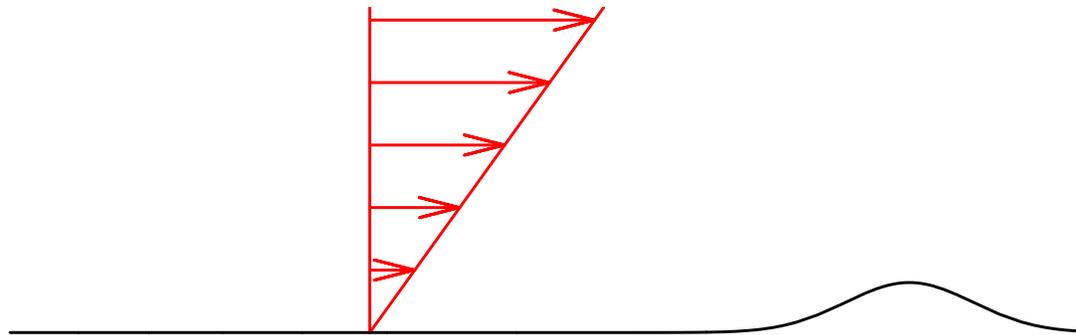
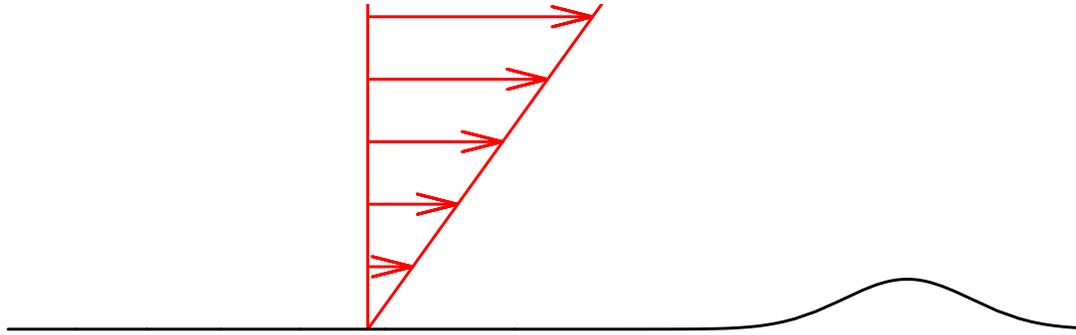


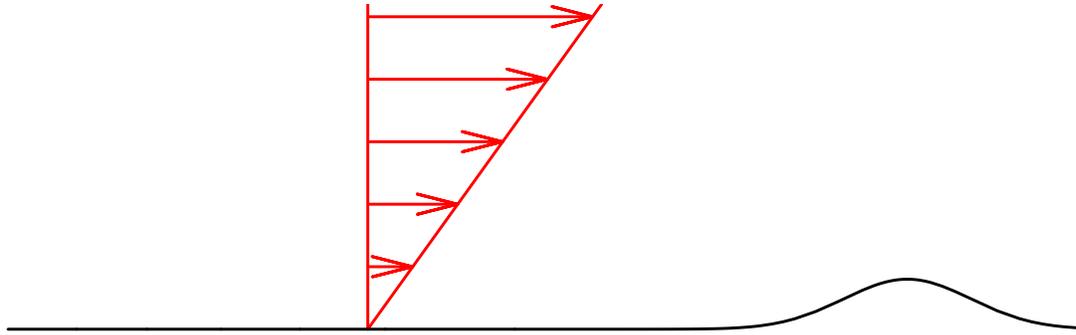
Stabilité d'un fond érodable dans un écoulement cisailé

Pierre-Yves Lagrée,
& Kouamé Kan Jacques Kouakou
Laboratoire de Modélisation en Mécanique
UPMC-CNRS, Paris

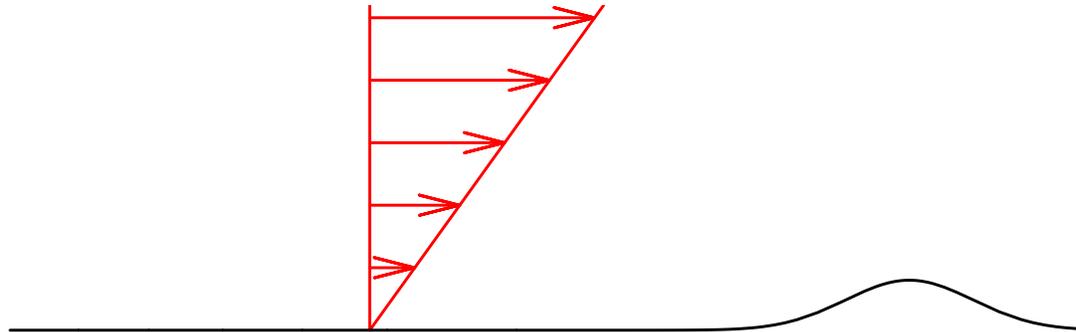




– interaction fluide / sol



- interaction fluide / sol
- problème complexe



- interaction fluide / sol
 - problème complexe
 - simplifications très fortes :
 - écoulement de base : cisaillement
 - écoulement stationnaire 2D
 - simple relation entre le cisaillement et le flux de matériaux
- Mais : comparaisons entre des résultats linéaires et non-linéaires en 2D
3D linéaire

Plan

- relation entre le cisaillement et le flux de matériaux
- Cas $Re \ll 1$ perturbation d'un écoulement cisailé, cas Stokes
- Cas $Re \gg 1$ perturbation d'un écoulement cisailé, cas "Double Deck" : , (erodable / lit solide)
- Conclusion,

Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x, t)$
- ...



Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



Le problème couplé

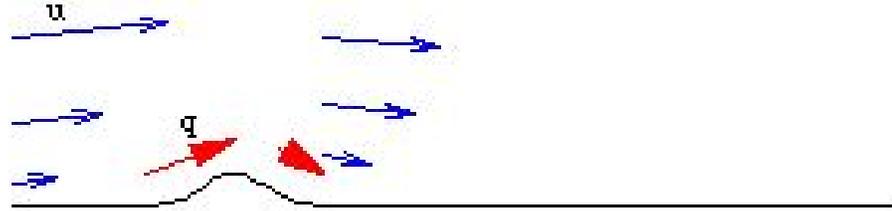
- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



- l'écoulement érode le sol.

Le problème couplé

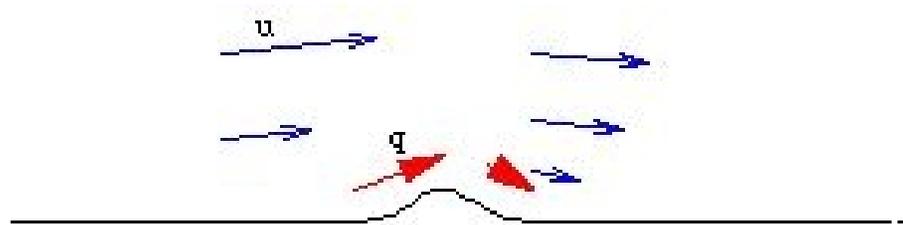
- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



- l'écoulement érode le sol.

Le problème couplé

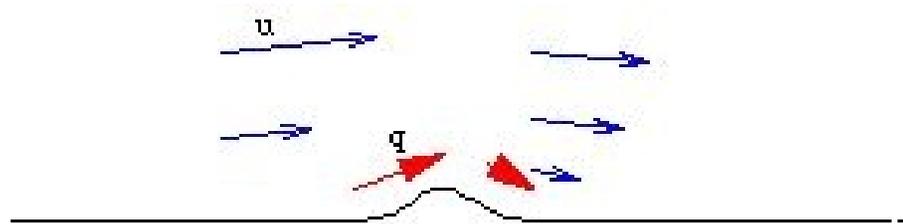
- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.

Le problème couplé

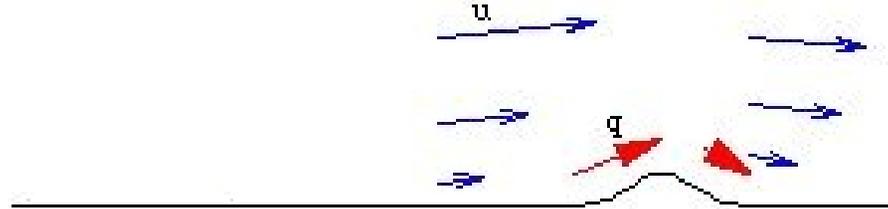
- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.
- *etc*

Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.
- *etc*

Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x, t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x, y, t))$.



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.
- *etc*

nous aller présenter une description simplifiée pour l'écoulement et
et pour l'interaction avec le sol.

Le sol érodable

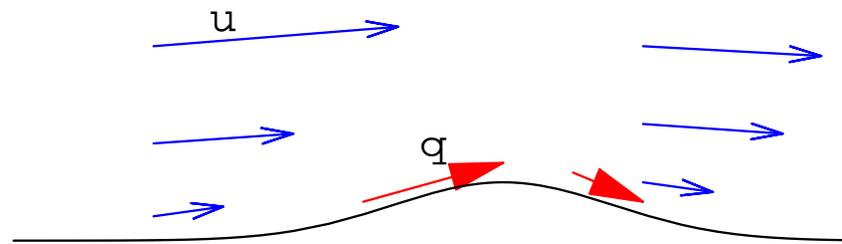
Conservation de la masse pour les sédiments :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

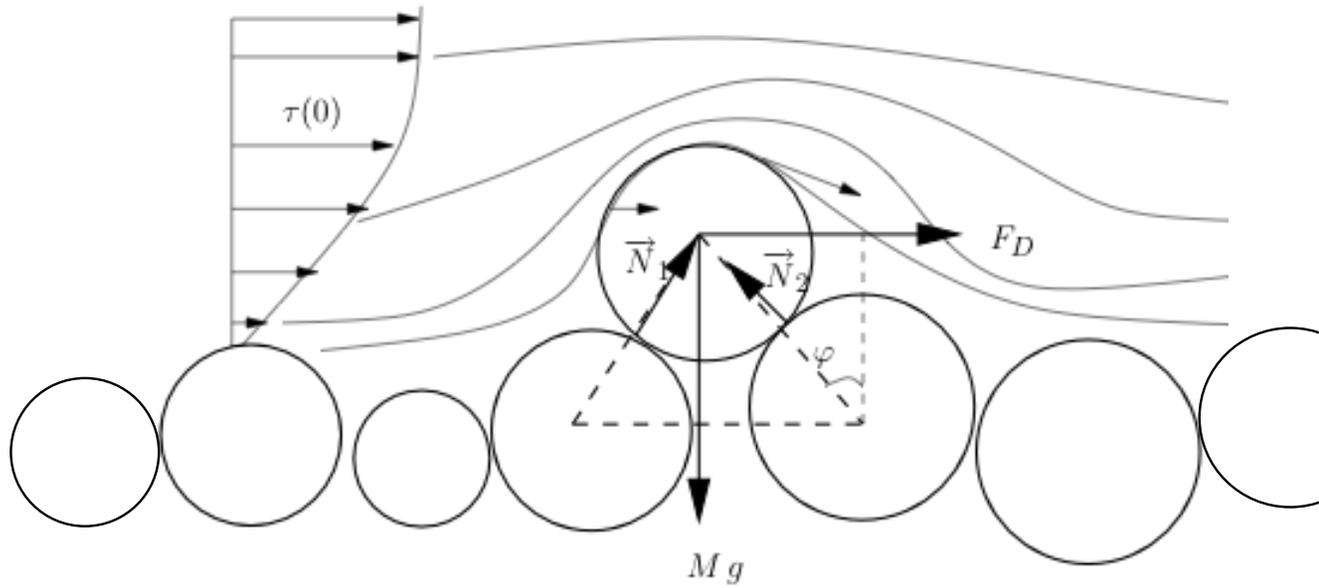
Problème :

Quelle est la relation entre q et l'écoulement ?

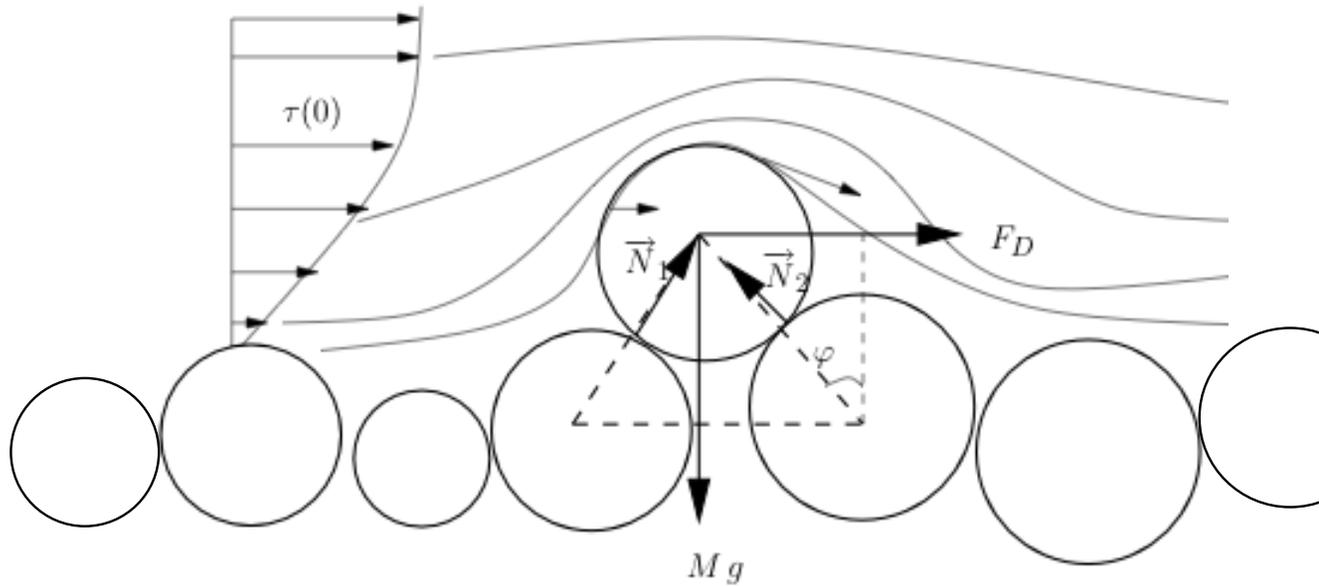
indication : plus u est grand, plus l'érosion est importante et plus grand est q
 q semble être proportionnel au cisaillement pariétal



Mass : Seuil, Le critère de Shield



Mass : Seuil, Le critère de Shield



Les lois d'entraînement de M. Scipion Gras
sur les torrents des Alpes (Annales des ponts et Chaussées, 1857, 2^e semestre) résumées par du Boys 1879 :

“un caillou posé au fond d'un courant liquide, peut être déplacé par l'impulsion des filets qui le rencontrent : le mouvement aura lieu si la vitesse est supérieure à une certaine limite qu'il (S. Gras) nomme vitesse d'entraînement. Cette vitesse limite dépend de la densité, du volume et de la forme du caillou ; elle dépend aussi de la densité du liquide et de la profondeur du courant.”

Mass : Flux

dans la littérature :

$$q_s = E\varpi(\tau^a(\tau - \tau_s)^b)$$

si $(\tau - \tau_s) > 0$ alors $\varpi(\tau - \tau_s) = (\tau - \tau_s)$ sinon $\varpi((\tau - \tau_s)) = 0$.

avec une correction de pente pour le seuil :

$$\tau_s + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

a, E coefficients, $a = 0, b = 3$ ou $a = b = 1$ ou $a = 1/2, b = 1$ ou ...

Mass : Flux

dans la littérature :

$$q_s = E\varpi(\tau^a(\tau - \tau_s)^b)$$

si $(\tau - \tau_s) > 0$ alors $\varpi(\tau - \tau_s) = (\tau - \tau_s)$ sinon $\varpi((\tau - \tau_s)) = 0$.

avec une correction de pente pour le seuil :

$$\tau_s + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

a, E coefficients, $a = 0, b = 3$ ou $a = b = 1$ ou $a = 1/2, b = 1$ ou ...

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans $dV =$

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans $dV = (\text{ce qui rentre})$

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans $dV = (\text{ce qui rentre}) - (\text{ce qui sort})$

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans $dV = (\text{ce qui rentre}) - (\text{ce qui sort})$

...

