Résolution des équations de Navier-Stokes dans une sténose

Antoine GLORIA et Thomas GRUGET

25 mars 2002

Abstract

As a matter of fact fluid mechanics can be very useful to medecine. Indeed the blood flow strongly depends on the geometry of the vessels and therefore only a serious study of that phenomenon could bring answers to some questions on which doctors focus : the dangerous fall of pressure and the increase of bloodspeed.

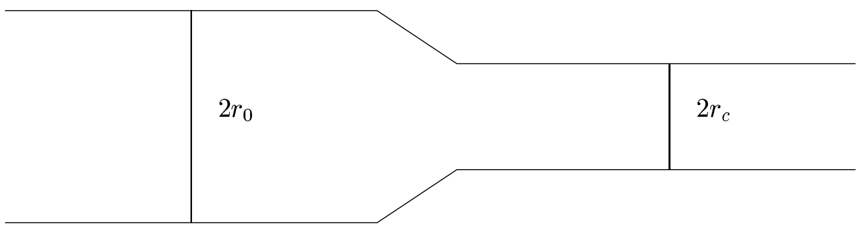
In this study one tries to build a model of stenosis and find a simple relation between this fall of pressure and the different parameters of the stenotic flow.

First one presents the model of Navier-Stokes equations which rule that kind of flow, developing a simple theory that links the different parameters. Those equations established, the existence and the unicity of solutions are discussed. Then numerical experiences with CASTEM2000 are planned to show the part of each parameter in the flow. Finally results are analysed and compared to physical experiences lead in "real vessels".

Introduction

Il s'agit d'étudier l'écoulement du sang dans une petite artère sténosée. On veut connaître la relation entre le débit, la chute de pression et le degré de sténose de l'artère. On veut vérifier si la chute de pression correspond à une formule simplifiée.

Notre étude s'articule comme suit. Tout d'abord nous présentons les aspects mécaniques du sujet, à savoir les équations de Navier-Stokes incompressibles et les approximations qui mènent à un modèle simplifié. Dans un deuxième temps, nous en présentons l'analyse mathémathique et nous abordons brièvement la convergence d'un algorithme de résolution de ces équations par éléments finis, assorti d'une étude pratique sur cas. Enfin, nous discuterons nos résultats "expérimentaux" au regard d'expériences faites en laboratoire avec des données similaires.



Sténose

1 Modélisation mécanique

1.1 Les hypothèses

Dans les vaisseaux sanguins, en première approximation, le sang se comporte comme de l'eau.

Nous supposerons que ce fluide est newtonien, c'est-à-dire que le fluide est isotrope et que le tenseur des contraintes est linéaire en ∇u et obéit au principe d'objectivité.

Nous considérons le sang incompressible et homogène dans les conditions de l'expérience.

1.2 Les équations de Navier-Stokes

Notre cadre d'étude est le régime permanent [1].

Dans les conditions exposées ci-dessus, les lois fondamentales du fluide prennent la forme des équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\begin{cases} \text{continuité} & \operatorname{div} u = 0 \\ \text{dynamique} & \nu \Delta u \,+\, \sum_{i=1}^{2} u_i \, \mathrm{D}_i u = f \,-\, \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \text{énergie} & \\ \text{équation d'état} & \end{cases}$$

Dans ces équations, u représente la vitesse du fluide (dans $\mathbb{R}^2$), ν la viscosité cinématique, f les forces volumiques, p la pression et ρ la masse volumique.

Les équations de l'énergie interne et d'état n'interviennent pas dans la détermination du champ de vitesse et de pression, c'est pourquoi nous ne les détaillons pas.

1.3 Le cas d'école : l'écoulement de Poiseuille

Dans cette section, nous décrivons un cas d'école très utile : l'écoulement de Poiseuille. Il est utile à deux titres : c'est d'abord un cas limite de notre étude (artère non sténosée) et c'est aussi un cas "complètement intégrable".

Il s'agit de l'écoulement d'un fluide newtonien dans un tuyau cylindrique, avec des conditions d'adhérence à la paroi.

Cet écoulement est axisymétrique, comme toutes les configurations que nous étudierons. Notre tube est de section a, nous recherchons un profil de vitesse qui ne dépend que de la coordonnée radiale r.

En polaire, l'équation de la dynamique s'écrit :

$$\frac{\mu}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}} \left(r \, \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dr}} \right) \;=\; \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \,,$$

avec la condition d'adhérence $u(a) \,=\, 0$.

La solution générale s'écrit $u(r) \,=\, \frac{1}{4\mu} \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dr}} r^2 \,+\, A \log(r) \,+\, B$. A est nécéssairement nulle (la vitesse est finie sur l'áxe). B est définie par la condition aux limites. Le profil des vitesses est alors parabolique :

$$u(r) \;=\; -\, \frac{1}{4\mu} \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}} \left(a^2 \,-\, r^2\right)$$

On peut aussi exprimer le débit massique :

$$\dot{m} \;=\; \rho \int_0^a 2\pi \, r \, u(r) \, \mathrm{d}r \;=\; -\, \frac{\rho \, \pi \, a^4}{8\mu} \, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad ,$$

relation dite de Poiseuille.

Cette relation sert de point de départ pour relier le débit massique au nombre de Reynolds, défini par : $Re = \frac{Ud}{\nu}$ où d est le diamètre du tube, U la vitesse moyenne du fluide dans une section et ν la viscosité cinématique. En appelant q le débit massique, on obtient la relation suivante (qui nous sera très utile dans la section 5) :

$$Re = \frac{8}{3\pi} \frac{q}{\mu r}.$$

1.4 Vers une formulation simplifiée

Supposons notre fluide parfait (ou nombre de Reynolds infini). L'écoulement est permanent, les forces de volume conservatives : ce sont les hypothèses du théorème de Bernoulli.

$$H = h + \frac{U^2}{2} + \phi = \text{constante le long d'une ligne de courant}$$

Dans notre cas particulier, les forces de volume sont nulles donc $\phi = 0$ (ϕ est le potentiel de la force f). De plus l'incompressibilité implique $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = 0$, l'énergie interne e est donc conservée le long des lignes de courant. Compte tenu de la définition de l'enthalpie $h = e + \frac{p}{\rho}$, on obtient une formule simple :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{constante}$$

ou encore

$$p_c - p_0 = -\rho \frac{u_c^2 - u_0^2}{2}.$$

A partir de là, nous pouvons estimer la chute de pression en fonction du degré de sténose. Supposons qu'a la sortie de la sténose (loin), on retrouve un profil de Poiseuille. La conservation du flux donne :

$$\frac{2}{3}\pi r_c^2 u_c = \frac{2}{3}\pi r_0^2 u_0$$

On définit le degré de sténose par :

$$\alpha = \frac{r_c}{r_0}.$$

Injectons alors l'équation de conservation du flux dans notre formule de chute de pression. On obtient :

$$p_c - p_0 = \rho \frac{1 - \alpha^{-4}}{2\pi {r_0}^2} \Phi^2$$

où Φ est le flux.

