

Chapitre 3

Regard sur l'approche Saint-Venant

3.1 Introduction

Nous venons de voir comment les matériaux sont entraînés par un fluide. Il nous faut donc maintenant examiner comment on calcule l'écoulement de fluide. Nous allons montrer un premier exemple de rétroaction. Nous allons donc, dans ce chapitre, présenter une résolution très simplifiée de l'hydrodynamique.

Que ce soit dans les écoulements côtiers ou de rivière, l'approche dite de "Saint-Venant" est diversement utilisée pour le calcul des ondes de surfaces et des vitesses. Cette approche met en jeu un fluide pur (l'eau) limité par un fond imperméable et une surface libre. Il n'y a ni particules en suspension, ni milieu granulaire traversé par le fluide. Nous rappelons les équations générales obtenues par moyenne sur la hauteur de l'écoulement, et le modèle de frottement au fond utilisé choisi empiriquement en fonction de la vitesse moyenne.

Cette approche est aussi mise en oeuvre pour comprendre le processus d'évolution du fond lorsque celui-ci est érodable (Reynolds [97], Balmforth et Provenzale [18], Fowler [54][55]). Dans ce cas, on calcule un flux de matériaux en fonction du frottement au fond, et on écrit la conservation de la masse pour le lit (*cf.* figure Fig.1). Cette approche a inspiré également la modélisation des avalanches de milieux granulaires (Savage et Hutter, [109], ..., Khakhar et coll. [66], nous y reviendrons au chapitre 9).

Une difficulté de l'étude est qu'il y a deux temps caractéristiques dans ce problème : le mouvement rapide du fluide et le mouvement lent du fond. En effet, lorsque le couplage est observé en prenant pour référence le temps hydrodynamique dit "temps court", le fond est fixe en première approximation (Balmforth et Provenzale [18]), tandis que s'il est observé en prenant pour référence le temps d'évolution du fond, dit "temps long", le fluide est stationnaire en première approximation (Fowler [54]).

Nous présentons brièvement une analyse de stabilité linéaire du fond lorsque le frottement au fond est en phase avec la vitesse moyenne (ce qui est souvent préconisé par l'approche Saint-Venant). Le résultat est que le fond érodable reste stable quelque soit la perturbation quel que soit le régime de l'écoulement. Cet échec nous permettra de justifier notre démarche ultérieure.

3.2 Equations de l'écoulement du fluide

Nous nous restreignons à un écoulement 2D, et nous utilisons les notations suivantes : une grandeur j , lorsqu'elle est indiquée par une étoile, j^* est une grandeur dimensionnée. Quand elle est adimensionnée, alors elle est notée \bar{j} .

Dans la suite les grandeurs :

- $f^*(x^*, t^*)$ représente la forme du fond, $f^*(x^*, t^*) = 0$ quand le fond n'est pas perturbé (plat);
- $\eta^*(x^*, t^*)$ est la forme de la surface libre, $\eta^*(x^*, t^*) = 0$ pour une surface libre non perturbée (plane);
- H_0 est la hauteur de l'écoulement lorsque le fond et la surface libre ne sont pas perturbés;
- $u^*(x^*, y^*, t^*)$ est localement, la composante horizontale de la vitesse instantanée de l'écoulement.

Ces grandeurs permettent de définir : $h^*(x^*, t^*) = H_0 + \eta^*(x^*, t^*) - f^*(x^*, t^*)$ la hauteur totale de l'écoulement, pour une perturbation du fond et de la surface libre données.

La vitesse moyenne sur la hauteur de l'écoulement est par définition :

$$U^*(x^*, t^*) = \frac{1}{h^*} \int_{f^*}^{H_0 + \eta^*} u^*(x^*, y^*, t^*) dy^*. \quad (3)$$

Les équations de Saint-Venant s'écrivent (Hervouet [63], Kennedy [65], Reynolds [97]) en in