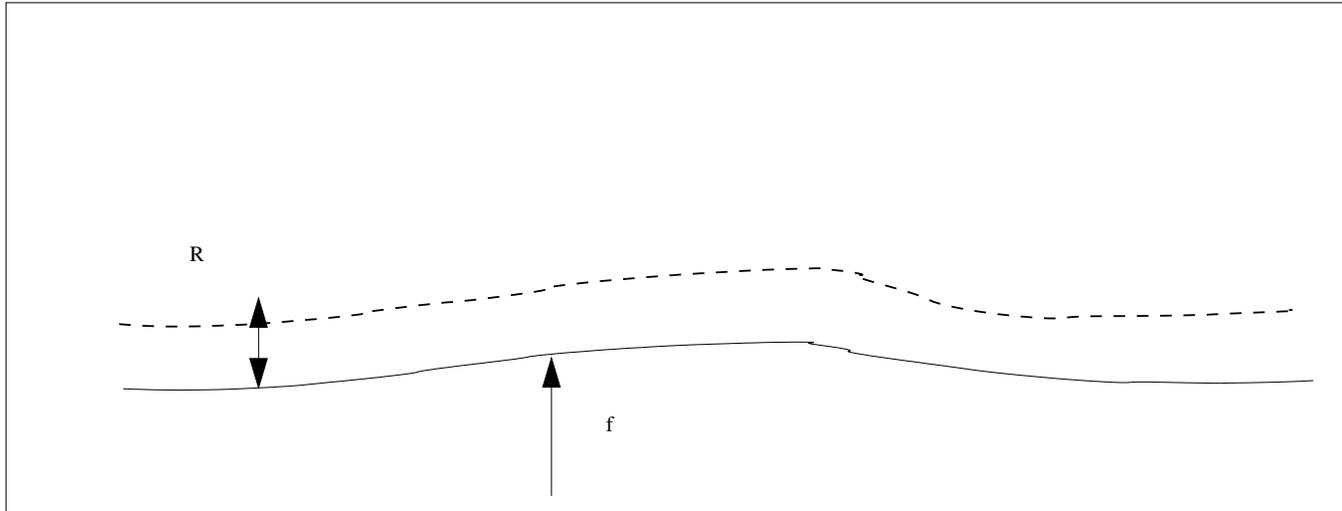
Lagrée 03

Charru Hinch 05

Valance Langlois 05

...

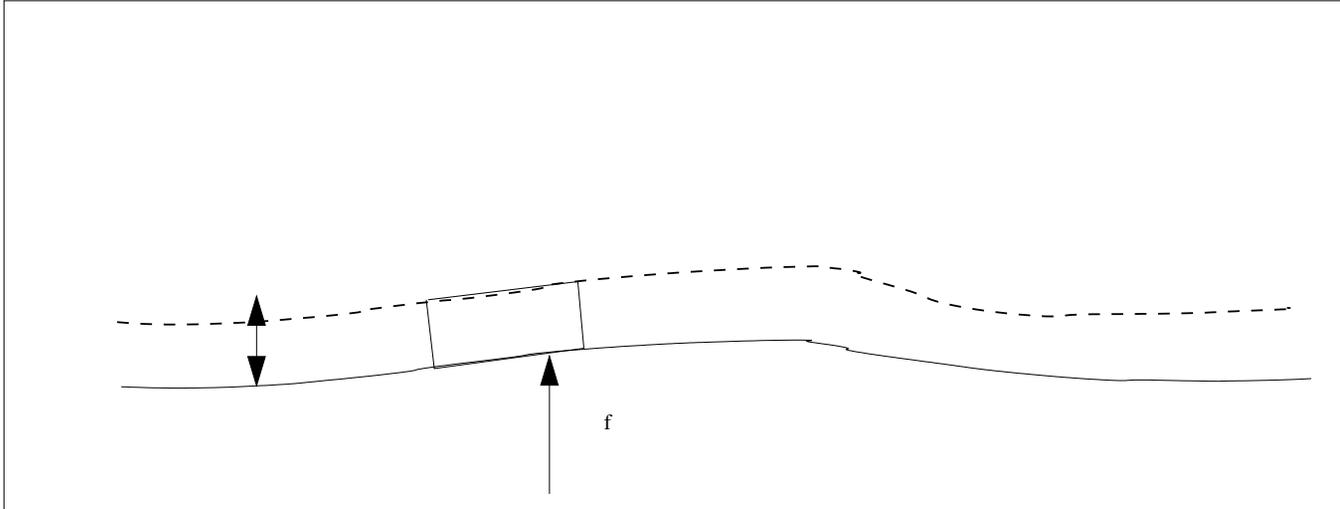
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dots$$

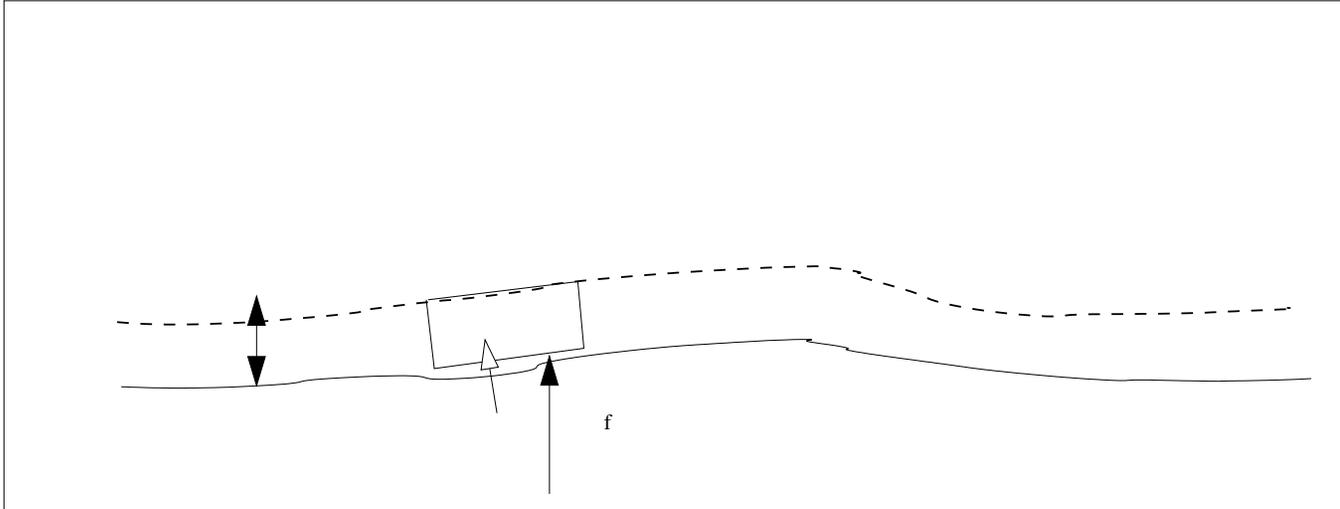
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dots$$

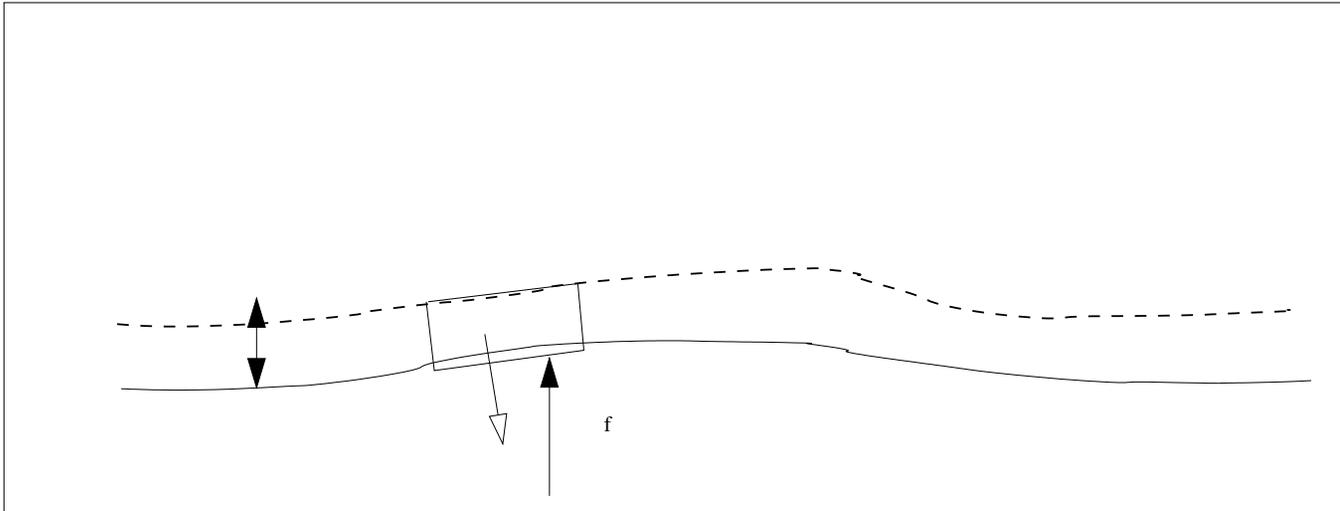
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dots + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

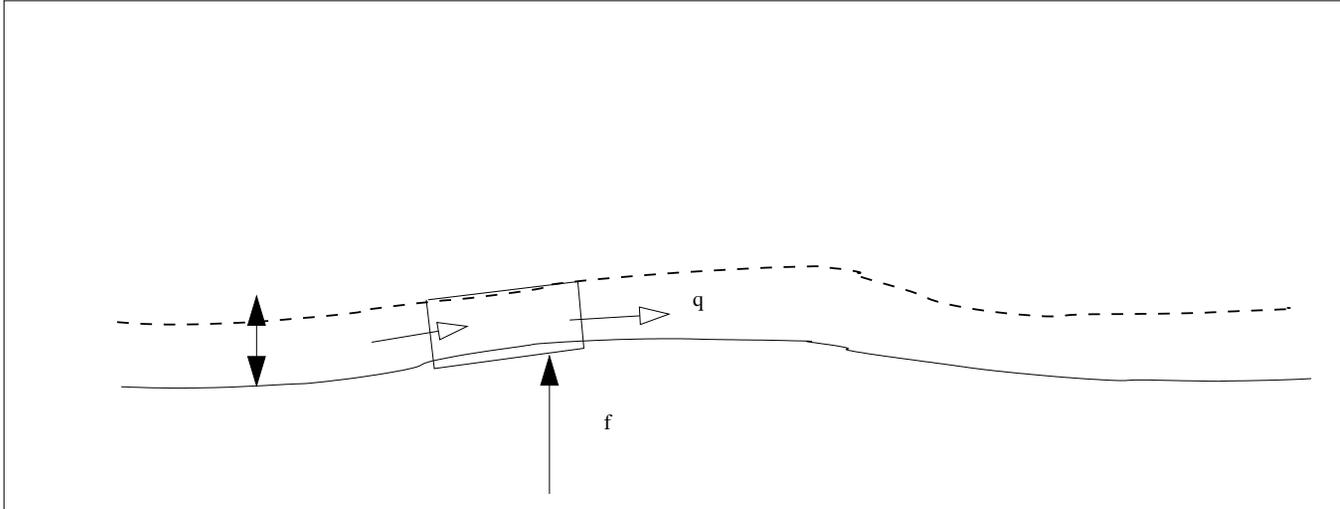
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dots + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

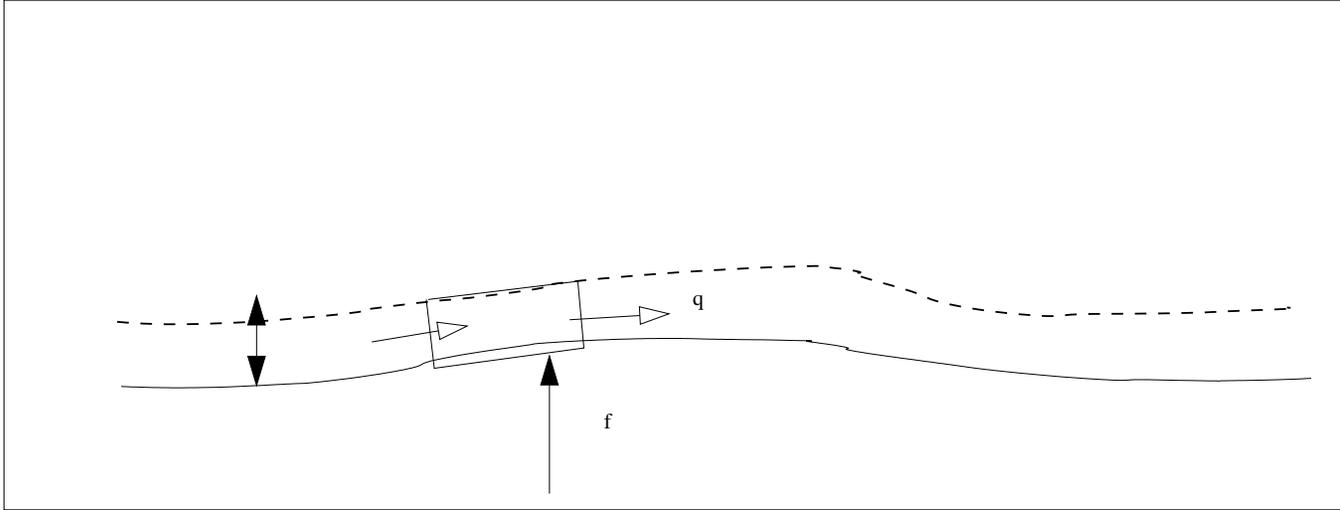
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

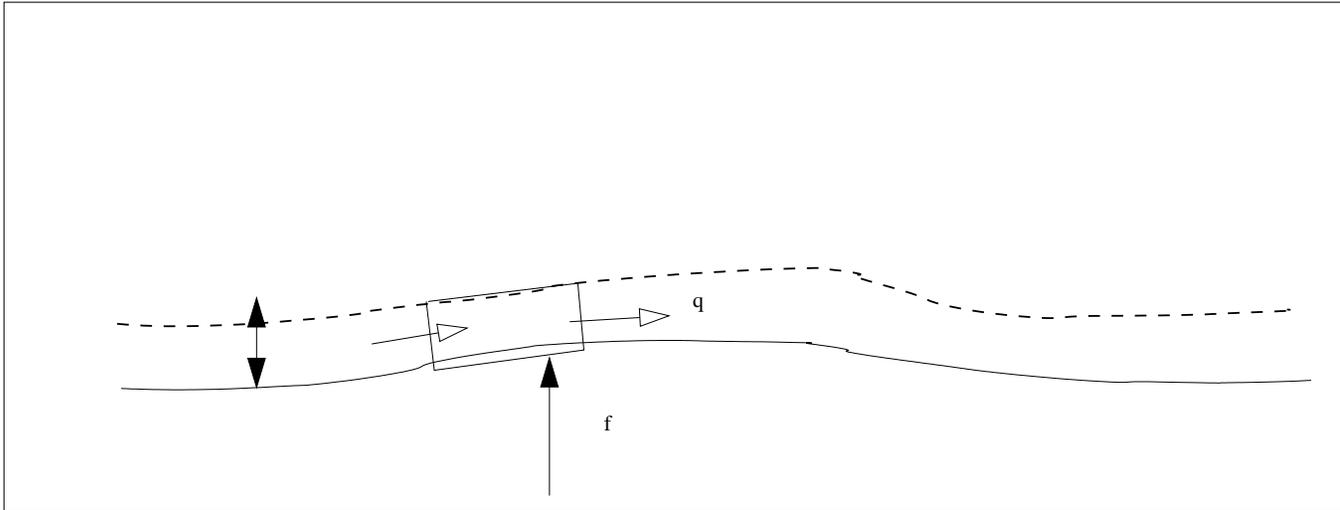
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