Nous avons obtenu une formule simplifiée pour la variation de pression entre le col et l'entrée de la sténose, au prix de deux hypothèses supplémentaires sur le caractère parfait du fluide et le profil de vitesse en sortie du col.

Pour mieux l'exploiter par la suite, nous pouvons la tranformer un peu pour mettre en évidence l'influence du nombre de Reynolds et du degré de sténose comme dans nos expériences :

$$p_c - p_0 = \frac{\mu^2}{\rho}(1 - \alpha^{-4}) \frac{9}{128} \frac{Re^2}{{r_0}^2}$$

2 Analyse mathématique et numérique

La méthode que nous allons présenter pour résoudre les équations de Navier-Stokes stationnaires est une méthode dite de "compacité" [6].

Nous construisons des "solutions approchées" par réduction de la dimension des espaces naturels de travail (méthode de Galerkin [4]). L'existence de ces solutions approchées est obtenue par un théorème de point fixe.

Le dernier point consiste en un passage à la limite sur la dimension de l'espace. C'est à ce moment qu'intervient la compacité. Il suffit en effet de démontrer que la suite de solutions approchées est "compacte" dans une topologie "forte" pour pouvoir passer à la limite. Les outils essentiels sont donc les théorèmes de type Rellich Kondrakov d'injection compacte d'un espace de Sobolev dans un autre.

2.1 Résultats d'existence et d'unicité [6]

Notre cas d'étude (écoulement axisymétrique) nous permet de nous limiter à des équations en dimension 2. Ceci simplifie considérablement la tâche au niveau de la définition des espaces de travail car $L^2(\Omega)$ a la bonne idée d'être son propre dual.

Le problème est le suivant :

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + \textstyle\sum_{i=1}^{2} u_i \, \mathrm{D}_i u &= f - \nabla p \qquad (\text{dans } \Omega) \ , \\ \operatorname{div} u &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \\ u &= 0 \qquad\qquad (\text{sur } \Gamma) \ . \end{aligned}$$

Introduisons nos espaces de travail et une formulation variationnelle de ces équations :

- $\mathcal{W} \ = \ \left\{ \phi \mid \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^2 \, , \, \operatorname{div}\phi \ = \ 0 \right\}$
- $\mathcal{H} \ =$ adhérence de $\mathcal{W}$ dans $(L^2(\Omega))^2$, muni du produit scalaire usuel, noté $|.|$,
- $\mathcal{V} \ =$ adhérence de $\mathcal{W}$ dans $(H^1(\Omega))^2$, muni du produit scalaire usuel, noté $\|.\|$.

Comme annoncé, nous identifions $\mathcal{H}$ à son dual et $\mathcal{V}'$ à un sur-espace de $\mathcal{H}$. Nous avons $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$.

On peut remarquer que si $v \in \mathcal{V}$ alors $v_i \in H_0^1(\Omega)$ et donc que sa trace sur le bord Γ de Ω est nulle.

Nous pouvons passer à la formulation variationnelle.

On pose maintenant :

$$a(u,v) \ = \ \sum_{i,\,j\,=\,1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x \ , \ u,v \in \mathcal{V}$$

et

$$b(u,v,w) \ = \ \sum_{i,\,k\,=\,1}^{2} \int_\Omega u_k (\mathrm{D}_k \, v_i) \, w_i \mathrm{d}x$$

La forme trilinéaire b est continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La formulation variationnelle revient donc à trouver $u \in \mathcal{V}$ solution de

$$\nu \, a(u,v) \ + \ b(u,u,v) \ = \ (f,v) \ \ \forall \, v \in \mathcal{V}$$

Cette formulation variationnelle, équivalente à l'équation aux dérivées partielles, nous permet de démontrer l'existence de solution(s) par construction.

En effet, choisissons une base $v_1, ..., v_m, ...$ de $\mathcal{V}$ et considérons le problème approché suivant : chercher $u_m \in \operatorname{vect}(v_1, ..., v_m)$, vérifiant

$$\nu \, a(u_m, v_j) \ + \ b(u_m, u_m, v_j) \ = \ (f, v_j), \, 1 \ \leq \ j \ \leq \ m.$$

On note que $\nu \, a(u_m, u_m) \ + \ b(u_m, u_m, u_m) \ = \ \nu \, a(u_m, u_m) \ = \ \nu \, || \, u_m \, ||^2$, de sorte que l'on peut appliquer le lemme de point fixe suivant :

Lemme : Soit $\xi \to P(\xi)$ une application continue de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même, telle que, pour un $\rho > 0$ convenable, on ait $(P(\xi), \xi) \ \geq \ 0 \, \forall \, \xi$ tel que $| \, \xi \, | \ = \ \rho$, alors (démonstration par l'absurde en utilisant le théorème du point fixe de Brouwer) il existe ξ, $| \, \xi \, | \ \leq \ \rho$, tel que $P(\xi) \ = \ 0$.

L'idée pour appliquer ce lemme est de poser $u_m \ = \ \sum_{i\,=\,1}^{m} \xi_i \, v_i$ et de définir $\eta_i \ = \ \nu \, a(u_m, v_j) \ + \ b(u_m, u_m, v_j) \ - \ (f, v_j)$. On a $P(\xi) \ = \ \{\eta_i\}$. Après un peu de travail, on se retrouve dans les hypothèses du lemme qui permet de conclure quant à l'existence de solution.

