

Un nouveau modèle pour les milieux granulaires denses en écoulement

Christophe Josserand, Pierre-Yves Lagrée & Daniel Lhuillier

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, UMR CNRS 7607, Boîte 162,
Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris FRANCE
dlhui@ccr.jussieu.fr

Résumé :

Nous avons repris et amélioré un modèle proposé voilà près de vingt ans par Savage [1], [2] puis par Johnson et Jackson [3] dans lequel le tenseur des contraintes d'un milieu granulaire dense est la somme de deux contributions, l'une liée aux contacts entre grains et l'autre liée aux mouvements relatifs des grains. Ce modèle amélioré permet de retrouver les profils de concentration et de vitesse dans tous les types d'écoulements cisailés stationnaires, depuis les avalanches sur tas ou sur plaque, jusqu'aux écoulements de Couette entre cylindres coaxiaux.

1 Introduction

Le comportement mécanique d'un milieu granulaire dépend énormément de la fraction volumique des grains. En dessous d'une fraction volumique ϕ_m (de l'ordre de 0.5 pour des grains sphériques) le comportement est celui d'un gaz où les collisions binaires jouent un rôle dominant. Au dessus d'une fraction volumique ϕ_M (de l'ordre de 0.65 pour des grains sphériques) le comportement est celui d'un solide poro-élastique. Entre ces deux valeurs, le comportement est celui d'un liquide dense et c'est ce liquide granulaire que nous avons voulu modéliser comme un milieu continu. Nous nous sommes pour l'instant limités à des écoulements cisailés stationnaires. Ce type d'écoulement est très important car il englobe aussi bien des écoulements à surface libre que des écoulements confinés. La restriction à des écoulements stationnaires nous permet de simplifier l'approche en limitant le nombre de variables pertinentes à la vitesse des grains et à leur concentration ou fraction volumique.

2 Lois de Comportement

L'écoulement des grains se fait dans une direction x et leur vitesse moyenne V varie suivant une direction z . Les grains agissent entre eux par des contacts et des impacts représentés par un tenseur des contraintes τ . On appelle pression granulaire la composante τ_{zz} de ce tenseur. La dissipation dans le milieu granulaire sera associée à la composante τ_{xz} . Pour des grains sphériques de diamètre D , de masse volumique ρ et de fraction volumique ϕ , nous écrivons la pression granulaire sous la forme :

$$\tau_{zz} = \rho g D F(\phi) + \rho D^2 \mu_N(\phi) \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2, \quad (1)$$

où g est l'accélération gravitationnelle. Le premier terme représente une *pression de contact* (avec une compressibilité $(\partial F / \partial \phi)^{-1}$) et le second représente la *dilatance de Reynolds*. Les contraintes de cisaillement se présentent sous la forme :

$$\tau_{xz} = -\text{signe} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \mu(\phi) \tau_{zz} - \rho D^2 \mu_T(\phi) \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right| \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2)$$

Le premier terme traduit la *friction solide de Coulomb* et le second une *dissipation visqueuse à la Bagnold* avec une viscosité qui dépend du module du gradient de vitesse. On voit que la fraction volumique des grains joue un très grand rôle dans ces deux lois de comportement puisqu'elle intervient explicitement dans quatre coefficients de transport. Dans un milieu granulaire dense comme celui que nous modélisons, ces coefficients de transport ne sont définis que pour des fractions volumiques limitées à l'intervalle $\phi_m < \phi < \phi_M$. En fait la variable véritable est la *compaction réduite* φ définie comme

$$\varphi = \frac{\phi - \phi_m}{\phi_M - \phi_m}. \quad (3)$$

Cette compaction réduite est une sorte de paramètre d'ordre qui croît de zero à un au fur et à mesure que la densité passe de celle d'un gaz à celle d'un solide. Avec la compaction réduite, nous avons adopté les expressions suivantes des coefficients de transport