Masse : loi de conservation

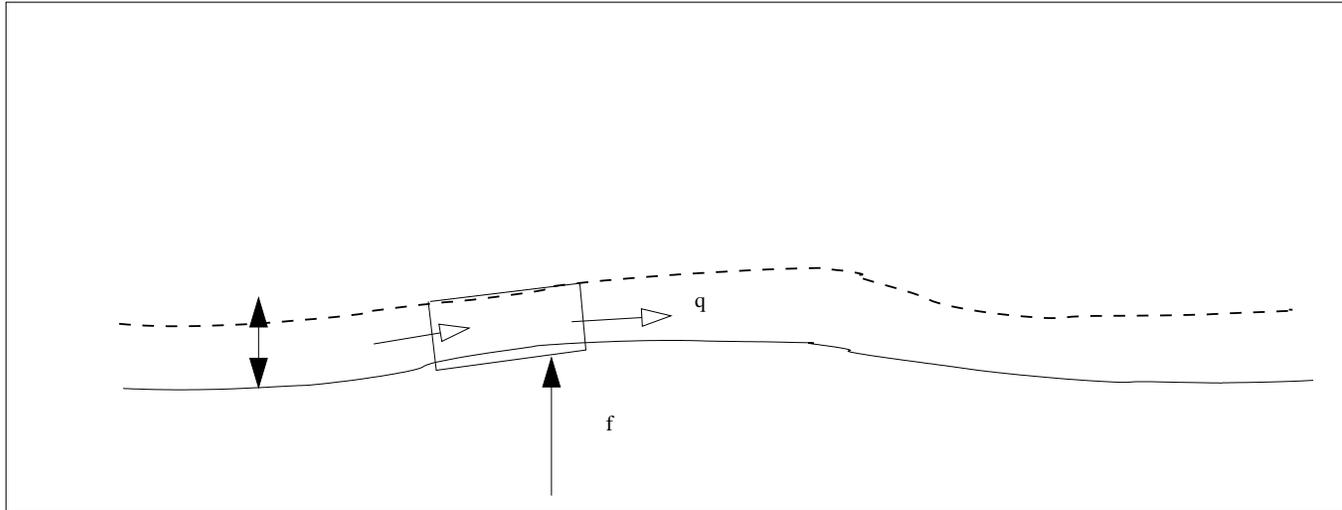


$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

$$\Gamma = (\text{érosion}) - (\text{déposition})$$

Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

$$\Gamma = (\text{érosion}) - (\text{déposition})$$

$$-(\text{déposition}) \propto -R$$

$$\text{érosion} \propto (\tau - \tau_s)$$

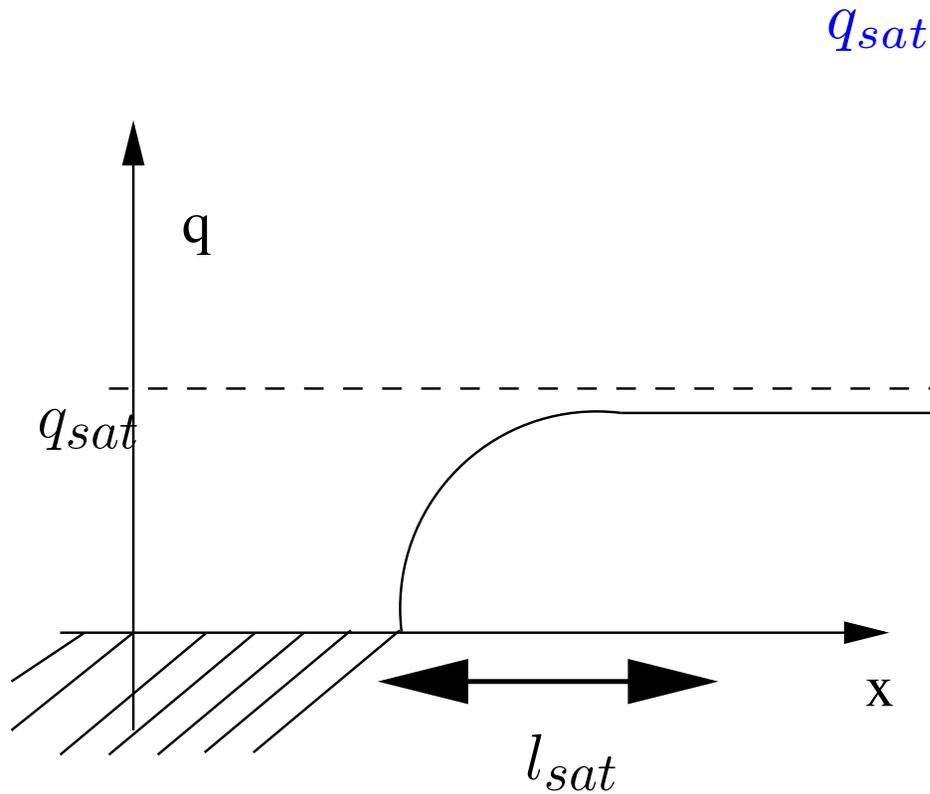
$$\text{et } q \propto R$$

Masse : loi de conservation

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}$$

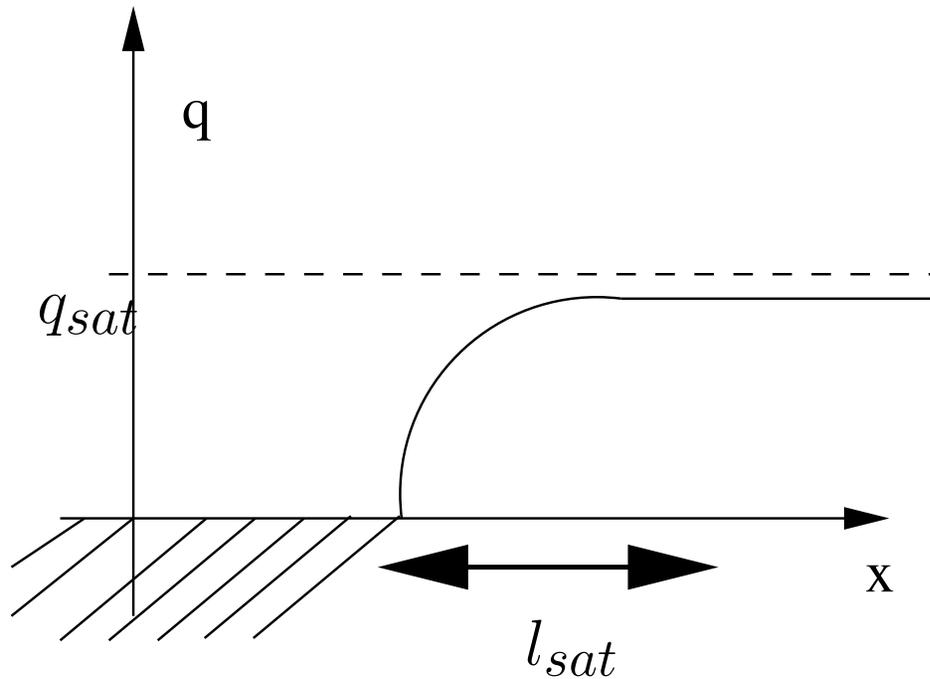
$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$q_{sat} \simeq \varpi((\tau - \tau_s))$$



Sauerman, Kroy, Hermann 01, Andreotti Claudin Douady 02,

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}$$

q_{sat}


Du Boy (1879) :

“une fois une certaine quantité de matières en mouvement sur le fond du lit, la vitesse des filets liquides devient trop faible pour entraîner davantage : le cours d'eau est alors saturé. Un cours d'eau non saturé tend à le devenir en entraînant une partie des matériaux qui composent son lit, et en choisissant de préférence les plus petits.”

Transport de Masse

Un autre point de vue :

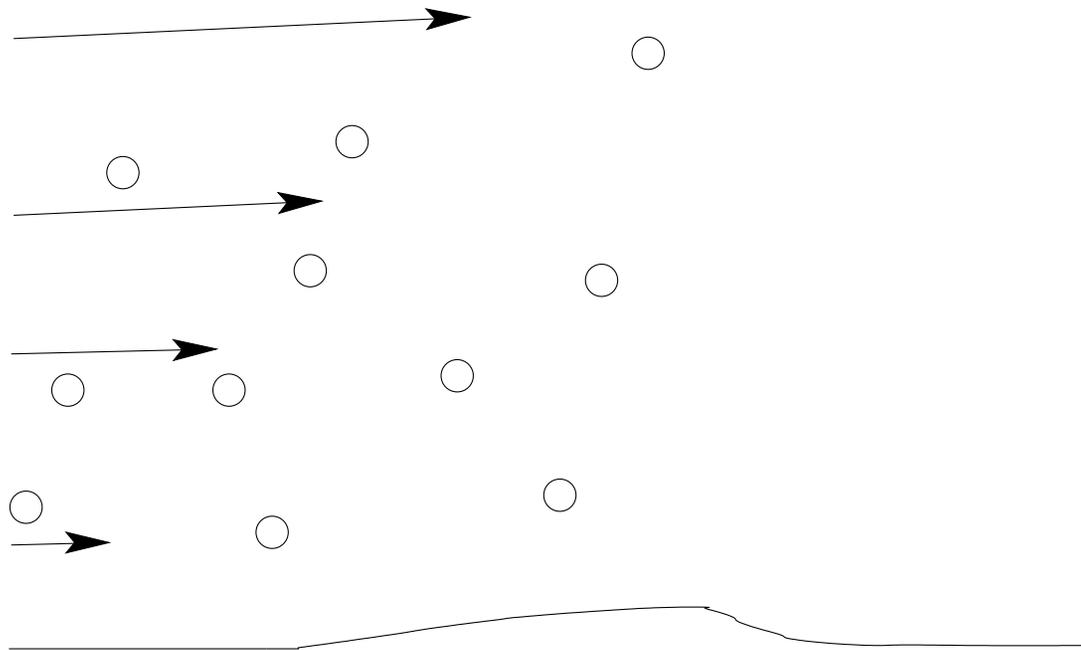
Transport de Masse

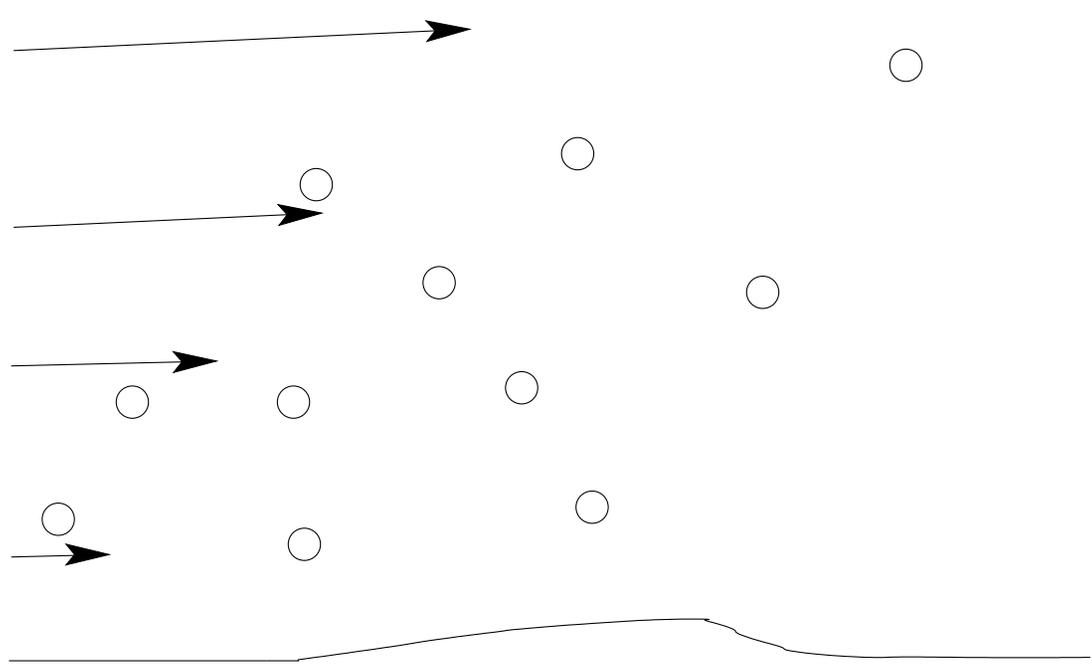
Un autre point de vue :

