

Étude de l'écoulement du sang dans les artères : effets nonlinéaires et dissipatifs

Pierre-Yves LAGRÉE et Maurice ROSSI

Laboratoire de Modélisation en Mécanique,
URA CNRS 229, Université Paris-VI, boîte 162,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 5, France.
E-mail: pyl@ccr.jussieu.fr
maur@ccr.jussieu.fr

Résumé. L'onde de pouls qui se propage le long d'une artère est un cas d'interaction fluide structure où de nombreux phénomènes interviennent. Dans ce travail, on prend en compte les effets les plus importants : effets dissipatifs (viscoélasticité de la paroi, viscosité du fluide) et les effets nonlinéaires (loi nonlinéaire de paroi, terme convectif de Navier-Stokes) mais nous négligeons la variation suivant la coordonnée axiale x des caractéristiques de l'artère. À l'aide d'une méthode intégrale adaptée au cas instationnaire de l'écoulement sanguin, on réduit cette étude à un modèle monodimensionnel. Il est défini par un système de trois équations aux dérivées partielles nonlinéaires couplées dépendant du temps t et de la variable axiale x . Ce système régit l'évolution de trois grandeurs : le rayon interne de l'artère $R(x, t)$, la vitesse au centre $U_0(x, t)$ et une quantité $q(x, t)$ exprimant l'effet de la couche limite instationnaire sur l'écoulement. On présente ensuite quelques résultats d'une simulation numérique de ce système.

Blood flow in arteries: nonlinear and dissipative effects

Abstract. We define a model for the transmission of the pressure pulse in the arterial system where dissipative effects (blood viscosity, vessel viscoelasticity), nonlinear phenomena (nonlinear elasticity, convection effect) are included. Tapering of arteries are not considered. Using a method analogous to the well known Von Kármán-Pohlhausen method but transposed here for a pulsatile flow, we end up with a system of three coupled nonlinear partial differential equations depending only on time and axial coordinate. This system governs the dynamics of internal artery radius $R(x, t)$, centre velocity $U_0(x, t)$ and $q(x, t)$ a quantity related to the presence of boundary layer effects. Finally, we present some numerical computations for this set of equations.

Note présentée par Paul GERMAIN.

Abridged English Version

We believe that the study of blood flow and arterial wall motion is useful to understand the pathology of the arteries. The transmission of pressure pulse in the arterial system is known to depend on various factors such as dissipative effects (viscosity, visco-elasticity in the vessel) or nonlinearities (nonlinear elasticity of the wall, nonlinear convection term in Navier-Stokes). We introduce here such effects and reduce our description to a system of three partial differential equations. Following Pedley (1980), we assume that the most dominant feature of the flow is the wave propagation. In this context, the ratio $\varepsilon_1 = R_0/\lambda$ between the internal radius R_0 and the axial wavelength λ is a small parameter of the problem comparable to the ratio of the perturbed fluid velocity over the high celerity of propagation. If we disregard terms in the general system up to power ε_1^2 that is if we use a long-wavelength hypothesis, we obtain a system of boundary layer-like equations (2), and (3), plus an equation for speed U_0 along the artery axis (8).

Two other parameters appear in the Navier-stokes equations. Parameter ε_2 characterizes nonlinearity and the Womersley number α quantifies the effect of viscosity. To reduce even more this system, we transposed here the Von Kármán-Pohlhausen method for a pulsatile flow. After an integration over the artery section, we end up with a system of two partial differential equations describing the global mass (6) and momentum balance (7). Here q expresses the defect of momentum due to viscous effects (5): it is analogous to the displacement thickness δ_1 in Boundary Layer Theory. Moreover Γ is a function defined by (5).

Similarly as in Aerodynamics it is necessary in order to close the system to introduce some information about the velocity profile. Thereafter we assume that the radial dependance of the velocity profile is similar to the analytical expressions (9) found in the linear theory by Womersley (1955). This allows the expressions (12) to be computed as functions of α . Finally, we provide a phenomenological wall law (4) which contains viscoelasticity and nonlinear behaviour.

These equations are then numerically solved by a Adams Bashford method. We show the influence of viscoelasticity and viscosity on pressure when nonlinear terms are neglected (fig. 1). On figure 2 nonlinearities are added. We present as well some corresponding velocity profiles on figure 3.

