Comparaisons entre des modèles d'écoulement dans une glotte

Emmanuel Berger

June 3, 2002

Abstract

Le problème consiste ici en la validation et la comparaison de différents modèles exprimant les écoulements à travers la glotte, un assemblage en 2D plan d'un canal et d'une constriction. En effet, nous allons comparer Navier-Stokes, Navier-Stokes Réduit et le modèle de couche limite interactive (tous résolus numériquement) afin d'évaluer l'intérêt ou non d'utiliser des modèles très puissant là où de plus simples suffisent. De plus, il existe des domaines de paramètres (les paramètres du problème sont définis plus loin) dans lesquels ils ne sont plus cohérents entre eux ou bien pour lesquels la difficulté de calcul devient purement numérique.
Les trois méthodes de calculs sont de plus confrontées à des formules directes, nous proposons une similitude générale.

1 La géométrie du problème

La glotte sera décrite par la figure 1 suivante: on considère deux plans parallèle infinis déformés par la constriction. L'écoulement se produit de la gauche vers la droite.

Le problème consiste tout d'abord en la modélisation de la géométrie de la

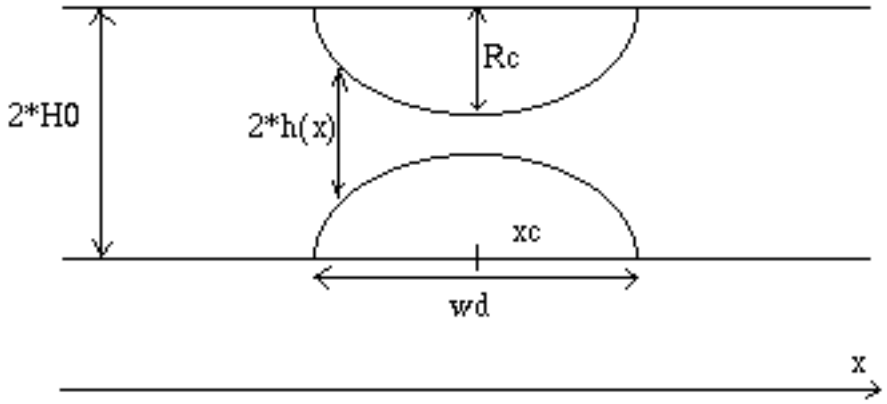

Figure 1: La géométrie du problème

bosse, les facteurs déterminant sont donc ici la fonction $h(x)$ et le rapport $\alpha = \frac{R_c}{H_0}$. Le nombre de Reynolds aura également une grande importance, pour le construire, on utilisera U_0, ordre de grandeur de la vitesse imposée en entrée et H_0; ainsi nous avons :

$$Re = \frac{\rho U_0 H_0}{\nu}$$

2 Naviers-Stokes

Il s'agit en fait de la résolution numérique des 'equations de Navier-Stokes (équations (1) et (2)) grâce à Castem 2000 [1] par la méthode des éléments finis. Si on pose $\vec{U} = u\vec{u}_x + v\vec{u}_y$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \quad (2)$$

Les termes en dérivées par rapport au temps ont été annulés, on ne s'intéresse qu'au cas stationnaire. Les conditions aux parois sont bien entendu une

vitesse nulle et on impose de plus une pression constante selon y en sortie ainsi que le profil de vitesse à l'entrée (en pratique, il est plat mais on peut mettre un Poiseuille).
A ces équations il faut ajouter la conservation de la masse (équation (3)).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

La résolution passe d'abord par un adimensionnement avec comme échelle H_0 pour x et y, et U_0 pour u et v.
Les problèmes rencontrés ont été majoritairement centrés sur le maillage et le nombre de points de mesures au niveau du col, en effet, si trop de points sont présents au niveau du rétrécissement le calcul ne peut converger car les noeuds sont trop proches. Par contre s'il n'y a pas assez de points, il se peut que le code ne "voit" pas la couche limite. En effet, quand le fluide est accéléré au sommet de la bosse, la couche limite est très fine, il se peut qu'elle soit plus faible que l'espace entre deux points du maillage. C'est pourquoi il faut rester vigilant et critique à propos du code utilisé ici.

3 Le Modèle R.N.S.P

C'est à dire Reduced Navier Stokes et Prandtl (on le notera RNSP dans toute la suite) [2]. Il s'agit des mêmes équations de Navier-Stokes ((1) et (2)) mais en ajoutant quelques hypothèses à celles déjà formulée permettant une résolution numérique plus aisée. On détaille ici l'adimensionnment.

$$x = H_0 Re \bar{x}$$
$$y = H_0 \bar{y}$$
$$u = U_0 \bar{u}$$
$$v = \frac{H_0}{Re} \bar{v}$$
$$P = \rho U_0^2 \bar{P}$$

On ne s'intéresse qu'au cas stationnaire, les termes en dérivées par rapport au temps sont donc supprimés. Les équations sont donc réduites à:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{6}$$

L'équation (6) est la conservation de la masse, toujours valable, mais adimensionnée. La résolution du RNSP se fait encore grâce aux éléments finis.

4 Le modèle I.B.L.

Ou encore "Interactive Boundary Layers" et même "Couches limites interactives"...

4.1 Le modèle de fluide parfait

Le modèle de fluide parfait nous permet d'utiliser la conservation du debit qui donne (avec le même adimensionnement que le RNSP):

$$u_{fp} = \frac{1}{h(x)}. \tag{7}$$

Mais en considérant que le fluide proche de la paroi ne bouge pas on peut corriger cette expression. Par définition, l'épaisseur de déplacement correspond à l'épaisseur de fluide non déplacé, en conséquence si on connaît la vitesse et δ_1 en un x_0 donné (ce qui est le cas à l'entrée du tuyau), la conservation du débit s'écrit (Ici en 2D plan, pour la glotte) :

$$u_{fp}(x)(h(x) - \delta_1(x)) = u_{fp}(x_0)(h(x_0) - \delta_1(x_0)) = 1 \tag{8}$$

δ_1 et $h(x)$ étant imposés $u_{fp}(x)$ connu, il suffit de résoudre la couche limite, et pour simplifier on le fera au moyen des équations intégrales.

4.2 Les équations intégrales

Le modèle IBL utilise un dérivé des modèles de couches limites. Celui-ci consiste à résoudre numériquement l'équation de Von Kármán (Schlichting [4]):

$$\frac{d}{dx}(\frac{\delta_1}{H}) + \frac{\delta_1}{u_e}(1 + \frac{2}{H})\frac{du_e}{dx} - \frac{f_2 H}{u_e \delta_1} = 0 \tag{9}$$

dans laquelle δ_1 est l'épaisseur de déplacement, H et f_2 sont deux facteurs de forme définis à partir de δ_1 et δ_2, l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\delta_1 = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_0})dy$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_0}(1 - \frac{u}{U_0})dy$$

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

$$f_2 = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{u_e}\delta_2$$

où U_0 est l'ordre de grandeur de la vitesse. Il est montré [5] que H (et donc f_2) s'exprime de manière relativement simple en utilisant l'approximation

suivante: on considére localement le profil comme un profil de Falkner-Skan et on résout par intégration directe (Runge-Kutta 4), on définit $\Lambda_1 = \delta_1^2 \frac{du_e}{dx}$ et,

$$Si \Lambda_1 < 0.6, H = 2.5905 e^{-0.37098 \Lambda_1}$$

$$Si \Lambda_1 > 0.6, H = 0.20735$$

$$f_2 = 1.05(\frac{-1}{H} + \frac{4}{H^2}).$$

La démarche classique consisterait à calculer δ_1 connaissant la vitesse de fluide parfait sous sa forme la plus simple (7) ou sous sa forme corrigée (8). Mais malheureusement, avec cette méthode on ne peut calculer la séparation de la couche limite : il faut la calculer en mode inverse. On se donne $\delta_1(x)$ et on cherche la vitesse associée. En injectant u_{cl} (noté u_e dans (9)) dans l'équation de Von Kármán puis, en utilisant l'algorithme de Newton, en le modifiant jusqu'à ca que l'erreur par rapport au δ_1 imposé soit acceptable (soit ici une erreur de 10^{-6}).