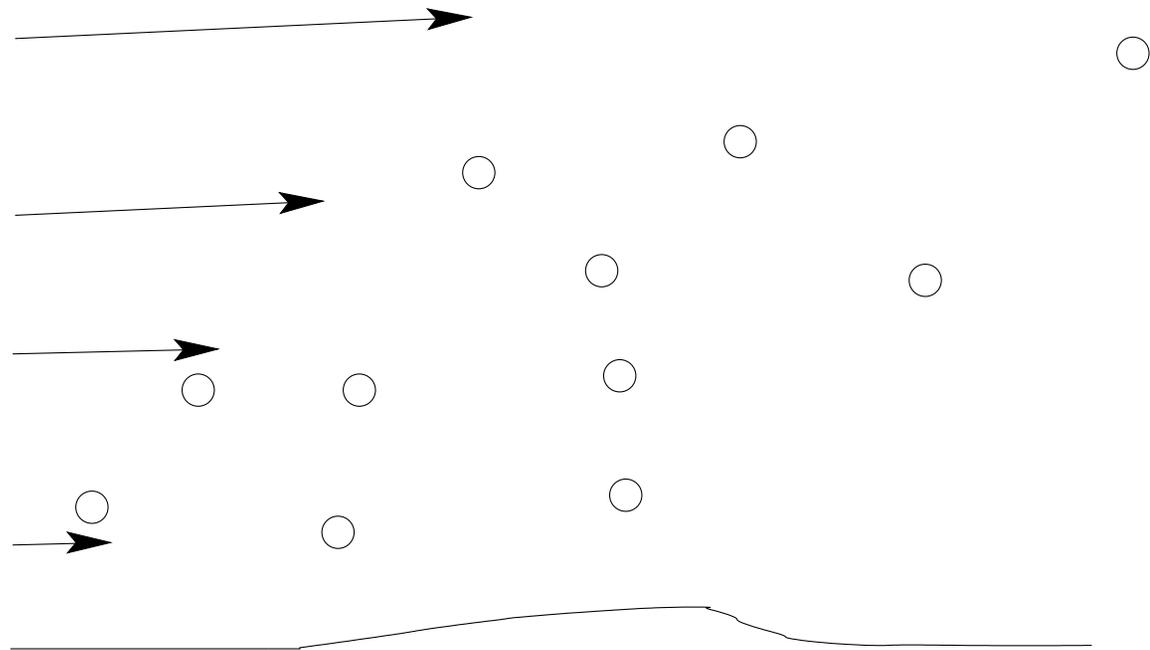
Convection

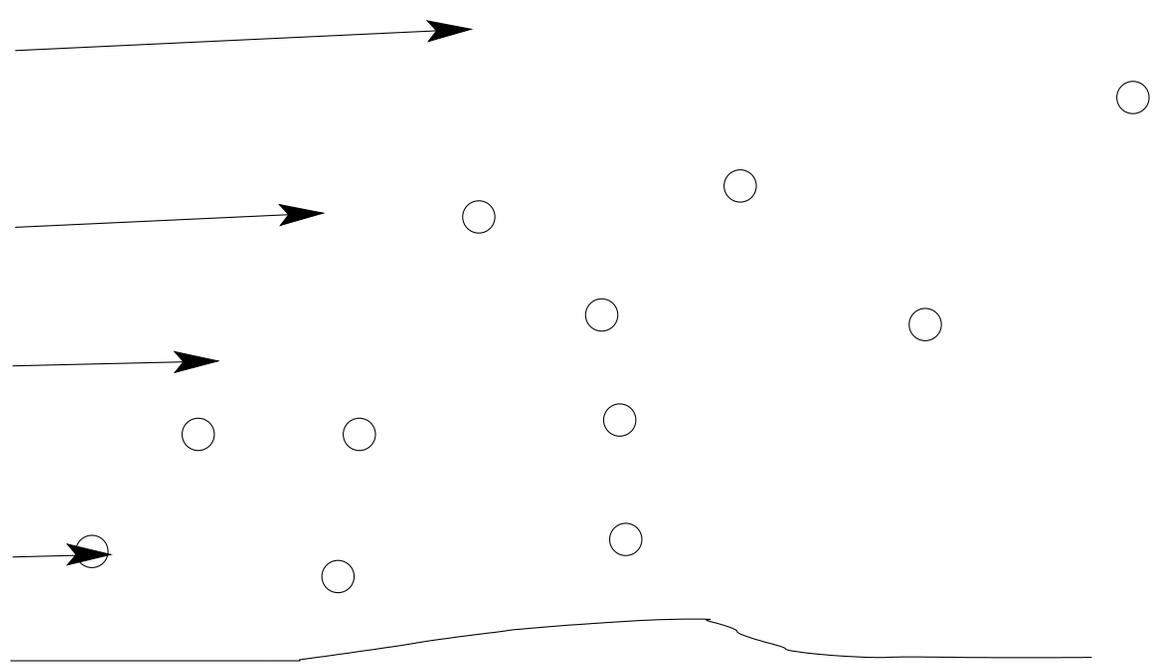
Sédimentation

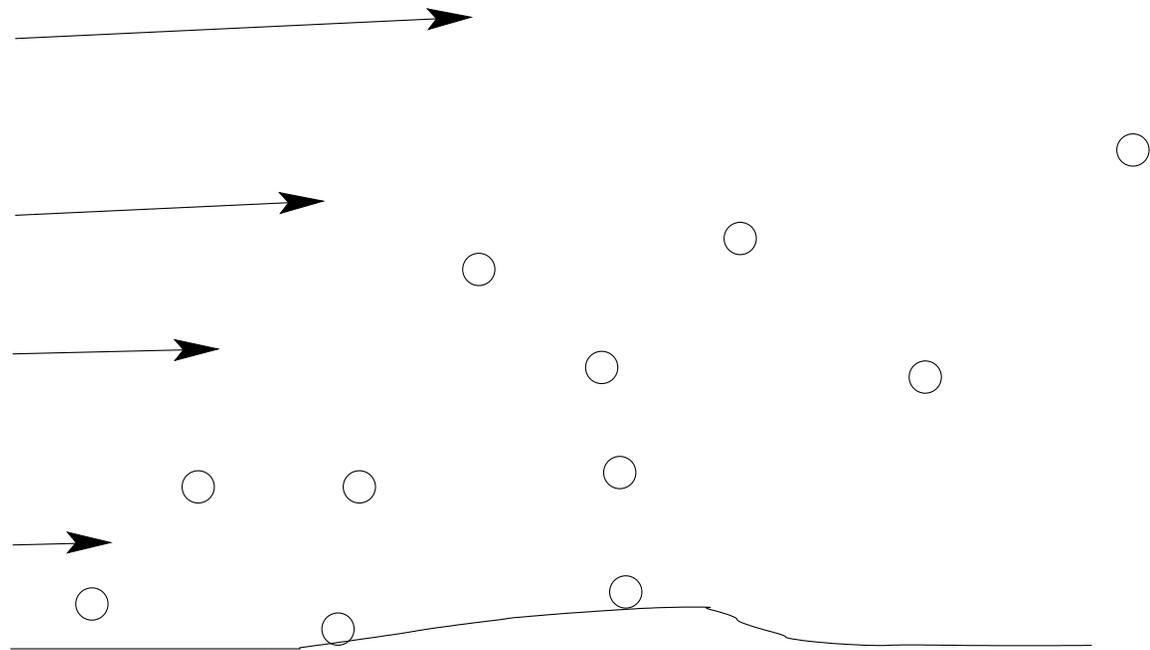
Diffusion

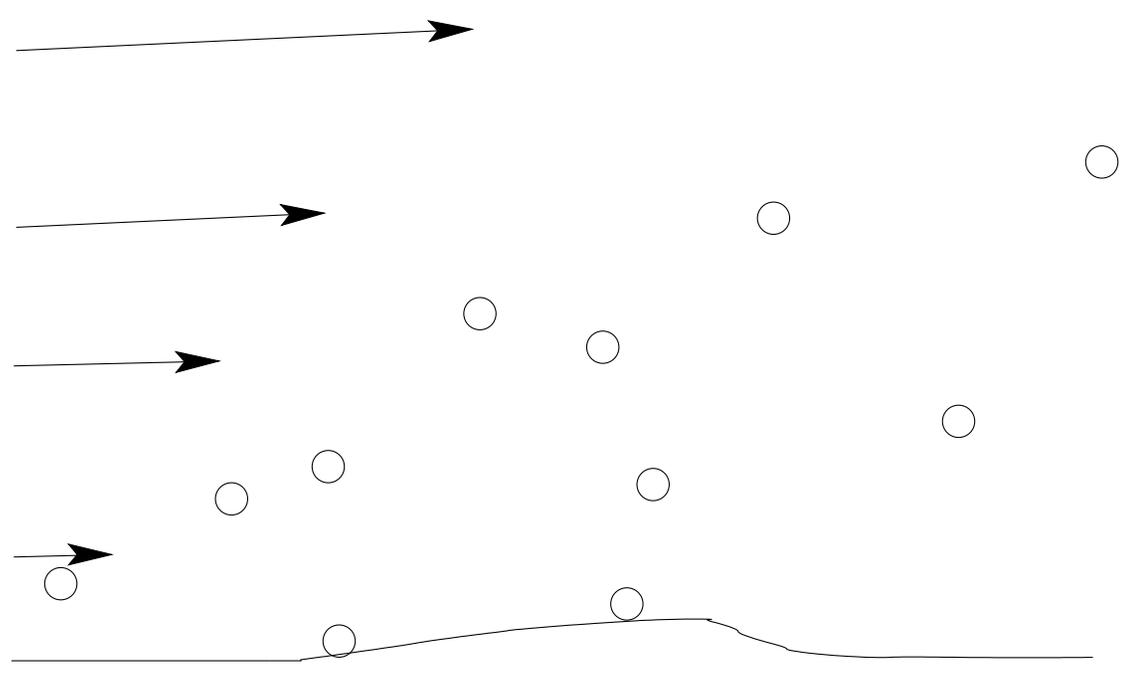


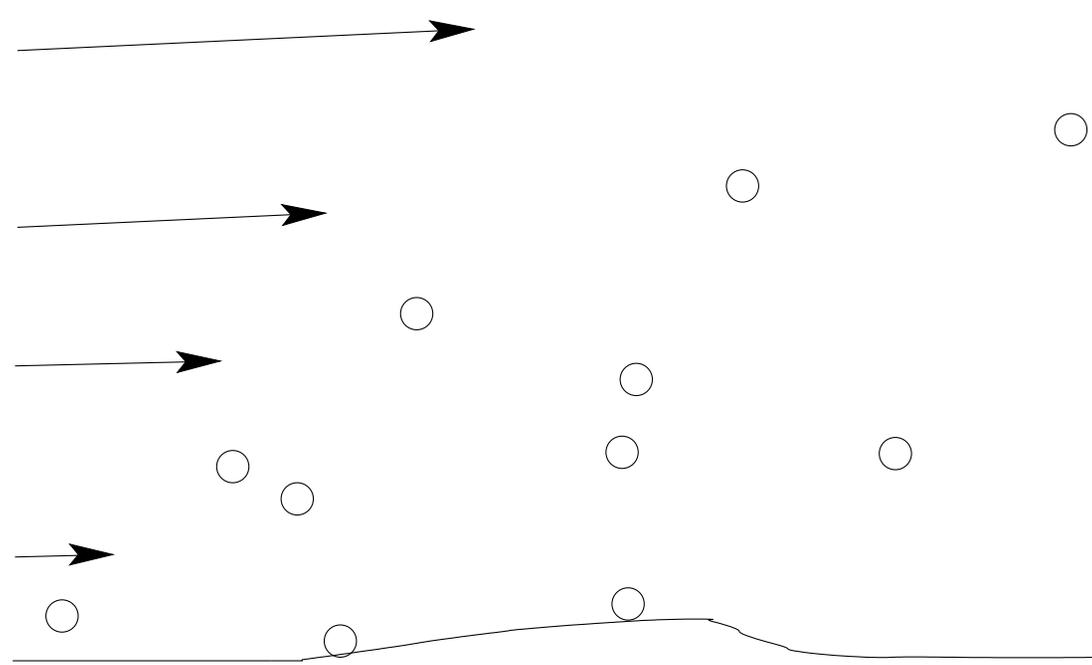


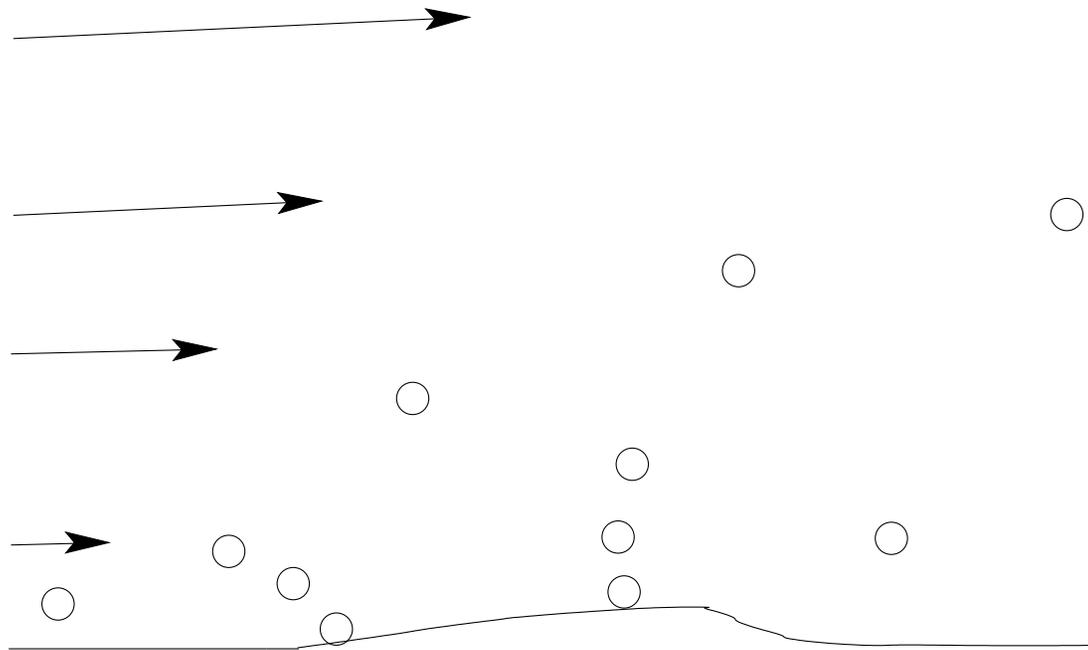


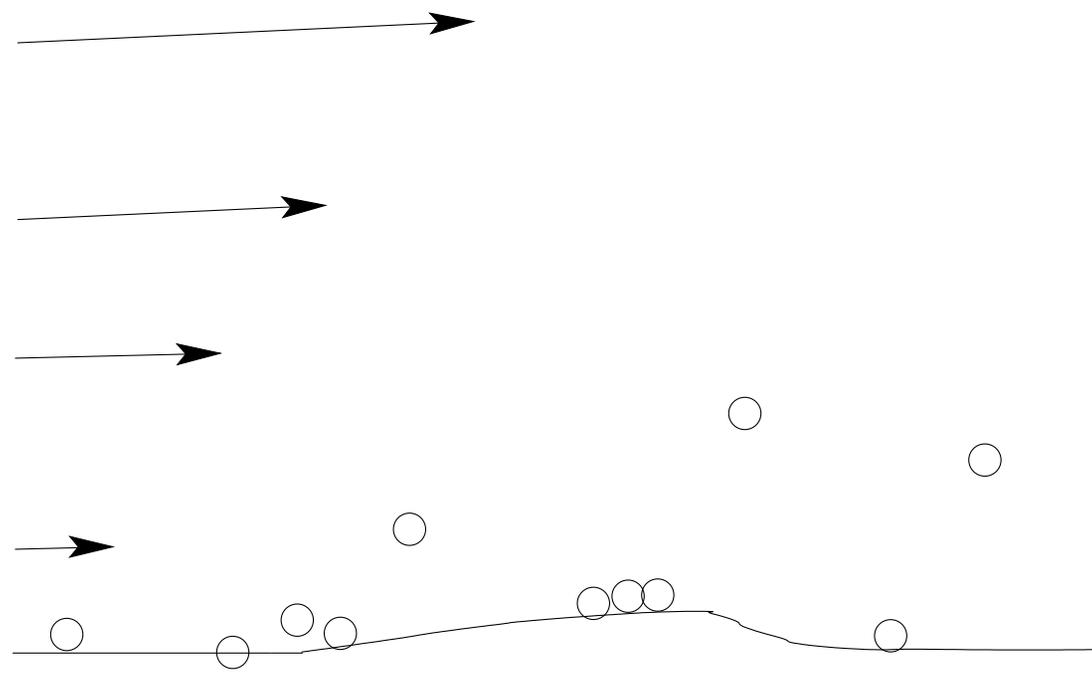


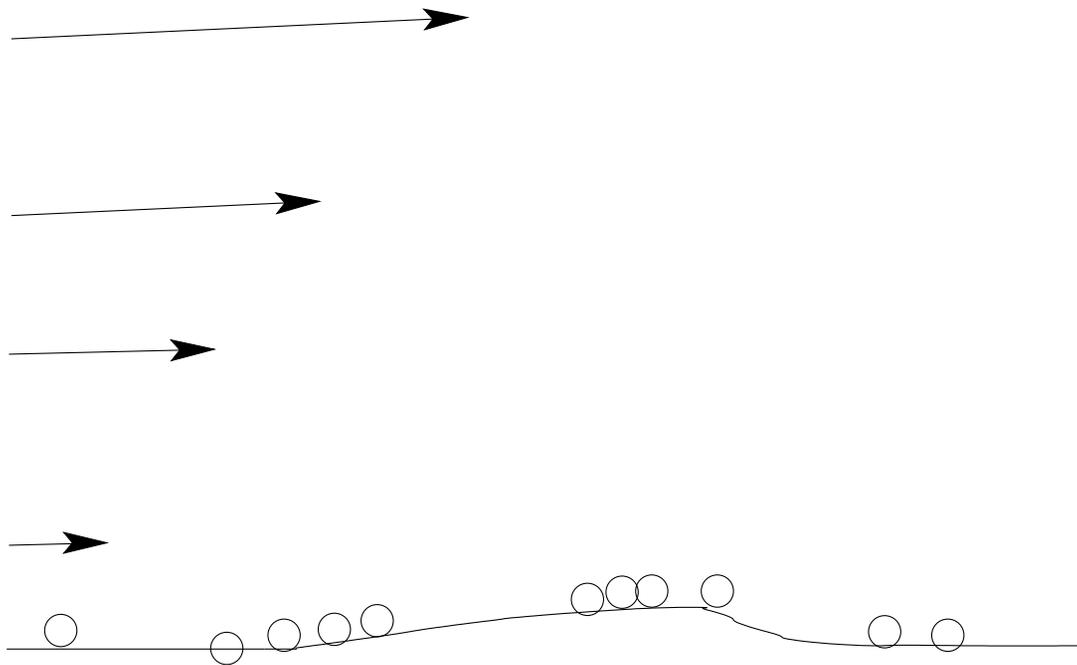


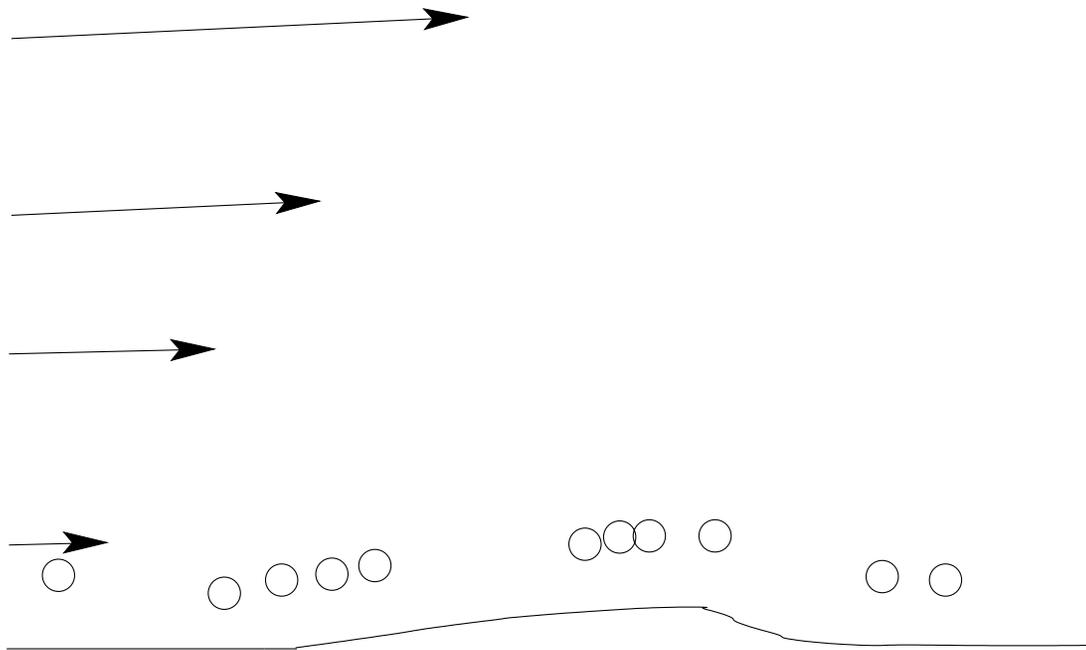












Vitesse des sédiments :

$$u_p =$$

$$v_p =$$

Vitesse des sédiments :

$$u_p = u$$

$$v_p = v$$

Convection

Vitesse des sédiments :

$$u_p = u$$

$$v_p = v - V_f$$

Sedimentation

Vitesse des sédiments :

$$u_p = u - D \frac{\partial c}{\partial x}$$

$$v_p = v - V_f - D \frac{\partial c}{\partial y}$$

Diffusion

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial x} D \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^{\infty} c u dy = q, \dots$

$$\Gamma = -c(x, 0)(V_f) - D \frac{\partial c}{\partial y}(x, 0)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q, \dots$ $\Gamma = -c(x, 0)(V_f) - D \frac{\partial c}{\partial y}(x, 0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma;$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q, \dots$ $\Gamma = -c(x, 0)(V_f) - D \frac{\partial c}{\partial y}(x, 0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma;$$

si $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 > \tau_s$ alors $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = \beta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 - \tau_s \right)^\gamma$, sinon $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = 0$.

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q, \dots$ $\Gamma = -c(x, 0)(V_f) - D \frac{\partial c}{\partial y}(x, 0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma;$$

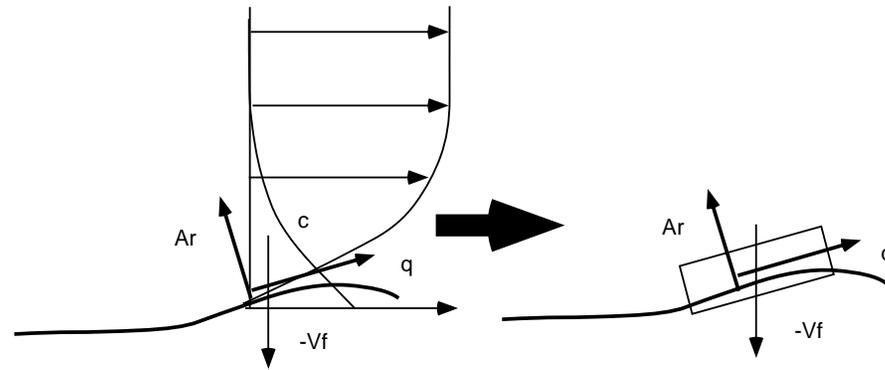
si $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 > \tau_s$ alors $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = \beta \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 - \tau_s \right)^\gamma$, sinon $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = 0$.

i.e. :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Brivois 05/ Lagrée 00, 03

Forme finale



Sauerman, Kroy, Hermann 01/ Andreotti Claudin Douady 02/ Lagrée 00/03 Valance Langlois 05 Hinch Charru (sm) Kouakou Lagrée (sm)

$$l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = (\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})^\gamma).$$

- flux total de sédiments convectés q .
- effet de seuil τ_s
- effet de pente $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$
- $\varpi(x) = x$ si $x > 0$ (sinon 0), $\gamma, l_s \dots$
- attention : $l_s \propto U'_s$ ou $l_s \propto 1/U'_s$

Remarque

- utilisation d'une seule loi : la loi de conservation de la masse
- la loi de la conservation de la quantité de mouvement est sur simplifiée (absente !)