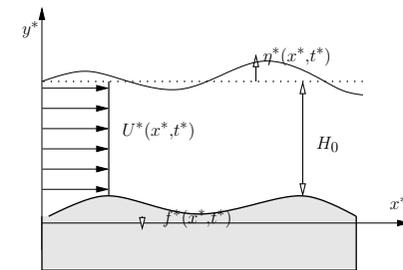


FIG. 3.1 – Domaine d'étude, sur ce dessin $S = 0$



grant verticalement les équations de Navier-Stokes et en supposant que la vitesse longitudinale u^* varie peu suivant y^* . Elles font apparaître le frottement au fond (τ^*):

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(h^* U^*)}{\partial x^*} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = g \cos(S) \left(\tan(S) - \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\tau^*}{\rho h^*} + \frac{\nu}{h^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(h^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} \right) \quad (3.3)$$

où S est la pente du lit par rapport à l'horizontale. Le terme de frottement est *a priori* inconnu, il faut fermer les équations en choisissant la dépendance de τ^* avec U^* . Par exemple, on introduit un coefficient C_f (utilisé dans les formules de traînée) tel que:

$$\tau^* = \rho C_f U^{*2}. \quad (3.4)$$

Ce coefficient est relié au coefficient de Chézy C : $C_f = g/(R_H C)$, dont les valeurs sont données de façon empirique dans la littérature (R_H est le rapport entre la section mouillée et le périmètre mouillé).

3.2.1 Adimensionnement des équations

Toutes les longueurs verticales seront adimensionnées par la hauteur H_0 , et les longueurs horizontales par l'échelle L caractéristique de la longueur de l'écoulement (en général, $H_0 \ll L$, et $\tan(S) \ll 1$, si la pente du fond est notée S , cas des perturbations sur le lit d'un fleuve en pente douce).

$$\bar{h} = \frac{h^*}{H_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta^*}{H_0}, \quad \bar{f} = \frac{f^*}{H_0}, \quad \bar{x} = \frac{x^*}{L}$$

La vitesse est adimensionnée par la vitesse typique U_0 de l'écoulement, lorsque celui-ci et son fond ne sont pas perturbés:

$$\bar{U} = \frac{U^*}{U_0}.$$

Suivant le cas étudié, on peut distinguer deux cas particuliers.

- Dans le cas où le fluide coule uniformément avec un fond non perturbé, la conservation de la quantité de mouvement (3.3) stipule que:

$$g \sin(S) = C_f \frac{U_0^2}{H_0}. \quad (3.5)$$

Ceci nous fixe l'échelle de la vitesse U_0 . Le temps hydrodynamique a pour échelle L/U_0 et alors nous posons:

$$\bar{t} = \frac{U_0}{L} t^*.$$

Les équations de Saint-Venant (3.2)–(3.3) se présentent sous forme adimensionnelle suivante:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{h} \bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.6)$$



$$F_0^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right) = \cos(S) \left(1 - \frac{\bar{U}^2}{\bar{h}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right). \quad (3.7)$$

Le nombre de Froude F_0 est donné par:

$$F_0^2 = \frac{U_0^2}{g H_0}. \quad (3.8)$$

Les conditions initiales associées sont des conditions de non perturbation du fluide et fond:

$$\bar{U} = \bar{h} = 1, \quad \text{et} \quad \bar{\eta} = \bar{f} = 0. \quad (3.9)$$

- Dans le cas où on se donne un débit de fluide et un fond complètement plat ($\sin(S) = 0$), la vitesse est donnée par ce débit et non par l'équilibre entre le frottement et la gravité qui entraîne le fluide (équation 3.5). Dans ce cas les équations de Saint Venant s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{h} \bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.10)$$

$$F_0^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} - \beta \frac{\bar{U}^2}{\bar{h}}. \quad (3.11)$$

où $\beta = C_f L/H_0 > 0$ est un coefficient de friction adimensionné. On suppose dans la suite que $\beta \ll 1$.

C'est en fait ce dernier cas que nous allons étudier dans la suite.