4.3 Le couplage semi-inverse

Il suffit ensuite de prendre la différence entre u_{cl} et u_{fp} qui correspond à l'erreur d'un modèle par rapport à l'autre. On corrige le précédent δ_1 grâce à cette erreur et cette correction est ensuite imposée aux deux modèles de calculs. L'opération est réitérée tant que la différence entre les deux vitesses en sortie est importante (ici tant que $|u_{cl} - u_{fp}| > 10^{-6}$). On corrige δ_1 à chaque itération, comme suit [6]:

$$\delta_1^n = \delta_1^{n-1} + \lambda(u_{cl} - u_{fp})$$

λ est ici un coefficient arbitraire qui permet un compromis entre rapidité de calcul et précision du résultat. On rapellera que l'on travaille avec des grandeurs adimensionnées aux préalable.
Finalement le modèle IBL peut se résumer grâce au diagramme de la figure 2.

On va encore simplifier.

5 La forme simplifiée

On va utiliser la relation de Bernoulli (relation (13) entre l'entrée et le sommet de la glotte pour trouver la pression en fonction de la vitesse, la conservation du débit corrigée de δ_1 (relation (8)) nous permet d'avoir donc P, la pression.

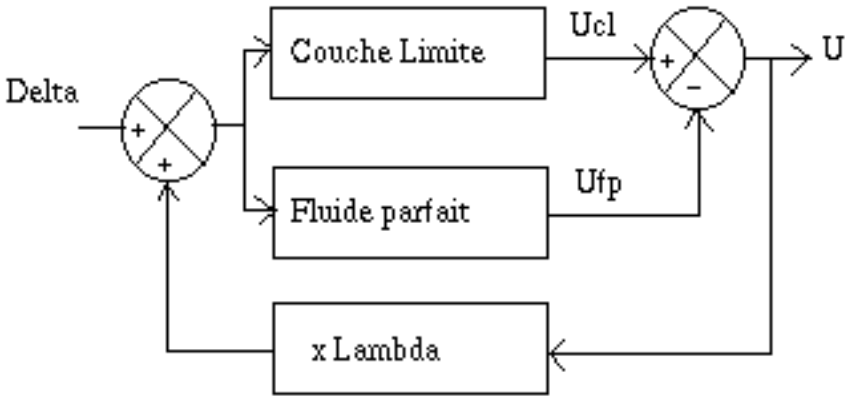

Figure 2: Schéma Bloc du modèle IBL

5.1 δ_1 au col

Avant tout donc, il est nécessaire de trouver une expression simple de δ_1 (bien entendu sans dimensions, c'est àdire mesuré avec H_0) en $x = x_c$, la résolution du développement de la couche limite classique conduisent à l'expression (10) où $K_\delta = 1$. En effet, Blasius nous donne l'ordre de grandeur (avec notre adimensionnement)

$$\delta_1 \simeq \frac{l}{\sqrt{Ul\,Re}}$$

or ici $l = \frac{w_d}{2}$ la distance parcourue (mesurée par H_0) et d'après la relation (8), $U = \frac{1}{R} = \frac{1}{1-\alpha}$. On arrive donc à:

$$\delta_1(x_c) = K_\delta \sqrt{\frac{w_d}{2Re}} \sqrt{1-\alpha}. \tag{10}$$

Il est à noter que K_δ est une constante, théoriquement de l'ordre de 1, cependant on la précisera par la suite. On rapelle que w_d est la largeur de la bosse et donc $\frac{w_d}{2}$ represente la distance parcourue, c'est à dire x dans la solution de Blasius.

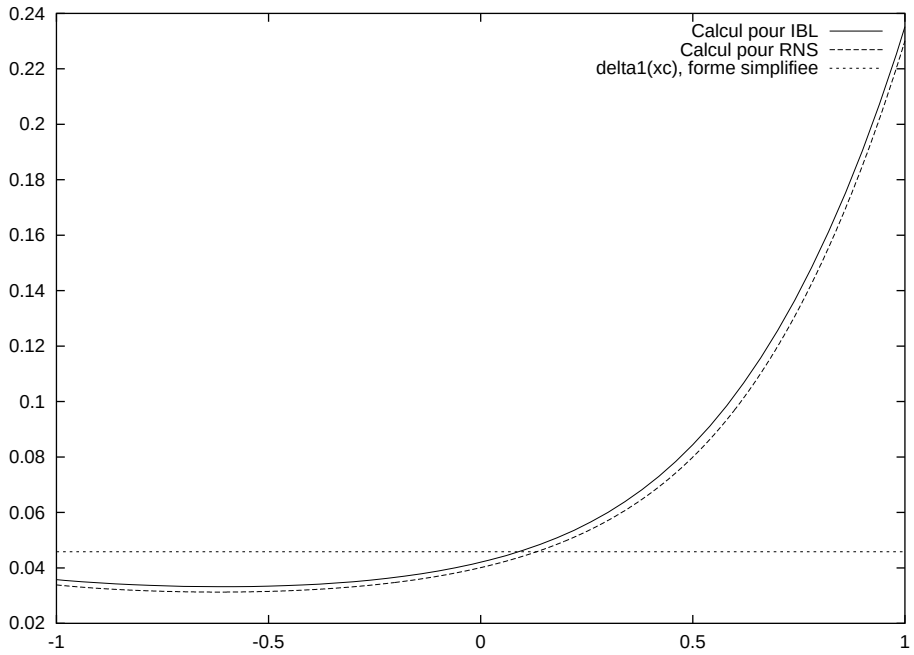

Figure 3: courbe de δ_1 près du col. Le sommet de la glotte est en $x = 0$

La figure 3 montre bien le point ou la courbe de δ_1 passe en $x = x_c$ (Ici $x_c = 0$ pour des raisons de clarté). On constate que l'approximation est très correcte et que l'erreur commise par rapport au calcul numérique reste négligeable. On utilisera donc cette expression de δ_1 dans la suite.

5.2 Un autre δ_1 au col

Une toute autre approche permet de trouver une toute autre formule pour δ_1, nous noterons cette autre épaisseur de déplacement δ_1'.

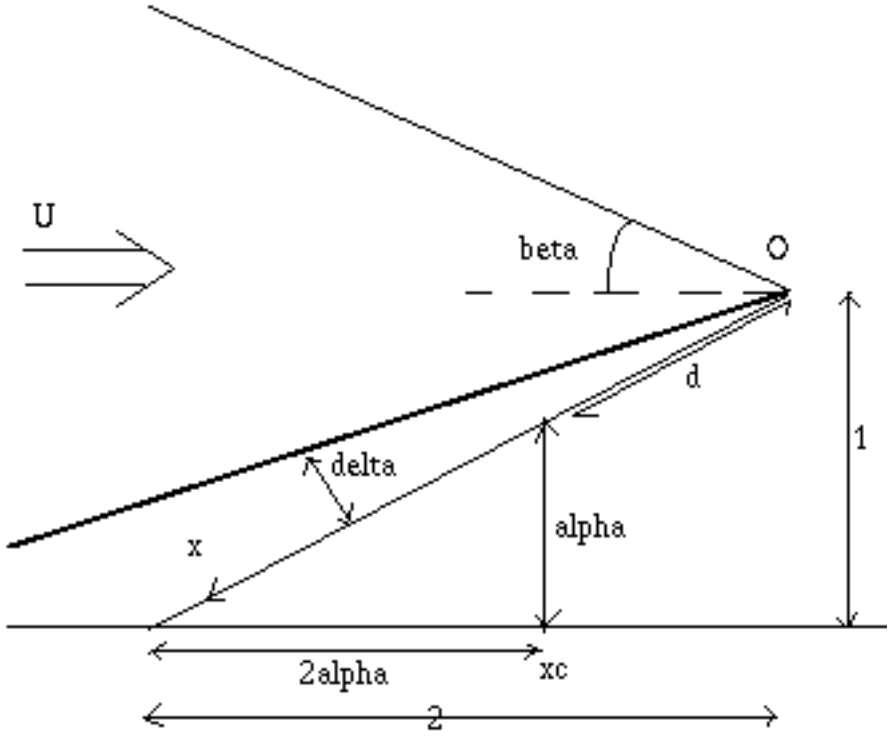

Figure 4: Le convergent simple pour modéliser δ_1'

En considérant un convergent simple, celui de la figure 4 on a (Schlichting [4]):

$$\delta_1'^* = \frac{0.779\xi^*}{\sqrt{\frac{Q^*}{\nu 2\beta}}}$$

Or ici, $Q^* = 2H_0U_0 = 2$, ξ^* est celui représenté sur la figure 4, c'est la distance du point courant au sommet du convergent avec le même adimensionnement que précédemment, toujours $Re = \frac{U_0H_0}{\nu}$, $\beta = arctan(\frac{1}{2}) = 0.46$ car la bosse a une largeur $w_d = 4\alpha$ et une hauteur α (toujours adimensionnées, les longueurs sont toujours mesurées avec H_0). A partir de là, on arrive à:

$$\delta_1' = \frac{0.779\sqrt{0.46}\xi}{\sqrt{Re}}$$

Choisir des α différents revient à tronquer le convergent et donc de se placer en $x = d$ (sur la figure 4) or, d'après Pythagore, on a $d = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2 - \frac{w_d}{2})^2} =$

$\sqrt{5}(1-\alpha)$, d'où

$$\delta_1' = \sqrt{arctan(\frac{\alpha}{\frac{w_d}{2}})}\frac{0.779\sqrt{(1-\alpha)^2+(2-\frac{w_d}{2})^2}}{\sqrt{Re}} \tag{11}$$

Soit ici (on gardera cette forme pour la suite) en considérant que $\frac{w_d}{2} = 2\alpha$,

$$\delta_1' = \frac{0.779\sqrt{0.46}(1-\alpha)\sqrt{5}}{\sqrt{Re}} \tag{12}$$

De la même manière que la figure 3 montre δ_1 au col ainsi que le résultat de la forme simplifiée, la figure 5 montre δ_1 au col avec δ_1' simplifié.