1. Introduction

L'éjection périodique du sang dans l'aorte est à l'origine d'une onde de pression, le pouls, se propageant dans le système artériel. L'étude de cet écoulement a été l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales (Pedley, 1980 ; Zagzoule *et al.*, 1991 ; Rogova et Flaud, 1995). Le fondement de ces travaux réside dans la conviction qu'une connaissance plus approfondie de la dynamique du pouls cardiaque permettra de dégager des méthodes de détermination de l'état pathologique d'une artère *in vivo*. Expérimentalement on observe que la propagation du pouls s'accompagne, à mesure que l'on s'éloigne de l'aorte, d'un accroissement de l'amplitude de l'onde de pression, d'un raidissement de cette onde ainsi que d'une atténuation de la vitesse de l'écoulement (Mac Donald, 1974). De nombreux phénomènes influent sur cette évolution spatio-temporelle. En dehors de l'élasticité linéaire de la paroi et du terme d'accélération de Navier-Stokes qui sont les ingrédients essentiels de la propagation (Lighthill, 1975), il semble nécessaire pour décrire plus finement l'onde de pouls d'introduire dans une étude : *a*) les phénomènes dissipatifs liés à la viscoélasticité de la paroi ou bien à la viscosité du sang; *b*) les phénomènes nonlinéaires associés aux effets convectifs dans le fluide ou à la relation reliant pression transmurale et lumière de l'artère – ce que traduit

l'augmentation du nombre de Young incrémental de la paroi avec la précontrainte - ; c) le caractère conique des artères ainsi que les phénomènes de réflexion des ondes aux bifurcations artérielles.

La plupart des études introduisant les effets visqueux ou viscoélastiques négligent les effets non linéaires. Inversement l'introduction de termes nonlinéaires dans les équations s'effectue généralement dans une approche de type fluide parfait pour lequel le profil des vitesses est constant dans la section de l'artère. Dans ce travail, on prend en compte tous ces effets dans le cadre d'un modèle monodimensionnel. On se ramène à ce type de modèle par une série d'approximations que l'on justifie à l'aide des données physiologiques. À partir des équations de base, on définit un problème de type couche limite instationnaire couplée à une paroi déformable. L'originalité de notre démarche, consiste à expliciter une formulation intégrale de ce problème couplée à une relation de fermeture. On obtient cette dernière relation à l'aide d'une approximation de type Pohlhausen que l'on a adaptée au cas instationnaire. Cette méthode est efficace et économique pour prendre en compte la viscosité du fluide et l'existence de profils instationnaires que l'on observe dans l'écoulement sanguin. Ceci est indispensable dans le cadre d'études ultérieures visant à remonter, à l'aide d'une méthode inverse (Chavent, 1979), à certaines caractéristiques de la paroi artérielle ou du cisaillement pariétal.

2. Le modèle dynamique

Le sang est supposé homogène, newtonien de viscosité cinématique ν , incompressible de densité ρ uniforme; et l'écoulement axisymétrique. Ces hypothèses sont valables si : a) on considère des artères de diamètre suffisamment grand ; b) si on néglige la nature viscoélastique du fluide ou s'il est possible de définir une viscosité renormalisée (Flaud et Quemada, 1980). L'écoulement est décrit par la composante axiale $u(r, x, t)$ et radiale $v(r, x, t)$ de la vitesse, par la pression $p(r, x, t)$ et par le déplacement de la paroi située en $r = R(x, t)$. Il satisfait les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité auxquelles on adjoint des conditions aux limites couplant le fluide avec la paroi artérielle. En dehors de la condition dynamique (4), il s'agit des deux conditions cinématiques d'adhérence à la paroi :

$$(1) \quad v(r, x, t)|_{r=R} = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad u(r, x, t)|_{r=R} = 0.$$

La dernière équation impose aux mouvements de la paroi d'être seulement radiaux. Cette hypothèse est justifiée par la liaison mécanique des artères aux tissus environnants. Ces conditions étant imposées sur une surface en mouvement dont la dynamique n'est pas connue à l'avance, on effectue un changement de variable en introduisant une variable réduite $\bar{\eta} = r/R(x, t)$. Ceci permet d'écrire des conditions sur une surface fixe en $\bar{\eta} = 1$ mais introduit des termes supplémentaires dans les équations.

