

Projet Personnel en Laboratoire Modélisation d'avalanches

L. Fiabane

19/04/2004 - 18/06/2004

Introduction : Le but de ce Projet Personnel en Laboratoire est de présenter les différentes modélisations d'avalanches de milieux granulaires existant à l'heure actuelle. Ces modélisations seront utilisées à la fois dans le cas d'une dune et dans celui d'un tambour tournant, et on utilise une simulation numérique pour représenter les solutions. On pourra aussi comparer les résultats obtenus numériquement à des résultats expérimentaux publiés tels que les avalanches dans des tambours tournants.

Mon stage s'est déroulé dans le Laboratoire de Modélisation Mécanique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), sous la direction de P.-Y. Lagrée.

Résumé : L'idée initiale est d'écrire une équation générale d'un milieu continu dans une couche mobile sur un autre supposé fixe à partir de l'équation de transport d'une grandeur dans un volume dépendant du temps dont le contour a un mouvement propre.

On adapte ensuite cette équation dans le cas d'une avalanche simple de milieu granulaire que l'on peut représenter comme une couche mince, les expériences ayant montré que l'épaisseur d'une avalanche est d'environ dix diamètres de grains ayant des tailles de l'ordre du micromètre.

Il suffit alors de modéliser convenablement l'énergie, le coefficient de frottement et la vitesse de dévalement des grains.

Utilisant la modélisation simple $q = q(R)$ (où la quantité de matière dans la couche mobile est uniquement fonction de l'épaisseur de cette couche), on cherche des résultats de l'évolution de l'épaisseur de la couche mobile (R).

Remerciements : Je remercie P.-Y. Lagrée pour m'avoir accepté en stage, pour sa disponibilité et ses nombreuses explications. Je remercie également D. Lhuillier pour son aide. Enfin je remercie tout particulièrement K.K.J. Kouakou pour son aide et pour son rapport partiel qui a servi de base à ce rapport dans une large mesure.

Première partie

Modélisation des avalanches
granulaires

Chapitre 1

Équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement

On considère le volume $V(t)$, représenté sur la figure (FIG. ??), constituant une tranche d'épaisseur dx et de longueur L en y . Sa frontière, notée $S(t)$, dans le plan (x, z) , est constituée d'un ensemble de trois surfaces fixes ($x, x + dx$ et $z = 0$) et d'une surface mobile ($h(x, t)$).

On fait l'approximation que les champs $F(\vec{x}, t)$ auxquels on s'intéresse ne dépendent pas de y . On a donc la forme 2-D $F = F(x, z, t)$.

La variation d'une quantité $F(r, t)$ dans le domaine volumique $V(t)$ de frontière $S(t)$ s'écrit donc, avec $r = (x, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} F(r, t) d\tau &= \iiint_{V(t)} \frac{\partial F(r, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (F(r, t) \vec{v}) d\tau \\ &+ \iint_{S(t)} F(r, t) (\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma. \end{aligned} \quad (1.1)$$

où \vec{n} est la normale extérieure à la surface $S(t)$ entourant le volume $V(t)$, \vec{V}_s la vitesse à laquelle se déplace cette surface et \vec{v} le champ de vitesse d'un milieu continu qui remplit $V(t)$.

En utilisant les formes locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement on peut établir les équations globales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

1.1 Conservation de la masse

1.1.1 Équation de conservation de la masse

La forme locale de la conservation de la masse est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.2)$$

D'après les équations (1.1) et (1.2) et en prenant $F(x, t) = \rho(x, t)$, on en déduit l'expression des deux membres :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = L dx \frac{d}{dt} \int_0^h \rho(x, z, t) dz \quad (1.3)$$

et

$$\begin{aligned} \iint_{S(t)} \rho(\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n} dS &= L \int_0^h \rho(-\vec{v}) \cdot (-\vec{e}_z) dz + L \int_0^h \rho(-\vec{v}) \cdot \vec{e}_z dz \\ &+ L \rho(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} \frac{dx}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} + L \rho(\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot (-\vec{e}_z) dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

où \vec{V}_h est la vitesse de déplacement de la surface supérieure et \vec{V}_0 la vitesse (nulle) de la surface inférieure ($z = 0$). On garde la vitesse \vec{V}_0 , même si celle-ci est nulle, afin de faire ressortir la structure du résultat que l'on exploitera plus tard lorsque l'on tiendra compte en plus de h d'une surface Z limitant la zone mobile de la zone fixe.

On regroupe les deux membres (1.3) et (1.4) et on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_z dz = \left[\frac{\rho(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} - [\rho(\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot \vec{e}_z]_{0+}. \quad (1.5)$$

où les notations h_- et 0_- indiquent que l'on est au voisinage "interne" des surfaces $z = h(x, t)$ et $z = 0$.

1.1.2 Conditions limites pour la conservation de la masse

On suppose que le fond de l'écoulement ($z = 0$) est immobile, et qu'il est imperméable au matériau qui se trouve au dessus. On suppose de plus que la surface supérieure peut recevoir de la part du milieu extérieur un flux de matériau $\dot{m} = \frac{\Delta m}{L \Delta t \Delta x} > 0$.

On a donc les conditions aux limites suivantes :

$$\text{en } z = 0 : \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v} \cdot \vec{e}_z = 0.$$

$$\text{en } z = h : \quad [\rho(\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h-} = \dot{m}.$$

1.1.3 Forme finale de la conservation de la masse

Tenant compte de ces conditions aux limites, l'équation (1.5) prend sa forme finale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho v_x dz = \dot{m} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \quad (1.6)$$

avec en

$$z = 0 : \quad v_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$z = h : \quad v_z = v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\dot{m}}{\rho_{h-}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} = \frac{\dot{m}}{\rho_{h-}}$$

et où on a utilisé les relations suivantes :

$$\vec{e}_z \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2}}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\vec{V}_h \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\vec{e}_x \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}.$$

1.2 Conservation de la quantité de mouvement

1.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

La forme locale de la conservation de la quantité de mouvement est

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau}) = \rho \vec{g}. \quad (1.7)$$

D'après les équations (1.1) et (1.7) et en prenant $F(x, t) = \rho(x, t) \vec{v}$, on en déduit l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho \vec{v} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau}) \cdot \vec{e}_x dz = \vec{g} \int_0^h \rho dz + \left[\frac{\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} \\ - \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} - [\rho \vec{v} (\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot \vec{e}_z]_{0+} + [\vec{\tau} \cdot \vec{e}_z]_{0+}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2.2 Conditions limites pour la conservation de la quantité de mouvement

Les conditions aux limites sont les mêmes que pour la conservation de la masse, plus la condition suivante relative à la surface supérieure.

On désigne par $-\dot{p} \vec{e}_z$ l'apport de quantité de mouvement du milieu extérieur et on a : $[\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h-} - [\vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{h-} = -\dot{p} \vec{e}_z$ avec $\dot{p} = \frac{\Delta p}{L \Delta t \Delta x}$.

1.2.3 Forme finale de la conservation de la quantité de mouvement

Il vient donc que l'équation (1.8) prend sa forme finale (suivant ses deux composantes)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho v_x dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho v_x^2 + \tau_{xx}) dz = [\tau_{xz}]_{0+} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho v_z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho v_x v_z + \tau_{xz}) dz = -g \int_0^h \rho dz - \dot{p} \sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2} \\ + [\tau_{zz}]_{0+}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Chapitre 2

Les équations de conservation dans le cas de milieux granulaires

Les résultats (1.6), (1.9) et (1.10) sont des équations valables quelle que soit la nature du milieu continu considéré. Dans le transport des sédiments ou les processus de formation de dunes sous-marines, on peut considérer le milieu continu global comme une superposition de deux milieux continus :

- le milieu granulaire constitué de l'ensemble des sédiments entraînés par charriage au fond ainsi que par saltation ¹
- le fluide (eau ou air), facteur d'entraînement des sédiments.

Dans les écoulements de rivière, fleuve, lagune, cotier, la hauteur d'eau est souvent prise faible devant la longueur ou la largeur (shallow water).

En ce qui concerne les milieux granulaires, les expérimentations permettent de dire qu'ils peuvent "couler" d'eux-mêmes si ils sont placés sur une pente (avalanche). Placés au dessous d'un écoulement, ils subissent le mouvement du fluide (érosion, déposition) ainsi que leur mouvement propre d'avalanche à certains endroits. Cependant, ces écoulements se font uniquement sur de minces couches à la surface du matériau, et on est ainsi amené, en plus de la surface $h(x, t)$ à considérer la surface $Z(x, t)$ (avec $Z < h$), qui sépare la zone supérieure mobile de la zone inférieure immobile ($\vec{v} = 0$) et de densité constante et maximale ($\rho = \rho_M$).

On généralise les équations de conservations de masse et de quantité de mouvement ainsi que les conditions aux limites au cas d'un milieu continu constitué par une couche mobile sur une couche supposée fixe.

2.1 Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Avec ces hypothèses de milieu granulaire, on a les égalités :

¹Les matériaux considérés sont généralement des grains de sables plus denses que l'eau ; on peut donc supposer uniquement ces deux modes de transport.

$$\int_0^h \rho dz = \rho_M Z + \int_Z^h \rho dz \quad \text{et} \quad \int_0^h \rho v_x dz = \int_Z^h \rho v_x dz,$$

de sorte que l'équation de conservation de la masse écrite en (1.6) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho v_x dz = -\rho_M \frac{\partial Z}{\partial t} + \dot{m} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \quad (2.1)$$

Il n'est pas inutile cependant de retrouver ce résultat par une approche plus longue mais qui va permettre de mieux cerner le problème des conditions aux limites. Dans la mesure où le "fond" $z = 0$ est remplacé par $z = Z(x, t)$, on ne sera pas surpris de voir que (1.5) se transforme en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_x dz &= \left[\frac{\rho (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} \\ &\quad - \left[\frac{\rho (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z+}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

où \vec{V}_Z désigne la vitesse de déplacement de la surface $Z(x, t)$.

