  $N=1/4$ . A noter que les équations dégagées sont inviscides avec ce développement.

## 5.2 interaction

Ayant ces échelles on va pouvoir dire (avec Cassel & all 9) quand la description de couche limite classique tombe en défaut., On voit facilement que l'explosion de la vitesse transversale en  $(t_s - t)^{-7/4}$  (que nous avons vérifiée avec notre code) induit une première interaction de pression. Si celle ci est calculée selon la formule de couplage IBL (intégrale de Hilbert de la vitesse de transpiration), son ordre est  $(t_s - t)^{-7/4} R^{-1/2}$ , son gradient en x est donc d'ordre  $(t_s - t)^{-13/4} R^{-1/2}$ , il contrebalance les termes de convection qui sont d'ordre  $(t_s - t)^{-1/2}$  lorsque les échelles sont  $(t_s - t) = R^{-2/11}$  et  $x - x_s = R^{-3/11}$ . Cassel & all 96 résolvent ce système et constatent une fois de plus que l'instabilité d'ondes courtes intervient, ce qui est un résultat décevant car ils ne pensaient pas qu'elle serait présente. Dans leur discussion, ils se posent la question de savoir si cette l'instabilité d'onde courte ne serait pas présente dans toute résolution numérique mais lissée par le maillage trop grossier et par le temps d'évolution trop court. Pour ce qui est de nos résultats, l'instabilité n'est apparue que lorsque qu'il y avait un couplage avec le fluide parfait et séparation.

## 5.3 autres équations

Face à cette impasse, une formulation étendue de la couche limite interactive (Smith & all 84) pourrait être mise en oeuvre:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + 0 + 0$$

Le fluide parfait restant couplé par l'épaisseur de déplacement. Smith & all 84 ont montré que la courbe neutre complète était incluse dans ce système car ces équations ont été obtenues en "repêchant" les différents termes qui apparaissent dans les équations de la stabilité linéaire de la couche limite. La voie est à explorer.

## 6 Conclusion

Au terme de cette revue nous dirons que notre objectif initial a été atteint: la mise en oeuvre d'un code de couche limite instationnaire. Il permet de retrouver les principaux problèmes déjà exposés dans la littérature: l'explosion de la couche limite au bout d'un temps fini et son instabilité dans le cas interactif. Le problème du franchissement n'a pas été abordé, et reste un problème ouvert. Nous avons simplement rattrapé les dix ans (au moins) de retard que nous avons sur le sujet mais pas apporté de grandes nouveautés. Pour se consoler de cela mais surtout des problèmes inhérents à la couche limite instationnaire, on dira que les séparations étant néfastes en aérodynamique, ce code peut au moins calculer de manière pratique des effets instationnaires de couche limite ne présentant pas de courant de retour. La conclusion finale sera, en toute simplicité, celle de Dologalski & all 94: *"Une possibilité attrayante serait un schéma interactif hybride dans lequel un calcul de couche limite instationnaire serait couplé à une résolution des équations d'Euler instationnaires... Ce problème à grand nombre de Reynolds peut être considéré comme l'un parmi les plus importants à résoudre de la mécanique des fluides."*

## 7 Bibliographie

Quelques animations montrant la séparation de la singularité ainsi qu'une version longue de ce rapport sont disponibles sur:

<http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/lagree.html>

ATASSI O. V., LICHTER S. & ANDREW J.R. 1996 "the interaction of a point vortex with a wall- bounded vortex layer" subm JFM.

BERNOFF A.J. 1996, "The steady boundary layer due to a fast vortex" Phys . Fluids Vol 8, No 1, pp 156- 162.

BROWN S.N. CHENG H.K. & SMITH F.T. 1988 "Non linear instability and break-up of separated flow", J. Fluid Mech., vol 193 pp 191- 216.

CASSEL, K.W., SMITH F.T. & WALKER J.D.A. 1996 The onset of instability in unsteady boundary- layer separation J. Fluid Mech. 315, 223- 256.

CEBECI T. ,1984, "Unsteady boundary layer with an Intelligent numerical scheme", J. Fluid Mech., vol 146, pp 313- 330.

CHANG F.S & CONLISK A.T. 1889 The effect of interaction on the boundary layer induced by a convected rectilinear vortex J.Fluid Mech vol 200 pp 337- 365.

COUSTEIX J. 1988 "Couche limite laminaire" Cepadues.