3.2.2 Solutions linéaires

Pour fixer les idées, nous présentons tout de suite une solution linéarisée du système de (3.10)–(3.11), et où β est petit. Soient les petites variations \bar{U} et \bar{f} autour de leur valeur initiale:

$$\bar{U} = 1 + u, \quad \text{tel que} \quad |u| \ll 1,$$

$$\bar{\eta} = \eta, \quad \text{tel que} \quad |\eta| \ll 1,$$

$$\bar{f} = f, \quad \text{tel que} \quad |f| \ll 1,$$

$$\bar{h} = 1 + \eta - f, \quad \text{tel que} \quad |\eta - f| \ll 1,$$

nous pouvons linéariser les équations (3.6)–(3.7). On trouve (cf. Baines [17]), pour l'écoulement subcritique ou supercritique ($F_0 \neq 1$), que la solution analytique de η est:

$$\eta(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{F_0^2}{F_0^2 - 1} f(\bar{x}, \bar{t}) + \text{ondes} \quad (3.12)$$

La solution (3.12) est composée d'une partie stationnaire, et de deux ondes qui avancent à vitesse c_1 et c_2 telles que:

$$c_1 = 1 + \frac{1}{F_0}, \quad \text{et} \quad c_2 = 1 - \frac{1}{F_0}. \quad (3.13)$$

Au bout d'un temps assez long on a:

$$\eta = \frac{F_0^2}{F_0^2 - 1} f + u = \frac{-1}{F_0^2 - 1} f. \quad (3.14)$$

Par exemple, nous résolvons les équations non-linéaires (3.6)–(3.7) avec un code limiteur de flux que nous avons développé (voir annexe B). Les résultats numériques sont sur la figure Fig.3.2.2, dans le cas où $f(\bar{x},0)$, la bosse initiale, est une gaussienne. Nous identifions la présence de deux ondes qui s'éloignent de la bosse. Elles vont toutes les deux dans le même sens dans le cas supercritique, et dans deux sens opposés dans le cas subcritique. Aux temps longs, les ondes ont quitté le domaine de calcul, et dans le cas d'un écoulement supercritique, un bourrelet épouse le dessus de la bosse (figure droite), la vitesse diminue au sommet de la bosse. En revanche, dans le cas d'un écoulement subcritique, au sommet de la bosse, un creux se forme à la surface libre. La vitesse augmente au dessus de la bosse.

Cette solution, ici calculée en non linéaire, est cohérente avec la relation linéarisée (3.12).

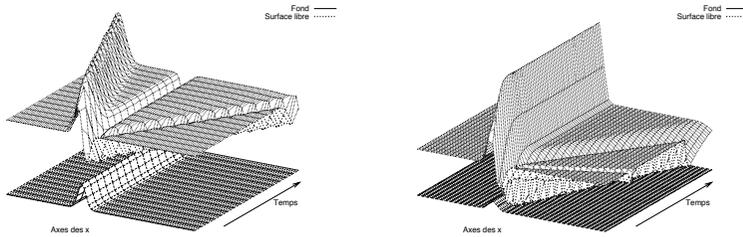


FIG. 3.2 – L'écoulement de base est dirigé de la gauche vers la droite. La surface libre présente deux ondes qui finissent par sortir. La bosse est fixe de hauteur maximale $|f(\bar{x},0)| = 0.2$. Le cas subcritique (gauche) est calculé pour $F_0 = 0.3$; les deux ondes avancent dans des sens opposés. Le cas supercritique (droite) pour $F_0 = 1.7$; les deux ondes avancent dans le même sens, mais à des vitesses différentes. Dans les deux cas $0 \leq t \leq 10$

Dans les équations stationnaires et non linéaires (3.6)–(3.7), il existe pour une hauteur de bosse donnée, un domaine (de valeurs du nombre de Froude initial) pour lequel des ressauts se créent en aval de la bosse. Dans ce domaine les solutions linéarisées ne sont pas valides. Le diagramme donnant le nombre de Froude en fonction de la hauteur de bosse a été établi par Nadiga et coll. [86] et Baines [17]. Sur les figures Fig.3.2.2 qui suivent nous avons choisi le nombre de Froude et la hauteur de bosse de sorte à pouvoir éviter la présence de ressauts (notre code permet cependant de les calculer sans problème).