Il existe donc u_m solution du problème approché, qui vérifie

$$\nu \, || \, u_m \, ||^2 \ \leq \ || \, f \, ||_{\mathcal{V}'} \, || \, u_m \, || \, ,$$

soit

$$|| \, u_m \, || \ \leq \frac{1}{\nu} \, || \, f \, ||_{\mathcal{V}'} \, .$$

On va passer à la limite... La suite u_m étant bornée dans $\mathcal{V}$, elle converge à extraction près faiblement dans $\mathcal{V}$ et fortement dans $\mathcal{H}$ vers $u \in \mathcal{V}$.

De plus $u_{m,i}\, u_{m,j} \to u_i\, u_j$ quand $m \to \infty$ (le produit reste borné et ce résultat est classique). Fixons j, prenons $\mu > j$ et montrons que $b(u_\mu, u_\mu, w_j) \to b(u, u, w_j)$. En effet,

$$b(u_\mu, u_\mu, w_j) \;=\; -\, b(u_\mu, w_j, u_\mu) \;=\; -\sum_{i,\,k=1}^{2} \int_\Omega u_{\mu,\,i}\, \frac{\partial w_j}{\partial x_k}\, u_{\mu,\,k}\, \mathrm{d}x$$

et le produit des $u_{\mu,\,i}$ converge faiblement.

On en déduit donc

$$\nu\, a(u, v_j) \;+\; b(u, u, v_j) \;=\; (f, v_j)$$

et cela $\forall\, j$, et par densité sur $\mathcal{V}$ tout entier. L'existence de solution(s) est démontrée.

L'unicité de la solution est assurée assez simplement en dimension 2 (et 3) par la condition suivante : $\nu^2 \,\geq\, c\, ||\, f\, ||_{\mathcal{V}'}$, avec c constante de continuité de la forme trilinéaire.

Pour le démontrer, il suffit de supposer qu'on a deux solutions u et u^*, de poser $w = u - u^*$, d'injecter w en tant que fonction test de $\mathcal{V}$ dans les deux formulations variationnelles et de les soustraire. On obtient :

$$\nu\, ||\, w\, ||^2 \;=\; -\, b(w, u, w)$$

donc

$$\nu\, ||\, w\, ||^2 \;\leq\; c\, ||\, u\, ||\, ||\, w\, ||^2$$

et compte tenu de

$$\nu\, ||\, u\, ||^2 \;=\; (f, u) \;\leq ||\, f\, ||_{\mathcal{V}'}\, ||\, u\, ||\,,$$

on obtient finalement

$$\left(\nu \,-\, \frac{c}{\nu}\, ||\, f\, ||_{\mathcal{V}'}\right) ||\, w\, ||^2 \;\leq\; 0\,,$$

ce qui donne la nullité de w et donc l'unicité de la solution dès que la condition annoncée est vérifiée.

2.2 La résolution par éléments finis [5]

Nous venons de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de notre problème (rappelons tout de même que seul le différentiel de la pression est déterminé). La preuve est de nature "itérative" dans le sens où elle construit une suite d'approximations qui converge vers la solution.

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes pourrait s'inspirer directement de la preuve de la section précédente. Une difficulté apparaît cependant assez vite si on veut utiliser une méthode par éléments finis sans trop se poser de questions : comment trouver une base de $\mathcal{V}$, dont la propriété des éléments est d'être à divergence nulle ? Il est très difficile de construire explicitement une telle base. Il faut donc une autre idée.

L'idée est de ne plus inclure la condition d'incompressibilité dans l'espace $\mathcal{V}$, mais de garder la pression comme inconnue. Illustrons cela sur le système de Stokes (linéarisation des équations de Navier-Stokes). Une nouvelle formulation variationnelle est alors la suivante : trouver $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \,\times\, L^2(\Omega)\,/\,\mathbb{R}$ tel que

$$\int_\Omega \nu\, \nabla u\, \nabla v\, \mathrm{d}x \;-\; \int_\Omega q\, \operatorname{div} u\, \mathrm{d}x \;=\; \int_\Omega f\, v\, \mathrm{d}x$$

et

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\, \mathrm{d}x \;=\; 0\,,$$

pour tout $(v, q) \in H_0^1(\Omega)^2 \,\times\, L^2(\Omega)\,/\,\mathbb{R}$.

Cette formulation variationnelle est équivalente au système de Stokes. Nous pouvons la discrétiser classiquement par éléments finis. Le prix à payer cette fois est l'unicité de la résolution numérique (systèmes linéaires dégénérés). La pression peut alors être victime d'oscillations dues à la dimension du noyau de la matrice à "inverser".

Nous nous bornons à ces quelques remarques sur les aspects numériques de la résolution des équations de Navier-Stokes.

2.3 Exemples de convergence

Nous "étudions" la convergence de notre problème résolu par CASTEM2000 [7] selon deux points de vue : le nombre de points du maillage d'une part et le nombre d'itérations d'autre part.

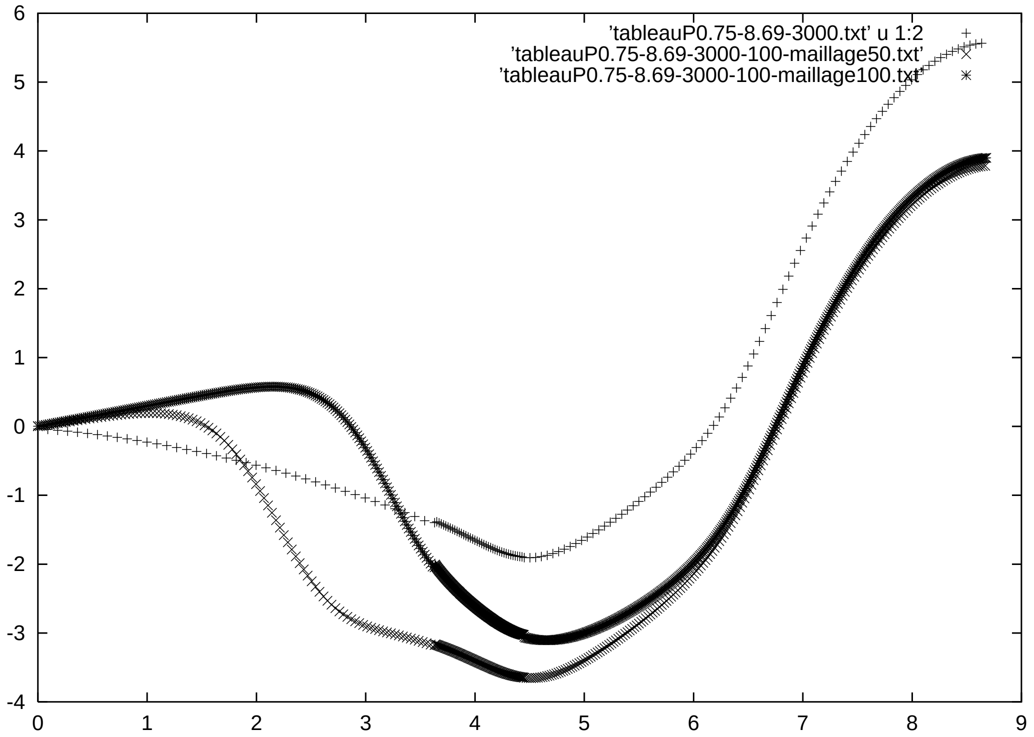
La différence entre ces deux convergences est importante pour saisir la portée des résultats obtenus par la méthode numérique. La finesse du maillage définit en fait la dimension de l'espace dans lequel on résout les équations, plus cet espace est grand, meilleure est l'approximation. Le nombre d'itérations de l'algorithme agit quant à lui sur la qualité d'approcher correctement la projection de la solution dans notre espace de dimension finie. Le fait que l'algorithme converge avec un maillage fixé ne signifie pas que la limite "atteinte" est la solution du problème de Navier-Stokes, seulement qu'elle est la meilleure approximation "vivant" dans notre espace de discrétisation.

