

Un modèle simplifié pour le problème de l'impact de goutte

J. Philippi^{a,b}, A. Antkowiak^{a,b}, P-Y. Lagrée^{a,b}

a. Université Pierre et Marie Curie, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France

b. CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, 4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France

Résumé :

Lorsqu'une goutte tombe sur un liquide ou un solide on observe la formation d'une corolle et d'une nappe liquide qui va se déstabiliser en formant de nouvelles gouttes plus petites. C'est le "splash". Afin d'obtenir des résultats analytiques nous avons simplifié le problème en utilisant un modèle de demi-goutte. Nous montrons comment obtenir le champ de pression et le champ de vitesse dans la demi-goutte au moment de l'impact. En particulier nous déterminons la vitesse radiale au niveau du support. Nous discutons du comportement de cette dernière près de la ligne de contact où nous mettons en évidence que cette solution diverge logarithmiquement si on fait l'hypothèse de fluide parfait. Ces résultats analytiques sont comparés à des solutions numériques obtenues à l'aide du code *Gerris*.

Abstract :

When a drop falls on a liquid or a solid surface we can observe the formation of a corolla and a liquid sheet which will destabilize forming new little drops. This is the "splash". In order to obtain analytical results we simplified this problem using a half drop model. We show how we can determine the pressure and the velocity field in the half drop during the impact. In particular we determine the radial velocity on the support. The logarithmic behavior of the velocity near the contact line for an ideal fluid will be discussed. These analytical results will be compared with numerical solutions obtained with the code *Gerris*.

Mots clefs : Impact de goutte ; Pression impulsionnelle ; Singularité logarithmique.

1 Introduction

Le problème de l'impact de goutte est difficile à traiter étant donné la grande variété de paramètres dont il dépend. En effet c'est un problème tri-dimensionnel, instationnaire, non linéaire, dépendant de nombreux paramètres physiques tels que la viscosité ou la tension de surface ainsi que de la nature du substrat sur lequel la goutte impacte (solide, liquide, hydrophobe...). On pourra voir à ce propos Rein [1], Josserand *et al.* [2] et Eggers *et al.* [3]. De plus le rôle de l'air ambiant est également très important (Xu *et al.* [4]). Il est donc très difficile de trouver des solutions analytiques à ce problème d'autant plus qu'il admet une singularité géométrique au moment de l'impact. Pour pouvoir passer outre cette difficulté, il est commode de considérer un problème modèle reposant sur l'impact d'une demi-goutte. Un problème équivalent consiste à regarder ce qu'il se produit au moment de l'impact lorsqu'on pose une goutte sur un support cylindrique et qu'on laisse tomber verticalement ce support. Une séquence d'images est visible sur la figure 1 gauche. Dans une première partie nous déterminerons la solution analytique du problème au moment de l'impact (figure 1 droite) et nous discuterons du comportement du champ de vitesse au niveau du support. Nous comparerons ensuite ce résultat à une solution numérique obtenue à l'aide du code *Gerris* [5]. Nous présenterons ensuite les perspectives pour la suite de cette étude portant sur l'analyse du comportement de la nappe liquide engendré par l'impact.

2 Le problème de l'impact

2.1 Notion de pression impulsionnelle

Les premiers travaux portant sur les interactions fluide-structure réalisés par Wagner [6] sur l'amerrissage d'hydravion ou Bagnold [7] avec un modèle d'impact de vague impliquant le gaz compris entre une vague et une paroi ont été enrichis par le concept de pression impulsionnelle (Batchelor [8]). Cooker et Peregrine [9] ont utilisé ce concept pour étudier l'impact plan d'une vague sur une digue. L'idée est de remarquer qu'un changement brutal de vitesse du fluide près de la paroi au moment de l'impact va induire un gradient de pression important qui va lui même produire un changement de vitesse brutal. Une étude de ce phénomène en temps court permet de mettre en évidence que le champ de pression au moment de l'impact est induit par un champ acoustique, qui n'est pas étudié ici, rayonné depuis les parois (Antkowiak *et al.* [10]). Le temps d'impact τ étant de l'ordre de 10^{-4} secondes, on peut s'attendre à ce que la dérivée temporelle de la vitesse soit très grande et compensée uniquement par le gradient de pression. Par conséquent, en utilisant les changements de variables $\underline{u} = U_0 \bar{\underline{u}}$, $p = \Pi \bar{p}$, $\underline{\nabla} = \frac{1}{R} \bar{\underline{\nabla}}$ et $t = \tau \bar{t}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\rho \left(\frac{U_0}{\tau} \frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_0^2}{R} (\bar{\underline{u}} \cdot \bar{\underline{\nabla}}) \bar{\underline{u}} \right) = - \frac{\Pi}{R} \bar{\underline{\nabla}} \bar{p} + \frac{\mu U_0}{R^2} \Delta \bar{\underline{u}}.$$