3.3 Equation d'évolution du fond

Ayant résolu l'écoulement du fluide pour un fond fixe, nous passons à l'évolution du fond. Elle est régie par la relation (2) de conservation de matières (loi d'Exner),

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*} \quad (3.15)$$

Notant q_0 l'ordre de grandeur du flux de matières entraînées par unité de section, le flux adimensionné par :

$$\bar{q} = \frac{q^*}{q_0}.$$

L'équilibre entre les ordres de grandeurs, permet d'évaluer l'échelle de temps caractéristique de formation des structures au fond :

$$t^* = \frac{H_0 L}{q_0}. \quad (3.)$$

3.3.1 Flux de matières entraînées

Nous sommes dans le cas d'un écoulement unidirectionnel, la relation du flux saturé donnée par (2.68). En variables dimensionnelles ce flux s'écrit :

$$q_{sat}^* = \alpha (\tau^* - \tau_s^* - \Lambda \frac{\partial f^*}{\partial x^*})^{3/2}, \quad \text{et} \quad \tau^* = \rho C_f U_*^2 \quad (3.)$$

α et Λ étant des coefficients empiriques fonction des propriétés des grains et de l'écoulement dont des ordres de grandeur sont donnés au paragraphe 2.8. Sous la forme adimensionnelle relation du flux saturé s'écrit :

$$\bar{q}_{sat} = (\bar{\tau} - \bar{\tau}_s - \bar{\Lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}})^{3/2}, \quad \text{et} \quad \bar{\tau} = \bar{U}^2. \quad (3.)$$

obtenue en posant $\tau^* = \Upsilon \bar{\tau}$, avec :

$$\Upsilon = \rho C_f U_0^2, \quad \bar{\tau}_s = \frac{\tau_s^*}{\Upsilon}, \quad \bar{\Lambda} = \frac{H_0}{L} \frac{\Lambda}{\Upsilon} \quad q_0 = \alpha \Upsilon^{3/2} \quad (3.)$$

Le lien entre le flux et sa valeur saturée est donné par la relation (2.66) à la page 40 qui est

$$\bar{l}_{sat} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} + \bar{q} = \bar{q}_{sat} \quad (3.)$$

où nous avons adimensionné la longueur de saturation définie dans la relation (2.66) :

$$\bar{l}_{sat} = \frac{l_{sat}}{L}.$$

3.4 Couplage écoulement/évolution du fond

Le temps au bout duquel le fond commence à se déformer sous l'effet du fluide est en général plus long que le temps caractéristique associé à l'écoulement. Cette différence des ordres de grandeur du temps est interprétée de la manière suivante : à l'échelle des temps de formation des structures du fond, l'écoulement du fluide est "stationnaire"; à l'échelle des temps hydrodynamiques, le fond est supposé "fixe". Pour présenter cet aspect des choses, nous écrivons équations associées respectivement à l'échelle temporelle du fond ou à celle de l'hydrodynamique.

Posons :

$$\epsilon = \frac{\text{temps de l'écoulement}}{\text{temps de déformation du fond}} = \frac{q_0}{H_0 U_0}. \quad (3.)$$

3.4.1 Développement associé à l'échelle temporelle hydrodynamique

Lorsque le couplage écoulement/évolution du fond observé à l'échelle temporelle de l'écoulement, nous obtenons le système (3.6)–(3.7) que nous avons adimensionné pour le temps par la relation (3.15) :

$$\bar{t} = \frac{U_0}{L} t^*.$$

En gardant cette échelle de temps et les autres échelles que nous avons déjà utilisées (plus haut) pour le fond, le flux et la longueur, l'équation (3.15) s'écrit alors sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \epsilon \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (3.22)$$

où ϵ , rapport du temps hydrodynamique par le temps de déformation du fond est aussi le rapport entre le débit de matières transportées au fond et le débit d'eau (le flux de l'eau par unité de section est $Q = H_0 U_0$) :

$$\epsilon = \frac{q_0}{Q}. \quad (3.23)$$

Lorsqu'on se limite aux structures de fond comme les dunes, Fowler [54] estime que la valeur de ϵ est typiquement de l'ordre de 10^{-2} . Donc en première approximation, le fond est bien fixe pour le fluide ($\partial f / \partial t = 0$).