De plus nous le faisons sur deux exemples : sur un exemple dont nous connaissons explicitement la solution (l'écoulement de Poiseuille) et un exemple plus compliqué où nous n'avons pas d'idée précise a priori sur la vitesse de convergence. Dans ce dernier cas, nous "décidons" que l'algorithme "a convergé" quand la solution ne "bouge plus beaucoup".

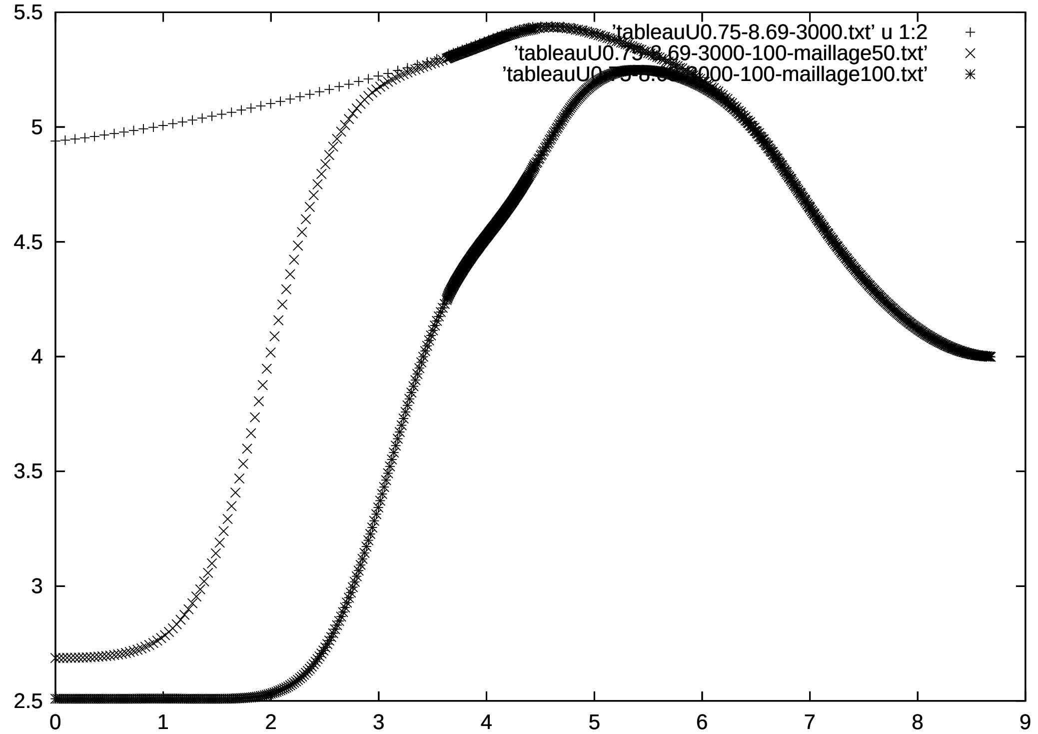
Les graphes se lisent de droite à gauche.

La vitesse intiale au centre est égale à 4.

Les deux graphiques suivants concernent une sténose avec $\alpha = 0.75$.