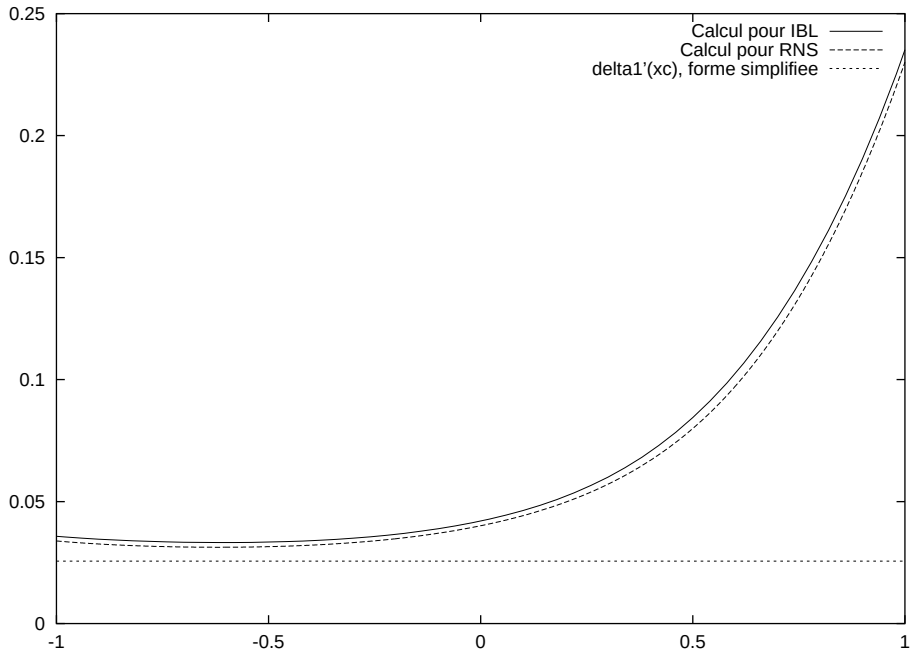

Figure 5: courbe de δ_1' près du col. Le sommet de la glotte est en $x = 0$

5.3 P(entree) - P(col)

Il est intéressant de trouver une formulation très simple de l'écart de pression entre l'entrée et la glotte pour pouvoir comparer avec les autres modèles. Si on cherche à exprimer δ_1, on peut le remplacer dans l'équation (8) pour ensuite grâce à l'équation de Bernoulli (équation (13)) avoir une formule de $\Delta P = P(entree) - P(col) = P(x=0) - P(x_c)$.

$$\frac{U(x)^2}{2} + \frac{P(x)}{\rho} = Constante. \tag{13}$$

ce qui implique

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}(U_{col}^2 - U_0^2)$$

or l'équation (8) donne

$$U_{col}^2 = (\frac{U_0 H_0}{R_c - \delta_1(x_c)})^2$$

d'où

$$\Delta P = \frac{\rho U_0^2}{2}((\frac{H_0}{R_c - \delta_1(x_c)})^2 - 1)$$

mais en considérant le problème adimensionné, et en se rappelant de la définition de α et $R_c = 1 - \alpha$, il ne reste plusqu'à choisir une des deux approximations de $\delta_1(x_c)$ et on obtient la formule finale:

$$\Delta P = \frac{1}{2}((\frac{1}{1 - \alpha - \delta_1(x_c)})^2 - 1) \tag{14}$$

6 Résultats

Les courbes de pression ont toutes les mêmes allures quelques soient les modèles utilisés, on retrouve cette forme type sur la figure 6 où les notations sont redéfinies. Pour des raisons de clarté, tous les repères en x ont été adimensionnés et translatés pour avoir le sommet de la glotte en $x = 0$.

$$P(col) = P(x_c) = P_g$$

c'est la pression qui est mesurée au capteur.

$$P(entree) = P_t$$

il s'agit quasiment du maximum.

$$P(sortie) = P_0$$

c'est une pression aisément accessible.

6.1 L'épaisseur de déplacement δ_1

En cherchant à interpoler la courbe de la relation (14) incluant le δ_1 issu de la relation (10) avec les points du calculs NS, on trouve la première interpolation de la figure 7.

$$K_\delta = 0.2$$

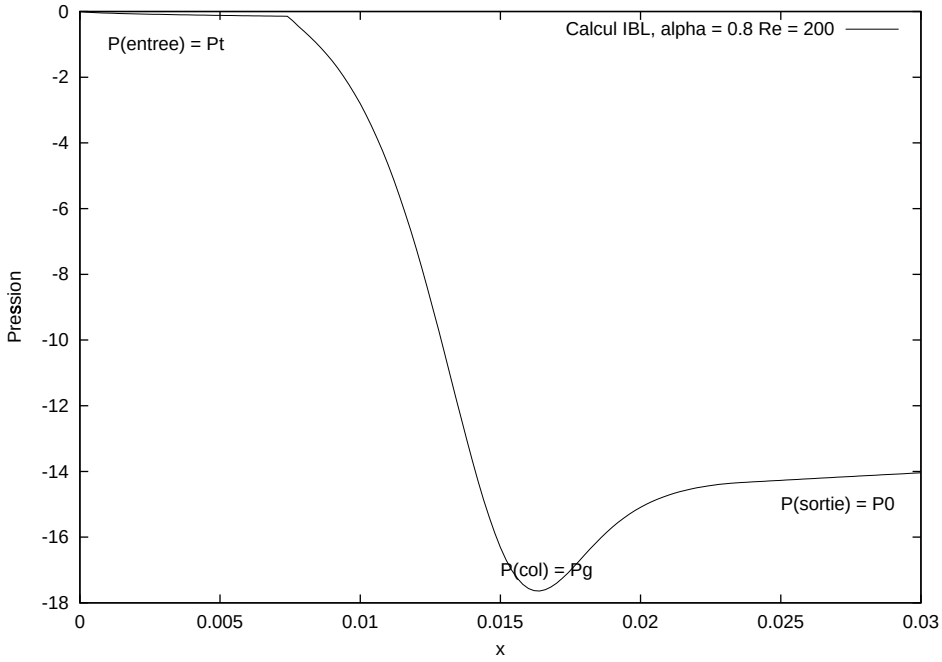

Figure 6: Forme caractéristique de la pression

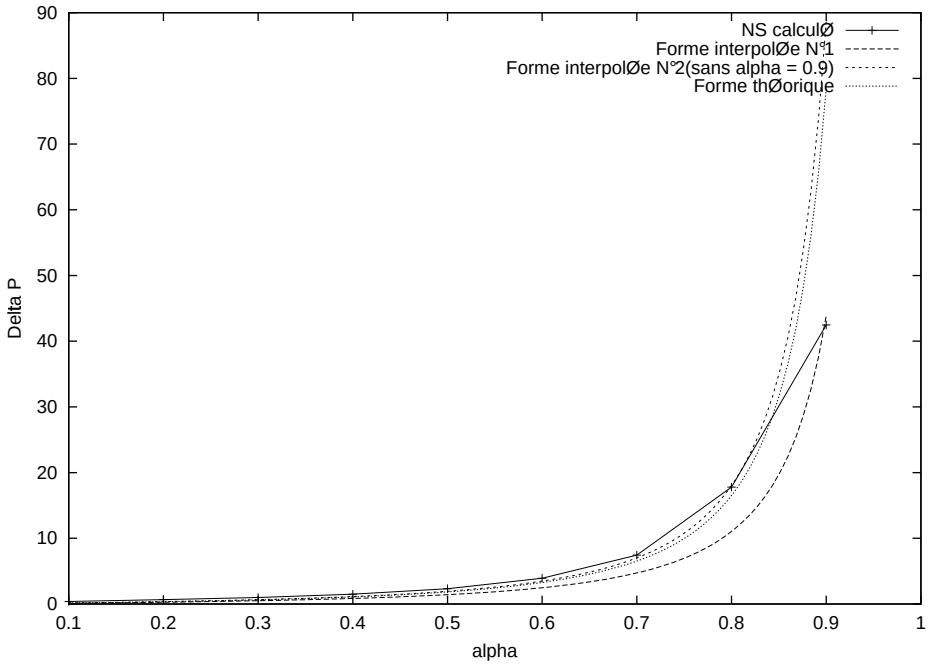

Figure 7: Recherche du coefficient K_δ pour NS

Le graphique de la figure 7 montre également un second type d'interpolation; sans le point où $\alpha = 0.9$, on retombe sur la courbe avec