L'onde de pouls satisfait en première approximation une équation de propagation caractérisée par une vitesse c_0 , connue sous le nom de célérité de Moens-Korteweg, de l'ordre de 3 à 10 m/s. Vu la pulsation cardiaque ($\omega = 2\pi f$ avec $f \simeq 1,2 \text{ s}^{-1}$), le rapport $\varepsilon_1 = R_0/\lambda$ entre le rayon interne de l'artère non perturbé R_0 et la longueur d'onde λ qui est donc de l'ordre du mètre, est un petit paramètre. Expérimentalement ε_1 ne dépasse pas 10^{-2} . Si on néglige tous les termes plus petits que ε_1^2 dans les équations générales mises sous forme adimensionnelle, on se ramène à un problème de type couche limite :

$$(2) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\bar{v}}{\bar{\eta} R} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \varepsilon_2 \cdot \frac{\bar{\eta}}{R} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - \varepsilon_2 \cdot \frac{\bar{\eta}}{R} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} + \varepsilon_2 \left\{ \frac{\bar{u}}{R} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} + \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \varepsilon_2 \frac{\bar{\eta}}{R} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \right) \right\} \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{2\pi}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{\bar{\eta} R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\bar{\eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\eta}} \right) \right\}, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\eta}} = 0.$$

Pour la mise sous forme adimensionnelle des équations, on a utilisé : $\bar{x} = x/\lambda$, $\bar{t} = tf$, $\bar{v} = v/\delta Rf$, $\bar{u} = u/u_0$, où δR et $u_0 = (\delta R/R_0)\lambda f = (\delta R/R_0)c_0$ sont respectivement les jauges du déplacement de la paroi et de la vitesse longitudinale. Dans (3) le paramètre $\varepsilon_2 = \delta R/R_0 = u_0/c_0$ caractérise l'importance des termes nonlinéaires dans le fluide et la paroi. Ce paramètre est expérimentalement de l'ordre de 0,1. Enfin le nombre de Womersley (1955) $\alpha = R_0\sqrt{\omega/\nu}$, rapport entre le rayon interne de l'artère et l'épaisseur de la couche de Stokes décrit l'importance des effets visqueux dans le fluide. Si α est grand, le profil des vitesses est assez plat. Plus α est petit, plus on se rapproche d'un écoulement instationnaire de Hagen-Poiseuille. Dans l'artère fémorale, on trouve par exemple des valeurs $\alpha \simeq 3 - 5$.

Une description complète de la dynamique nécessite la donnée d'un modèle de paroi artérielle. Dans ce travail préliminaire, on a volontairement choisi une loi phénoménologique simple qui contient les deux effets majeurs : l'amortissement structurel et le comportement de type matériau élastique non-linéaire. Elle s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$(4) \quad \varepsilon_4 \frac{\partial h}{\partial t} + 2h(1 + \varepsilon_3 h) = p, \quad \varepsilon_2 h(x, t) = \frac{R(x, t) - R_0}{R_0}.$$

On peut inclure sans difficultés la conicité, la tension longitudinale l'inertie, l'influence du frottement pariétal (Ohayon et Chadwick, 1988).

3. Équations intégrales dans le fluide

Dorénavant, on est implicitement sans dimensions. Dans cette section on montre comment tenir compte de la variation radiale du profil des vitesses liée aux effets visqueux dans un modèle monodimensionnel où la variable radiale n'apparaît pas explicitement. Pour ce faire on adapte les méthodes intégrales de Von Kármán pour le traitement des couches limites stationnaires en aérodynamique (Le Balleur, 1982) au cas instationnaire (2), (3). On intègre les équations par rapport à la variable radiale η entre l'axe du tuyau et la paroi, c'est-à-dire pour η compris entre 0 et 1. La forme intégrée introduit la vitesse au centre U_0 , la perte de débit-masse due aux effets visqueux q et un terme nonlinéaire associé au terme de convection dans Navier-Stokes Γ :

$$(5) \quad q = R^2 \left(U_0 - 2 \int_0^1 u \eta d\eta \right), \quad \Gamma = R^2 \left(U_0^2 - 2 \int_0^1 u^2 \eta d\eta \right).$$

On remarque que q est l'écart du profil des vitesses au profil plat de fluide parfait : l'analogue de l'épaisseur de déplacement δ_1 .

De l'équation de continuité et des conditions d'adhérence à la paroi, on obtient l'équation :

$$(6) \quad \frac{\partial R^2}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x} (R^2 U_0 - q) = 0,$$

Les mêmes manipulations sont effectuées pour l'équation de quantité de mouvement (3). On en déduit une relation portant sur l'évolution de q :

$$(7) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma - U_0 \frac{\partial}{\partial x} q \right) = -2 \frac{2\pi}{\alpha^2} \tau, \quad \tau = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=0},$$

De la même équation (3), on déduit une relation pour la vitesse au centre du tuyau :

$$(8) \quad \frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon_2 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\tau_0}{R^2}, \quad \tau_0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \Big|_{\eta=0}.$$

Des informations relatives à la dynamique dans une section sont évidemment perdues par cette intégration. Dans la suite on espère retrouver les comportements radiaux essentiels à l'aide d'une hypothèse de fermeture.