3.4.2 Développement associé à l'échelle temporelle du fond

Si maintenant nous adimensionnons l'équation d'évolution du fond (3.15) avec l'échelle de temps 3.16 :

$$t^* = \frac{H_0 L}{q_0} \bar{t}, \quad (3.24)$$

et que nous gardons identiques les échelles spatiales du fluide et du fond. Lorsque ϵ tend vers zéro les équations de Saint-Venant (3.10)–(3.11) et d'évolution du fond (3.15) en grandeurs sans dimension s'écrivent alors ($\beta = 0$, on néglige le frottement dans le fluide) :

$$\frac{\partial(\bar{h}\bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \text{et} \quad F_0^2 (\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}}) = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}}. \quad (3.26)$$

Les équations du fluide (3.25)–(3.26) sont stationnaires en première approximation à l'échelle temporelle du fond.

3.4.3 Résolution

Dans un premier temps nous "négligeons" l'effet du frottement ($\beta \ll 1$) sur l'écoulement mais pas sur le flux de matières. On obtient alors une intégrale première du mouvement par le fluide.

La résolution des équations (3.25)–(3.26) revient à :

$$\bar{\eta} = \frac{F_0^2}{2} (1 - \bar{U}^2), \quad \bar{h} = 1 + \bar{\eta} - \bar{f} \quad (3.27)$$

$$(1 - \bar{f} + \frac{F_0^2}{2} (1 - \bar{U}^2)) \bar{U} - 1 = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}}, \quad \text{avec,} \quad \bar{l}_{sat} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} + \bar{q} ((\bar{U}^2 - \bar{\tau}_s - \bar{\Lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}})^{3/2}). \quad (3.29)$$

A titre illustratif, nous résolvons (3.28) par un algorithme de Newton, puis nous calculons fond à partir de (3.29). Les résultats sont représentés sur la figure Fig.3.3. Dans le cas d'un régime subcritique de l'écoulement, le fond avance dans le sens de l'écoulement, et sa hauteur est atténuée. En revanche dans le cas d'un régime supercritique de l'écoulement, le fond avance dans le sens opposé, et la hauteur diminue également.

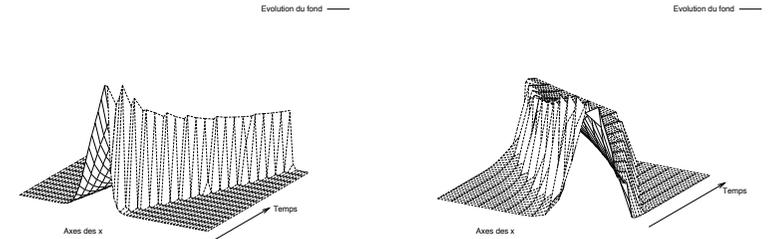


FIG. 3.3 – L'écoulement de base est dirigé de la gauche vers la droite, $\bar{\Lambda} = 0$. La bosse initiale de hauteur $|f| = 0.2$. Le cas subcritique (gauche) est calculé pour $F_0 = 0.3$ et le cas supercritique (droite) pour $F_0 = 1.7$

3.4.4 Analyse de stabilité linéaire

Nous linéarisons les variables comme au paragraphe 3.2.2. Pour $|f| \ll 1$, nous pouvons écrire, en notant q_l le flux saturé (3.18) linéarisé sous la forme :

$$q_l = (1 - \bar{\tau}_s)^{3/2} \left(1 + \frac{3f}{2(1 - F_0^2)(1 - \bar{\tau}_s)} - \frac{3\bar{\Lambda}}{2(1 - \bar{\tau}_s)} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right) + \mathcal{O}(f^2) \quad (3.30)$$

Décomposons la perturbation du fond en modes de Fourier :

$$f = f_k e^{(\sigma t + i(\omega t - kx))}. \quad (3.31)$$

La relation de dispersion est alors :

$$\sigma + i\omega = \frac{1}{1 - ik\bar{l}_{sat}} \left(\frac{3ik(1 - \bar{\tau}_s)^{1/2}}{1 - F_0^2} - \frac{3\bar{\Lambda}k^2(1 - \bar{\tau}_s)^{1/2}}{2} \right) \quad (3.32)$$

Lorsque $\bar{\Lambda} = 0$, et $\bar{l}_{sat} = 0$, on obtient un taux d'amplification nul ($\sigma = 0$) pour tous les modes k . Quand l'écoulement est subcritique, la vitesse de phase est positive: la bosse avance dans le sens de l'écoulement. Dans le cas supercritique la bosse remonte l'écoulement. Les perturbations ne sont pas amplifiées, les bosses se déplacent sans se déformer.