$$K_\delta = 1.002$$

On peut effectuer le même travail dans d'autres modèles comme IBL où le point $\alpha = 0.9$ semble plus crédible (comme l'illustre la figure 14). On a donc la figure 8 qui donne un (si on prend le point $\alpha = 0.9$)

$$K_\delta = 0.705$$

et (si on ne prend pas le point $\alpha = 0.9$)

$$K_\delta = 0.865$$

pour les interpolations respectivement N1 et N2. Cette dernière courbe est donc extrèmement importante car elle recoupe parfaitement la relation (10) trouvée auparavant. Le coefficient est bien d'ordre 1, ce qui amène à penser que le point $\alpha = 0.9$ du calcul NS est peu crédible.

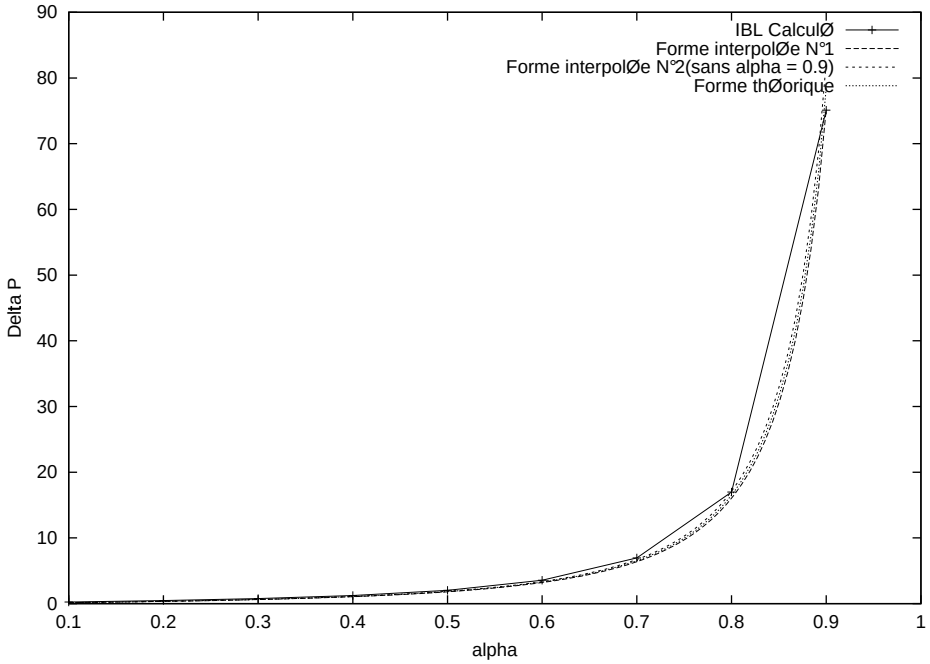

Figure 8: Recherche du coefficient K_δ pour IBL

6.2 L'épaisseur de déplacement δ_1'

Nous allons ici injecter la forme δ_1' dans l'expression de ΔP précédente (relation (14)) et comparer cette nouvelle courbe aux points résultats du calcul.

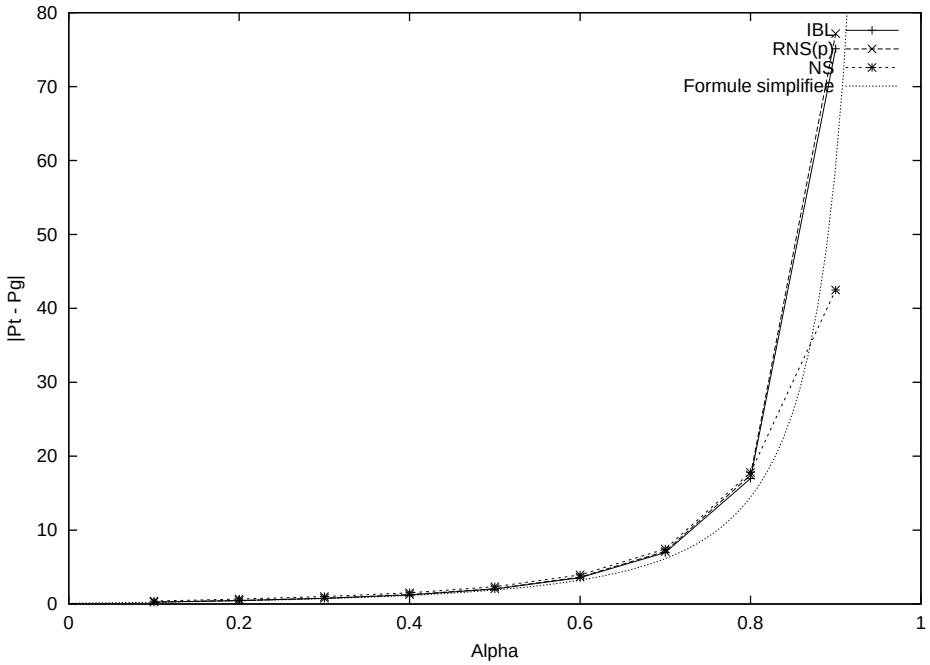

Figure 9: Confrontation de δ_1' avec les points du calculs.

On constate donc que la courbe théorique passe plus près des points pour les grands α et que donc le point $\alpha = 0.9$ du modèle NS n'est peut être pas si mauvais. Si cette forme de ΔP passe en moyenne plus loin des points, son écart maximal est bien plus faible (que pour le δ_1 de la relation (10)) Il est également possible de d'interpoler les point expérimentaux en changeant un coefficient. Si on remplace le 0.46 par un K_δ', c'est à dire, $\delta_1' = \frac{0.779\sqrt{K_\delta'}(1-\alpha)\sqrt{5}}{\sqrt{Re}}$. On obtient alors la figure 10 qui nous donne (pour $0.1 <= \alpha <= 0.9$)

$$K_\delta' = 2.234$$

ou bien (pour $0.1 <= \alpha <= 0.8$)

$$K_\delta' = 1.456$$

Mais on voit surtout que la variation de ce coefficient n'a que très peu d'influence sur la forme de la courbe elle-même. Ainsi, nous pouvons garder au final (pour $\alpha <= 0.9$):