On trouve de même pour le matériau compris entre $z = 0$ et $z = Z(x, t)$

$$\rho_M \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - V_0 \right) = \rho_M \frac{\vec{V}_Z \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} - \rho_M \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}$$

Ce qui, avec les conditions aux limites de (1.6) sur le fond se réduit au résultat attendu

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\vec{V}_Z \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \quad (2.3)$$

De même, on écrit la conservation de la quantité de mouvement sous sa forme générale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho \vec{v} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau}) \cdot \vec{e}_x dz &= \left[\frac{\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} - \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} \\ &\quad - \left[\frac{\rho \vec{v} (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z+} + \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z+} + \vec{g} \int_Z^h \rho dz \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dans la couche immobile ($0 \leq z \leq Z(x, t)$) on écrit l'équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^Z \vec{\tau} \cdot \vec{e}_x dz = \rho_M Z \vec{g} - \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z-} + [\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x]_{0+} \quad (2.5)$$

et la condition limite en $z = Z(x, t)$ s'écrit

$$[\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x]_{Z+} - [\rho \vec{v} (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{Z+} = [\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x]_{Z-} \quad (2.6)$$

2.2 Conditions limites

Dans les équations (2.2) et (2.4), les termes sources traduisent les échanges de matière et de quantité de mouvement aux frontières internes (h_- à la surface supérieure et Z_+ à la surface inférieure) du domaine mobile auquel on s'intéresse. Afin de caractériser ces échanges, on utilise les conditions limites (qui sont en fait des conditions de saut aux interfaces supérieure et inférieure du domaine fluide ramenant la définition de ces termes sources aux frontières externes (FIG.?? : (b))).

Rappelons tout d'abord les relations de passage entre le repère local et le repère vertical-horizontal : on a les relations vectorielles

$$\vec{e}_x^\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+Z'^2}} (\vec{t} - Z' \vec{n}) \quad \text{et} \quad \vec{e}_z^\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+Z'^2}} (Z' \vec{t} + \vec{n})$$

reliant le repère local (\vec{t}, \vec{n}) au repère vertical-horizontal $(\vec{e}_x^\lambda, \vec{e}_z^\lambda)$, avec $Z' = \frac{\partial Z}{\partial x}$.

On en déduit ainsi

$$\vec{e}_x^\lambda \cdot \vec{n} = -\frac{Z'}{\sqrt{1+Z'^2}} \quad \text{et} \quad \vec{e}_z^\lambda \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+Z'^2}}$$

Ainsi pour la masse on a :

$$[\rho (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h_-} = [\rho (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h_+} = m_s (\vec{e}_z^\lambda \cdot \vec{n}) \quad (2.7)$$

m_s est la quantité de matières reçue par la couche mobile à travers sa surface supérieure. Dans le cas d'un silo alimentant une couche mobile m_s sera traduit par le flux (FIG.?? :(a)) de $-\rho_s v_s \vec{e}_z^\lambda$ à travers la surface $h(x, t)$

$$[\rho (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{Z_+} = [\rho (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{Z_-} = m_I (\vec{e}_z^\lambda \cdot \vec{n}) \quad (2.8)$$

m_I est la quantité de matières reçue par la couche mobile à travers sa surface inférieure. Si on est en présence d'un tambour tournant à la vitesse $\vec{V}^I = \Omega \vec{e}_y \times \vec{r}$ qui alimente le tas mobile par la surface inférieure avec des grains à la vitesse $\vec{v}^I = \Omega (x + Z \frac{\partial Z}{\partial x}) \vec{e}_z^\lambda$ on aura

$$m_I = \rho_I \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + v_I \right)$$

Pour la quantité de mouvement on a :

$$\begin{aligned} [\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{h_-} &= [\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{h_+} \\ &= (\vec{V}^s m_s - \vec{F}^s) (\vec{e}_z^\lambda \cdot \vec{n}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

et

$$\begin{aligned} [\rho \vec{v} (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{Z_+} &= [\rho \vec{v} (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{Z_-} \\ &= (\vec{V}^I m_I - \vec{F}^I) (\vec{e}_z^\lambda \cdot \vec{n}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où \vec{F}^s et \vec{F}^I sont les contraintes normales aux frontières supérieure et inférieure de la couche mobile.

En notant $\vec{v} = (u, w)$ on peut réécrire (2.2) et (2.4) selon chaque composante en utilisant les conditions aux limites.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = m_s - m_I \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - m_I u_I - F_x^s + F_x^I \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u w + \tau_{xz}) dz = & -g \int_Z^h \rho dz + m_s w_s \\ & -m_I w_I - F_z^s + F_z^I \end{aligned} \quad (2.13)$$

La condition limite en Z exprimée suivant les grandeurs en Z_- (dans un milieu immobile rigide en général) permet l'utilisation de la loi de Mohr-Coulomb. Pour ce faire on est amené à exprimer les composantes horizontales et verticales des contraintes normales en fonction de leurs composantes tangentielles et normales en Z_-

$$\begin{aligned} F_x^I &= \tau_{xz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xx} = \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \\ F_x^s &= \tau_{zz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xz} = \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

La loi de Mohr-Coulomb s'écrit : $\vec{t} \cdot \vec{F}^I = -\mu_I \vec{n} \cdot \vec{F}^I$ en Z_- , où μ_I est le coefficient de frottement dynamique défini localement en chaque point de Z_- .

Or on a : $\vec{t} \cdot \vec{F}^I = -\mu_I \vec{n} \cdot \vec{F}^I \Leftrightarrow \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = -\mu_I \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}$, ce qui nous amène à réécrire l'équation (2.12) et à exprimer $\vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}$ par une combinaison des équations (2.12) et (2.13).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = & m_s u_s - F_x^s - m_I u_I \\ & -(\mu_I + Z') \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} (1 + Z'^2) \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = & g \int_Z^h \rho dz - m_s (w_s - Z' u_s) + m_I (w_I - Z' u_I) \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz + (F_z^s - Z' F_x^s) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz \end{aligned} \quad (2.15)$$

En éliminant $\vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}$, on a finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - F_x^s - m_I u_I \\ - \frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T \end{aligned} \quad (2.16)$$

Avec T qui contient toutes les informations de la composante verticale (2.13)

$$\begin{aligned} T = \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz \\ + g \int_Z^h \rho dz - m_s (w_s - Z' u_s) + m_I (w_I - Z' u_I) + (F_z^s - Z' F_x^s) \end{aligned} \quad (2.17)$$

On voit ainsi apparaître l'importance des combinaisons $w - \frac{\partial Z}{\partial x} u$ et $\tau_{xz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xx}$ pour le calcul des intégrales du second membre.

Il faut remarquer que

$$\begin{aligned} \tau_{xz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xx} = \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2} \vec{e}_x \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \\ \tau_{zz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xz} = \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2} \vec{e}_z \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \vec{e}_z \cdot \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \end{aligned}$$

Les équations (2.11), (2.16) et (2.17) sont valables quelque soit la nature du milieu continu (granulaire ou liquide), mais nous nous restreindrons au cas d'un milieu granulaire, en avalanche simple pour généraliser les équation BCRE (1994) et Douady (1999) puis en avalanche "tournante" pour modéliser les avalanches dans les tambours.

Chapitre 3

Le cas de l'avalanche simple

3.1 Préliminaires

On considère ici le cas particulier d'une avalanche de milieu granulaire dite simple, c'est à dire que la couche mobile ne reçoit pas de matière et n'est soumise à aucune contrainte sur sa surface supérieure, et qu'il n'y a aucune rotation contrairement au cas du tambour tournant. De plus le tas initial considéré sera en pente douce constante.

Ces hypothèses se traduisent par :

$$m_s = 0, \quad \vec{F}^s = \vec{0}, \quad \vec{V}^I = \vec{0} \quad \text{et} \quad m_I = \rho_I \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Les équations (2.11), (2.16) et (2.17) se restreignent alors à

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = -\rho_I \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{avec } T = g \int_Z^h \rho dz +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz \quad (3.2)$$

termes d'ordre supérieur

Les termes d'ordre supérieur dans T sont considérés comme petits car $\frac{w}{u}$ et $\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xx}}$ sont de l'ordre de Z'^{-1} et peuvent être négligés.

Une autre façon de modéliser ces termes est de les voir comme un facteur de diffusion en $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$, ce qui sera très utile par la suite lors de la simulation numérique (stabilisation de la solution, qui engendre une légère déformation des solutions théoriques (cf. FIG(6.2))).

¹ On est en effet en présence d'une couche mobile mince constituée de quelques diamètres de grains très petits.

On est alors amené à faire les définitions suivantes :
 $R = h(x, t) - Z(x, t)$ l'épaisseur de la couche mobile
 q , le flux de matière traversant l'épaisseur R
 E , l'énergie développée dans la couche R .

$$\begin{cases} R &= \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} dz \\ q &= \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} u dz \\ E &= \int_Z^h \frac{1}{\rho_I} (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz \end{cases} \quad (3.3)$$

Et on obtient le système final :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} g R \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour que ce problème soit soluble il faut fixer les inconnues principales (R et Z) et exprimer par la modélisation les inconnues secondaires (q , E et μ_I) en fonction de R , Z et de leurs dérivées.

3.2 Modélisation du flux, de l'énergie et du coefficient de friction μ

3.2.1 Le flux de matière q et l'énergie E développée dans la couche

D'étude assez récente (on peut fixer son véritable essor au cours du XXème siècle), la modélisation d'avalanches² a connu trois types d'approches dont les modèles principaux sont :

- le modèle de [Savage et Hutter], né des sciences appliquées, décrivant un écoulement granulaire sur un fond donné au moyen d'équations intégrées dans l'épaisseur (équations dites de Saint-Venant),
- le modèle BCRE que l'on doit à [Bouchaud *et al* (1994)], décrivant le tas de sable en deux phases, une roulante et une statique, suivi du modèle BRdG proposé par [Boutreux, Raphaël et de Gennes (1998)] qui n'est autre que BCRE simplifié,
- et le modèle «hybride» de [Douady, Andreotti, Daerr *et al* (1999)], alliant à la fois l'approche hydrodynamique et la possibilité d'échanges entre phases statique et roulante.

Le modèle BCRE

Le modèle BCRE est une approche phénoménologique du comportement des avalanches. L'évolution du milieu granulaire est due pour partie aux grains de la phase mobile qui roulent vers le bas sous l'effet de leur poids et également aux collisions entre grains roulants et grains au repos en dessous, provoquant des échanges entre phase statique et phase roulante.

²Il s'agit ici exclusivement d'écoulements superficiels, pour lesquels l'épaisseur de l'avalanche est faible devant la distance parcourue par le milieu granulaire.

En conservant les notations R , Z et h on obtient l'équation de variation de l'épaisseur de la couche :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[-v R + D \frac{\partial R}{\partial x}] + \mathcal{E}(R, \theta) \quad (3.5)$$

dans laquelle le terme $\frac{\partial}{\partial x}(-v R)$ décrit la convection des grains vers le bas, le terme $\frac{\partial}{\partial x}(D \frac{\partial R}{\partial x})$ est un terme de diffusion utilisé pour ..., et enfin $\mathcal{E}(R, \theta)$ est le terme d'échanges entre phases.

En première approximation, les variations de v en fonction de la profondeur de la couche roulante et de la pente locale ne sont pas prises en compte³. Ainsi v est considérée comme constante et égale à la vitesse moyenne des particules en mouvement v_d .