Lorsque $\bar{\Lambda}$ est différent de zéro, et $\bar{l}_{sat} = 0$: l'effet de la pente (terme proportionnel à $\bar{\Lambda}$) a un rôle diffusif et le fond est stable (Une bosse donnée disparaît comme on le voit sur la figure Fig.3.3).

Le fond est encore stable si $\bar{\Lambda} = 0$ et $\bar{l}_{sat} \neq 0$. De même, lorsque $\bar{\Lambda} \neq 0$ et $\bar{l}_{sat} \neq 0$, le fond est stable.

Ce changement de nature suivant le régime subcritique/ supercritique est bien connu, il s'agit du passage des dunes aux antidunes en eau peu profonde.

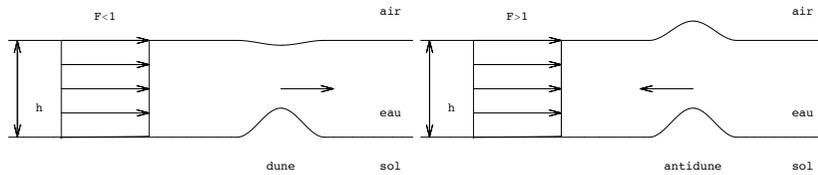


FIG. 3.4 – L'écoulement de base est dirigé de la gauche vers la droite. Suivant le régime, subcritique (ou fluvial, $F_0 < 1$, à gauche), ou super critique (ou torrentiel, $F_0 > 1$, à droite) une bosse sur un fond érodable va se déplacer dans le sens du courant ou le remonter.

3.5 Conclusion

Il ressort de cette analyse très schématique que le fond reste stable quelle que soit la perturbation et quel que soit le régime de l'écoulement. Ceci n'est pas conforme à la réalité. Cela est dû à la formulation du frottement $\tau \propto u^2$.

Quand on résout entièrement les équations de Navier-Stokes sur une bosse, ce que nous ferons au chapitre 4, page 55, nous verrons que le maximum de frottement est atteint juste en

amont de la bosse.

Pour corriger le modèle $\tau \propto u^2$ et $u = u(f)$, Kennedy (1963) [65], Fowler (2001) [] émettent donc l'idée de déphaser τ avec f .

Le frottement étant déphasé d'une certaine longueur l (que l'on se donne) avec le fond est reformulé comme suit

$$\tau|_{x+l} \propto u^2|_x. \quad (3.33)$$

Alors, lorsque l est petit, la forme linéarisée de q , et en posant :

$$a = \frac{3}{(1 - \bar{\tau}_s)(1 - F_0^2)}, \quad \text{et} \quad b = \frac{3\bar{\Lambda}}{2(1 - \bar{\tau}_s)} > 0,$$

L'expression du flux saturé linéarisé (3.30), devient : à des constantes près :

$$q_l = 1 + a f(x+l) - b \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (3.34)$$

$$= 1 + a f(x) - (al + b) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + bl \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots \quad (3.35)$$

La relation de dispersion peut alors s'écrire :

$$\sigma + i\omega = \frac{-k^2((al - b) + \bar{l}_{sat}(a - bk^2)) - ik(a - bk^2 + \bar{l}_{sat}(al - b)k^2)}{1 + (k\bar{l}_{sat})^2} \quad (3.36)$$

Dans ce cas, si $\bar{l}_{sat} = 0$, il y a stabilité du fond pour $al > b$. Sinon on peut obtenir une rég de nombres d'ondes ($0 < k < k_c$) où la configuration est instable. Cette idée est intuitive vise à corriger la formulation du frottement. Rigoureusement, le frottement doit être calc avec des équations complètes, ce que nous ferons dans une configuration simplifiée.