$$K_\delta = 1.0$$

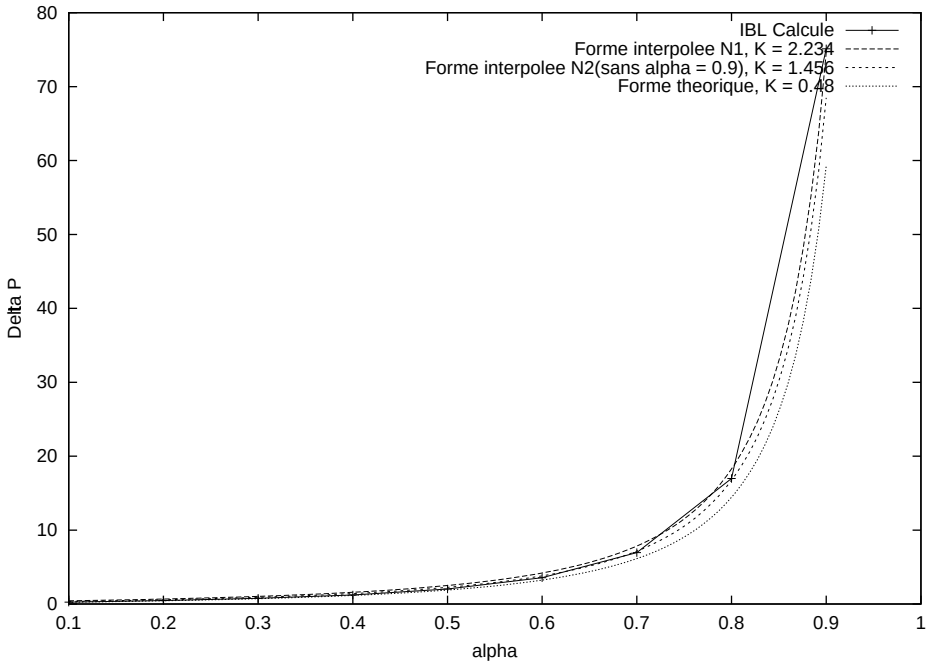

Figure 10: Recherche de K'_δ pour δ'_1

et

$$K'_\delta = 0.46$$

6.3 Le grand ΔP

On notera que le minimum de P n'est pas atteint en $x = x_c$, généralement il se trouve un peu après mais les mesures de pressions effectuées sont au sommet du col; c'est pour cela qu'il existe aussi P_{min}, minimum réel de la pression qui apparaît. ΔP se trouve donc affublé de deux définitions mais la différence est négligeable (devant ΔP lui même). On peut tout d'abord comparer les résultats des calculs avec les deux formules pour différents Reynolds, ce qui donne la figure 11. Pour des raisons de commodités, on notera dans la suite N1 pour les formules correspondant à δ_1 et N2 celles correspondant à δ'_1. Ces calculs ont été effectués sur des paraboles pour le calcul IBL et des cercles pour le calcul NS. On remarque que la géométrie exacte de la bosse influe peu sur ΔP et que la forme simplifiée reste une bonne approximation quelque soit cette géométrie.
Par contre, la forme de la pression dépend complètement de la forme de la glotte. La figure 12 le montre de manière assez claire.
Il est de même intéressant de tracer ΔP en fonction de Reynolds pour différentes géométrie de bosses. La figure 13 montre les deux formes approximées de ΔP pour différents α en fonction de Reynolds ainsi que les

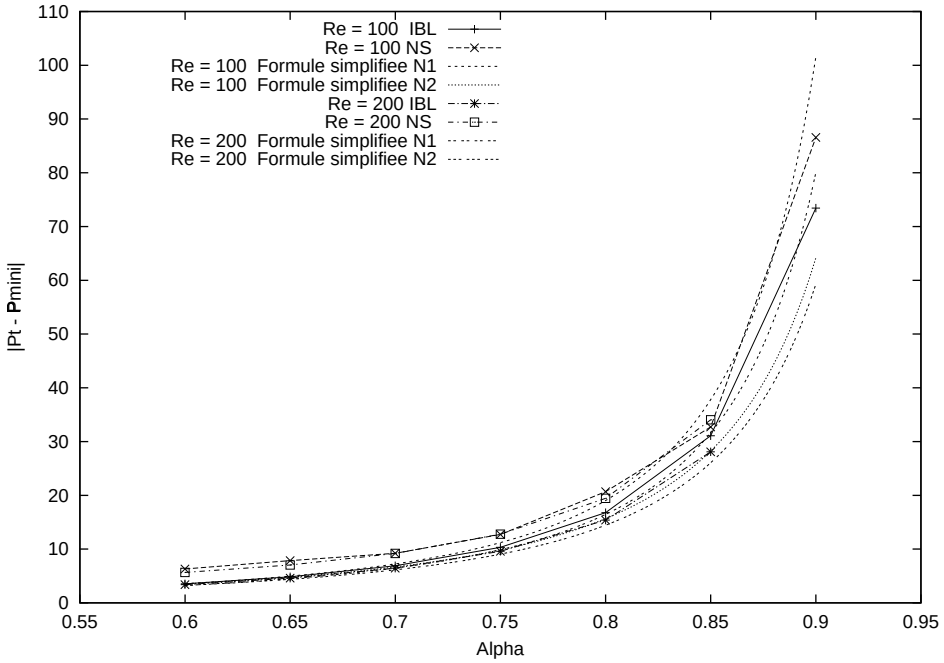

Figure 11: Comparaisons de 2 modèles pour diffŕents Reynolds

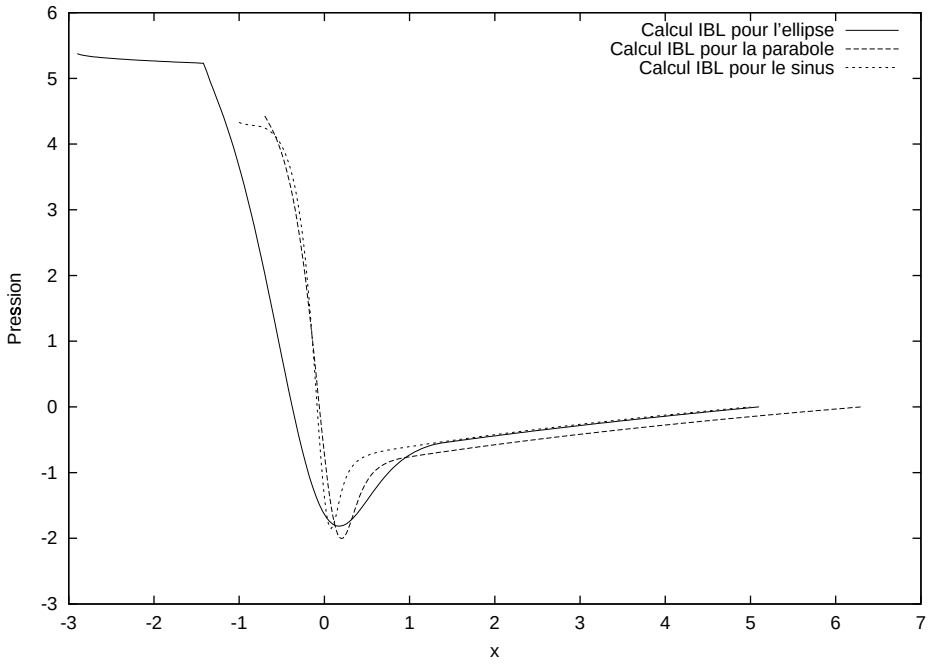

Figure 12: Influence de la géométrie sur la pression

résultats correspondant des calculs. Le terme "exponentielle" de la figure désigne une géométrie en $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ceci montre bien que la forme de la bosse n'a pas d'incidence sur la variation de la pression.