- COUSTEIX J. 1989 "Turbulence et Couche limite" Cepadues.
- COUSTEIX J. 1986 Three dimensional and unsteady boundary layer computations Ann. Rev. Fluid Mech. 18:173- 96.
- COUSTEIX J.& HOUEVILLE R. 1981 "Singularities in boundary layer calculations" AIAA J Vol 19, no 8.
- COWLEY S.J. 1983," Computer extension and analytic continuation of Blasius expansion for impulsive flow past a circular cylinder." J. Fluid. Mech., vol 135, pp 389- 405.
- COWLEY S.J. HOCKING L.M. & TUTTY O. R. "The stability of the classical unsteady boundary layer equation" Phys. Fluids vol 28 (2).
- de MAQUEVILLE B. 1995, "application des méthodes intégrales au calcul de la couche limite du duxième ordre et au calcul de la couche limite sur des maillages non structurés." Thèse Dr UPMC Paris 6.
- DEGANI A.T., LI Q., WALKER J.D.A. 1995 "Unsteady separation from the leading edge of a thin airfoil". Phys. Fluids 8 (3) march 96.
- DOLOGALSKI T.L. SMITH C.R. & WALKER J.D.A 1994 "Vortex interactions with walls" Annu. Rev. Fluid Mech. 26 pp 573 -616.
- DOLOGALSKI T.L. & WALKER J.D.A. 1984 "The Boundary layer induced by a convected 2- dimensional vortex", J. Fluid Mech. vol 139, pp1-28.
- DRELA M. GILES M.B. 1987 "viscous inviscid analysis of transonic and low Reynolds number Airfoils" AIAA J vol 25, no 10.
- EFREMOV O.A. & SAVENKOV I.V. 1993 "Non linear interaction of a large vortex with a boundary layer" Mekh. Zhid i Gaza No 1, pp 70- 77.
- GOSH A. 1961 Contribution à l'étude de la couche limite instationnaire, Pub. Sci. du Ministère de l'Air. n° 381.
- HALL M.G. 1969 "The boundary layer over an impulsively started flat plate" Proc Roy Soc A, pp 401- 414.
- HENKES R. A. W. M. & VELDMAN A. E. P. 1987 "On the breakdown of the steady and unsteady interacting boundary layer description". J. Fluid Mech. 179, 513- 529.
- HIGUERA F.J. "The hydraulic jump in a viscous laminar flow" J. Fluid. Mech ., vol 274, pp 69- 92.
- HIRSCHBERG A. 1981 Shock Tube determination of the heat conductivity of non ionized and partially ionized argon.
- HOMMEL M.J. 1983"The laminar unsteady flow of a viscous fluid away from a plane stagnation point". J.F.M. 132, 407- 416.
- HSIAO C. & PAULEY L. , 1994, "Comparison of the triple deck theory interactive boundary layer and Navier Stokes computation for marginal separation", Trans. of the ASME , vol 116, march 1994.
- INGHAM, D.B. 1984 "Unsteady separation". J. Comp. Phys. 53, 90-99.

LAGRÉE 1995, "Upstream Influence in mixed convection at small Richardson number on triple, double and single deck scales." Springer Verlag, Lecture Notes in Physics 442, "Asymptotic Modelling in fluids".

LE BALLEUR J.C. & GIRODROUX LA VIGNE P., 1984, "A semi-implicit and unsteady numerical method for computing unsteady transonic separated flows", La Recherche aérospatiale, 1984-1 p15-37.

LE BALLEUR J.C. 1978 "Couplage visqueux non visqueux: Méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques" La Recherche Aérospatiale 1978-2, p67- 76 Eng Trans ESA TT- 496

LE BALLEUR J.C. 1980, "Calcul des écoulements à forte interaction visqueuse au moyen des méthodes de couplage", AGARD CP291, Paper 1.

LE BALLEUR J.C. 1982 Viscid inviscid coupling calculations for two and three dimensional flows, VKI lecture series 1982-04, p 1-87.

LIGHTHILL M.J. 1954 "The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity", Proc. Royal Soc London, vol 224 A pp 1- 23.

LOCK R.C. & WILLIAMS B.R., 1987, "Viscous interactions in external aerodynamics", Prog Aerospace Sci, vol 24, pp 51-171.

MA PK.H. & HUI W.H. 1990 "Similarity solutions of the two dimensional unsteady boundary - layer equations", J. Fluid Mech, vol 216, pp 537- 559.

MATSUSHITA M. MUARAT S. & AKAMATSU T. 1984 Studies on boundary - layer separation in unsteady flows using an integral method J. Fluid Mech. vol 149 pp 477- 501.

NEILAND V.Ya 1969 "Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flows" Mekh. Zhid. Gaz.Vol 4, pp53- 57.

PELLERIN S. & GIOVANNINI A. 1996 "Interactions dynamiques entre un tourbillon de Rankine et une couche limite de plaque plane" CRAS juillet.

PERIDIER V. J. SMITH F.T. & WALKER J.D.A. 1991a "Vortex induced boundary layer separation. Part 1. The unsteady limit problem  $Re \rightarrow \infty$ ". J. Fluid. Mech. , vol 232, pp 99- 131.