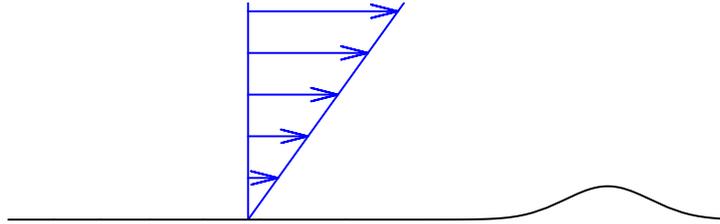
Le fluide

Résolution numérique des équations de Navier Stokes.
En "vrai" : la viscosité change... turbulence...

Ici on présente des simplifications sévères :

- Ecoulement quasistationnaire
- Solution Asymptotique de N.S. : théorie laminaire visqueuse à $Re = 0$
- Solution Asymptotique de N.S. : théorie laminaire visqueuse à $Re = \infty$
Triple Deck Stewartson 69/ Neiland 69 (en fait *Double Deck* Smith 80)
En fait Fowler 01
- Solutions linéarisées

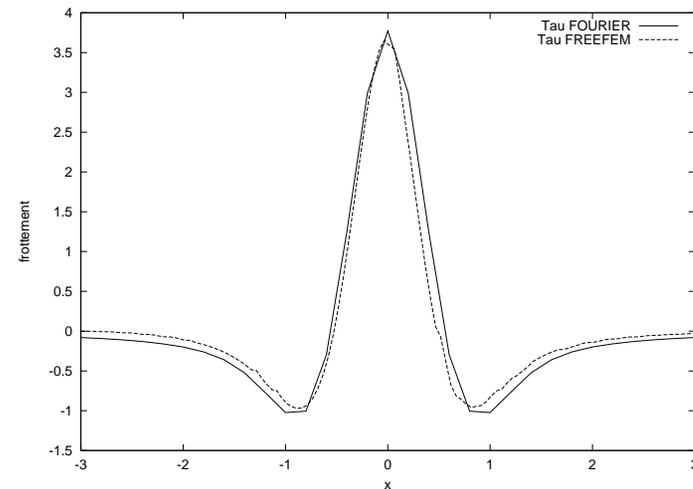
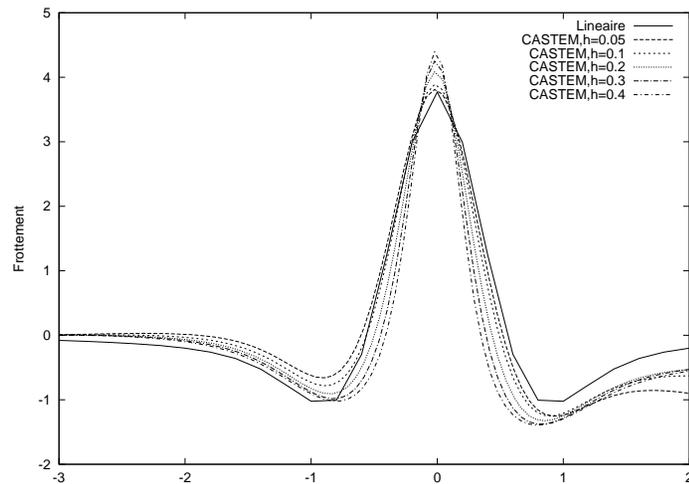
Cas très visqueux $Re = 0$



Écoulement cisailé sur la bosse $f(x, t)$ à faible nombre de Reynolds

$$f(x, t) \text{ donne } \tau = 1 + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'}{x-\xi} d\xi$$

perturbation d'un écoulement cisailé $Re = 0$



perturbation du frottement pariétal calculé par CASTEM $\frac{1}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ pour $0.05 < h_0 < 0.4$ (hauteur) et $Re = 1$
 perturbation calculée avec FreeFem.

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

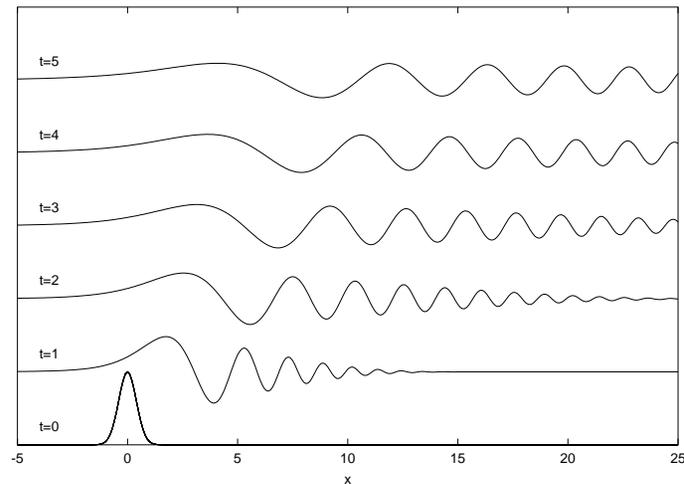
si $q = \tau - \tau_s$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{f'}{x - \xi} d\xi.$$

on obtient l'équation de Benjamin-Ono linéaire.

Evolution calculée, cas $Re = 0$

Résolution numérique
dispersion d'une bosse donnée



[animation](#) une autre [animation](#)

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

- si $q = (\varpi(\tau - \tau_s))$ neutre, dispersif.

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

- si $q = (\varpi(\tau - \tau_s))$ neutre, dispersif.

- si $l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = (\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}))$ configuration stable...

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

- si $q = (\varpi(\tau - \tau_s))$ neutre, dispersif.

- si $l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = (\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}))$ configuration stable...

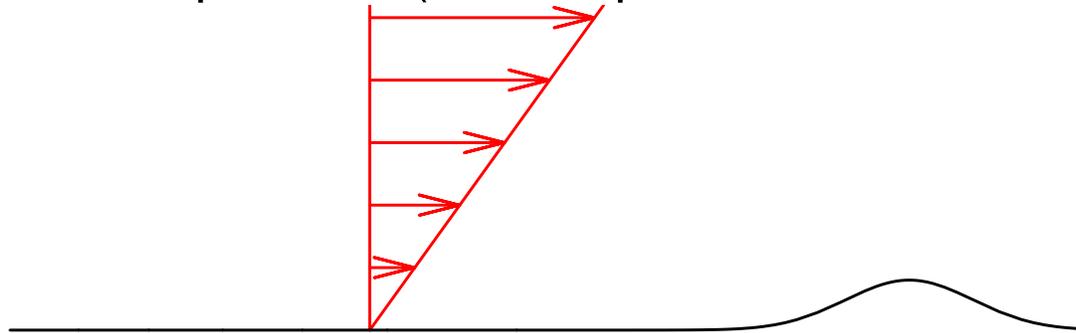
on passe à $Re = \infty$...

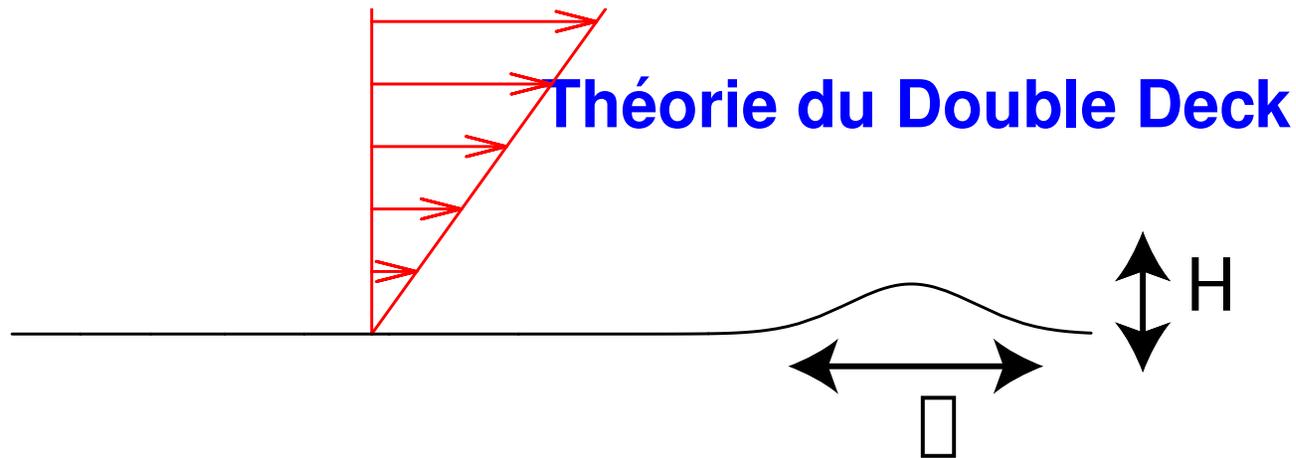
Solution Asymptotique "double deck theory"

Effets visqueux toujours prédominants au fond

Perturbation d'un écoulement cisailé

Résolution Non Linéaire possible (avec séparation : courant de retour)





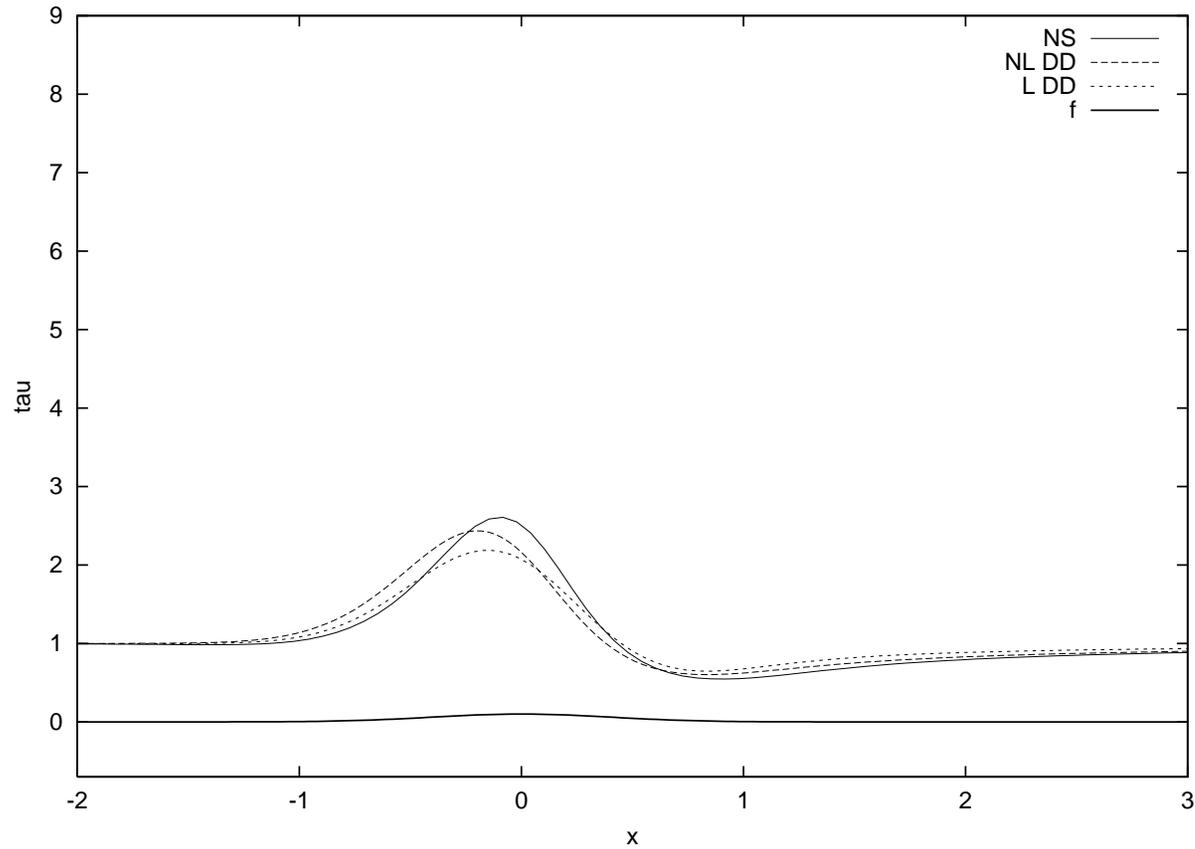
Pour une bosse de longueur d'ordre λ et de hauteur d'ordre $H \ll \delta$:

$$\tau = \mu U'_0 (\bar{U}'_S (1 + (\frac{U'_0}{\nu \lambda})^{1/3} H \tilde{c})), \text{ avec } \tilde{c} = FT^{-1}[FT[\tilde{f}]3Ai(0)(-(i2\pi\tilde{k})\bar{U}'_S)^{1/3}]$$

la fonction du temps \bar{U}'_S est un nombre d'ordre 1.

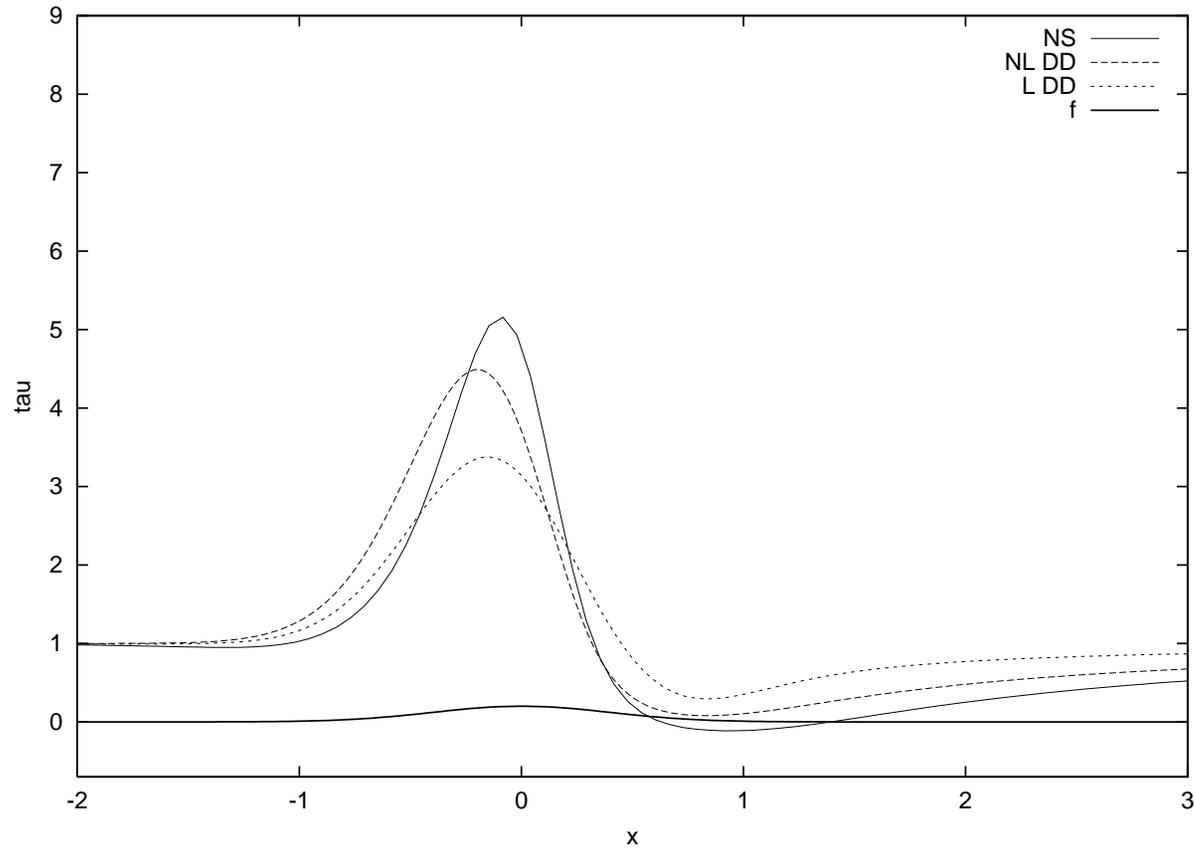
$$(\frac{U'_0}{\nu \lambda})^{1/3} H \leq 1$$