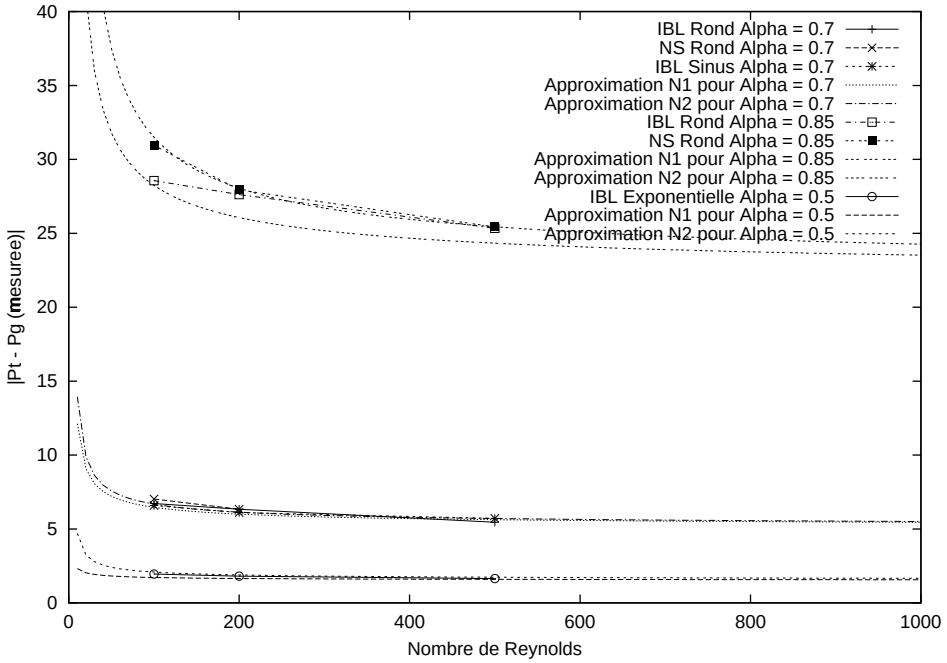

Figure 13: ΔP fonction de Reynolds

En effectuant les calculs pour les trois modèles numériques, sur la même géométrie de bosse, à savoir une ellipse comme sur la figure 1, de largeur $4\alpha H_0$ et de hauteur αH_0 (en dimensions réelles), on peut superposer les courbes de $\Delta P = f(\alpha)$, résultats, avec les formules trouvées ci-dessus. On obtient la figure 14. De plus, en adimensionnant la pression par le ΔP trouvé pour chaque cas (calculé avec la relation (14), on obtient la même courbe pour tous les α (sur la bosse modélisée par une ellipse, nous avons déjà vu que la géométrie avait sa propre influence sur la pression), c'est ce qu'illustrent les figures 15 et 16. On peut même regarder le problème de plus près en ne traçant que les différentes courbes par modèles. Les figures, respectivement 17, 19 et 21 montrent la pression adimensionnée grâce à N1 pour les trois modèles, respectivement, IBL, RNSP et NS. De même les figures 18, 20 et 22 montrent la pression adimensionnée pour les même modèles, respectivement. Quelques courbes correspondant à quelques α irrespectueux des lois ont été retirés. Ces points correspondent aux α petits (c'est à dire, de manière générale, $\alpha < 0.3$). En effet, si le rétrécissement est faible, on peut voir le problème comme un écoulement entre deux plaques planes avec une légère déformation qui entraîne une perturbation toute aussi légère.

On constatera tout de même que l'ensemble des courbes ici présentées nous permet de préférer δ_1 à δ_1' pour évaluer l'épaisseur de déplacment et l'utiliser dans les autres expressions telle que l'expression (14), l'expression de ΔP.

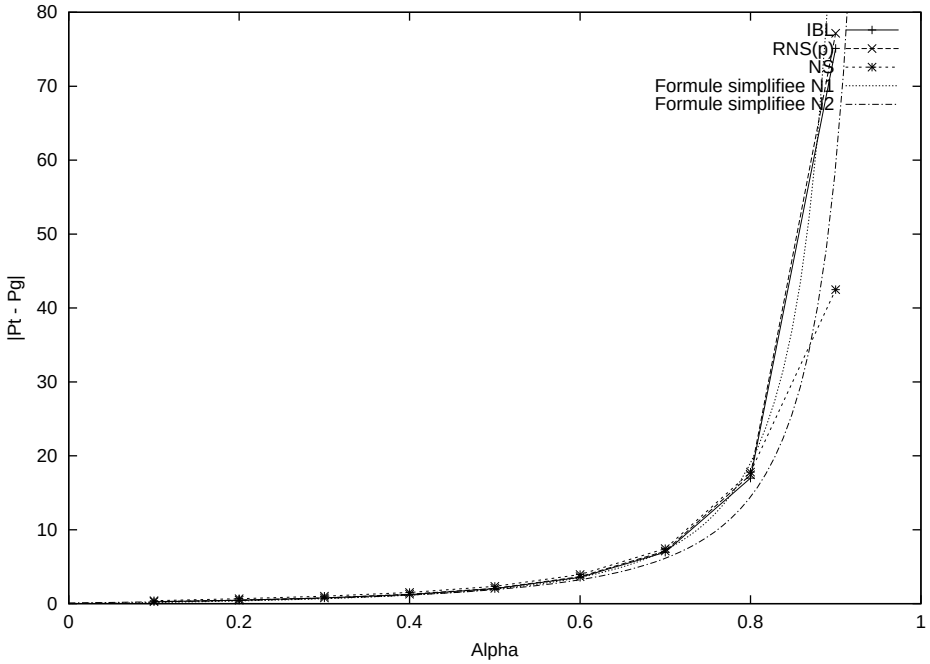

Figure 14: Comparaisons des trois modèles et des deux formules (sur la même géométrie