Influence du maillage sur la pression

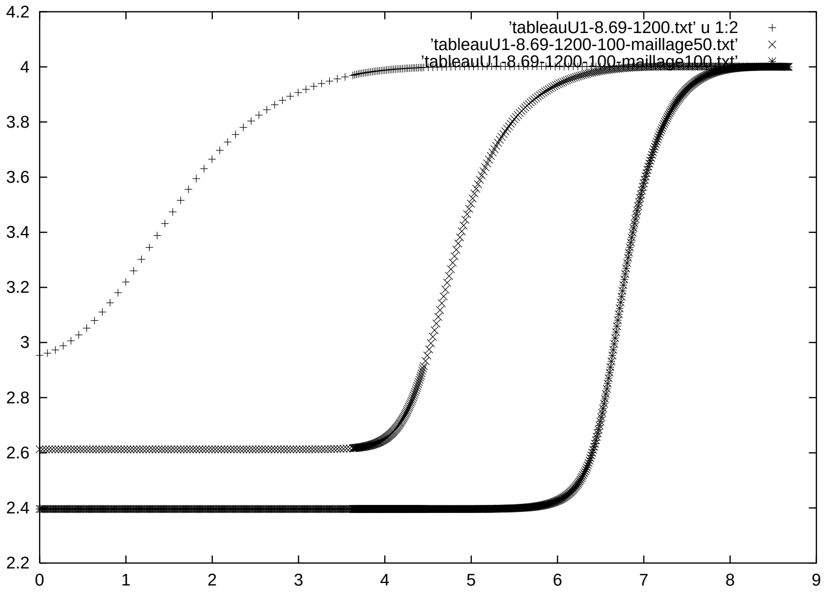


Influence du maillage sur la vitesse

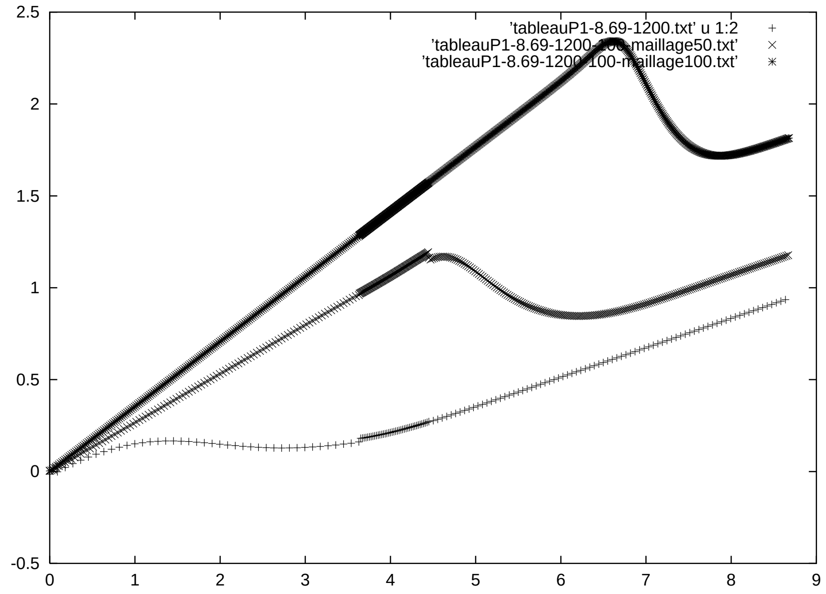
On voit que globalement les “formes” de la vitesse et de la pression sont “conservées”, cependant, quantitativement, il y a encore des variations non négligeables. Malgré cela, les expériences qui suivent ont été faites avec un nombre de maille relativement faible, ce qui limite bien entendu leur pertinence.

Cela étant, ce problème de “bonne” convergence a l'air assez lié à l'algorithme utilisé par CASTEM. En effet, regardons maintenant un profil de Poiseuille, qui devrait être conservé le long du tube. Tant que le maillage est uniforme, tout se passe bien. Mais dès que le maillage devient plus fin par endroits, on a des problèmes de transition. Nous avons en effet construit notre Poiseuille comme un cas particulier de sténose $\alpha = 1$, en prenant un maillage plus fin au niveau du rétrécissement (bien qu'ici il n'y a pas de rétrécissement). Les courbes qui suivent montrent les “aberrations” obtenues. Ceci est d'ailleurs très étonnant. L'algorithme converge en effet très bien avec un maillage uniforme pour le Poiseuille même si celui-ci est grossier.

Les deux graphiques suivants illustrent ce point. Notons que le maillage n'a été raffiné que dans le sens de l'écoulement et pas en section (20, puis 50 puis 100 subdivisions).

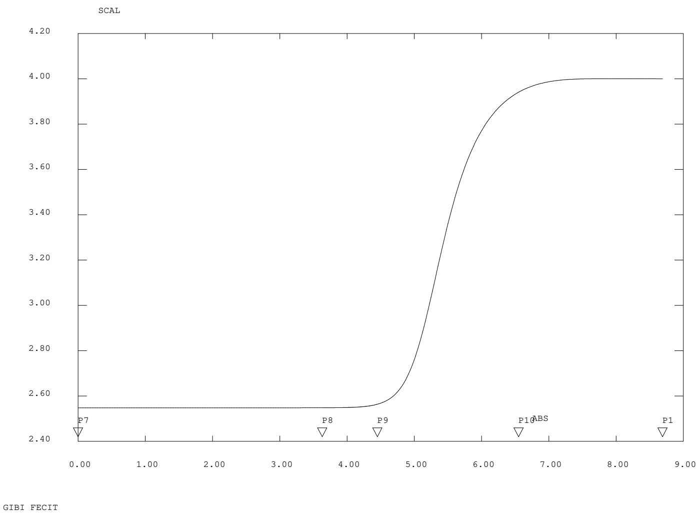


Vitesse au centre, écoulement de Poiseuille

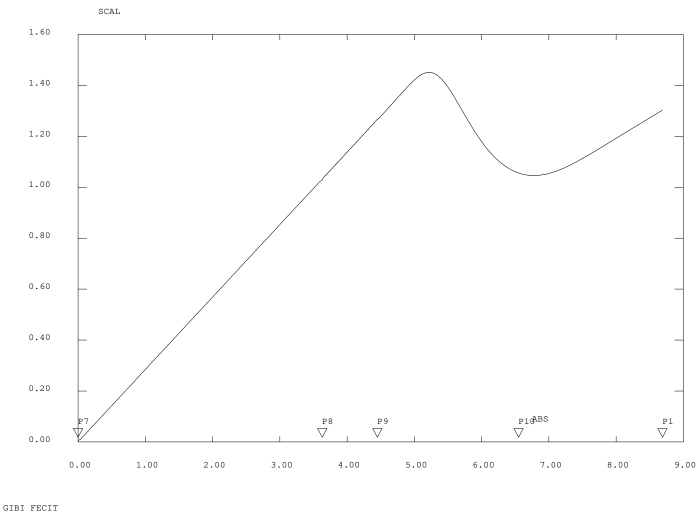


Pression au centre, écoulement de Poiseuille

Ce dernier graphe montre finalement que même un raffinement “équilibré” ne conduit pas à la solution (50 subdivisions, proportion gardée en section).



Vitesse au centre, écoulement de Poiseuille



Pression au centre, écoulement de Poiseuille

Ces expériences, peu concluantes, nous permettent de mesurer la confiance relative que l'on peut avoir en nos expériences numériques.

3 Simulation numérique

3.1 Les différentes expériences

Dans nos expériences, nous négligeons les forces volumiques et nos conditions aux limites ne sont pas homogènes : nous imposons un profil de Poiseuille en entrée.