Par convention $\mathcal{E}(R, \theta) > 0$ quand les particules quittent la phase statique. La conservation du nombre de grains permet d'écrire l'équation d'évolution de la hauteur de la phase statique :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\mathcal{E}(R, \theta). \quad (3.6)$$

Une modélisation simple du coefficient \mathcal{E} est celle-ci :

$$\mathcal{E}(R, \theta) = R(A(\theta) - C(\theta)) \quad (3.7)$$

où $A(\theta)$ représente l'accrétion des grains et $C(\theta)$ l'érosion. En remarquant que $(A - C)$ dépend nécessairement de la pente locale, et en se plaçant proche de l'angle de repos, on peut faire le développement au deuxième ordre :

$$\mathcal{E}(R, \theta) = R[\gamma(\theta - \theta_n) + \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}] \quad (3.8)$$

où on a $\gamma = A'(\theta) - C'(\theta)$ et κ une constante de correction de courbure de pente locale.

On a finalement les équations de BCRe :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = -v_d \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = -R[\gamma(\theta - \theta_n) + \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}] \end{cases} \quad (3.9)$$

où v_d , γ , D et κ sont des constantes.

Le modèle BRdG

[Boutreux, Raphaël et de Gennes (1998)] simplifient le système (3.9) en négligeant les termes de diffusion et de courbure de pente locale sur une justification dimensionnelle : en appelant la dimension de R et Z : d (le diamètre des grains), celle de x : L (la longueur du tas) et celle du temps : $\frac{L}{v}$, on obtient la dimension de la vitesse moyenne $[v] \equiv gd$, celle de fréquence caractéristique de collision $[\gamma] \equiv (\frac{g}{d})^{1/2} \simeq \frac{v}{d}$, celle de la constante de diffusion $[D] \equiv vd$ et enfin celle du coefficient de courbure de la pente locale $[\kappa] \equiv v$.

Pour les auteurs, le terme de diffusion (proportionnel à D) serait "non-hydrodynamique" au sens où il est constitué d'un gradient d'ordre supérieur à l'ordre le plus bas dans (3.9),

³L'angle de la pente locale θ est pris de telle sorte qu'il soit proche de l'angle de repos θ_r , et on peut ainsi négliger cette dépendance.

i.e. celui du terme de convection en v . Comme on a la relation $\frac{d}{L} \ll 1$, on peut donc a priori négliger la diffusion devant la convection. Pour la même raison, la courbure est négligeable devant la fréquence de collision dans la deuxième équation du système.

On obtient ainsi le nouveau système :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} = -\gamma R(\theta - \theta_n) \\ \frac{\partial R}{\partial t} = -v_d \frac{\partial R}{\partial x} + \gamma R(\theta - \theta_n) \end{cases} \quad (3.10)$$

soit encore en posant $h(x, t) = Z(x, t) + R(x, t)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -v_d \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial t} = -v_d \frac{\partial R}{\partial x} + \gamma R(\theta - \theta_n) \end{cases} \quad (3.11)$$

On remarque ainsi que la conservation de la matière est bien respectée ; en revanche la conservation de la quantité de mouvement est bien moins évidente, et c'est là la principale lacune des modèles BCRE et BRdG. De plus la vitesse de dévallement v_d est supposée constante, ce qui est loin d'être toujours vérifié physiquement.

Pour lever ces insuffisances, des chercheurs ont présentés des modèles basés sur les équations hydrodynamiques de Saint-venant (par exemple [Khakhar *et al* (2001)] ou encore [Douady, Andreotti, Daerr *et al* (1999)]). Notre modèle est assez semblable à ces modèles, à la seule différence que nous donnons une formulation plus générale valable quelque soit la nature du milieu continu, l'hypothèse de couche mince pour les avalanches n'étant utilisée qu'au dernier moment dans la modélisation des termes T , q et E ; de plus nous nous situons dans le repère xy alors que [Douady, Andreotti, Daerr *et al* (1999)] et [Khakhar *et al* (2001)] travaillent dans le repère local.

Le modèle hydrodynamique

L'approche hydrodynamique utilisée récemment pour décrire les avalanches granulaires par [Douady, Andreotti, Daerr *et al* (1999)] ou [Khakhar *et al* (2001)] est fondée sur des équations de conservation où toutes les quantités sont intégrées et moyennées sur l'épaisseur totale de l'écoulement (équations dites de Saint-Venant). Nous adopterons également ce point de vue, en gardant les mêmes notations que dans (3.3) et (3.1). On fait de plus les hypothèses simplificatrices suivantes :

- $\rho = C^{ste}$,
- q et E ne dépendent que de R la quantité de grains roulant,
- le profil de la vitesse de dévallement des grains v est linéaire en R à l'intérieur de la couche, de gradient Γ constant : $v = \Gamma R$.

On obtient ainsi les expressions de $q(R)$ et de $E(R)$:

$$q(R) = \Gamma \frac{R^2}{2}$$

$$E(R) = \Gamma^2 \frac{R^3}{3} + \tau_{xx}$$

On peut négliger τ_{xx} en première approximation. En revanche il peut être utile, après simplification de l'équation de conservation de la quantité de mouvement par R , de rajouter un terme $d \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ où d est une constante homogène à une vitesse permettant l'expression d'un terme d'échange «saturé» entre phases roulante et immobile, ainsi que l'explique [Aradian (2001)] dans sa thèse en reprenant les équations BCRE saturées.

En prenant Z_0 le profil de la pente au repos (*i.e.* $\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \mu_s$ le coefficient de friction statique), on obtient le système adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + R \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial t} + (R + d) \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\text{avec } \bar{R} = \frac{R}{Z_0}, \bar{h} = \frac{h}{Z_0}, \bar{Z} = \frac{Z}{Z_0}, \bar{x} = \frac{x}{Z_0} \text{ et } \bar{t} = \Gamma t = \sqrt{\frac{g}{Z_0}} t.$$

3.2.2 Le coefficient de friction μ_I

Il ne reste plus qu'à modéliser le coefficient de frottement μ_I dans le système (4.5). On peut tout d'abord constater que lorsque $Z' > \mu_s$, on a nécessairement $\mu_I = \mu_s$ par définition du coefficient de frottement μ . Reste alors uniquement la modélisation du coefficient de frottement dynamique. On peut proposer divers modèles, d'un coefficient μ constant à un coefficient dépendant de R .

Soit

$$\mu_I = \mu_s \quad (3.13)$$

soit

$$\mu_I = -\frac{\partial Z}{\partial x} \quad (3.14)$$

soit

$$\mu_I = \mu_s - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \mu_s\right) \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right) \quad (3.15)$$

soit encore

$$\mu_I = \mu_s - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \mu_s\right) \exp\left(-\frac{R}{R_0\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \mu_s\right)}\right) \quad (3.16)$$

soit enfin

$$\mu_I = \mu_s R - \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (3.17)$$

La simulation permet de faire ressortir deux modèles plus pertinents et donnant des résultats plus conformes aux expériences ou à la théorie : (3.14) et (3.17), obtenus d'après [Douady, Andreotti, Daerr *et al* (1999)]. La différence essentielle entre ces deux modèles est le terme de freinage du modèle (3.17), ce qui comme on le verra par la suite peut jouer un rôle très important.

Chapitre 4

Le cas de l'avalanche dans un tambour tournant

4.1 Les équations de conservation

Tout comme dans le cas de l'avalanche simple, on peut reprendre les équations (2.11), (2.16) et (2.17) et leur appliquer les hypothèses simplificatrices suivantes :
 $m_s = 0$, $\vec{F}^s = \vec{0}$, $\vec{V}^I = \vec{r} \times \vec{\omega} = \Omega Z(x, t) \vec{e}_x - x \Omega \vec{e}_z$ et $m_I = \rho_I (\frac{\partial Z}{\partial t} + u_I Z' - w_I) = \rho_I (\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega(x + ZZ'))$ d'après la relation (2.8).

On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = -\rho_I (\frac{\partial Z}{\partial t} + u_I Z' - w_I) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = -\Omega Z (\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega(x + ZZ')) - \frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } T &= g \int_Z^h \rho dz + \rho_I (\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega(x + ZZ')) \Omega(x + ZZ') \\ &\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz}_{\text{termes d'ordre supérieur}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Soit encore, en utilisant les mêmes notations que précédemment :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial t} - \Omega(x + ZZ') \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = -\Omega Z (\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega(x + ZZ')) - \frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} (g R + \Omega(x + ZZ') (\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega(x + ZZ'))) \end{cases} \quad (4.3)$$

On peut encore simplifier ce système afin de ne conserver que les contributions essentielles et on obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial t} - \Omega(x + Z Z') \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} g R \end{cases} \quad (4.4)$$

4.2 Système adimensionné

En utilisant la modélisation hydrodynamique on peut alors exprimer ce système, après adimensionnement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{R} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{x}} = -\bar{\Omega}(\bar{x} + \bar{Z} \bar{Z}') \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{t}} + (\bar{R} + d) \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\mu_I + \bar{Z}'}{1 + \bar{Z}'^2} \bar{g} \bar{R} \end{cases} \quad (4.5)$$

avec $\bar{R} = \frac{R}{Z_0}$, $\bar{h} = \frac{h}{Z_0}$, $\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0}$, $\bar{x} = \frac{x}{Z_0}$, $\bar{\Omega} = \Omega \sqrt{\left(\frac{Z_0}{g}\right)}$ et $\bar{t} = \Gamma t = \sqrt{\frac{g}{Z_0}} t$.

4.3 Coefficient de friction μ

Comme dans le cas de l'avalanche simple, on utilisera plus particulièrement les modèles de μ (3.14) et (3.17).

Deuxième partie

Simulation numérique
d'avalanches granulaires

Chapitre 5

Résolution numérique des équations

Note : Cette section est entièrement le produit de K.K.J. Kouakou.

L'équation (4.5) s'écrit sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[F(f)] = G \quad (5.1)$$

$$\text{avec } f = \begin{pmatrix} h \\ R \end{pmatrix} \quad F(f) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} \\ \frac{R^2}{2} + d \times R \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} \end{pmatrix}$$

On remarque que le système est hyperbolique et non linéaire (termes de convection). Il va sans dire qu'il faut s'attendre à des chocs dans les zones de forts gradients ou de discontinuité. Du fait même déjà de la condition initiale (pente en demi-créneau) il faut s'attendre donc à des phénomènes de chocs.

On utilise un schéma limiteur de flux, à variation totale décroissante (TVD) ([?] et [?]) modifié, semi-implicite ([?]) d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (voir Annexe1).