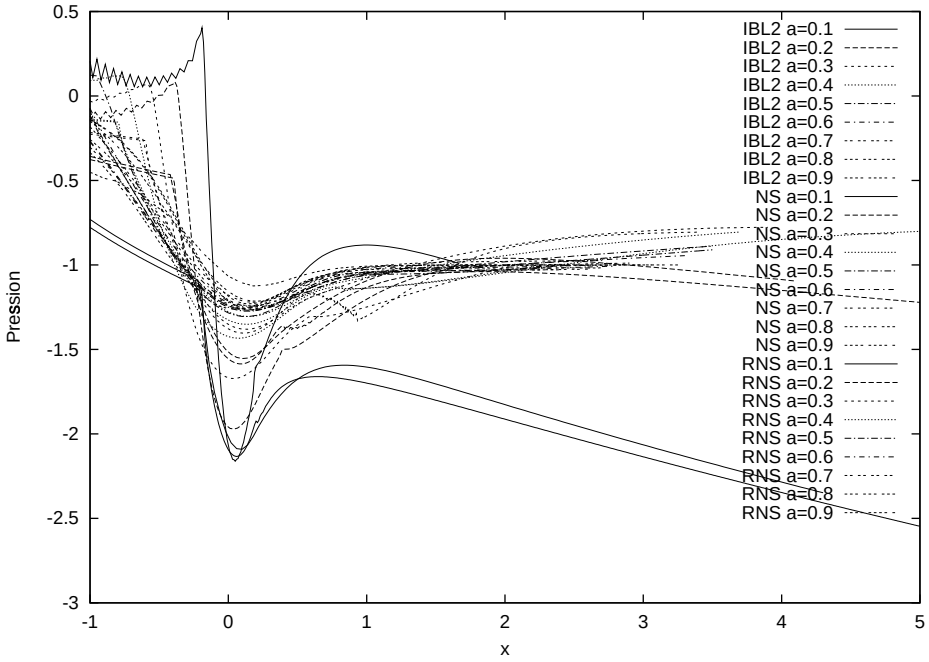

Figure 15: La pression adimensionnée par N1 a toujours la même forme

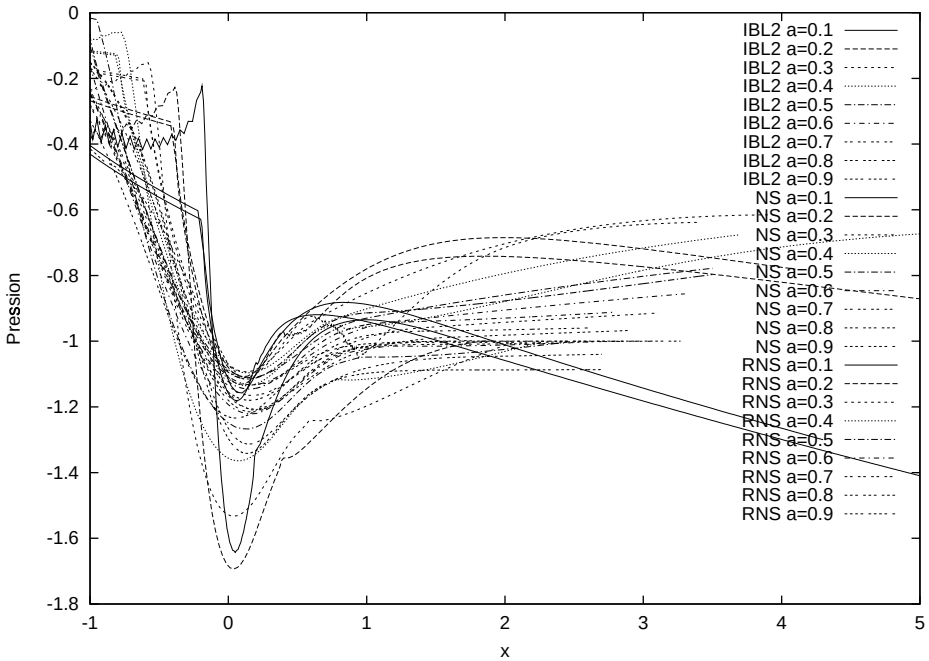

Figure 16: La pression adimensionnée par N2 a toujours la même forme

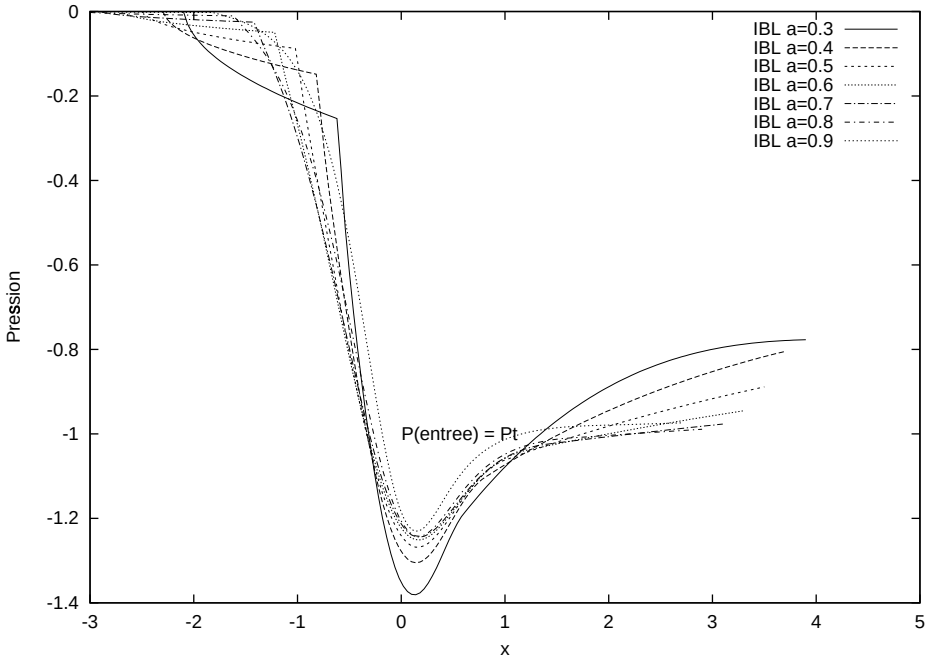

Figure 17: La pression a toujours la même forme en IBL, forme N1

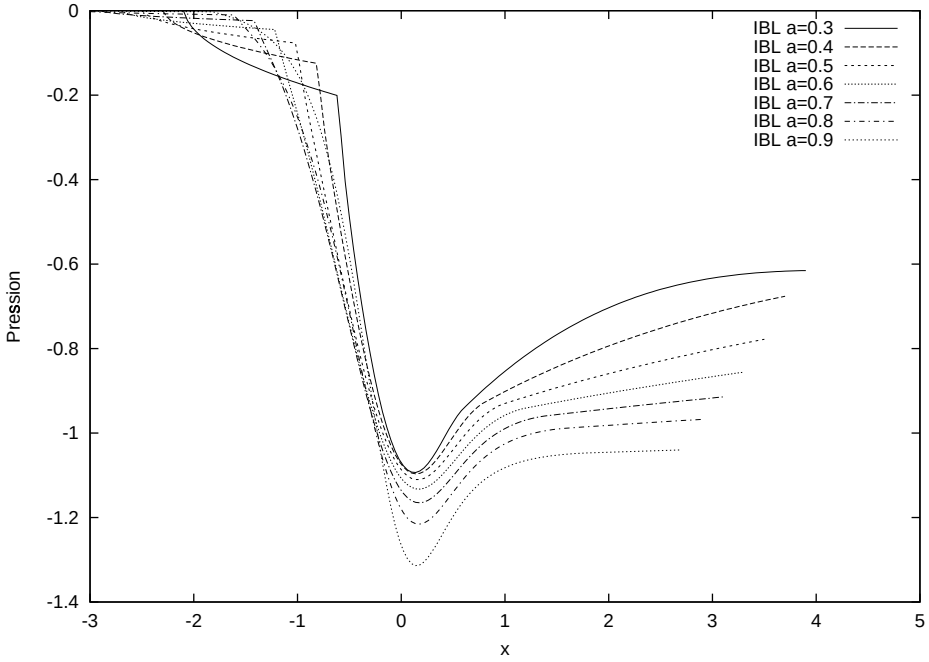

Figure 18: La pression a toujours la même forme en IBL, forme N2

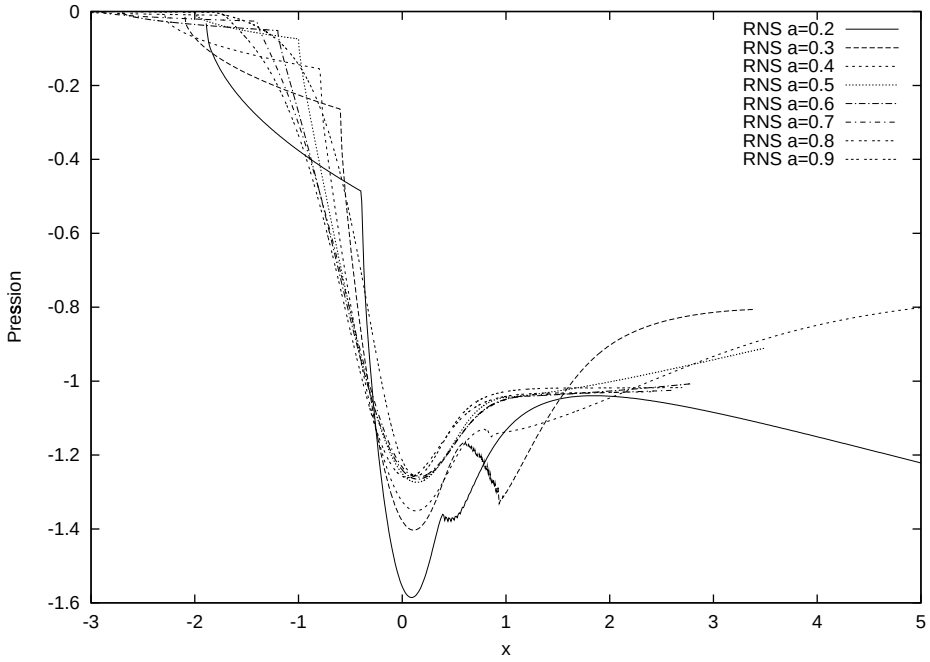

Figure 19: La pression a toujours la même forme en RNS, forme N1

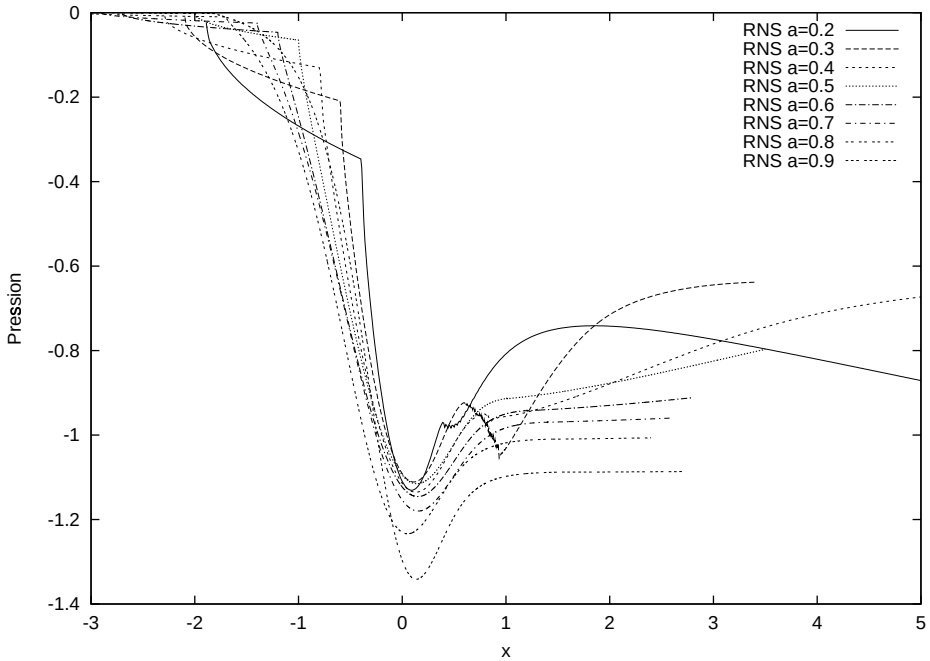

Figure 20: La pression a toujours la même forme en RNS, forme N2

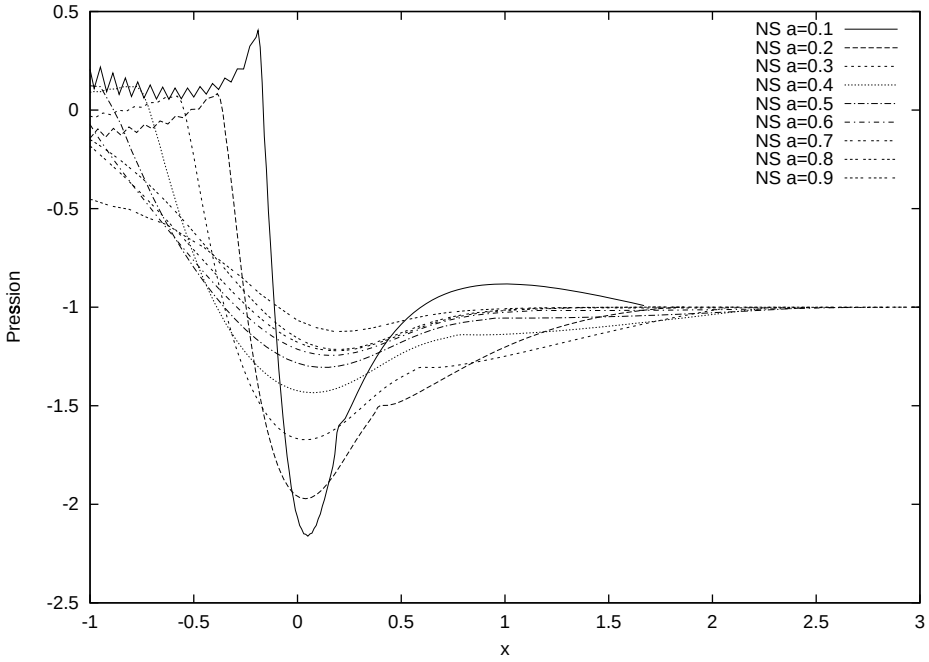

Figure 21: La pression a toujours la même forme en NS, forme N1

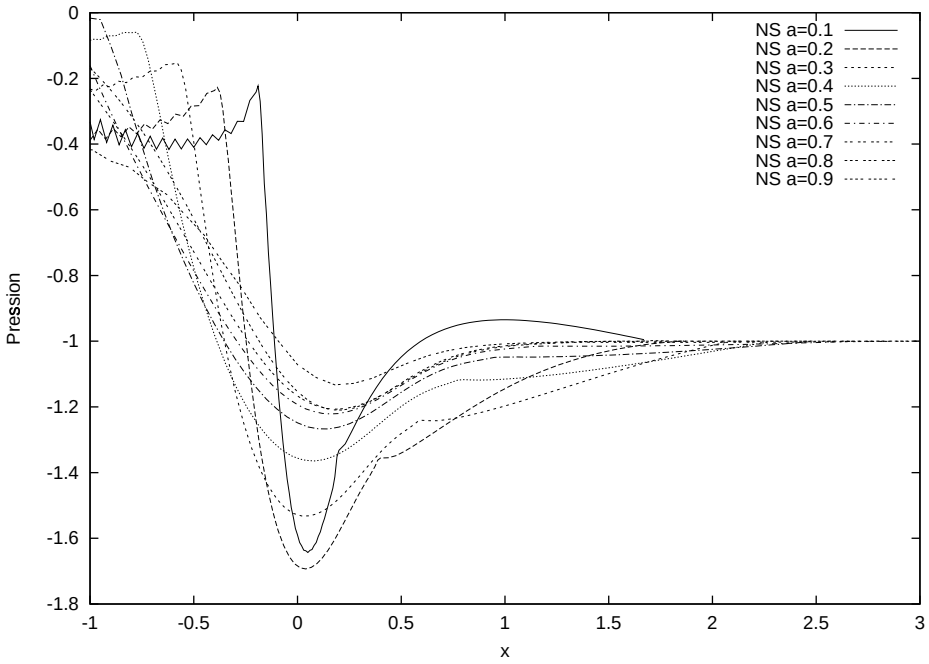

Figure 22: La pression a toujours la même forme en NS, forme N2

6.4 Le petit $\Delta P'$

De même on cherche à obtenir une expression de la différence de pression entre la sortie et le sommet du col. On notera $\Delta P' = P(sortie) - P(col)$ tout en sachant que P(sortie), notée P_0 correspond dans le cas de la glotte à la pression atmosphérique. On constate que la relation (14) est encore valable à un coefficient $\frac{1}{5}$ près. En effet, on remarque sur toute les courbe précédentes que

$$\Delta P' = \frac{\Delta P}{5}$$

ce qui amène à:

$$\Delta P' = \frac{1}{10}((\frac{1}{1-\alpha-\delta_1(x_c)})^2 - 1) \tag{15}$$

Cependant, même si la courde de la figure 23 est assez explicite quant à la validité de la relation (15): on peut voir des écart à la courbe très très faible, on constate que ce $\Delta P'$ est plus difficile à évaluer de manière théorique mais aussi de manière pratique car il dépend fortement de la longueur de tuyau restant après la glotte et de plus sa définition est parfois floue sur certaines courbes calculées.