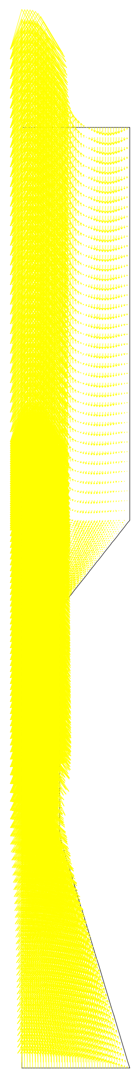
Le but de cette étude est de mesurer la pression et la vitesse du fluide à la sortie de la sténose en fonction de divers paramètres. Ces paramètres sont le degré de sténose (qu'on peut définir comme le rapport des diamètres du tube avant et après la sténose, la longueur du rétrécissement étant fixée) et le nombre de Reynolds. Nous rappelons que le débit dépend du nombre de Reynolds selon la formule établie dans la première partie, et qu'indirectement nous faisons notre étude pour différents débits.

3.2 Le phénomène de "courant de retour"

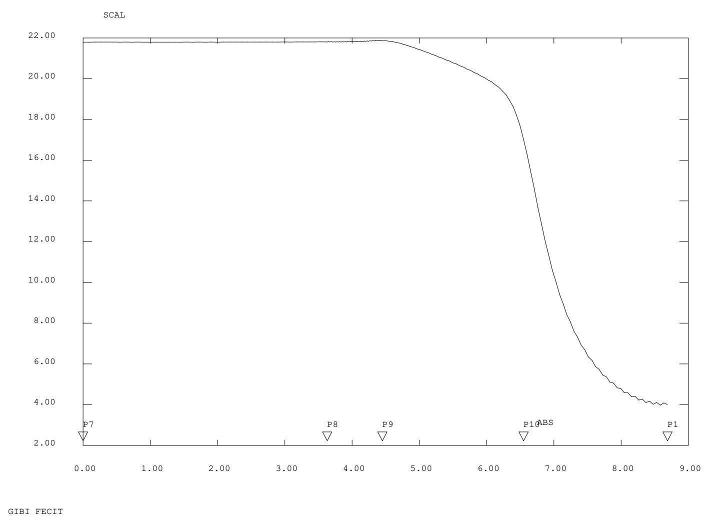
Dans certaines configurations, un courant de retour prend naissance après la sténose : il s'agit d'un courant de fluide qui se déplace en sens inverse de l'écoulement.

A nombre de Reynolds fixé, ce courant de retour apparaît à partir d'un certain degré de sténose. Nous avons mené des expériences pour déterminer ce seuil pour un nombre de Reynolds particulier : $Re = 100$.

Pour $Re = 100$, il y a un contre courant pour $\alpha = 0.5$, on le voit naître pour $\alpha = 0.6$ et il n'y en a pas pour $\alpha = 0.7$. Le seuil se situe aux alentours de $\alpha = 0.6$.



Profil des vitesses avec courant de retour

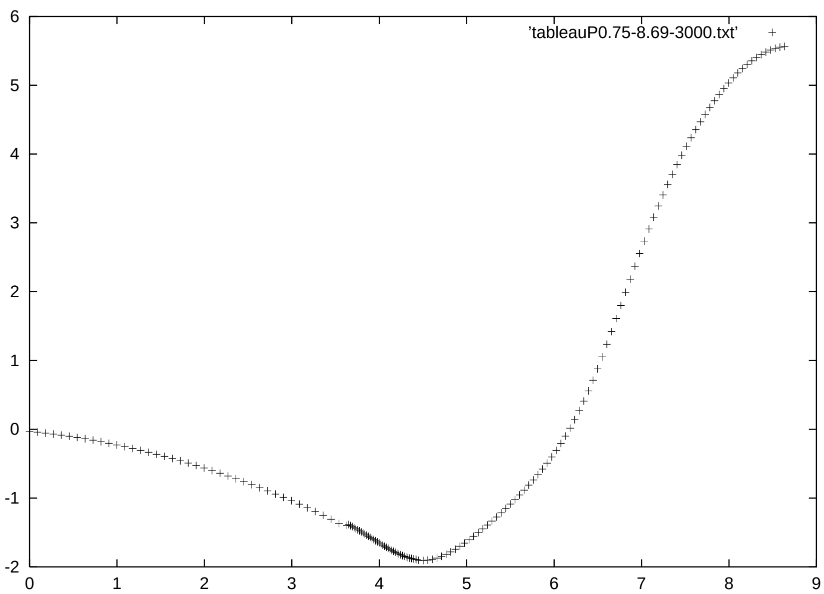


Vitesse au centre avec courant de retour

3.3 La pression

La pression étant connue à une constante prés, nous l'avons imposée nulle (et uniforme) à la fin de l'écoulement. Cette hypothèse d'uniformité est forte mais est en accord avec la réalité. Quand le tube devient infini, la pression limite devient uniforme sur une section. Pour choisir une longueur de tube pour laquelle l'hypothèse "tube infini" est valide, nous avons testé plusieurs longueurs et comparé les résultats pour la pression.

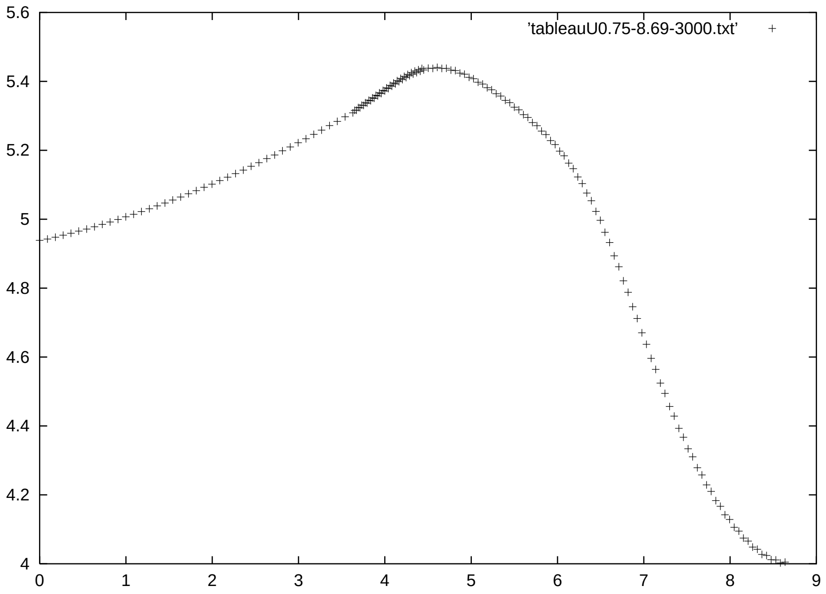
Les "préliminaires" à l'étude proprement dite étant faits, nous pouvons faire varier nos différents paramétres. Nous avons fait des expériences pour 4 nombres de Reynolds (100, 200, 300 et 500) et pour 4 degrés de sténose (1, 0.75, 0.5 et 0.35).