$$F(\phi) = F_0 \text{Log} \frac{1}{1 - \varphi}, \quad (4)$$

$$\mu_N(\phi) = \frac{\mu_{N0}}{(1 - \varphi)^2}, \quad (5)$$

$$\mu_T(\phi) = \frac{\mu_{T0}}{(1 - \varphi)^2}, \quad (6)$$

$$\mu(\phi) = \mu_0. \quad (7)$$

3 Résultats

Le modèle composé des lois de comportement (1) et (2) associées aux coefficients (4) à (7) a déjà donné des résultats prometteurs [4] [5]. Il a permis de comprendre pourquoi le profil de vitesse est quasi-linéaire dans une avalanche sur tas (Fig.1) et pourquoi il peut se transformer en profil à *la Bagnold* dans un écoulement sur plaque rugueuse (Fig.2). Ces mêmes lois de comportement permettent également d'expliquer la localisation du cisaillement dans un écoulement entre deux cylindres coaxiaux tournants (Fig.3). Ces prédictions sont assez compatibles avec les résultats expérimentaux regroupés dans [6].

4 Perspectives

Tout ce qui vient d'être dit ne concerne que les milieux granulaires secs pour lesquels le fluide interstitiel joue un rôle négligeable. Nous nous sommes intéressés récemment à des granulaires mouillés et aux phénomènes d'érosion et de transport des sédiments sous-marins. Il faut alors faire intervenir, en plus des contraintes granulaires, des contraintes liées à la viscosité du fluide interstitiel ainsi que des forces d'interaction entre le fluide et les grains. C'est sur cette modélisation des granulaires mouillés que nous concentrons nos efforts actuellement

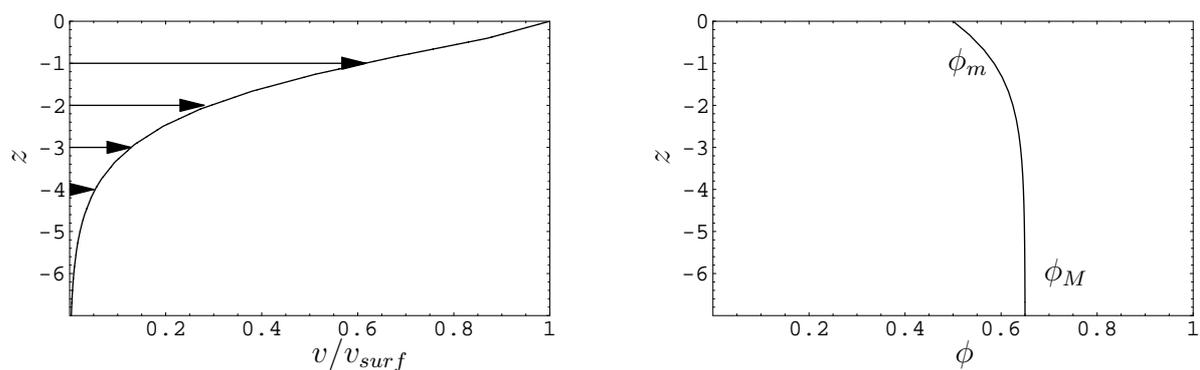


FIG. 1 – Ecoulement sur un tas incliné, à gauche le profil de vitesse (avec une partie linéaire et une queue exponentielle), à droite le profil de compaction (de plus en plus compact en profondeur).