4. Fermeture

Comme en aérodynamique, le système d'équations globales ci-dessus n'est pas un système fermé puisque l'on ne connaît pas la dépendance de Γ , τ et τ_0 en fonction de q , U_0 et R . Ces relations sont liées à la dépendance radiale du champ de vitesse longitudinale. Une méthode originale, due à Pohlhausen (Schlichting, 1987) permet de trouver de telles relations. Elle consiste à se donner *a priori* un champ des vitesses qui respecte les conditions aux limites (1) et approche au mieux les profils expérimentaux. Nous gardons ici l'esprit de la méthode mais nous l'adaptions au cas instationnaire. Dans la recherche d'un profil, nous sommes guidés par l'étude du problème pulsé linéarisé pour lequel nous disposons de la solution analytique de Womersley écrite en formulation complexe (Womersley, 1955) :

$$(9) \quad U_{\text{Womersley}} = (F(x, t) + iG(x, t))(j_r(\alpha\eta) + ij_i(\alpha\eta)).$$

avec

$$(F(x, t) + iG(x, t)) = \frac{kp}{\omega} \left(1 - \frac{1}{J_0(i^{3/2}\alpha)}\right) e^{i(\omega t - kx)}, \quad (j_r + ij_i) = \left(\frac{1 - (J_0(i^{3/2}\alpha\eta)/J_0(i^{3/2}\alpha))}{1 - (1/J_0(i^{3/2}\alpha))}\right).$$

Dans la suite, on approxime le champ des vitesses en conservant la même dépendance en variable radiale η . D'une certaine manière, on suppose donc que c'est le mode fondamental qui impose la structure radiale de l'écoulement. On pose donc :

$$(10) \quad u = 1/2((F + iG)(j_r + ij_i) + cc) = (Fj_r - Gj_i),$$

où $F(x, t)$ et $G(x, t)$ sont deux fonctions inconnues décrivant l'évolution spatio-temporelle du pouls et cc le complexe conjugué. On vérifie que la fonction $F(x, t)$ correspond à la vitesse au centre de l'artère $U_0(x, t)$. Elle joue le rôle de la vitesse extérieure en aérodynamique. La fonction $G(x, t)$ s'exprime comme :

$$(11) \quad G(x, t) = \frac{q/R^2 - U_0 + U_0 2 \int_0^1 j_r \eta d\eta}{2 \int_0^1 j_i \eta d\eta}.$$

À partir de ces relations, on calcule les fonctions Γ , le cisaillement pariétal τ et le cisaillement au centre τ_0 en fonction de la vitesse au centre de l'artère et de la fonction q .

$$(12) \quad \Gamma = \gamma_{qq} \frac{q^2}{R^2} + \gamma_{qu} q U_0 + \gamma_{uu} R^2 U_0^2, \quad \tau = \tau_q \frac{q}{R^2} + \tau_u U_0 \quad \tau_0 = \tau_{0q} \frac{q}{R^2} + \tau_{0u} U_0.$$

Les coefficients $((\gamma_{qq}, \gamma_{qu}, \gamma_{uu}), (\tau_q, \tau_u), (\tau_{0q}, \tau_{0u}))$ sont des fonctions de α qui s'expriment par des combinaisons d'intégrales et de dérivées des fonctions de Bessel. Pour mémoire ces coefficients varient peu pour $\alpha < 5$. On trouve respectivement pour α petit et grand :

$$\left(\left(\frac{-6}{5}, \frac{11}{5}, \frac{-2}{15}\right), (24, -12), (-12, 4)\right), \quad \left(\left(\frac{-\alpha}{4\sqrt{2}}, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2\alpha}\right), (\alpha^2/2, -\alpha\sqrt{2}), (0, 0)\right).$$

Les équations (4), (6), (7) et (8) avec la « fermeture » (12) définissent un système de quatre équations monodimensionnelles reliant la pression, la lumière de l'artère, la vitesse au centre et la perte de débit masse.