NS/ Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



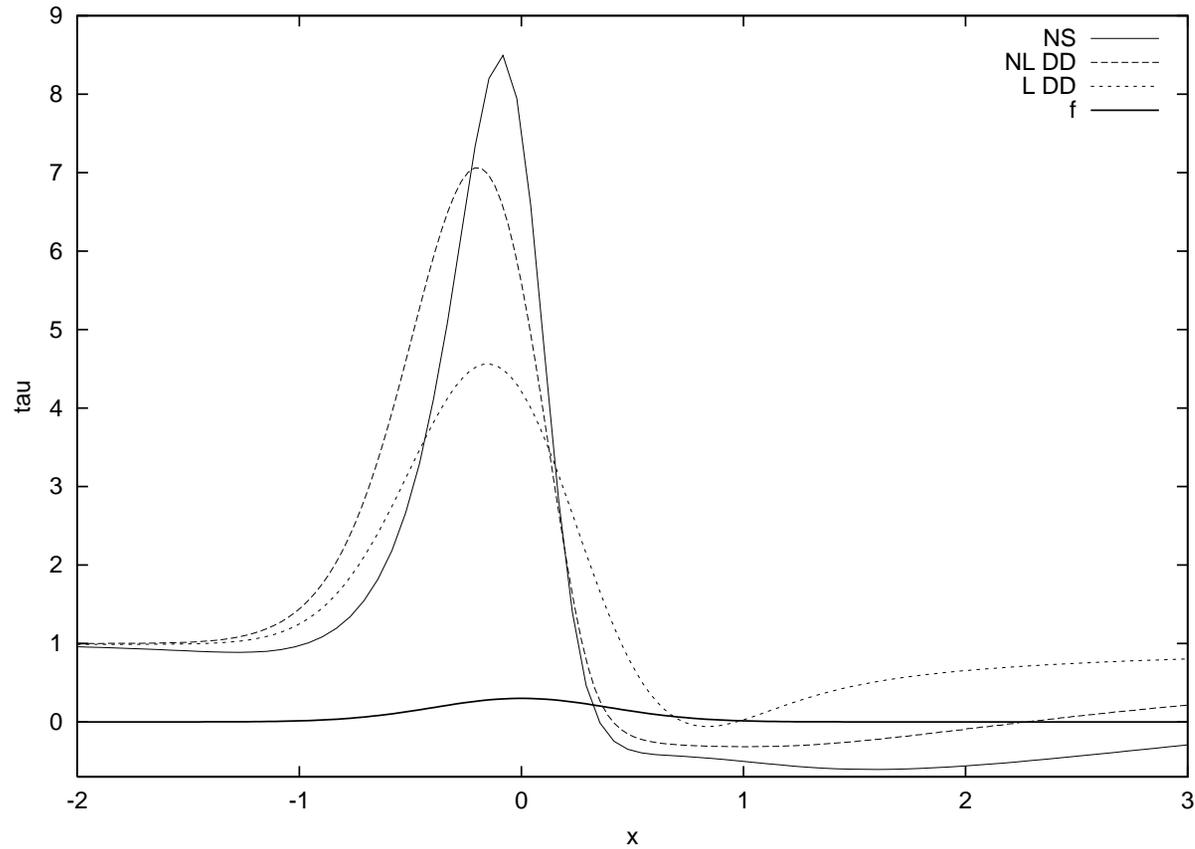
$$h = 0.1, Re = 1000$$

NS/ Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



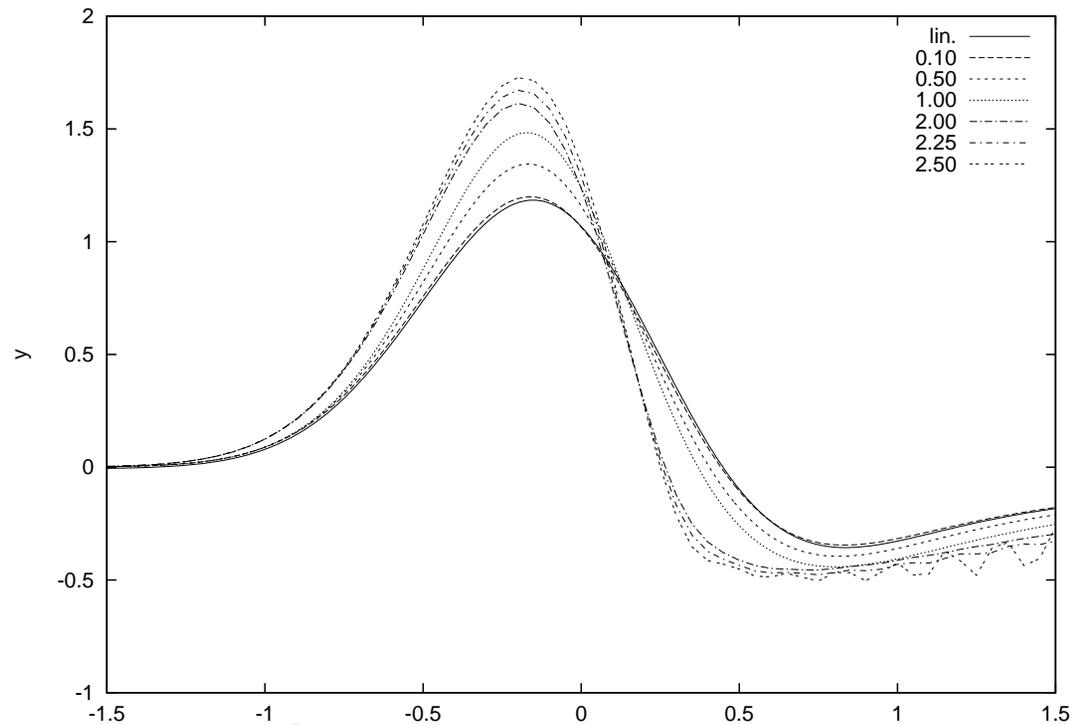
$$h = 0.2, Re = 1000$$

NS/ Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



$$h = 0.3, Re = 1000$$

Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



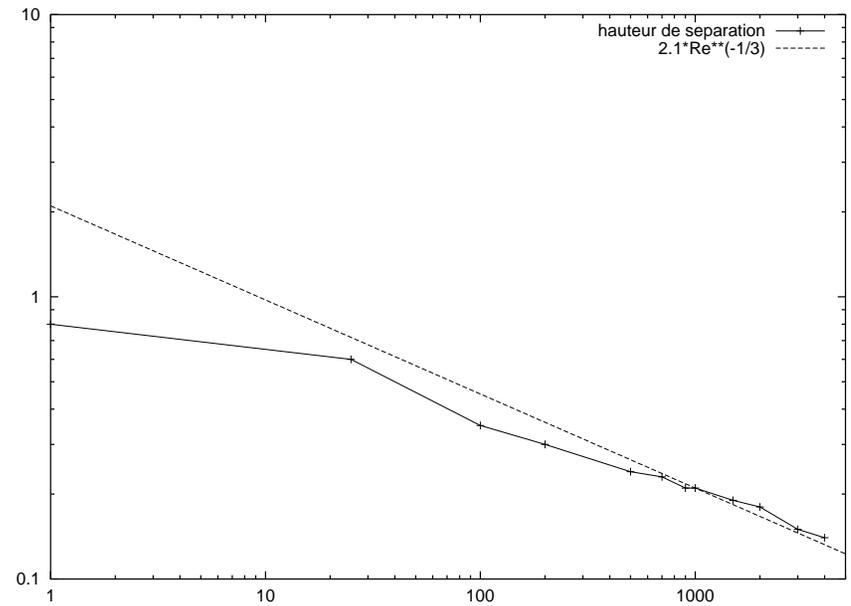
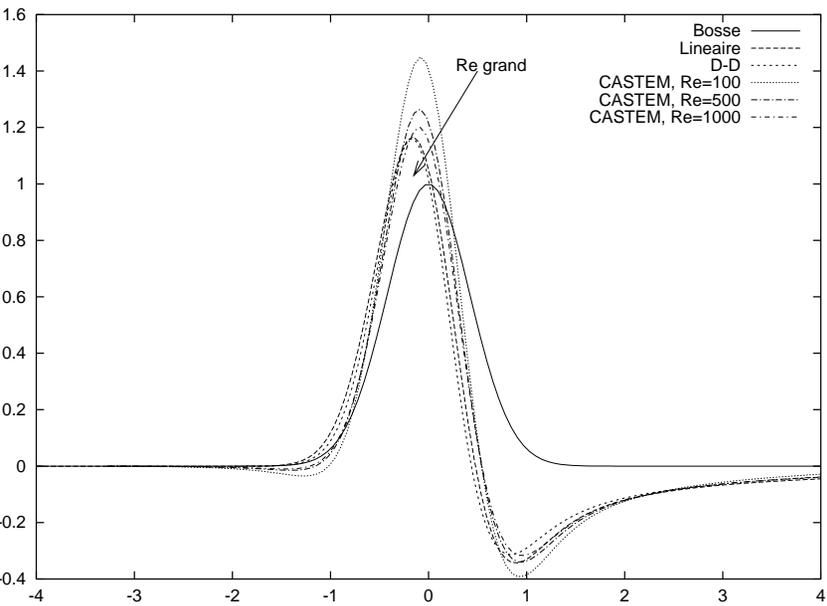
Perturbation réduite du cisaillement

$(\frac{\partial u}{\partial y_0} - 1)/\alpha$ en fonction de x

pour la bosse $\alpha e^{-\pi x^2}$
 avec $\alpha = 0.10, \alpha = 0.5, \alpha = 1.0,$
 $\alpha = 2, \alpha = 2.25, \alpha = 2.50.$
 La courbe "lin." est la prédiction linéaire, les autres
 sont les résolutions numériques nonlinéaires.

(séparation pour $\alpha > 2.1$)

Comparaison avec Navier Stokes



pas mal !

conclusion : la perturbation du cisaillement est en avance par rapport au sommet de la bosse.

Sol complètement érodable

Solution de

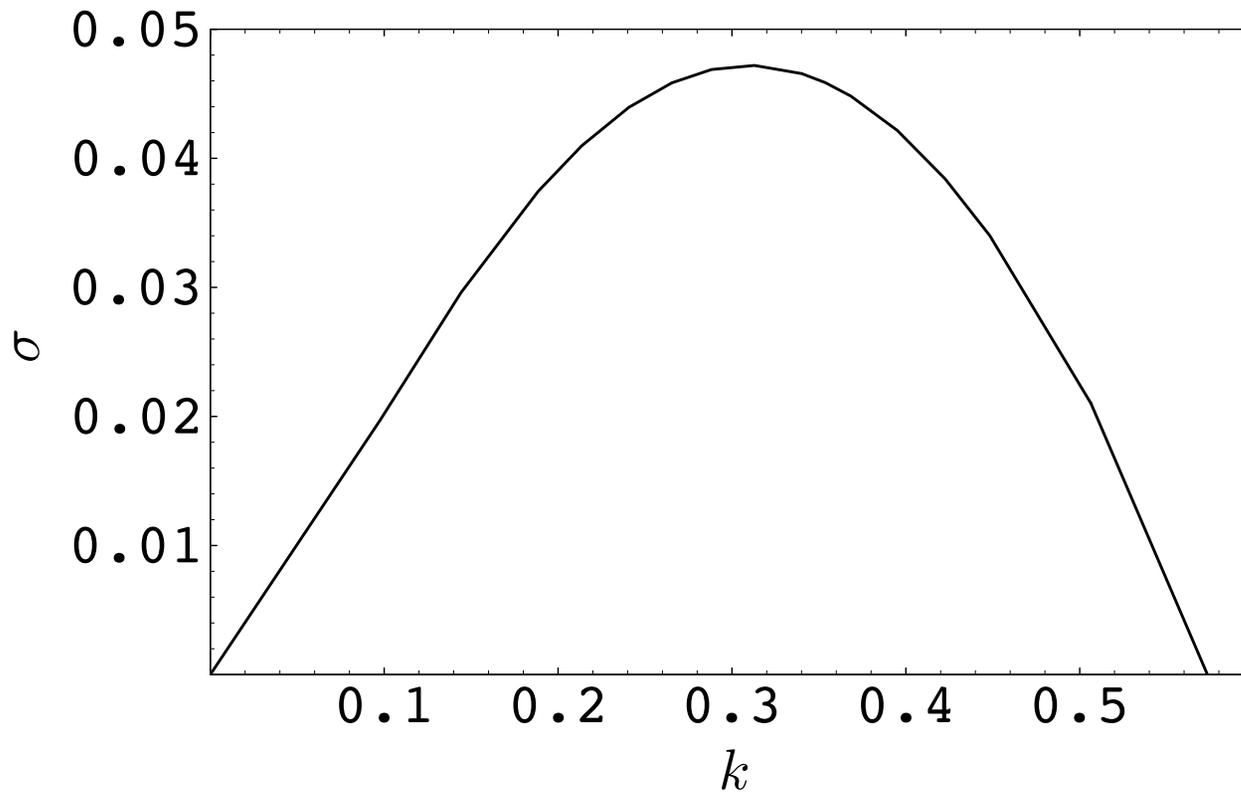
$$\tau = TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik)^{1/3}TF[f]]$$

$$l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = \varpi(\tau - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