Pression au centre sans courant de retour

3.4 La vitesse au centre

Nous avons fait pour la vitesse les mêmes expériences que pour la pression.



Vitesse au centre sans courant de retour

4 Interprétation des résultats numériques

4.1 Mise en évidence de la dépendance en α de la chute de pression

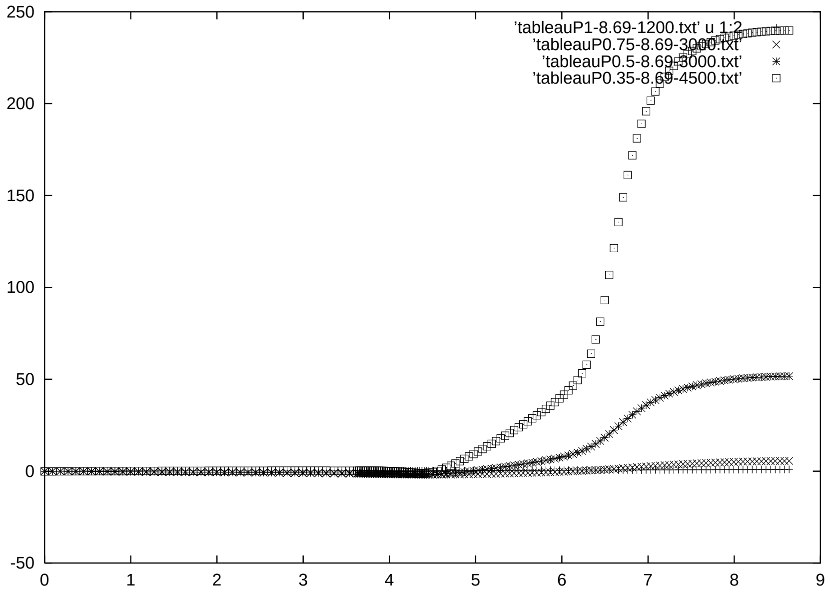
Dans ces expériences, $Re = 100$.

α	$(1-\alpha^{-4})$	$(p_c - p_0)_{\text{lue}}$	$\frac{p_c-p_0}{1-\alpha^{-4}}$
0.35	-65.6	240	-3.65
0.5	-15	52	-3.46
0.6	-6.7	25	-3.73
0.75	-2.2	7.5	-3.40
1.0	0	1.0	$-\infty$

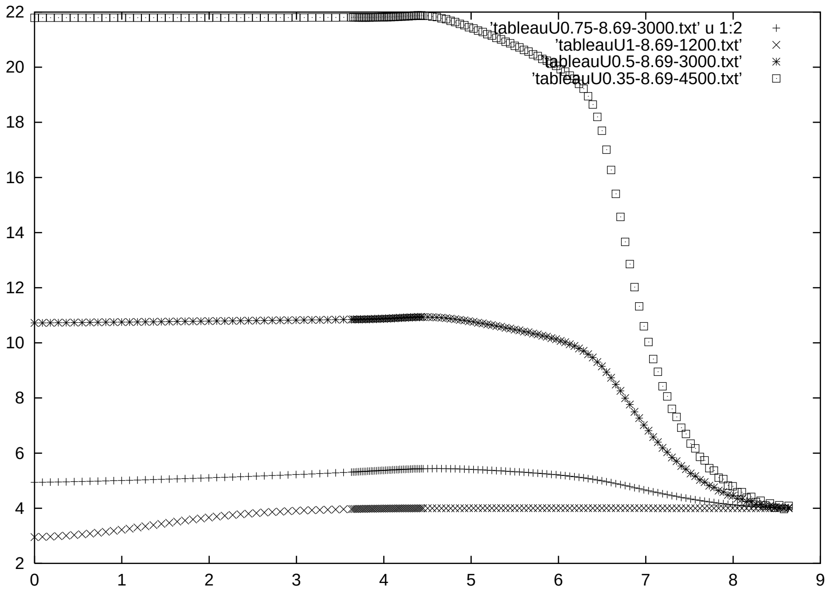
Chute de pression et degré de sténose

Ce tableau est intéressant car il met en évidence qu'en première approximation la chute de pression est proportionnelle à $(1-\alpha^{-4})$, comme mous l'avions trouvé dans la section 1.4.

Les valeurs de α "réalistes" envisagées par Sylvie Lorthois sont $\alpha = 0.27, \alpha = 0.33$ et $\alpha = 0.4$. Nos valeurs sont supérieures à celles-ci [3], CASTEM donnait en effet des résultats aberrants pour des rétrécissements trop prononcés (maillage sûrement trop grossier entraînant la divergence de l'algorithme numérique).



Influence du degré de sténose sur la pression



Influence du degré de sténose sur la vitesse au centre

4.2 Discussion de la dépendance en Reynolds de la chute de pression

Dans ces expériences, $\alpha = 0.75$.

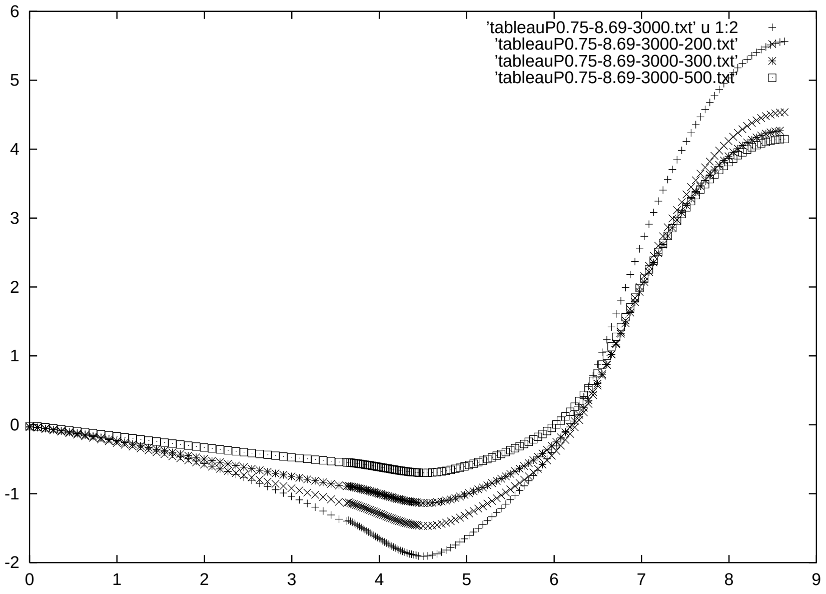
Re	$(p_c - p_0)_{\text{lue}}$
100	7.5
200	6.0
300	5.2
500	4.8