Pour chaque composante notant $f_j^n = f(j \Delta x, n \Delta t)$, $\Delta_{j+\frac{1}{2}} f = f_{j+1} - f_j$ et $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, on a le schéma

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \lambda [F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t G_j^{n+1} \quad (5.2)$$

Où F est le flux numérique défini par

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f_{j+1}^n + f_j^n] - \frac{1}{2} \Psi(C_{j+\frac{1}{2}}^n) \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n (1 - L_{j+\frac{1}{2}}^n) \quad (5.3)$$

et

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f_j^n + f_{j-1}^n] - \frac{1}{2} \Psi(C_{j-\frac{1}{2}}^n) \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^n (1 - L_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (5.4)$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{f_{j+1}^n - f_j^n} & \text{si } f_{j+1}^n \neq f_j^n \\ D(f_j^n) & \text{si } f_{j+1}^n = f_j^n \end{cases} \quad \text{avec } D(f) = \frac{d}{df}F(f)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z| & \text{si } |z| \geq \varepsilon \\ \frac{z^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & \text{si } |z| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon \text{ un petit réel positif. En notant}$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^{n-} = \frac{\Delta_{j-\frac{1}{2}} f^n}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n}$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^{n+} = \frac{\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^n}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n},$$

On définit le limiteur de flux L par

$$L_{j+\frac{1}{2}}^n = L(r_{j+\frac{1}{2}}^{n-}, r_{j+\frac{1}{2}}^{n+}) \quad \text{ou simplement } L_{j+\frac{1}{2}}^n = L(r^-, r^+) \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

$L(r^-, r^+)$ est soit le limiteur Minmod, $Minmod(r^-, r^+) = sgn(r^-) \max[0, \min[|r^-|, r^+ sgn(r^-)]]$, soit le limiteur de Van Leer du même nom que son auteur Van-Leer défini par

$L(r^-, r^+) = \frac{r^- + |r^-|}{1 + r^-} + \frac{r^+ + |r^+|}{1 + r^+} - 1$. Il existe aussi un limiteur dû à Roe nommé Superbee défini par

$$L(r^-, r^+) = \max[0, \min(2r^-, 1), \min(r^-, 2)] + \max[0, \min(2r^+, 1), \min(r^+, 2)] - 1.$$

D'après une étude comparative faite par Yee, il s'avère en général que Superbee est le plus compressif des limiteurs et qu'en revanche Van-Leer est plus efficace que Minmod. Mais ici on a Utilisé Minomod qui semble bien adapté d'après le test de comparaison fait en annexe 1.

Il faut noter le limiteur n'est défini lorsque l'un des rapports r^\mp au moins est nul. Pour résoudre cette difficulté on peut ajouter un petit réel à chacun des numérateur et dénominateur de r^\mp . Yee(1987) a adapté un schéma modifié de (5.3)

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f_{j+1}^n - f_{j-1}^n] - \frac{1}{2} \Psi(C_{j+\frac{1}{2}}^n) (\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n - \hat{L}_{j+\frac{1}{2}}^n) \quad (5.7)$$

dans lequel $L_{j+\frac{1}{2}}^n$ est transformé en $\hat{L}_{j+\frac{1}{2}}^n$ $\hat{L}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{L}(|C_{j-\frac{1}{2}}^n| \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^n, |C_{j+\frac{1}{2}}^n| \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n, |C_{j+\frac{3}{2}}^n| \Delta_{j+\frac{3}{2}} f^n)$

Et le Limiteur Minmod à trois variables défini par $Minmod(x, y, z) = Minmod(x, y) + Minmod(x, z) - x$

Chapitre 6

Simulation d'avalanche simple

Nous nous sommes intéressés dans cette partie à plusieurs types d'avalanches simples, en jouant essentiellement sur les conditions limites. Ainsi nous avons simulé des avalanches avec ou sans alimentation, avec sortie libre ou avec mur (cf. FIG.6.1), le tout avec différentes modélisations de μ .

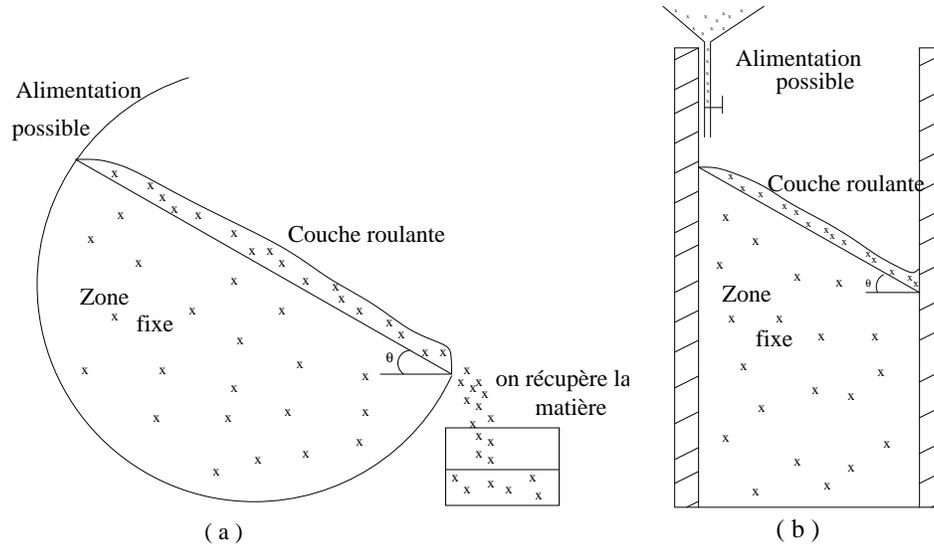


FIG. 6.1 – (a) Sortie libre, avec ou sans alimentation ; (b) Mur en sortie, avec ou sans alimentation

6.1 Avalanche sur fond rugueux

Dans un premier temps nous avons simulé une avalanche sans alimentation sur un tas dont la pente d'inclinaison est supérieure à la pente de repos. La matière s'écoule ensuite sur une zone horizontale, sans contrainte particulière ; ce cas ressemble à une avalanche aéro que l'on peut trouver dans la nature (typiquement une dune de sable sur un sol rugueux).

En reprenant les équations (4.5) avec un coefficient μ du type (3.17), on obtient ainsi les figures (6.2) et (6.3), représentant les évolutions de R , h et Z en fonction du temps.

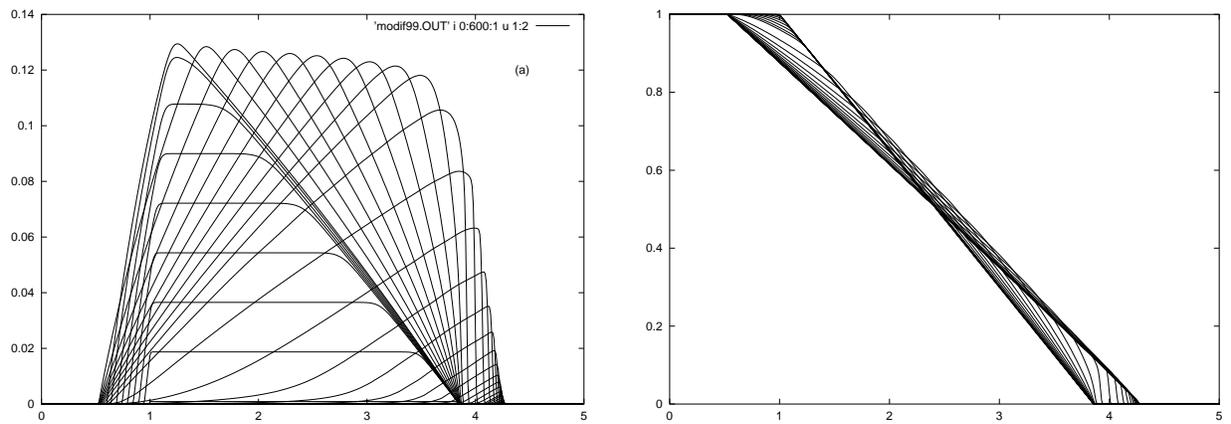


FIG. 6.2 – A gauche, évolution de $R(x, t)$; à droite, évolution de $h(x, t)$.

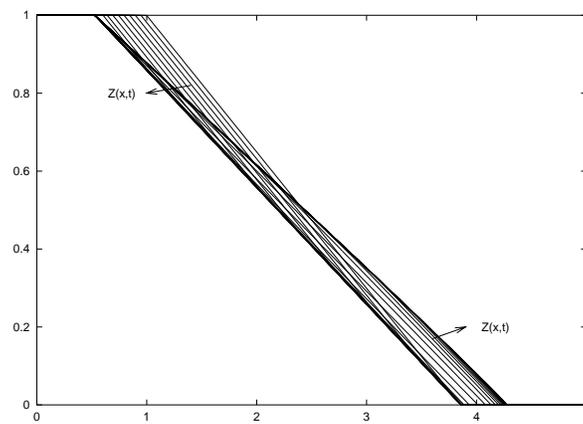


FIG. 6.3 – Evolution de $Z(x, t)$.

On peut remarquer plusieurs temps dans l'avalanche, que l'on appellera «actes» en référence à [Boutreux, Raphaël et de Gennes (1998)]. Ces actes sont marqués par des différences d'évolution des parties arrière (ou pied), centrale et avant (ou tête) de $R(x)$ au cours du temps. Ainsi en s'intéressant de plus près à la quantité de grains roulant, on observe :

1. le centre croît tandis que les parties avant et arrière sont presque fixes (ACTE I : FIG.6.4 gauche) ;
2. le centre reste constant et la tête avance (ACTE II : FIG.6.4 droite) ;
3. le centre décroît et la tête continue d'avancer (ACTE III : FIG.6.5).

Sur la figure (6.4) représentant l'acte II, on remarque une légère décroissance de la quantité de grains roulants : ceci est dû à la présence du facteur de dissipation ν (cf. (3.2)) nécessaire à la stabilisation des équations numériques. C'est ce même facteur qui engendre la non-linéarité du pied, contrairement à ce que prédisent [Boutreux, Raphaël et de Gennes (1998)] dans leur article.

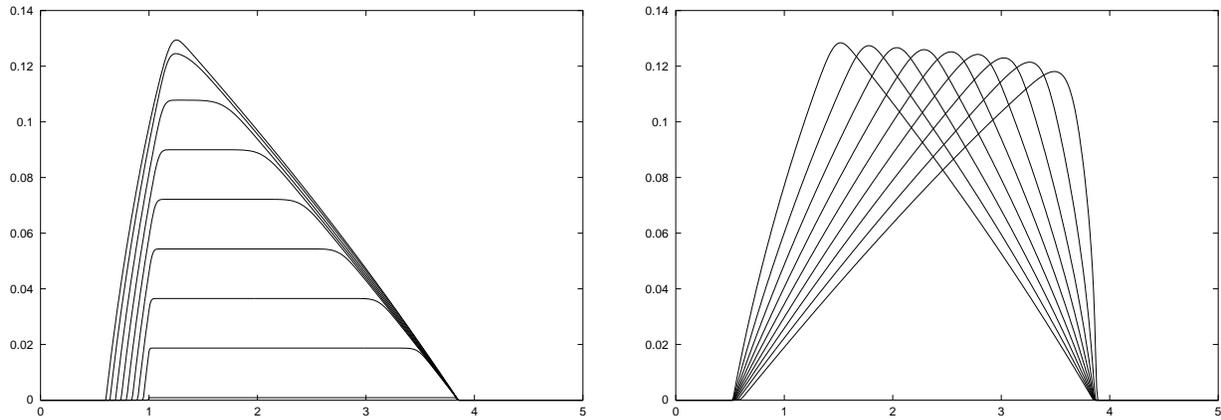


FIG. 6.4 – À gauche, ACTE I ; à droite, ACTE II.