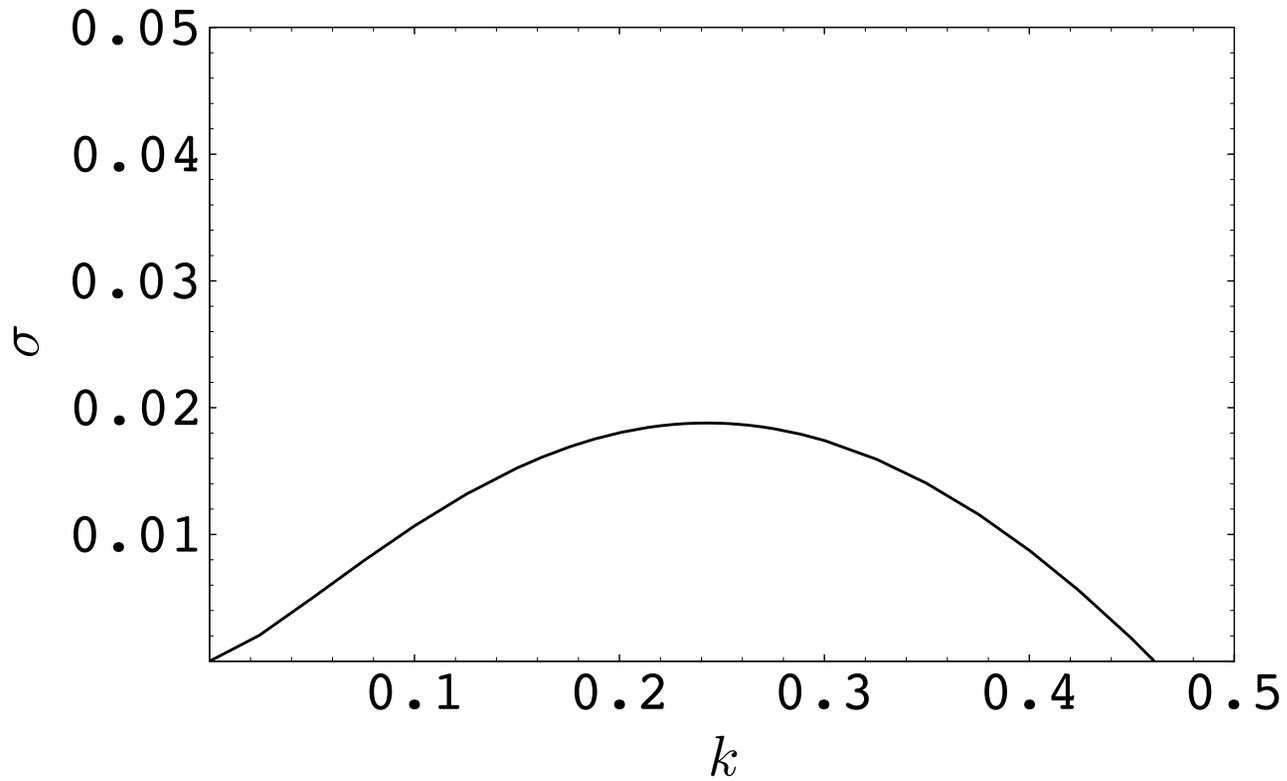
Stabilité linéaire

écoulement cisailé pur



Stabilité linéaire

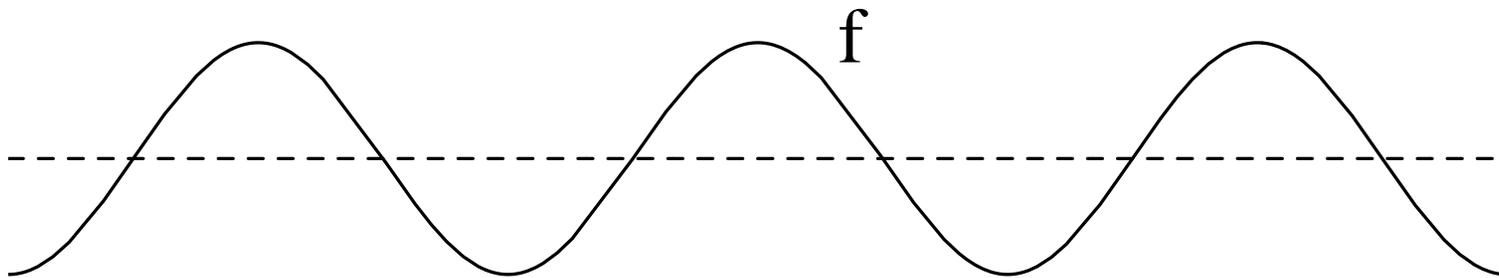
écoulement cisailé pur



Interprétation

écoulement cisailé pur

fluid

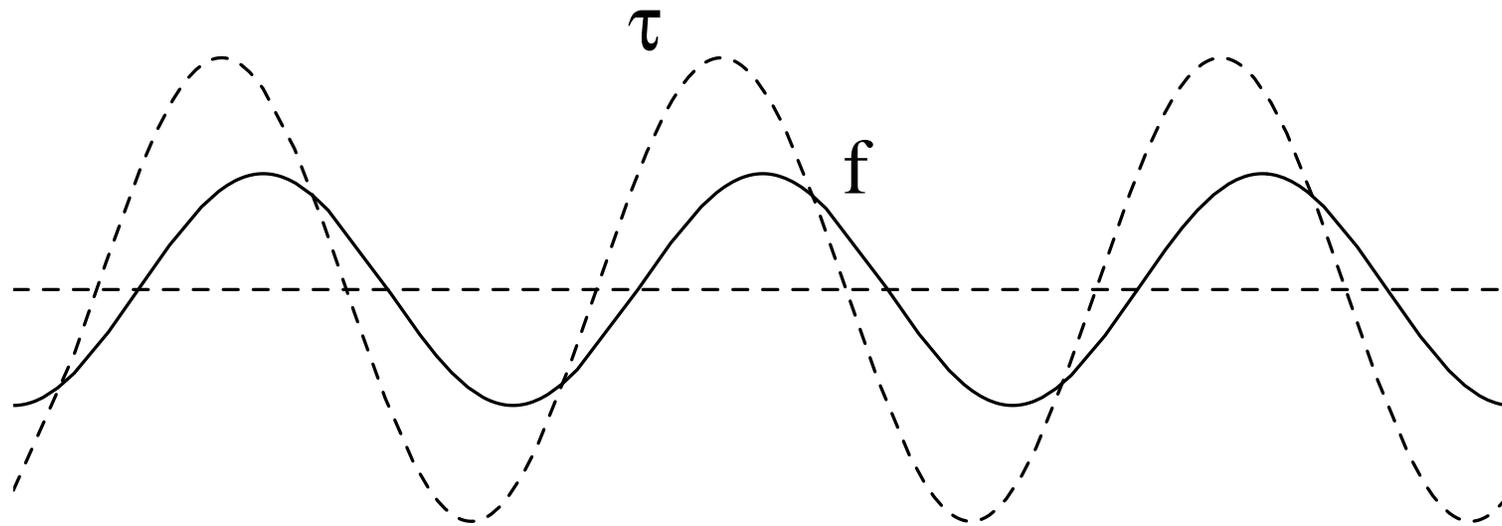


erodible bed

Interprétation

écoulement cisailé pur

fluid

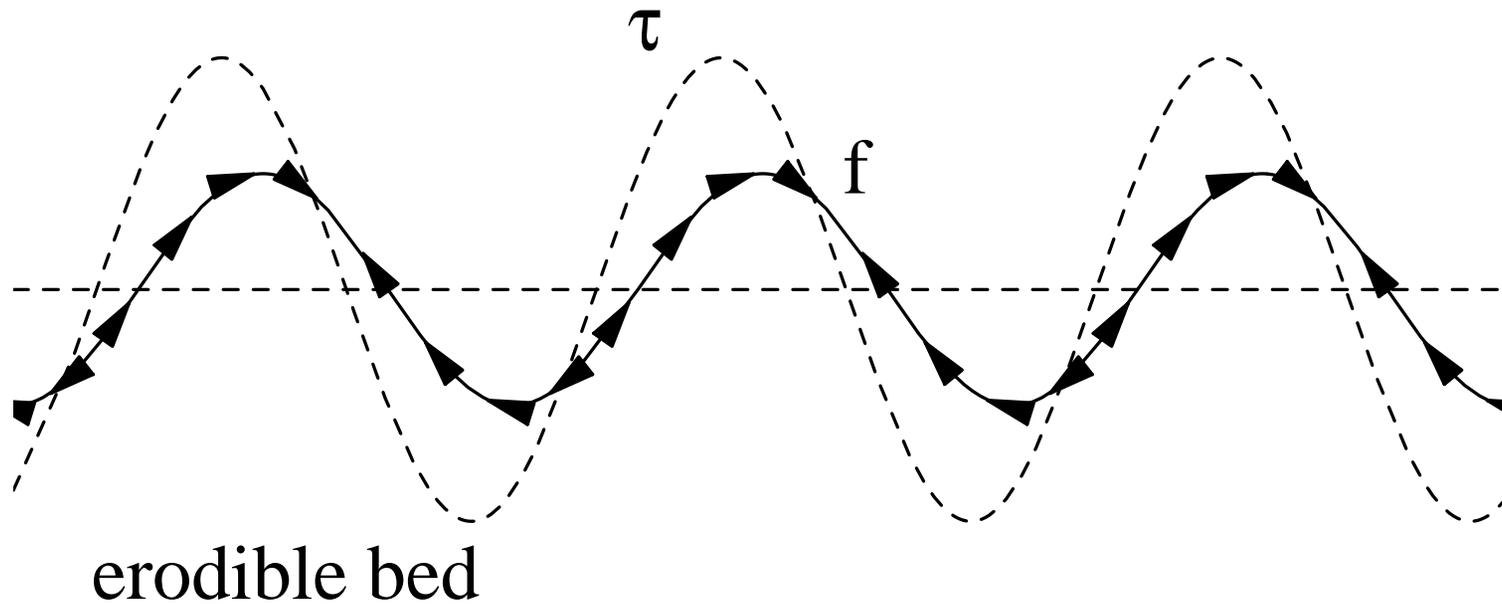


erodible bed

Interprétation

écoulement cisailé pur

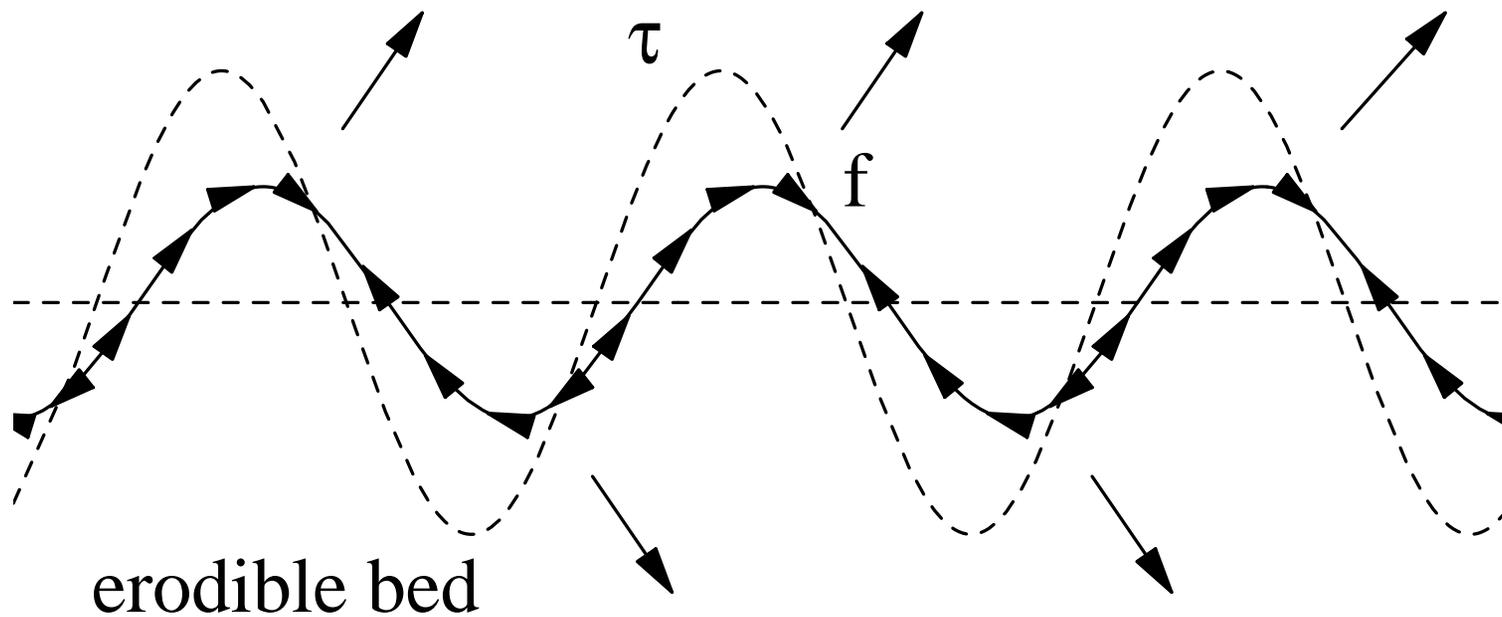
fluid



Interprétation

écoulement cisailé pur

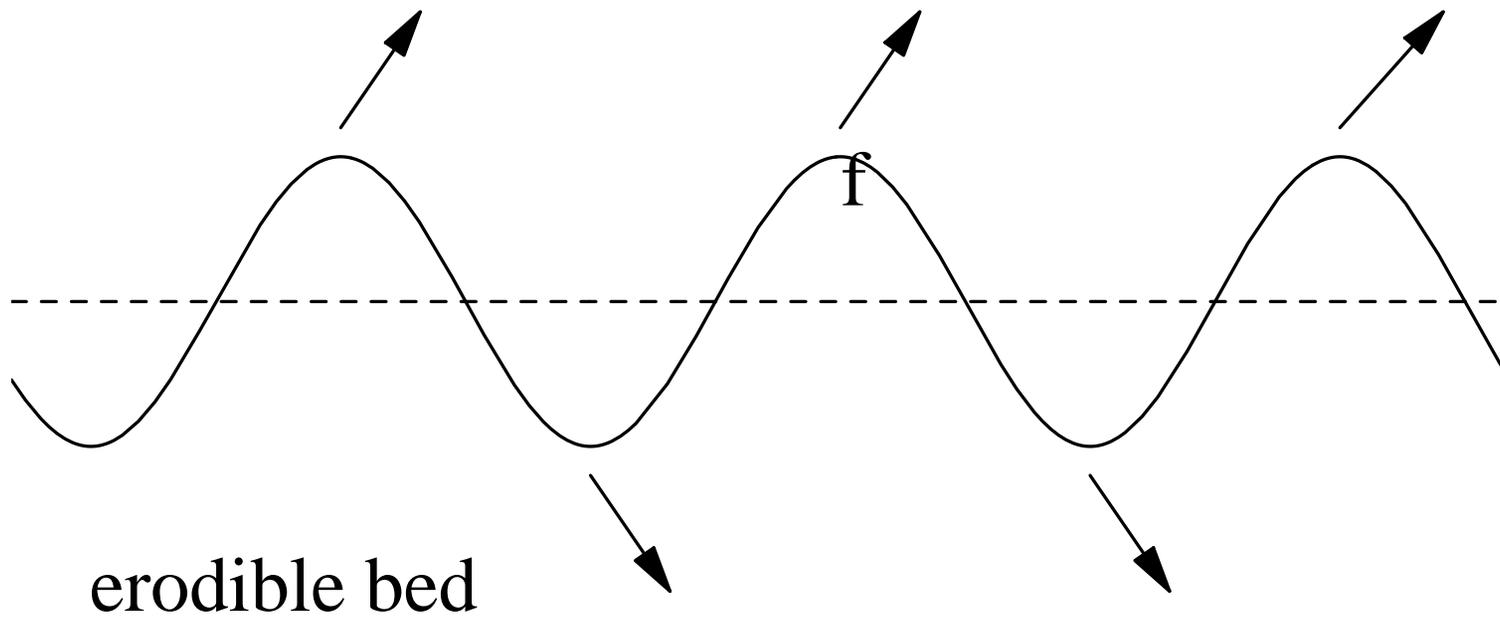
fluid



Interprétation

écoulement cisailé pur

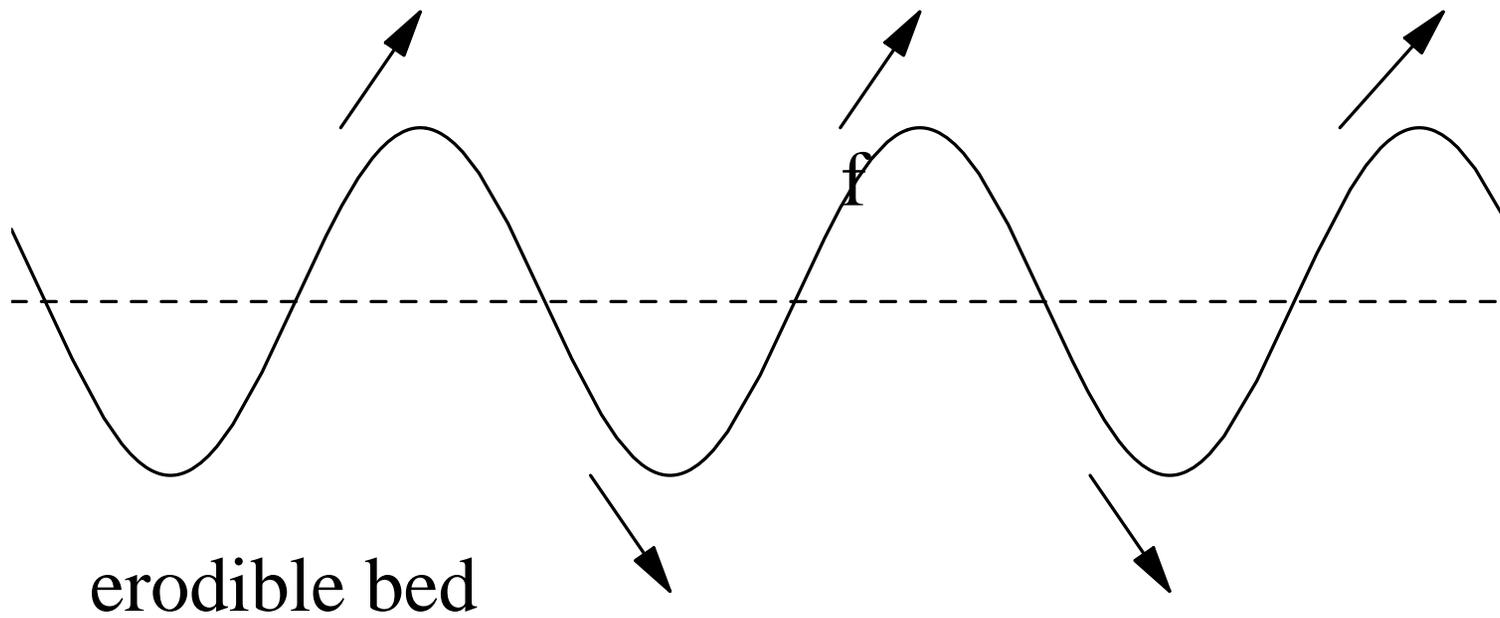
fluid



Interprétation

écoulement cisailé pur

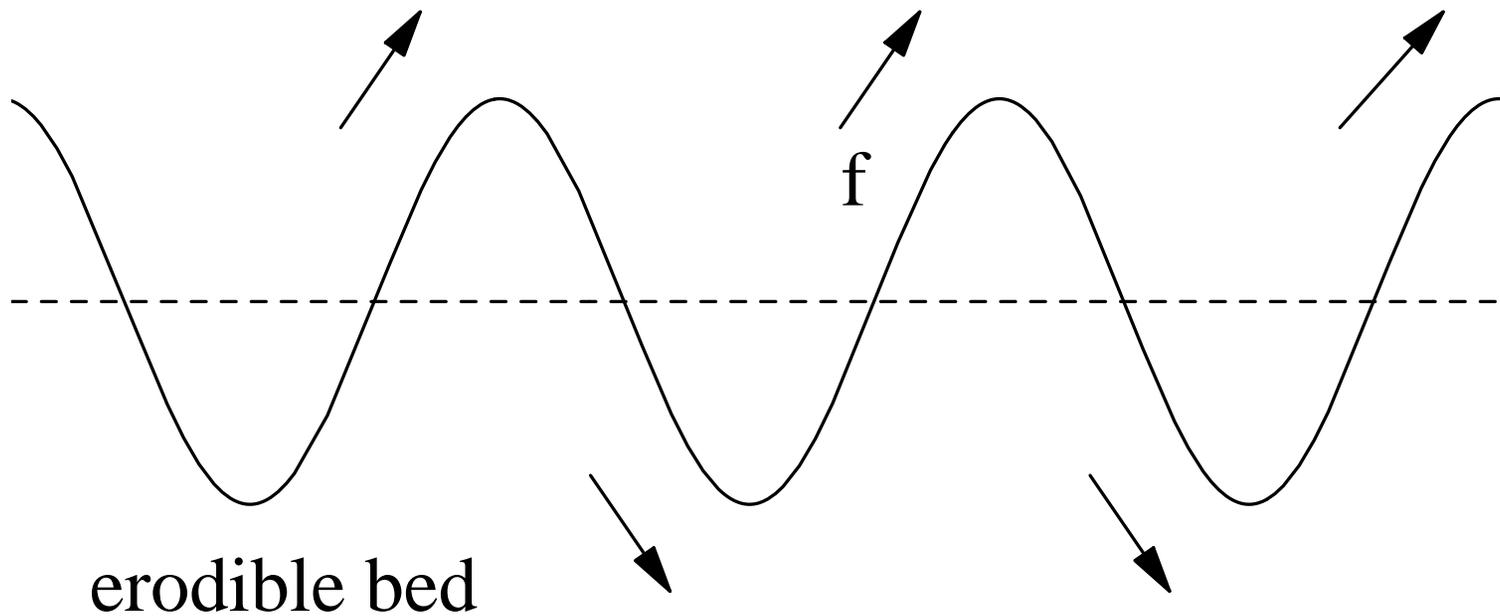
fluid



Interprétation