PERIDIER V. J. SMITH F.T. & WALKER J.D.A. 1991a "Vortex induced boundary layer separation. Part 1. The unsteady limit problem  $Re \rightarrow \infty$ ". J. Fluid. Mech. , vol 232, pp 99- 131.

PERIDIER V. J. SMITH F.T. & WALKER J.D.A. 1991b "Vortex induced boundary layer separation. Part 2. Unsteady interacting boundary layer theory", J. Fluid. Mech. , vol 232, pp 133- 165.

PERIDIER, V.J. 1995 "A lagrangian scheme for the animation of unsteady separation". Comp. & Fluids 24, No3, 269- 291.

PHILLIPS J.H. & ACKERBERG R.C. 1973 A numerical method for integrating the unsteady boundary layer equations when there are regions of

backflow J. Fluid Mech. vol58, part 3, pp. 561- 579.

PROKOPIOU Th, CHENG M. & CHANG H.C. 1991 "long waves on inclined films at high Reynolds number", J. Fluid. Mech.vol 222 pp 665-691.

ROGET C. 1996 "Structures asymptotiques et calculs d'écoulements sur des obstacles bi et tri dimensionnels" PhD Univ Toulouse Nov 96.

RUBAN A.I. TIMOSHIN S.N. 1986 "Propagation of perturbations in the boundary layer on the walls of a flat channel" Fluid Dynamics No 2, pp 74-79.

SCHLICHTING 1979 "Boundary Layer Theory" Mc Graw Hill.

SHEN S.F. 1978 Unsteady separation according to the boundary layer equation Ad. App. Mech.VOL 18.

SMITH F.T. 1982 "On the high Reynolds number theory of laminar flows" IMA J of App Math 28, 207- 281.

SMITH F.T. & BOWLES R.I., 1992, "Transition theory and experimental comparisons on amplification into streets and a strongly nonlinear break- up criterion", Proc .R. Soc. Lond. A , vol 439, pp 163-175.

SMITH F.T., 1989, "Finite time break- up can occur in any unsteady boundary layer", Mathematika, vol 35, pp 256-273.

SMITH PAPAGEORIU & ELLIOT "An alternative approach to linear and non linear stability calculations at finite Reynolds numbers" J. F.M. vol 146, pp 146- 330.

SMITH S.H. 1970 "On the development of the wake behind the trailing edge of a flat plate." J. F.M. vol 42, part 3, pp 627- 638.

SMITH S.H. 1972 "On the impulsive flow of a viscous liquid past a semi-infinite flat plate." SIAM J Appl Math, Vol 22, No 2, pp 148-154.

STEWARTSON K. & WILLIAMS P.G.1969 "Self induced separation", Proc Roy. Soc A 312, 181- 206.

STEWARTSON K. 1951 "On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid. II", Quart. Journ. Mech and Applied Math., vol XXVI, Pt2 pp143- 152.

STEWARTSON K. 1973 "On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid", Quart. Journ. Mech and Applied Math., vol IV, Pt2, pp 183-198.

SWAFFORD T.W. 1983 "Analytical approximation of two dimensional separated turbulent boundary layer profiles" AIAA J vol 21, no 6.

SWAFFORD T.W. 1992 "Computation of Unsteady supersonic Quasi one dimensional viscous inviscid interacting internal flow field" AIAA J vol 31, no 2, techn. notes.

TUTTY O. R. & COWLEY S.J. 1986 "On the stability and the numerical solution of the unsteady interactive boundary layer equation". J.F.M., vol



168, 431- 456.

VAN DOMMELN L. & SHEN S.F. 1980, "The spontaneous generation of the singularity in a separating boundary layer", J. Comp. Phys. , vol 38, pp 125-140.

VAN DOMMELN L. L. & SHEN S. F. 1980 "The spontaneous generation of the singularity in a separating laminar boundary layer". J. Comp. Phys. 38, 125-140.

VICKERS I.P. & SMITH F.T. 1994 "Theory and computations for breakup of unsteady subsonic separating flows", J. Fluid Mech. vol 268, pp. 147- 173.

VOITKOVA G.V.,& LUNEV V.V. 1991 Discontinuous solutions of boundary layer equations with a positive pressure gradient *Mekh . Zhid. Gaza* 5,53-62.

WALKER J.D.A. SMITH C.R. CERRA A.W. & DOLOGALSKI T.L. 1987 The impact of a vortex ring on a wall. *J.Fluid Mech* vol 181 pp 99- 140.

WANG Z. 1996 "Résolution numérique des équations de Navier Stokes bidimensionnelles en formulation vitesse tourbillon par un méthode d'équations intégrales" Thèse de l'école Polytechnique.

WHITFIELD D.L. 1979 "Analytical description of the complete turbulent boundary layer velocity profile" *AIAA J* vol 17, no 10.