Le temps d'impact τ est très petit comparé au temps convectif R/U_0 . Donc le principe de moindre dégénérescence appliqué entre le terme instationnaire et le gradient de pression implique que la pression est d'ordre $\Pi = \rho \frac{R}{\tau} U_0$. Les termes non linéaires sont alors d'ordre $O(\frac{\tau U_0}{R})$ et les termes visqueux sont d'ordre $O(\frac{\mu}{\rho R (R/\tau)})$. Donc le problème dominant est de la forme [8] :

$$\frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial \bar{t}} = - \bar{\underline{\nabla}} \bar{p}. \quad (1)$$

En intégrant (1) sur le temps d'impact nous obtenons :

$$\bar{\underline{u}}_{impact} = \bar{\underline{u}}(0^+) - \bar{\underline{u}}(0) = - \bar{\underline{\nabla}} \bar{P}, \text{ avec } \bar{P} = \int_0^{0^+} \bar{p}(\bar{\underline{x}}, \bar{t}) d\bar{t} \quad (2)$$

où \bar{P} est la pression impulsionnelle. De plus nous considérons que le fluide est incompressible donc l'équation de conservation de la masse est donnée par $\text{div}(\bar{\underline{u}}) = 0$. Nous obtenons donc :

$$\bar{\underline{\nabla}}^2 \bar{P} = 0.$$

Donc notre problème d'impact se réduit à la résolution d'une équation de Laplace avec des conditions aux limites de types Dirichlet et Neumann. Cependant, durant l'impact les termes non linéaires deviendront dominants dans certaines régions ainsi que les termes visqueux dans une couche limite d'épaisseur $\sqrt{\nu \tau}$ près du support. Néanmoins nous n'étudierons pas l'influence de ces termes dans cet article et nous travaillerons avec un fluide parfait. De plus nous négligeons la gravité ainsi que les effets de la tension de surface en ne considérant que des impacts à grand nombre de Weber ($We = \rho U_0^2 R / \sigma \gg 1$). Nous supposons également que les particules de fluide dans la demi-goutte n'ont pas de vitesse dans le référentiel de la goutte avant l'impact.

2.2 Solution analytique du problème axysymétrique

Le rayon de la demi-goutte est noté R et la vitesse d'impact est notée U_0 . Les conditions aux limites sur la surface libre et sur le support sont :

$$P(r = R) = 0 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z}(\theta = 0) = -\rho U_0.$$

Notre modélisation est décrite par la figure suivante :

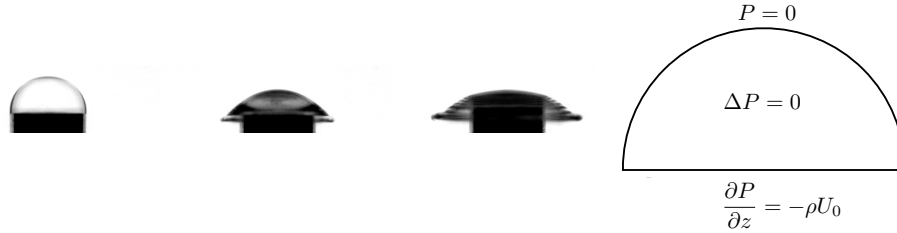


FIGURE 1 – À gauche : séquence montrant l'écoulement après impact pour une goutte de 2 millimètres de rayon et une hauteur de chute de 7 centimètres. L'écart de temps entre chaque images est de $8,3 \cdot 10^{-5}$ secondes. À droite : modélisation de l'impact d'une demi-goutte de rayon R . Ce problème est régi par une équation de Laplace avec la condition de Dirichlet $P = 0$ sur la surface libre et la condition de Neumann $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho U_0$ sur le support.

La solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques est donnée par une somme de solutions régulières, axisymétriques dans notre cas, qui sont une sous-classe des harmoniques sphériques Y_l^m . Ces solutions régulières sont de la forme :

$$F_n(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta).$$

où P_n est le polynôme de Legendre de degré n . La solution est donnée par :

$$P(r, \theta) = -\rho U_0 z + \rho U_0 R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)}{(2n-1)(2n+2)} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos \theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2n}. \quad (3)$$

Les coefficients de la série ont été déterminés à l'aide de la condition de Dirichlet à la surface libre. On en déduit le champ de vitesse dans le référentiel de la goutte à l'aide de la relation (2) et (3). En particulier nous nous intéressons au comportement de la vitesse radiale, notée u_r , sur le support c'est à dire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Avec les changements de variables $u_r = U_0 \bar{u}_r$ et $r = R \bar{r}$, nous obtenons :

$$\bar{u}_r(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(4n+1)}{(2n-1)(n+1)} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}\right)^2 \bar{r}^{2n-1}. \quad (4)$$

On peut montrer en utilisant la formule de Stirling que la vitesse diverge logarithmiquement au voisinage de la ligne de contact. Nous avons l'équivalent suivant :

$$\bar{u}_r(\bar{r}) \underset{\bar{r} \rightarrow 1}{\sim} -\frac{2 \log(1 - \bar{r}^2)}{\pi \bar{r}}. \quad (5)$$

Ce comportement logarithmique est caractéristique des problèmes d'impact et a déjà été mis en évidence dans le cas plan par Cooker et Peregrine [9]. Il est également possible de trouver la vitesse radiale au niveau du support ainsi que son comportement au voisinage de la ligne de contact en utilisant la méthode des intégrales de frontière. Cependant cette méthode est plus difficile à manier dans ce cas puisque le résultat fait intervenir des intégrales elliptiques. Le prolongement naturel de cette étude, mais que nous ne traiterons pas ici, est la détermination du paramètre physique négligé jusqu'alors qui régularise la solution.

Nous constatons également que l'écoulement possède un point d'arrêt au voisinage de l'origine. Le champ de vitesse est obtenu à l'aide du premier mode de la vitesse radiale :

$$\begin{cases} \bar{u}(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{5}{8}\bar{r}, \\ \bar{v}(\bar{r}, \bar{z}) = -\frac{5}{4}\bar{z}. \end{cases} \quad (6)$$

Par ailleurs, bien qu'elle soit valide uniquement pour $\bar{r} \rightarrow 1$, on remarque que le développement limité de la relation (5) au voisinage de l'origine est :

$$-\frac{2 \log(1 - \bar{r}^2)}{\pi \bar{r}} = \frac{2}{\pi}\bar{r} + o(\bar{r}^2), \quad \bar{r} \rightarrow 0.$$

Comme $\frac{5}{8} \simeq \frac{2}{\pi}$ (car $\pi \simeq \frac{32}{10}$), (5) est également une bonne approximation du comportement de la vitesse radiale lorsque $\bar{r} \rightarrow 0$. On peut voir sur la figure 2 la superposition de la solution analytique et son approximation ainsi que leur terme respectif du premier ordre au voisinage de l'origine.

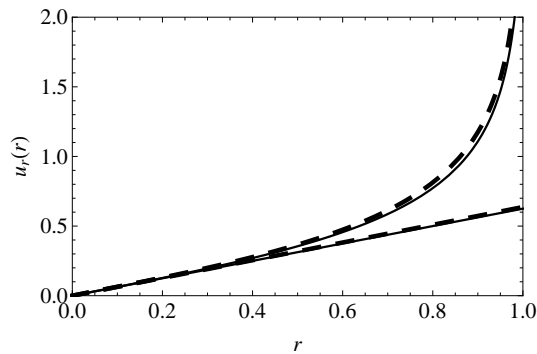


FIGURE 2 – Comparaison de la solution analytique en ligne continue et de son approximation en pointillé avec leur approximation respective au premier ordre au voisinage de l'origine. Ces deux droites sont presque superposés puisque la pente de la solution exacte est $\frac{5}{8}$ et que $\frac{5}{8} \simeq \frac{2}{\pi}$ (car $\pi \simeq \frac{32}{10}$).

Nous allons maintenant vérifier que nous retrouvons ce résultat par simulations numériques.