5. Résultats numériques

Le système est résolu par une méthode de Adams Bashford où on se donne des conditions sur le rayon à l'entrée et à la sortie, et où toutes les quantités sont nulles à $t = 0$. On a validé ce code en reproduisant la solution de Womersley. Dans la suite, on présente des résultats pour lesquels on impose $h(t, x = 0) = \sin^2(\pi t)$, une caractéristique sortante à la sortie et les valeurs physiologiques suivantes de Pedley 19 800 $\alpha = 5$, $\varepsilon_2 = 0,1$, $\varepsilon_3 = 0,6$, $\varepsilon_4 = 0,1$. Sur les figures 1 et 2, la pression en $x = 0, 1/4, 1/2$ est représentée en fonction du temps et déphasée de x/c_0 pour éliminer la propagation de l'onde linéaire non dissipative. On met en évidence sur la figure 1 les effets de dissipation visqueuse et viscoélastiques lorsque les termes non linéaires sont négligés. Pour les cas examinés ces deux effets sont du même ordre de grandeur et induisent une décroissance de l'amplitude. Par ailleurs le maximum de l'onde est retardé par les effets visqueux. Cet effet est contrecarré par les effets non linéaires qui accroissent la vitesse de propagation de cette onde (fig. 2). Elles conduisent également à un raidissement du front d'onde. Comparativement, le terme non linéaire de convection est plus faible que le terme non linéaire de paroi. Ce modèle permet donc de retrouver la majorité des effets connus dans une approche très simplifiée. De plus il prédit des profils de vitesses réalistes (cf. figure 3 représentant les profils de vitesse en $x = 1/2$). On notera que, dans cette approche, il est possible d'inclure d'autres effets : viscoélasticité du fluide, conicité des artères, influence du cisaillement sur la loi de paroi, réflexions.

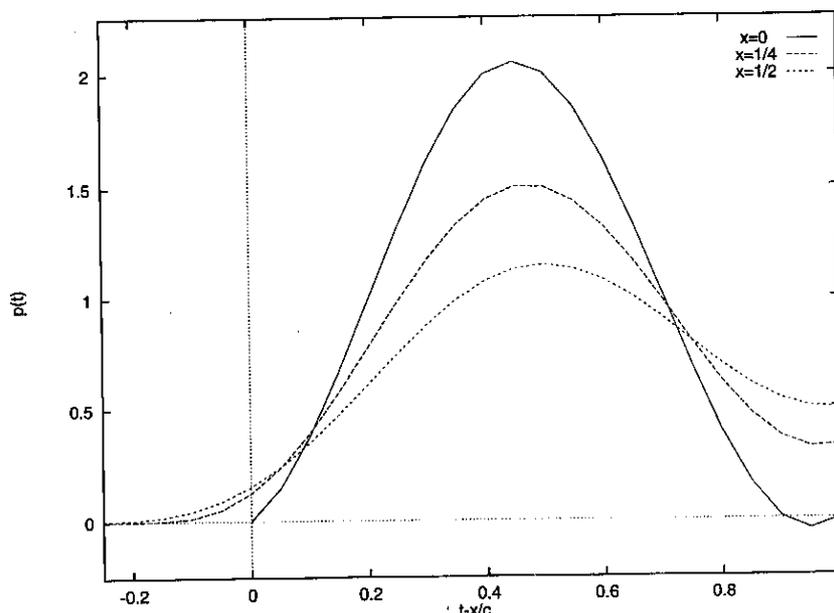


Fig. 1. – La pression en trois sites, effets dissipatifs sans termes non linéaires.

Fig. 1. – Pressure at three locations dissipative effects, without nonlinearities.

Étude de l'écoulement du sang dans les artères : effets non linéaires et dissipatifs