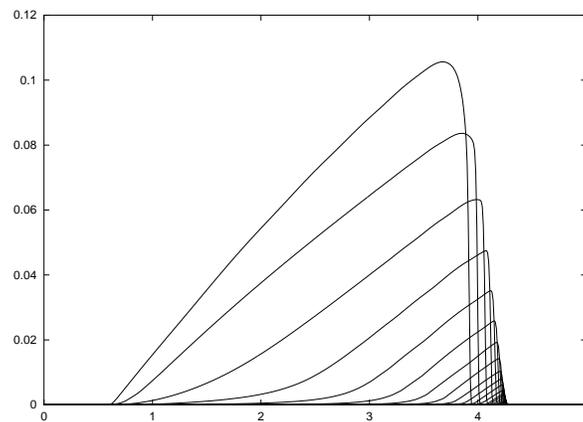


FIG. 6.5 – ACTE III.

On peut de même observer les trois actes sur l'évolution de $h(x, t)$ et $Z(x, t)$. La hauteur totale de l'avalanche h passe naturellement de sa position instable (pente supérieur à l'angle de repos) à la position de repos en suivant la progression de l'avalanche :

1. seul le haut du tas varie en décroissant (ACTE I : FIG.6.6 gauche) ;
2. l'onde se propage du haut vers le bas du tas (ACTE II : FIG.6.6 droite) ;
3. seul le bas du tas varie avec l'accumulation de la matière restante (ACTE III : FIG.6.7 gauche).

En revanche, la zone de grains fixes Z passe par une étape de transition figée :

1. la zone fixe passe de la position instable à une position de transition (ACTE I : FIG.6.7 droite) ;
2. transition figée, la zone fixe ne varie pas (ACTE II : FIG.6.8 gauche) ;
3. les grains s'immobilisent dans une position stable : la zone fixe croît pour atteindre la pente de repos (ACTE III : FIG.6.7 droite).

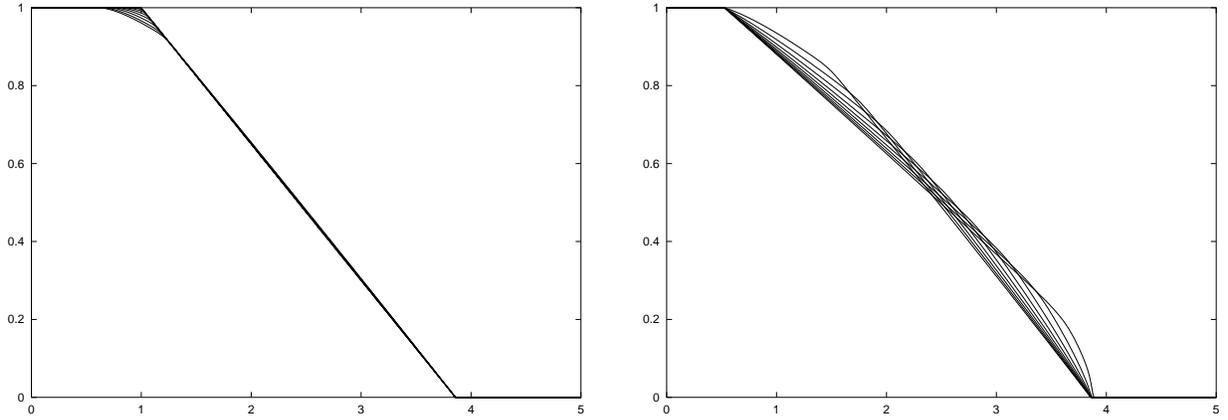


FIG. 6.6 – A gauche, ACTE I de h ; à droite, ACTE II de h .

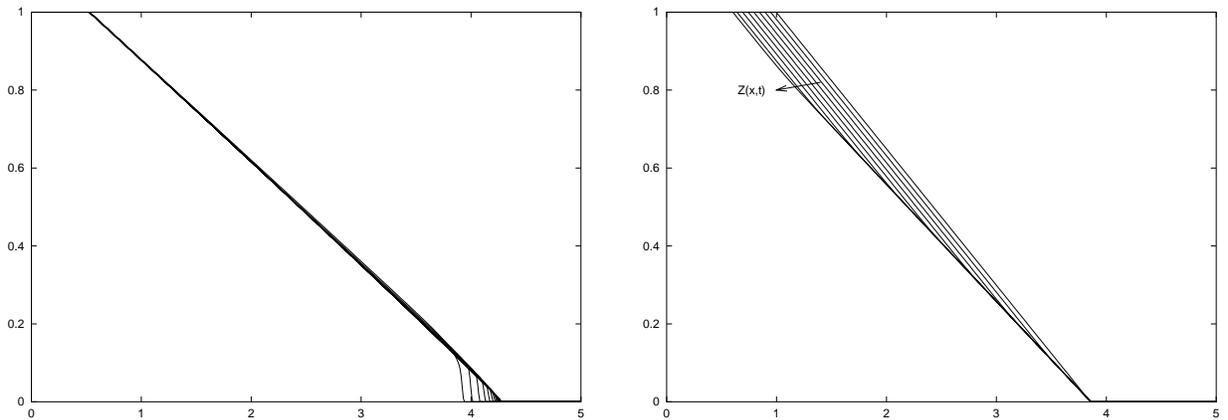


FIG. 6.7 – A gauche, ACTE III de h ; à droite, ACTE I de Z .

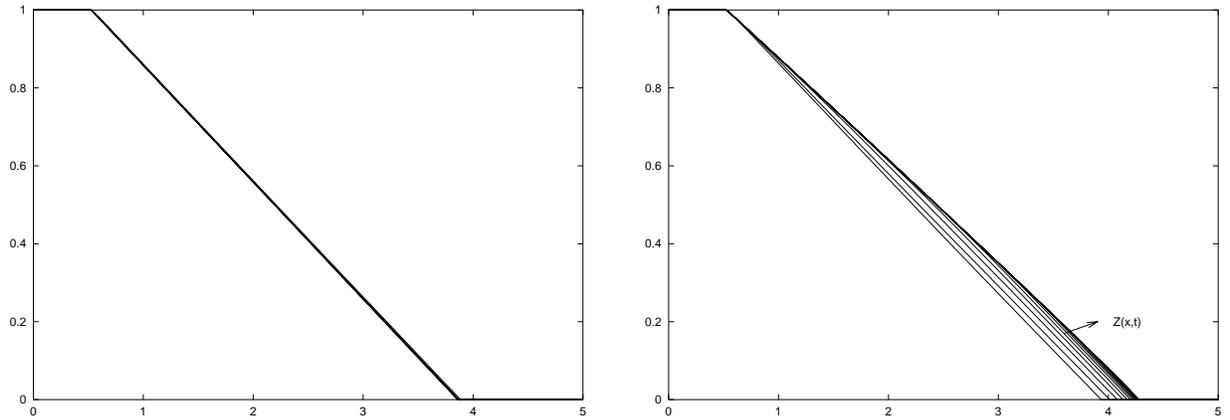


FIG. 6.8 – À gauche, ACTE II de Z ; à droite, ACTE III de Z .

6.2 Avalanche alimentée avec sortie libre

Le mécanisme général régissant une avalanche granulaire ayant été modélisé et correspondant assez bien avec la littérature, nous avons essayé diverses configurations d'avalanche, dont l'avalanche alimentée avec sortie libre. Le but de cette modélisation est de confirmer l'apparition d'un état stationnaire pour cette avalanche.

Tout d'abord nous avons simulé un simple écoulement engendré par une pente trop forte (FIG.6.9) avec une sortie libre. On observe ainsi une légère différence au niveau de la tête de l'avalanche, due à la présence de cette sortie libre : la quantité de grains roulant est évacuée.

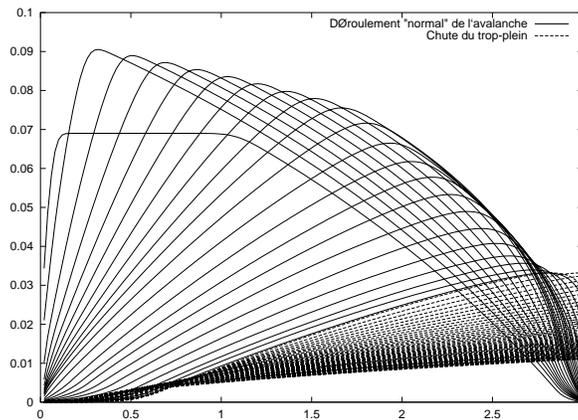


FIG. 6.9 – Ecoulement en sortie libre ($R(x, t)$).

En simulant la même expérience mais cette fois-ci avec un coefficient μ de la forme de (3.14) on obtient les figures (6.10), (6.11) et (6.12), où le bas du tas à une forme particulière de ressaut. On observe également ce ressaut dans l'expérience du tambour tournant, et est sûrement dû au fait que la modélisation de μ (3.14) ne comporte pas de

terme de freinage fonction de R contrairement à la modélisation (3.17), ce qui engendre une «arrivée» plus brutale à la limite du domaine.

Le choix de la modélisation (3.17) a aussi une influence sur le pied de l'avalanche, en raison de la contribution en R . Ainsi sur la figure (6.9) représentant l'évolution de R avec la modélisation (3.17) on voit clairement un plat au pied de l'avalanche au bout d'un certain temps, alors que sur la figure (6.10) utilisant la modélisation (3.14) toutes les courbes partent de 0.