3 Résolution numérique

3.1 Validation du modèle à l'instant $t = 0$

Nous avons tout d'abord résolu le problème à l'aide de *Gerris* pour obtenir la vitesse radiale au niveau du support au moment de l'impact. Le calcul a été réalisé dans des conditions identiques à celles de notre modèle à savoir que l'on considère un fluide parfait et que l'on néglige la tension de surface et les termes non-linéaires. Nous avons pris un rapport de densité entre le fluide impactant et le fluide environnant égal à celui de l'eau sur l'air. Dans ces conditions la solution numérique se superpose à la solution analytique. Pour la pression nous devons multiplier la solution numérique par le pas de temps de notre simulation puisque notre solution analytique correspond à la pression impulsionnelle (intégration de la pression sur un temps très court).

Nous représentons sur la figure suivante la convergence de la pression et de la vitesse radiale numérique au niveau du support vers leur solution analytique respective lorsqu'on augmente le raffinement :

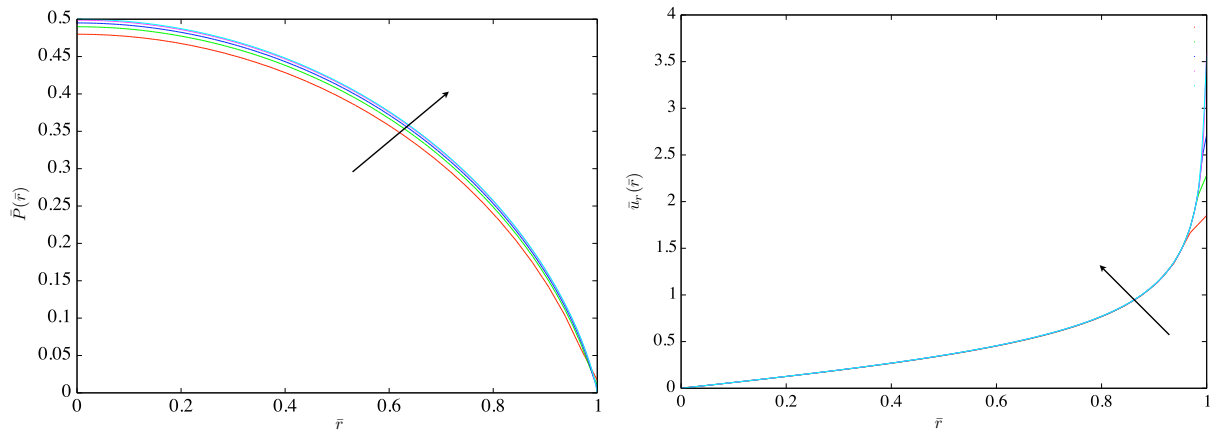


FIGURE 3 – A gauche : convergence de la pression impulsionnelle au niveau du support vers la solution analytique lorsqu'on augmente le raffinement. A droite : convergence de la vitesse radiale au niveau du support vers la solution analytique lorsqu'on augmente le raffinement.

Pour déterminer la limite de la simulation nous avons représenté sur la figure 4 la vitesse radiale obtenue par *Gerris* pour différents niveaux de raffinement en fonction de $\frac{\log(1-\bar{r}^2)}{\bar{r}}$.

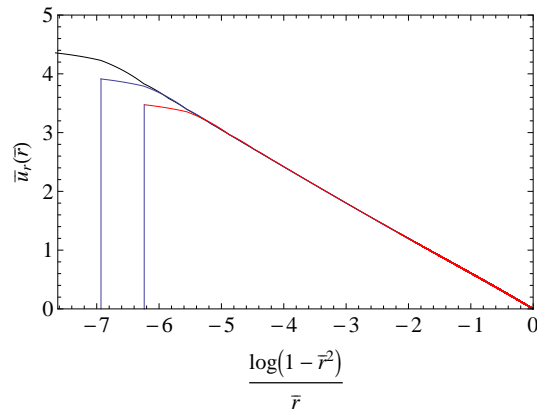


FIGURE 4 – Vitesse radiale au niveau du support en fonction de $\frac{\log(1-\bar{r}^2)}{\bar{r}}$ pour différents niveaux de raffinements. Les courbes en rouge, bleu et noir ont été respectivement obtenues pour des niveaux de raffinements de $N = 10, 11$ et 12 sachant que le pas d'espace est $\Delta\bar{x} = 2^{-N}$.