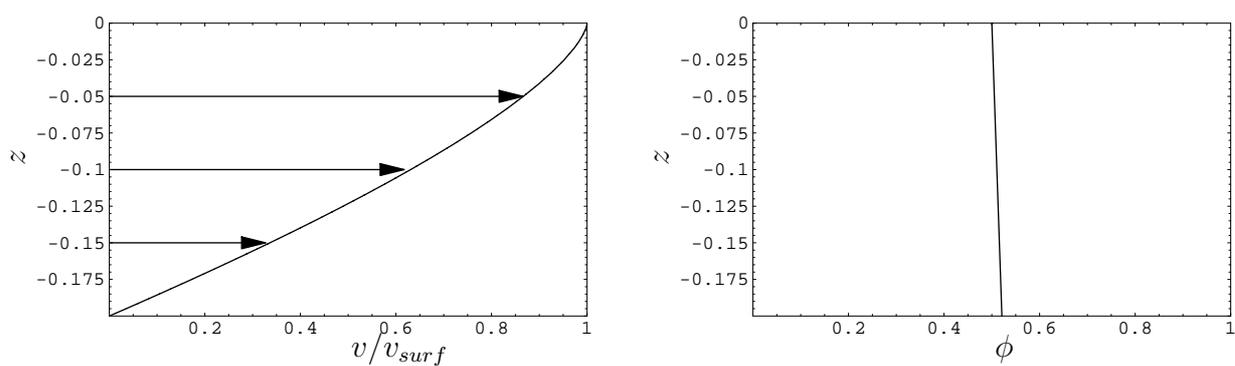


FIG. 2 – Ecoulement sur une plaque plane inclinée, à gauche le profil de vitesse (de type Bagnold), à droite le profil de compaction (quasi constant). Ces deux courbes sont en fait la partie haute des deux courbes correspondantes de la figure 1.

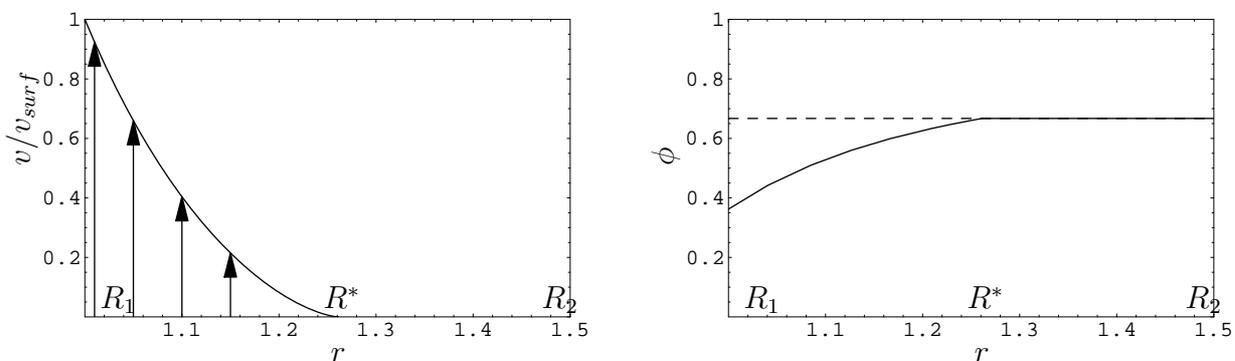


FIG. 3 – Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux (Couette), à gauche le profil de vitesse (on observe la localisation du cisaillement), à droite le profil de compaction.

Références

- [1] S.B. Savage. Granular flows down rough inclines : review and extension. *Proc. of US-Japan Seminar on New Models and Constitutive Relations in the Mechanics of Granular Materials* ed. by J.T. Jenkins and M. Satake (Elsevier Science Publishers, Amsterdam), pages 261–282, 1982.
- [2] S.B. Savage. Analysis of slow high-concentration flows of granular materials. *J. Fluid Mech*, 377 :1–26, 1998.
- [3] P.C. Johnson and R. Jackson. Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *J. Fluid Mech*, 176 :67–97, 1987.
- [4] C. Josserand, P.-Y. Lagrée, and D. Lhuillier. Stationary shear flows of dense granular materials : A tentative continuum modelling. *The European Physical Journal E*, 14(2) :127–135, 2004.
- [5] C. Josserand, P.-Y. Lagrée, and D. Lhuillier. Couette flow of dry granular materials. *Proceedings of STAMM 2004*, 2005.
- [6] G.D.R. Midi. On dense granular flows. *Eur. Phys J E*, 14 :341–365, 2004.