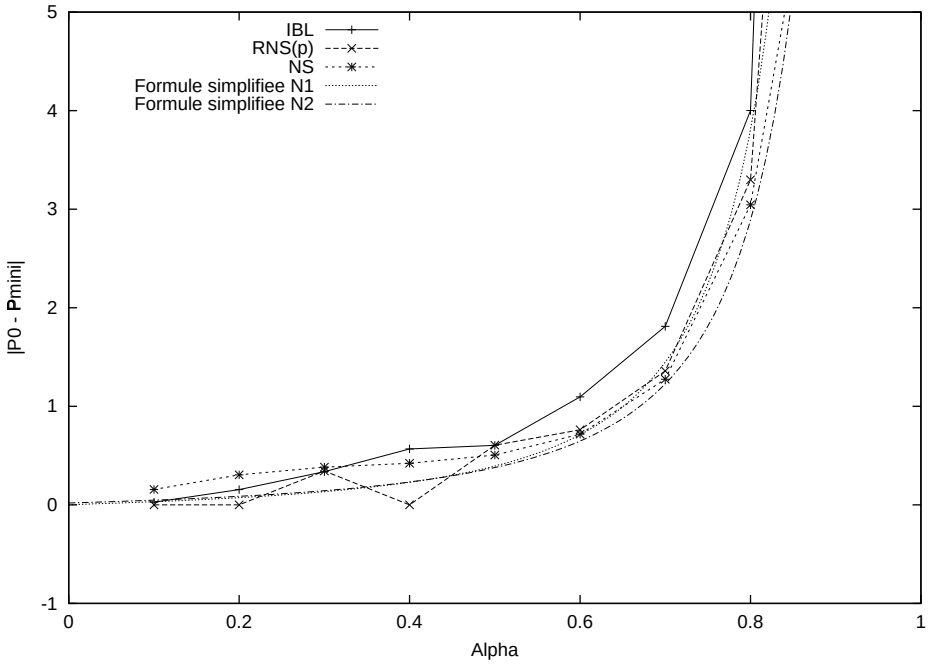

Figure 23: Evaluation de $\Delta P'$, comparaison avec deux formes théorique.

Bibliography

[1] H.Paillère et F.Dabbene: "Initiation à la simulation numérique en mécanique des fluides à l'aide de Castem 2000. Recueil d'exemples commentés", cours ENSTA MF307.

[2] K.Goorman: "Steady and unsteady channel flow, numerical models with applications to the recorder flute and vocal folds modelling", August 15, 2000.

[3] X.Pelorson, A.Hirschberg, R.R. van Kassel and A.P.J.Wijnands (1994): "Flow separation within the glottis", Journal "Acoustical Society of America", Vol.96, No.6, December 1994.

[4] H.Schlichting (1987): "Boundary Layer Theory", 7th edition Mc Graw Hill.

[5] S.Lorthois, P.-Y.Lagrée, F.Cassot et J.-P.Marc-Vergnes: "Maximal wall shear stress in arterial stenoses: applications to the internal carotid arteries", Journal of biomechanic engineering, December 2000, Vol.122.

[6] J.C.Le Balleur, "Couplage visqueux non-visqueux : Mthode numrique et applications aux coulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques", La recherche Arospatiale, 1978-2 (1978) 67-76, Eng Trans ESA TT-496.

[7] S.Lorthois et P.-Y.Lagrée: "Ecoulement dans un convergent axisymétrique, calcul de la contrainte de cisaillement pariétale maximale", Académie de sciences/Edition scintifiques et médicales, Elsevier SAS.

[8] J.Cousteix et T.Cebeci: "Modelling and computation of boundary layer flows", Horizons publishing, Springer.