On retrouve bien le comportement logarithmique de la vitesse radiale au niveau du support, sauf au niveau de la dernière maille, quel que soit le raffinement.

3.2 Perspectives : analyse du comportement de la nappe liquide

Nous utilisons également *Gerris* pour voir ce qu'il passe sur des temps plus longs. Le but étant d'obtenir des observables que nous pourrions essayer de retrouver expérimentalement tels que l'angle d'éjection de la nappe liquide ou la vitesse de la corolle liquide, bien visible sur la figure 1. Ces simulations devraient nous permettre également de mettre en évidence les mécanismes qui régularisent la divergence du champ de vitesse. Nous prenons donc en compte la viscosité et la tension de surface et nous étudions l'effet obtenu sur la corolle liquide induite par l'impact. Pour cela nous pouvons tracer l'évolution de

l'interface de la goutte au cours du temps comme le montre la figure 5 obtenue pour un nombre de Reynolds de 2000 et un nombre de Weber de 25 ce qui correspond approximativement à l'impact d'une goutte d'eau de 2 millimètres de rayon à une vitesse initiale de 1 m.s^{-1} :

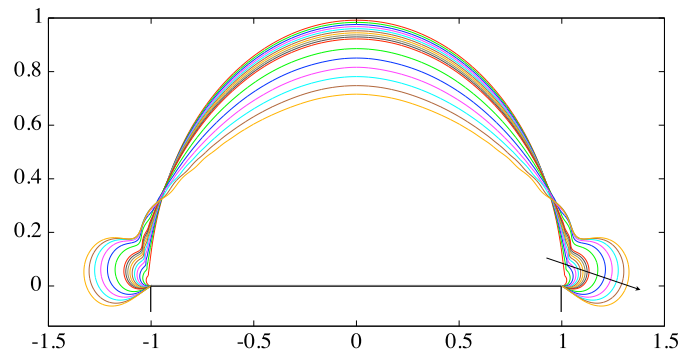


FIGURE 5 – Evolution de l'interface de la goutte hémisphérique au cours du temps entre $t = 0,001$ secondes et $t = 0,4$ secondes. L'intervalle entre chaque courbe est de $0,001$ secondes jusqu'à $t = 0,1$ secondes et de $0,05$ secondes entre $t = 0,1$ secondes et $t = 0,4$ secondes. L'impact a été simulé pour un nombre de Reynolds de 2000 et un nombre de Weber de 25.

4 Conclusions

Nous avons montré dans cette étude qu'il est possible d'obtenir des résultats analytiques au moment de l'impact pour un modèle simplifié de l'impact de goutte. Ce modèle consiste à regarder ce qu'il se produit lors de la chute verticale d'un cylindre avec un goutte posée au sommet. Notre formulation est basée sur le concept de pression impulsionnelle. Ces résultats peuvent être obtenus à l'aide d'harmoniques sphériques ou avec la méthode des intégrales de frontière. En particulier il a été mis en évidence que le champ de vitesse diverge logarithmiquement au niveau de la ligne de contact. Nos résultats numériques obtenus avec *Gerris* concordent avec notre modèle.

Références

- [1] Rein, M. 1993 Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dynamics Research* **12** 61 - 93
- [2] Josserand, C., Zaleski, S. 2003 Droplet splashing on a thin liquid film. *Physics of Fluids* **15** 1650-1657
- [3] Eggers, J., Fontelos, M. A., Josserand, C., Zaleski, S. 2010 Drop dynamics after impact on a solid wall : Theory and simulations. *Physics of Fluids* **22** 062101
- [4] Xu, L., Zhang, W. W., Nagel, S. R. 2005 Drop splashing on a dry smooth surface. *Phys. Rev. Lett.* **94** 184505
- [5] Popinet, S. 2003 Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics* **190** 572 - 600
- [6] Wagner, H. 1932 Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **12** 193-215
- [7] Bagnold, R. A. 1939 Interim report on wave-pressure research. *Journ. of ICE* pp. 202-226.
- [8] Batchelor, G. K. 1967 An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*
- [9] Cooker, M. J., Peregrine, D. H. 1995 Pressure-impulse theory for liquid impact problems. *Journal of Fluid Mechanics* **297** 193-214
- [10] Antkowiak, A., Bremond, N., Le Dizès, S., Villermaux, E. 2007 Short-term dynamics of a density interface following an impact. *Journal of Fluid Mechanics* **577** 241-250