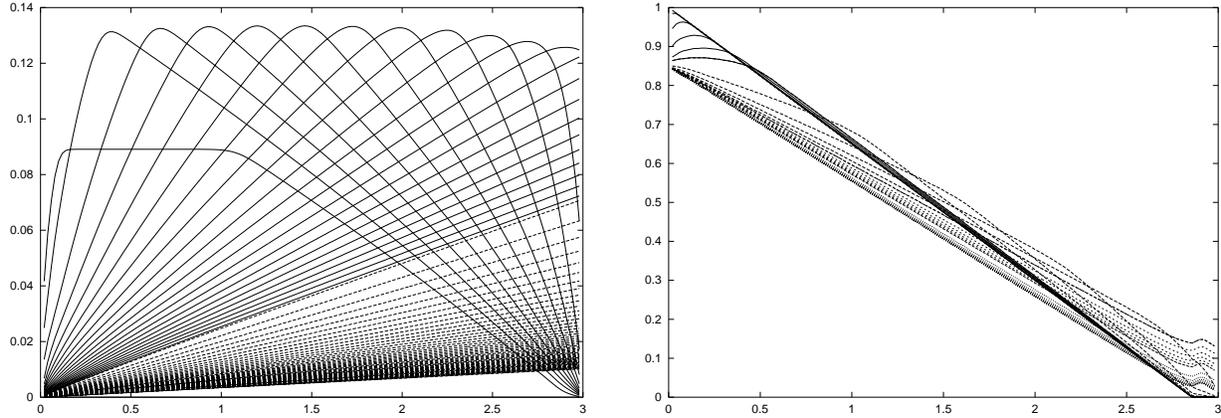


FIG. 6.10 – A gauche, évolution de R ; à droite, évolution de h .

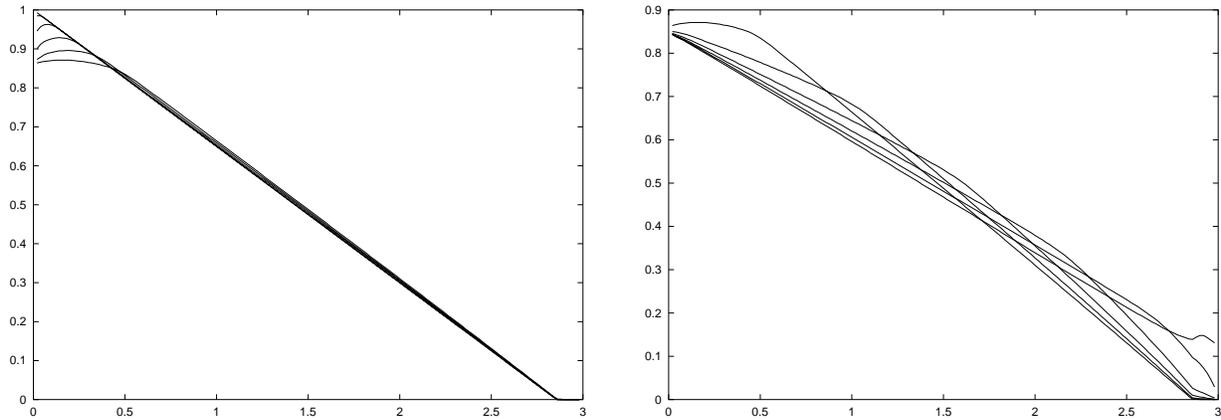


FIG. 6.11 – A gauche, ACTE I de h ; à droite, ACTE II de h .

Ensuite, on simule une avalanche dans les mêmes conditions mais avec une alimentation en haut du tas. Après une période transitoire, un régime stationnaire s'établit : R devient constant. Sur les figures (6.13) et (6.14), on observe tout d'abord l'avancée du choc jusqu'au moment où les grains atteignent le bord du domaine ; ensuite la quantité de grains roulant tend vers une solution constante.

On voit sur la figure (6.15) représentant les évolutions de $h(x, t)$ et $Z(x, t)$ l'influence initiale du choc (on remarque notamment que le tas «fixe» est creusé au départ de l'avalanche) puis la solution stationnaire.

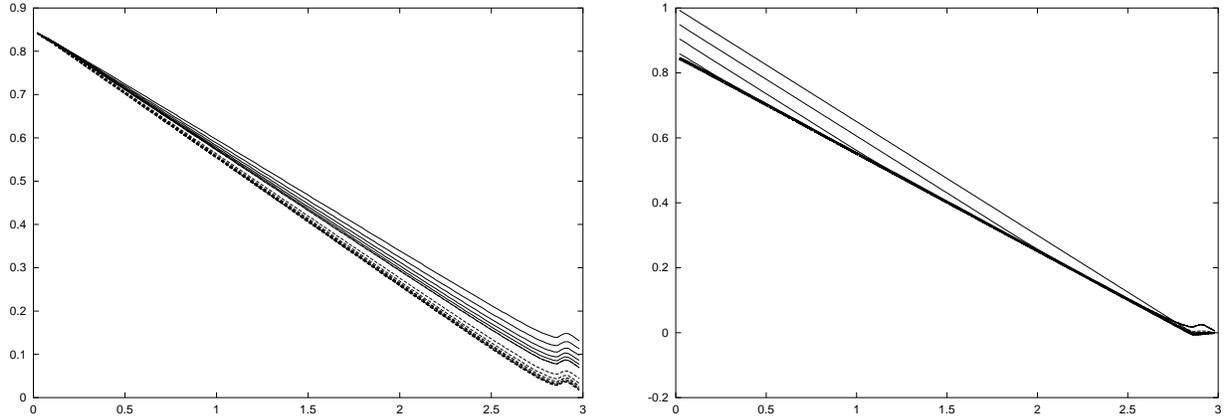


FIG. 6.12 – A gauche, ACTE III de h ; à droite, évolution de Z .

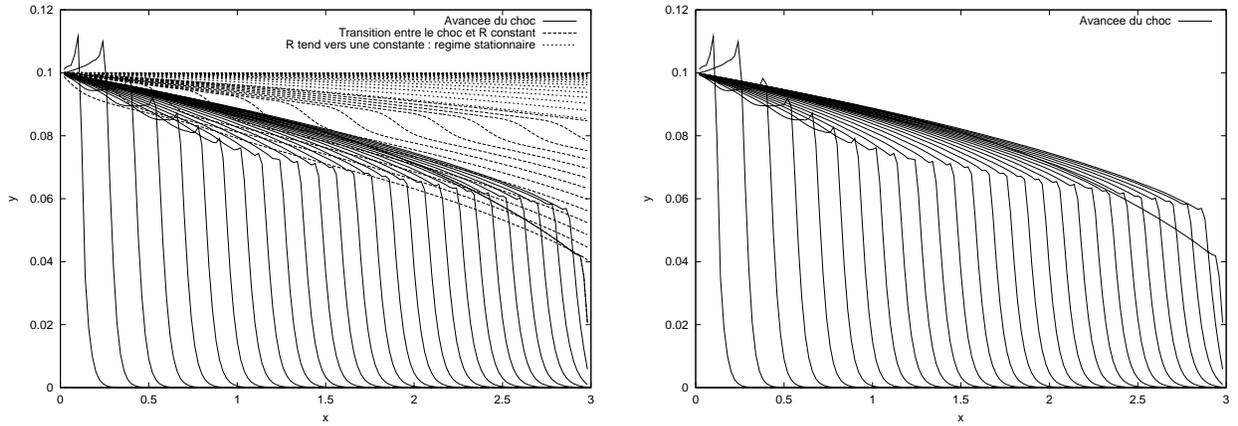


FIG. 6.13 – A gauche, bilan de l'évolution de R ; à droite, avancée du choc.

On peut à cette occasion évoquer les travaux de [Emig, Claudin et Bouchaud (2000)] sur la simulation d'avalanches, et du problème généré par ce type de chocs. En effet, l'expérience menée est celle d'une petite dune avançant sur un tas de sable. En résolvant les équations de [Boutreux, Raphaël et de Gennes (1998)] par la méthode des caractéristiques, [Emig, Claudin et Bouchaud (2000)] font face à un problème jusqu'à maintenant non-résolu, à savoir que la dune en dévalant la pente devient de plus en plus raide d'un côté, les caractéristiques se croisent (naissance du choc) et qu'il devient impossible de donner aisément une solution exacte par cette méthode.

Dans notre méthode de résolution numérique, ayant introduit un coefficient ν de diffusion, il devient possible de gérer ce choc : c'est ce coefficient ν qui définit la largeur de la pente et qui simule alors soit un choc proprement dit, soit un étalement de la dune. On obtient pour différents coefficients ν , dans le cas de la dune la figure (6.16) et dans le cas de l'alimentation la figure (6.17).

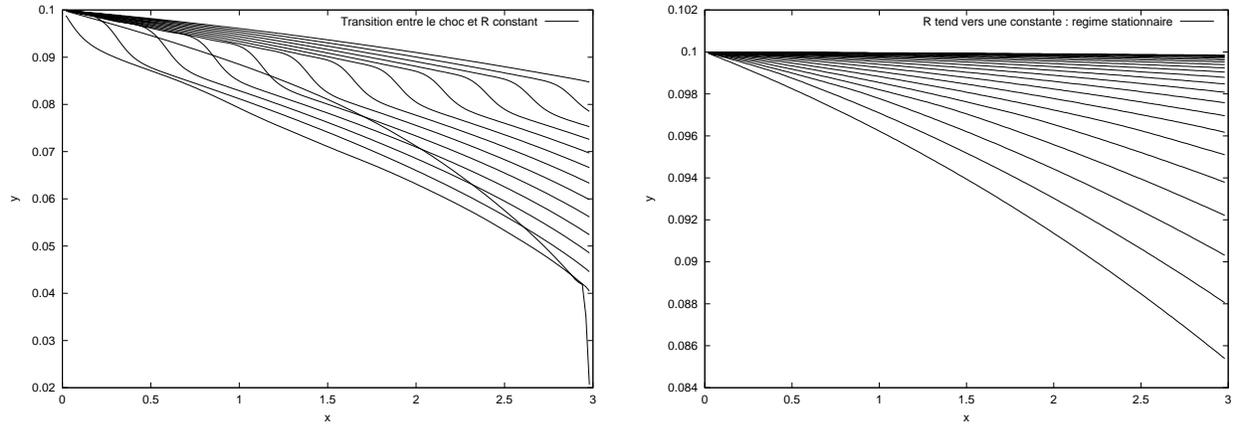


FIG. 6.14 – A gauche, période de transition entre le choc et la solution stationnaire ; à droite, R tend vers une constante.