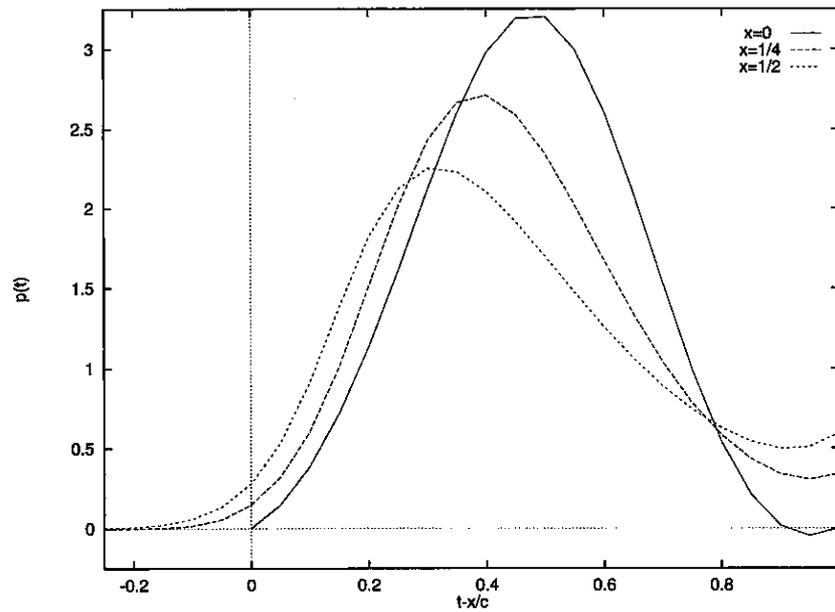


Fig. 2. – La pression en trois sites, effets dissipatifs et effets non linéaires.
 Fig. 2. – Pressure at three locations dissipative effects, and nonlinearities.

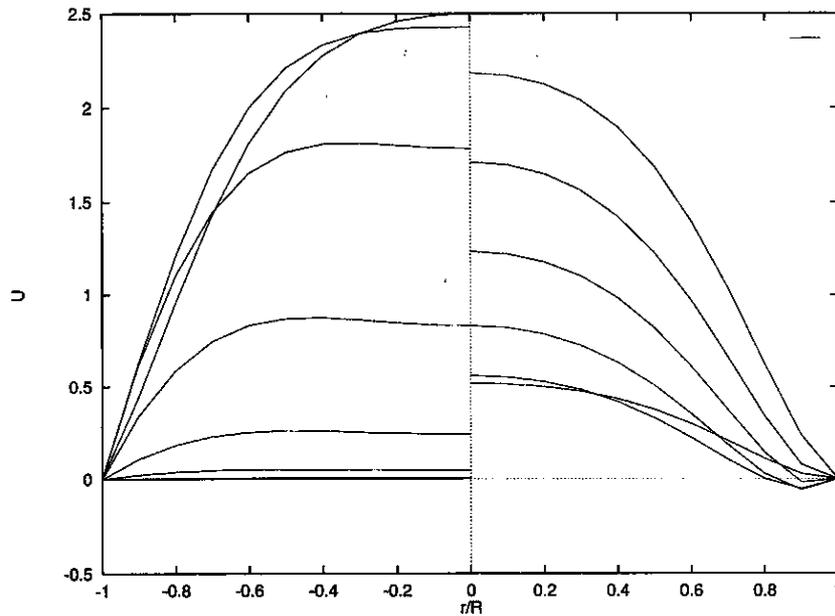


Fig. 3. – Profils de vitesse, $t < 0,9$; $1,5 > t > 0,9$; $dt = 0,1$.
 Fig. 3. – Velocity profiles, $t < 0,9$; $1,5 > t > 0,9$; $dt = .1$.

Note remise le 3 mars 1995, acceptée après révision le 11 janvier 1996.

Références bibliographiques

- Chavent G., 1979. Identification of distributed parameter systems, *IFAC Symposium on Identification and System Parameters Estimations*, p. 85-97.
- Flaud P. et Quemada D., 1980. Rôle des effets non newtoniens dans l'écoulement pulsé d'un fluide dans un tuyau visco-élastique, *Revue Phys. Appl.*, 15, p. 749-759.
- Leballeur J. C., 1982. Viscid-inviscid coupling calculations for 2 and 3D flows, *VKI lecture series 1982-02*.
- Lighthill M. J., 1975. *Mathematical Biofluidynamics*, SIAM Philadelphia.
- McDonald D. A., 1974. *Blood flow in arteries*, 2nd ed, Arnold. London.
- Ohayon J. et Chadwick R. S., 1988. Effect of collagen microstructure on the mechanics of the left ventricle, *Biophys. J.*, 54, p. 1077-1088.
- Pedley T. J., 1980. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessel*, Cambridge University Press.
- Rogova I. et Flaud P., 1995. Évaluation de l'impédance terminale d'un site artériel : séparation des ondes directes et rétrogrades, faisabilité et applications à l'écoulement vasculaire, *Archives of physiology and biochemistry*, 103, 3, p. C47.
- Schlichting H., 1987. *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw Hill.
- Womersley J. R., 1955. Oscillatory Motion of a Viscous Liquid in a Thin-Walled Elastic Tube, *Philosophical Magazine*, 46, p. 199-221.
- Zagzoule M., Khalid-Naciri J. et Mauss J., 1991. Unsteady wall shear stress in a distensible tube, *J. Biomechanics*, 24, 6, p. 435-439.