Chute de pression et nombre de Reynolds

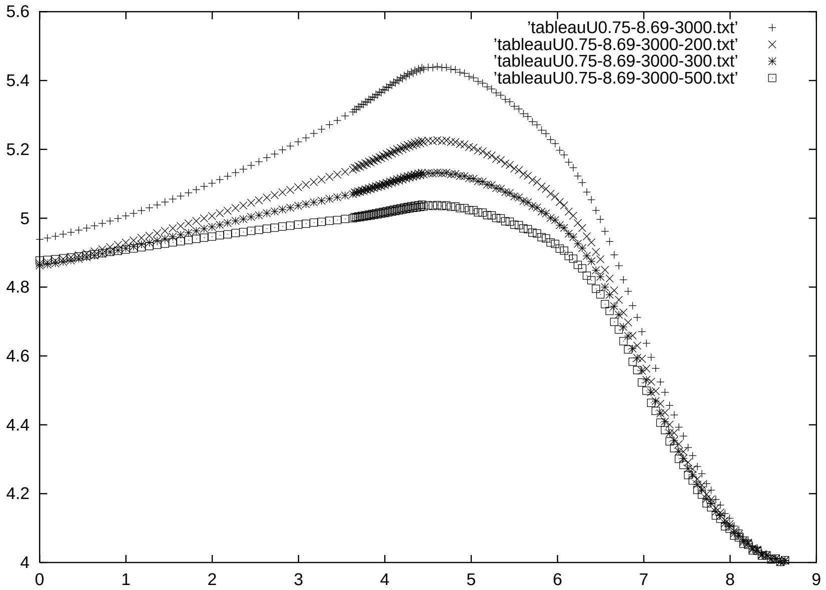
Nous avons vu à la section 1.3 que le nombre de Reynolds était proportionnel au débit massique $Re = \frac{8}{3\pi}\frac{q}{\mu r}$, ce que nous utilisons ici pour déterminer les débits correspondants dans l'étude [3].

Les valeurs du débit envisagées par Sylvie Lorthois correspondent à une plage de nombre de Reynolds compris entre 200 et 1200.

Les résultats sont peu probants : on observe une légère variation monotone en fonction du nombre de Reynolds. Nous ne l'expliquons pas.



Influence du nombre de Reynolds sur la pression



Influence du nombre de Reynolds sur la vitesse

5 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Nous comparons nos résultats numériques avec des résultats expérimentaux obtenus à Toulouse sur un moulage de réseau sanguin d'un cerveau humain [3].

Nos paramètres sont en concordance avec les paramètres réels :

expérience numérique	expérience physique
$Re \in \{100, 200, 300, 500\}$	$[200, 1200]$
$\alpha \in \{0.35, 0.5, 0.75, 1\}$	$[0.25, 0.4]$
$r_0 = 1mm$	$r_0 = 1.5mm$

On peut donc essayer de comparer nos résultats avec ceux obtenus par Sylvie Lorthois [3].

Nous nous trouvons alors devant une incohérence : notre chute de pression semble peu dépendre du nombre de Reynolds alors qu'elle dépend fortement du débit dans les expériences [3].

A priori nous avons cru que la différence venait de nos constantes physiques : nous avions en effet laissé comme valeur pour nu l'inverse du nombre de Reynolds (alors qu'il est approximativement de $10^{-6}SI$ pour l'eau). Cependant, en renouvelant l'expérience avec une viscosité cinématique plus en accord, les résultats n'étaient toujours pas "pertinents".

Nous devons nous contenter d'un ordre de grandeur. Par exemple, pour un débit $q = 0.75cm^3/s$ soit $Re = 200$ pour nous, $\Delta p_{\text{expérimental}} = 800$ alors que nous trouvons $\Delta p_{\text{numérique}} = 120$.

Une explication possible de cet écart est une maîtrise assez moyenne de la convergence de CASTEM.

Conclusion

Cette étude est mitigée. Mathématiquement intéressant, le problème de Navier-Stokes stationnaire en dimension 2 est théoriquement résolu. Cependant, l'aspect numérique est délicat comme on a pu le voir.

D'un point de vue mécanique, la théorie simplifiée aide à comprendre les mécanismes en jeu. Il est toutefois dommage que nous n'ayons pas retrouvé les résultats expérimentaux ; particulièrement l'influence du nombre de Reynolds.

Le facteur limitant a été la partie numérique. Pour obtenir de meilleurs résultats il conviendrait d'étudier plus en détail l'álgorithme utilisé par CASTEM pour voir où peuvent apparaître les problèmes de convergence. Il faudrait, aussi et surtout, trouver des conditions pour retrouver un profil de Poiseuille à la sortie d'une veine non sténosée. Une idée serait peut-être de garder un maillage uniforme sur toute la longueur, mais cela a un prix, bien entendu.

Références

[1] Mécanique des fluides, Patrick Huerre, Ecole Polytechnique, 1998.

[2] Flows in Stenotic Vessels, S. A. Berger, L-D. Jou, Berkeley, 2000.

[3] Résultats expérimentaux, Sylvie Lorthois, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, 2000.

[4] Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur : Optimisation et analyse numérique, Bernard Larrouturou, Pierre-Louis Lions, Ecole Polytechnique, 1998.

[5] Optimisation et analyse numérique, Grégoire Allaire, Ecole Polytechnique, 2002.

[6] Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Jacques-Louis Lions, Dunod Paris, 1969.

[7] Initiation à la simulation numérique des fluides à l'aide de CASTEM2000, H. Paillère, F. Dabbene, cours ENSTA.