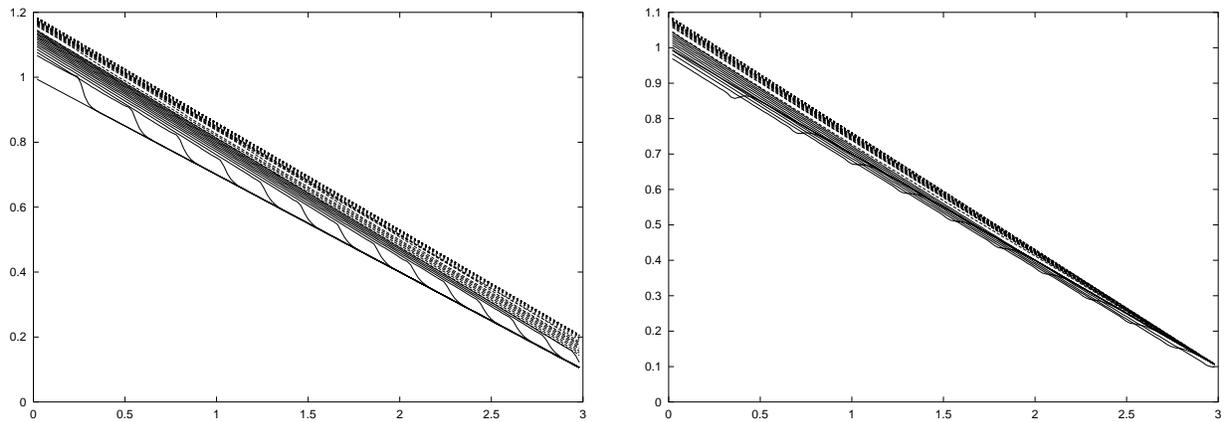


FIG. 6.15 – A gauche, évolution de $h(x, t)$; à droite, évolution de $Z(x, t)$.

6.3 Avalanche alimentée avec mur

Dans cette partie, l'avalanche est toujours alimentée mais on place un mur en sortie, ce qui se traduit par la condition $R_{sortie} = R(L, t) = 0$.

On observe alors :

1. une première avalanche comportant un choc qui se déplace jusqu'au mur ;
2. ensuite, une montée assez régulière de $h(x, t)$ et $Z(x, t)$;
3. la quantité de grains roulant $R(x, t)$ a après la première avalanche une forme en $\sqrt{L-x}$, ce qui correspond bien à une résolution des équations (4.5) en cherchant une solution $h(x, t)$ stationnaire, et qui confirme les résultats expérimentaux de [Khakhar *et al* (2001)].

Ce qui donne les figures (6.18) et (6.19).

Dans cette situation on se rend compte de l'insuffisance du modèle (3.14) du coefficient

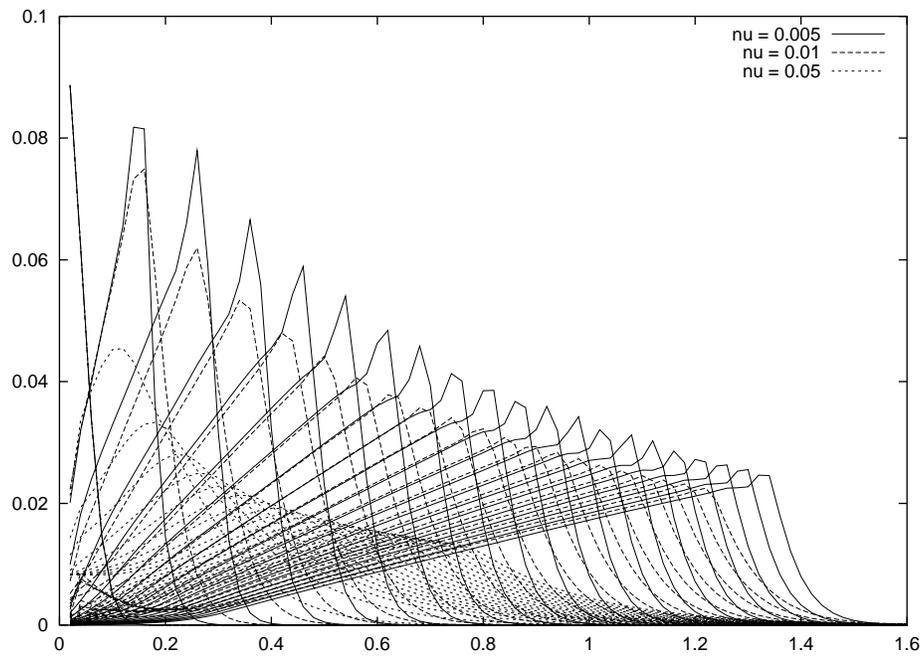


FIG. 6.16 – Evolution d'une dune pour différentes valeurs du coefficient de dissipation ν .

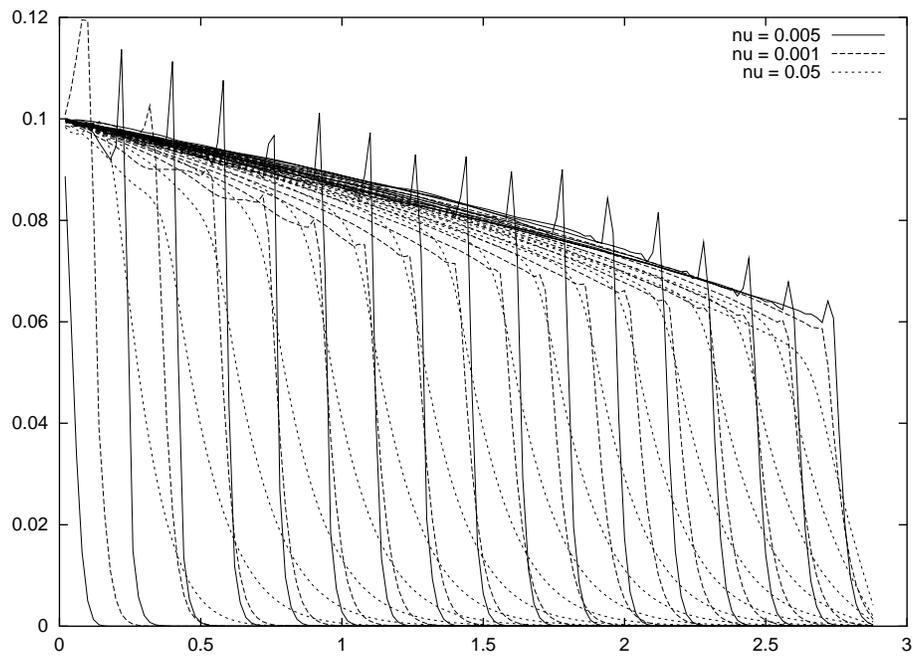


FIG. 6.17 – Evolution du choc pour différentes valeurs du coefficient de dissipation ν .

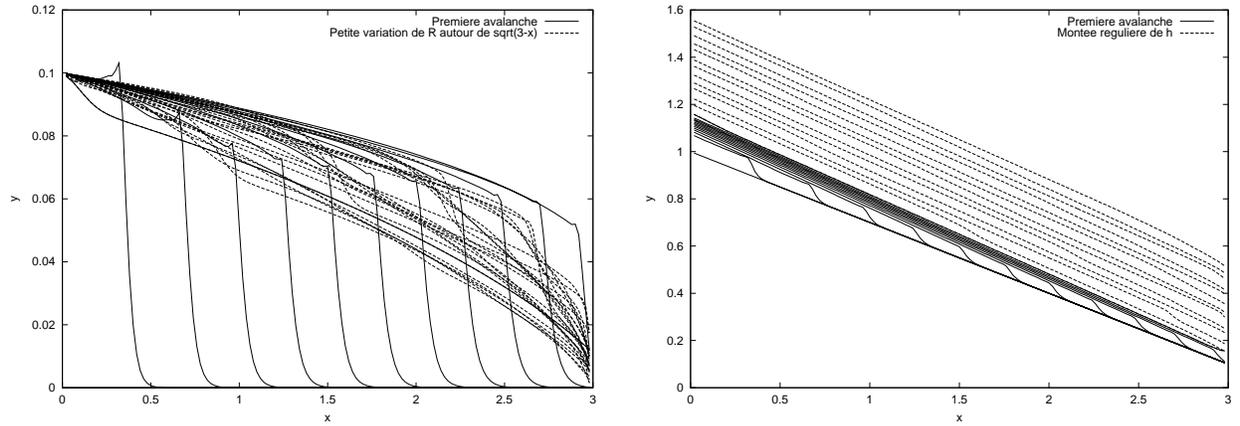


FIG. 6.18 – A gauche, évolution de $R(x, t)$; à droite, évolution de $h(x, t)$.

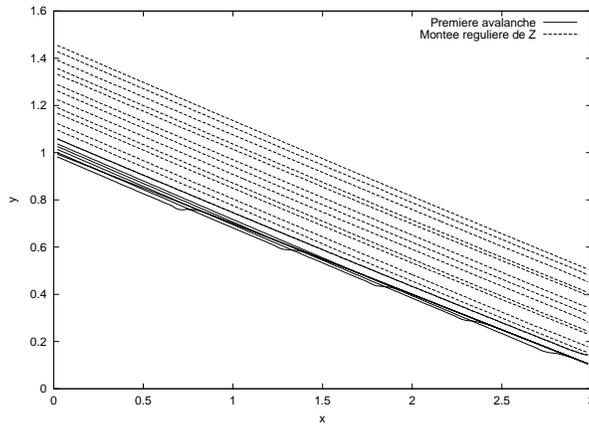


FIG. 6.19 – Evolution de $Z(x, t)$.

μ . En effet, ce modèle ne comportant pas de terme de freinage, il n'y a pas de «retour d'information» vers le haut du tas de sable et on se retrouve dans la situation où le bas de l'avalanche dépasse le haut de l'avalanche et crée finalement un grosse instabilité numérique. Il semblerait donc qu'il soit nécessaire d'introduire un terme de freinage dépendant de $R(x, t)$ afin de valider le modèle.

Chapitre 7

Simulation d'avalanche dans un tambour tournant

Nous avons simulé dans cette partie des avalanches dans un tambour tournant (FIG.7.1).

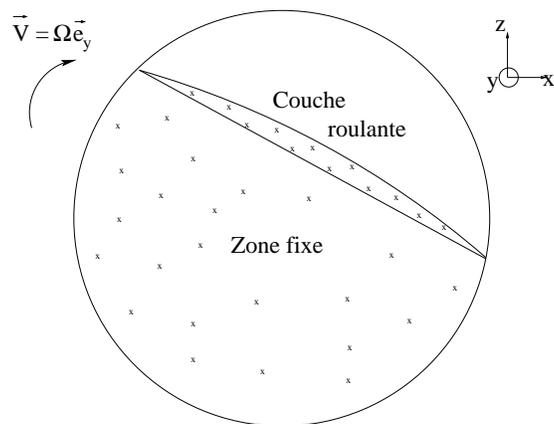


FIG. 7.1 – Tambour tournant.

Là encore nous avons essayé de générer un état stationnaire, avec des solutions du type de [Gray (2000)]. Nous sommes partis de deux types de tas différents, l'un en pente au repos et l'autre comportant un replat en amont, ce qui permet de bien visualiser la transition vers l'état stationnaire.

Il semble en revanche que nos solutions n'aient pas le caractère symétrique de celles de [Gray (2000)], et ceci est certainement dû à des équations initiales légèrement différentes (il semblerait que Gray ait oublié un terme lors de la simplification de ses équations). Nos solutions se rapprochent en revanche énormément des résultats expérimentaux de [Rajchenbach *et al* (1990)].

En configuration "plat-pente" (FIG.7.2) on observe que :

1. $R(x,t)$ tend vers une solution stationnaire en deux temps : seule les grains appartenant à la pente atteignent le bord du tambour, puis tous les grains atteignent le

- bord du tambour ;
2. $h(x, t)$ tend vers une solution stationnaire de forme elliptique ;
 3. $Z(x, t)$ tend vers une solution droite.

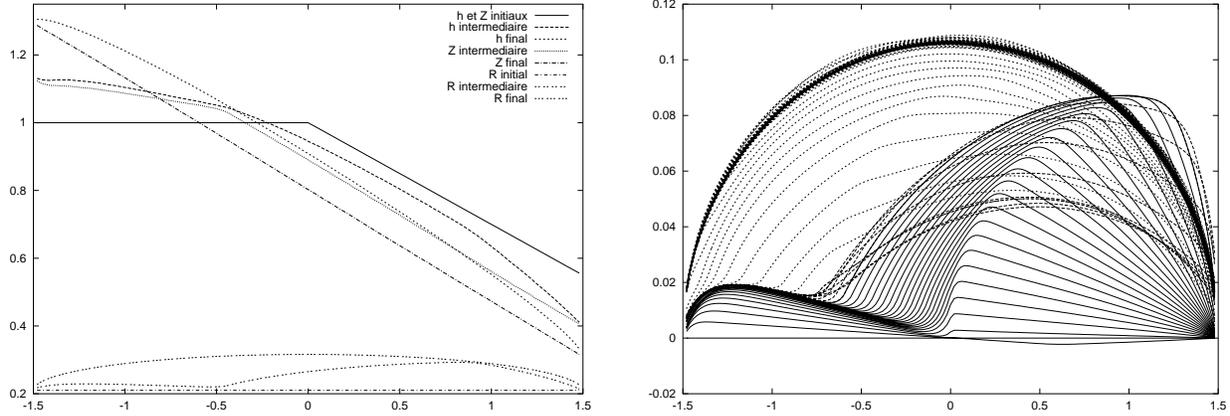


FIG. 7.2 – A gauche, bilan en configuration plat-pente ; à droite, évolution de $R(x, t)$.

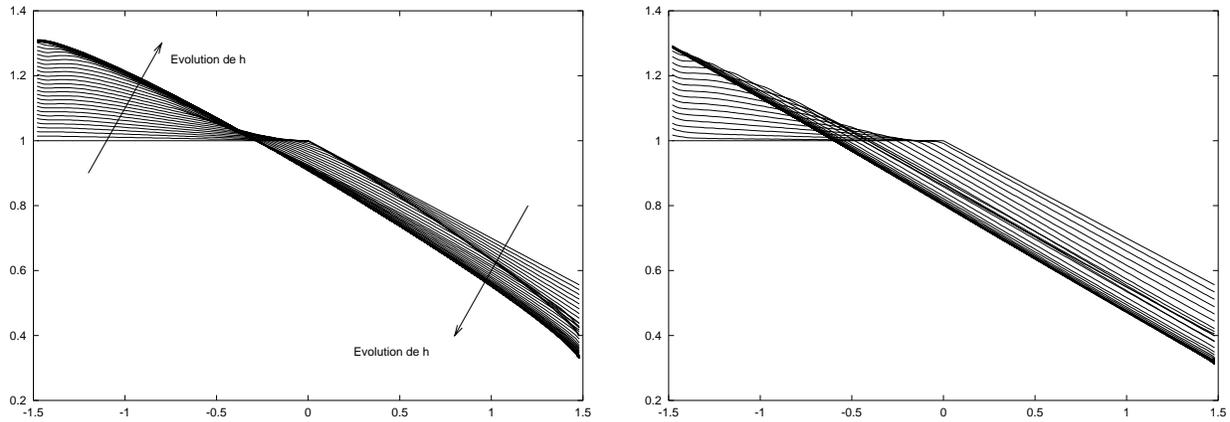


FIG. 7.3 – A gauche, évolution de $h(x, t)$; à droite, évolution de $Z(x, t)$.

En configuration "pente seule" (FIG.7.4) on observe que :

1. $R(x, t)$ tend également vers une solution stationnaire en deux temps, mais il y a une période d'oscillations autour de la solution stationnaire (ceci est certainement dû au fait qu'il y a plus de grains à frapper le bord du tambour et que le choc engendre des répercussions) ;
2. aux oscillations évoquées près, les comportements de $h(x, t)$ et $Z(h, t)$ sont plus rapides mais similaires qu'en configuration "plat-pente" ;
3. on peut faire tourner le tambour très vite tout en gardant une grande stabilité et une solution stationnaire, mais plus Ω est grand et plus la solution se dissymétrise.

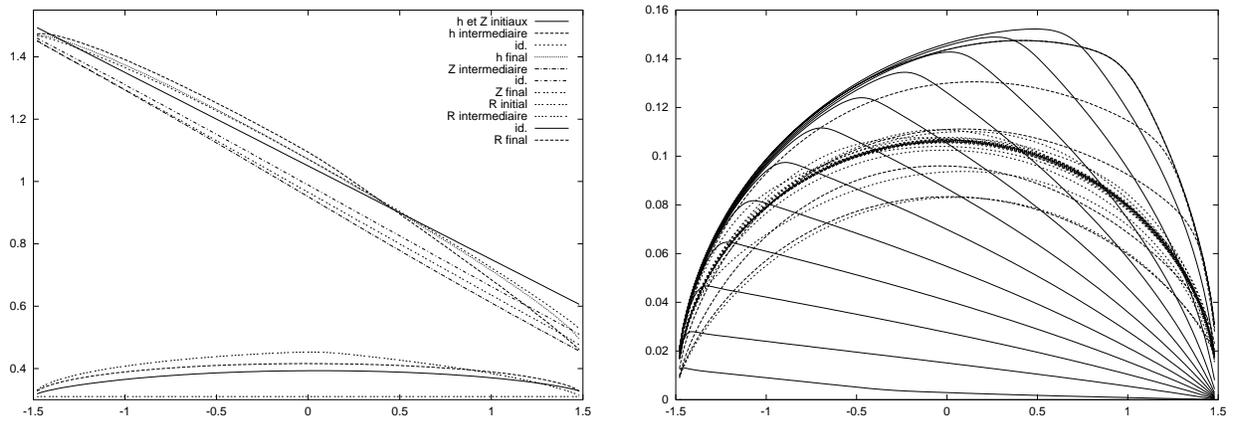


FIG. 7.4 – A gauche, bilan en configuration pente seule ; à droite, évolution de $R(x, t)$.

Bibliographie

- [Aradian (2001)] Aradian A., 2001 *Quelques problèmes de dynamique d'interfaces molles* (Thèse de Doctorat Paris 6)
- [Bagnold *et al* (1936)] Bagnold R.A., 1936 *The movement of desert sand*, Proc. R. Soc. Lond. A **157**, 594-620
- [Bagnold *et al* (1956)] Bagnold R.A., 1956 *The flow of cohesionless grains in fluids*, Proc. R. Soc. Lond. A **249**, 235-297
- [Bouchaud *et al* (1994)] Bouchaud J.-P., Cates M., Ravi Prakash & Edwards S.F. 1994 *Dry granular matter*, Journal Phys. I **4**, 1383.
- [Boutreux, Raphaël et de Gennes (1998)] Boutreux T., Raphaël E. & de Gennes P.-G. 1998 *Surface flows of granular materials : A modified picture for thick avalanches*, Phys. Rev. E **58**, 4692-4700.
- [Douady, Andreotti, Daerr *et al* (1999)] Douady S., Andreotti B. & Daerr A. 1999, A granular surface flow equations, Eur. Phys. J. B **11**, 131-142.
- [Emig, Claudin et Bouchaud (2000)] Emig Th., Claudin Ph. & Bouchaud J.-P. 2000 *Exact solutions of a model for granular avalanches*, Europhys. Lett., **50** (5), pp.594-600
- [Gray (2000)] Gray J.M.N.T. 2000 *Granular flow in partially filled slowly rotating drums*, J. Fluids Mech., vol.441, pp.1-29.
- [Khakhar *et al* (2001)] D.V. Khakhar, A.V. Orpe, P. Andresén & J.M. Ottino 2001, *Surface flow of granular materials : model and experiments in heap formation*, J. Fluid Mech. **441**, 255.
- [Kouakou *et al* (2003)] K.K.J. Kouakou, C. Josserand, P.-Y. Lagrée & D. Lhuillier 2003, *Les écoulements de surface : une présentation unifiée pour les avalanches, les avalanches alimentées et les tambours tournants.*, rapport partiel.
- [Rajchenbach *et al* (1990)] J. Rajchenbach 1990, *Flow in Powders : from discrete Avalanches to continuous Regime*, Phys. Rev. E **65**, 2221.
- [Savage et Hutter] S.B. Savage & K. Hutter, J. Fluid Mech. **199**, 177
- [Bonnet et Lunéville (2004)] Bonnet A. S. & Lunéville E., *Résolution numérique des EDP*, Cours MA201 ENSTA

Table des matières

Introduction	1
I Modélisation des avalanches granulaires	2
1 Équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement	3
1.1 Conservation de la masse	3
1.1.1 Équation de conservation de la masse	3
1.1.2 Conditions limites pour la conservation de la masse	4
1.1.3 Forme finale de la conservation de la masse	4
1.2 Conservation de la quantité de mouvement	5
1.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement	5
1.2.2 Conditions limites pour la conservation de la quantité de mouvement	5
1.2.3 Forme finale de la conservation de la quantité de mouvement	5
2 Les équations de conservation dans le cas de milieux granulaires	6
2.1 Conservation de la masse et de la quantité de mouvement	6
2.2 Conditions limites	8
3 Le cas de l'avalanche simple	11
3.1 Préliminaires	11
3.2 Modélisation du flux, de l'énergie et du coefficient de friction μ	12
3.2.1 Le flux de matière q et l'énergie E développée dans la couche	12
3.2.2 Le coefficient de friction μ_I	15
4 Le cas de l'avalanche dans un tambour tournant	16
4.1 Les équations de conservation	16
4.2 Système adimensionné	17
4.3 Coefficient de friction μ	17
II Simulation numérique d'avalanches granulaires	18
5 Résolution numérique des équations	19
6 Simulation d'avalanche simple	21
6.1 Avalanche sur fond rugueux	21
6.2 Avalanche alimentée avec sortie libre	25
6.3 Avalanche alimentée avec mur	28

7 Simulation d'avalanche dans un tambour tournant	31
Bibliographie	34