écoulement cisailé pur

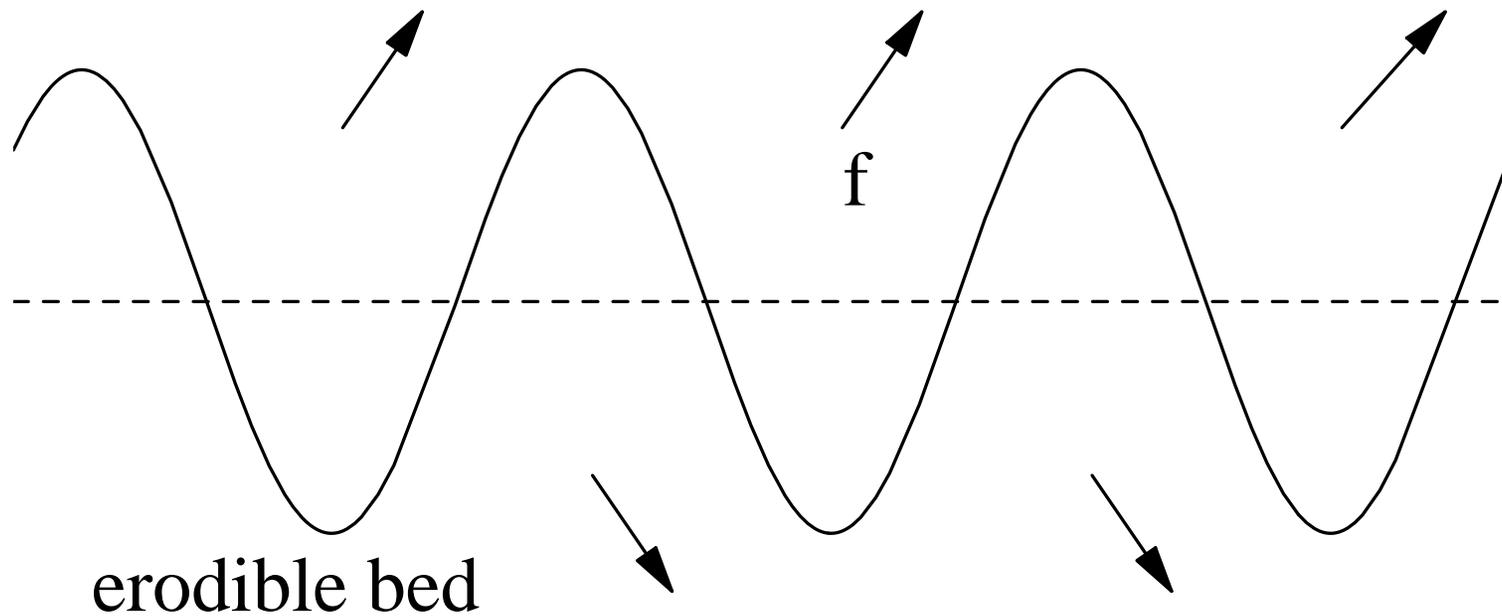
fluid



Interprétation

écoulement cisailé pur

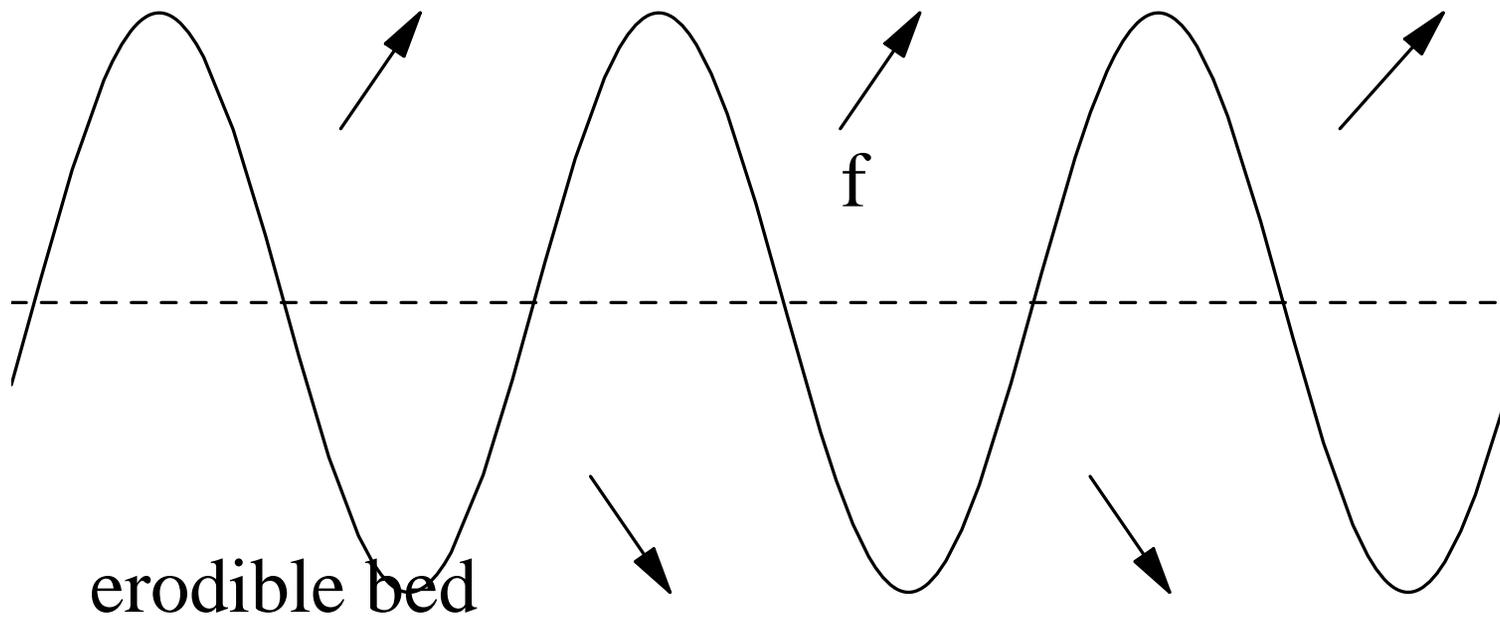
fluid



Interprétation

écoulement cisailé pur

fluid



Sol complètement érodable

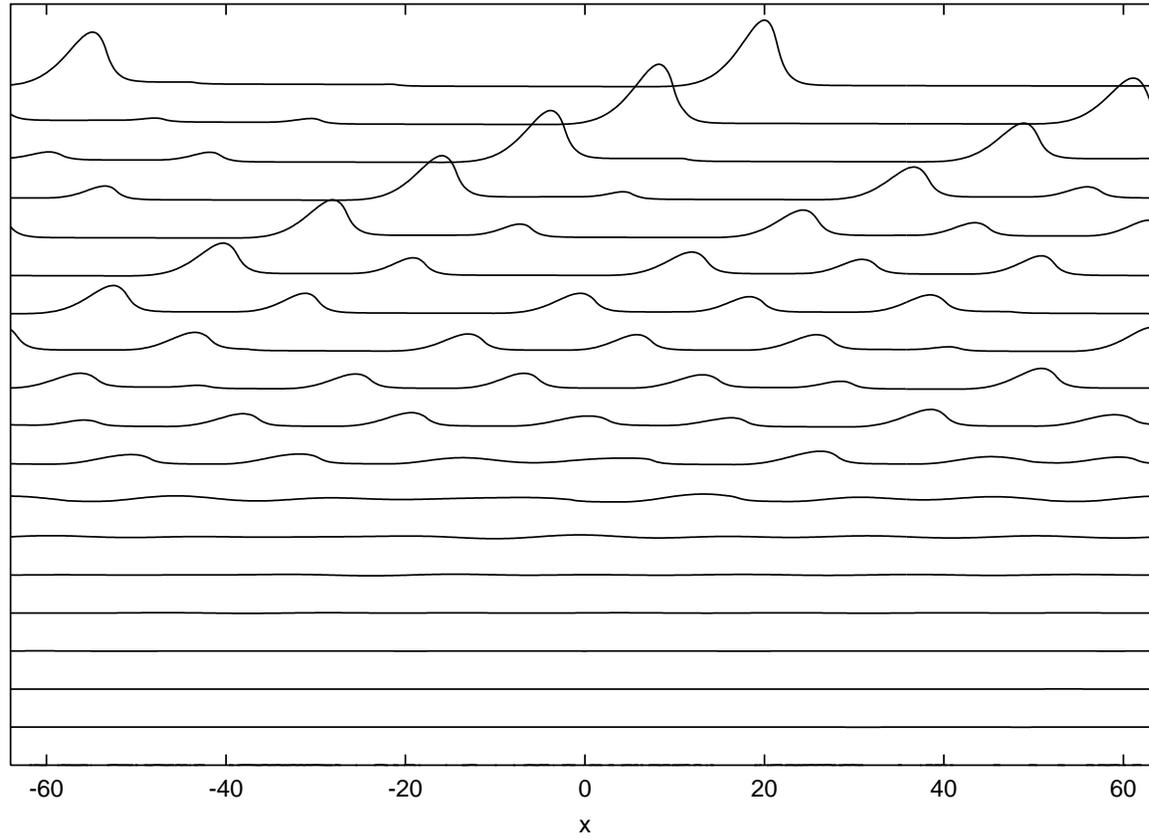
exemple de calculs :

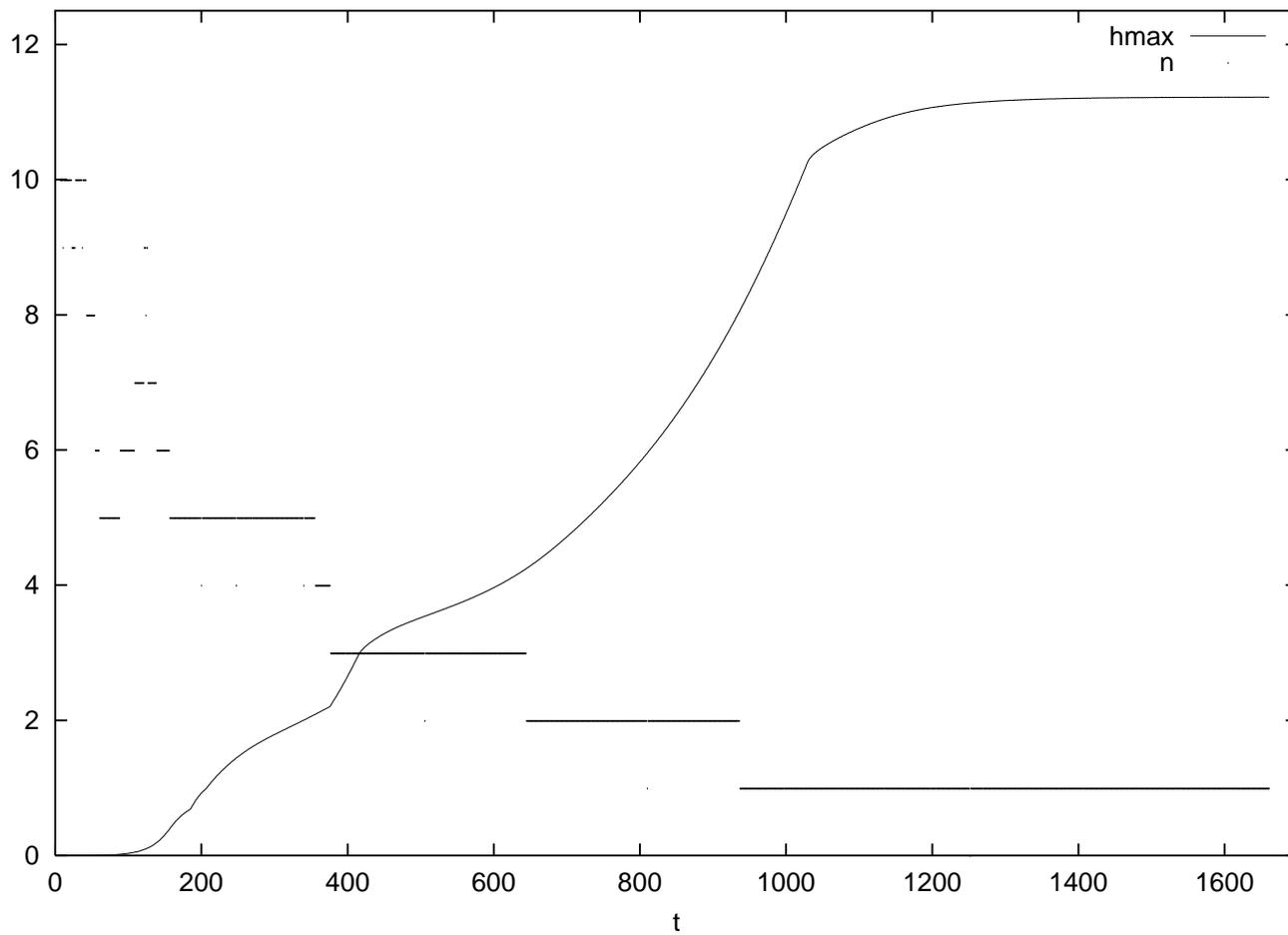
animation 1,

animation 2 (longueur doublée.

animation 2 (cuve circulaire).

Il y a toujours *coarsening*, "Murissement". Il ne reste qu'une bosse dans la boîte.





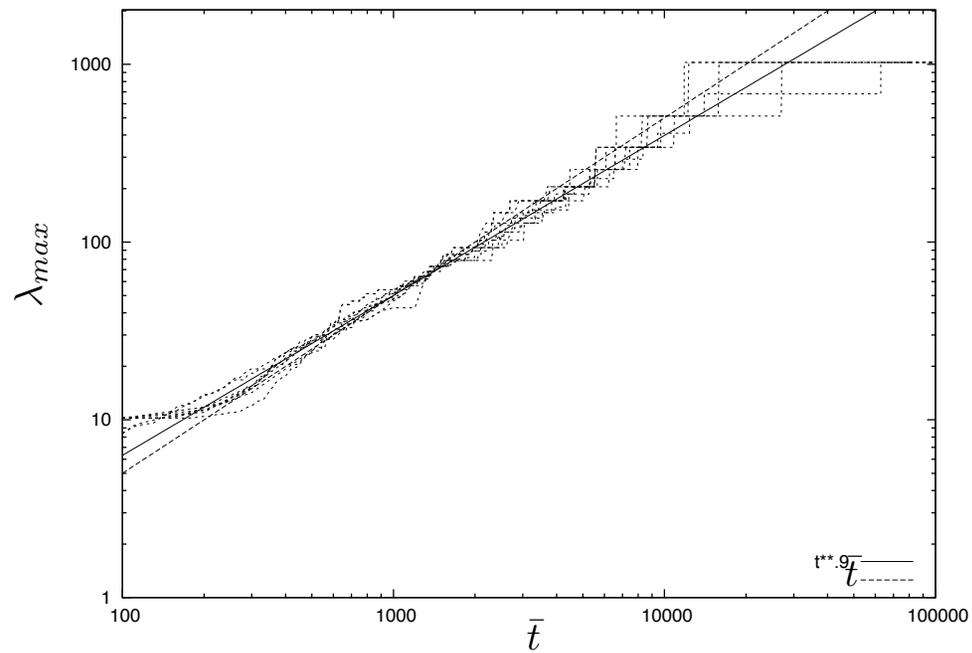


Figure 11: Constant shear, the wave length of the structure scales with a power between $\bar{t}^{0.9}$ and \bar{t} .

Stabilité linéaire

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

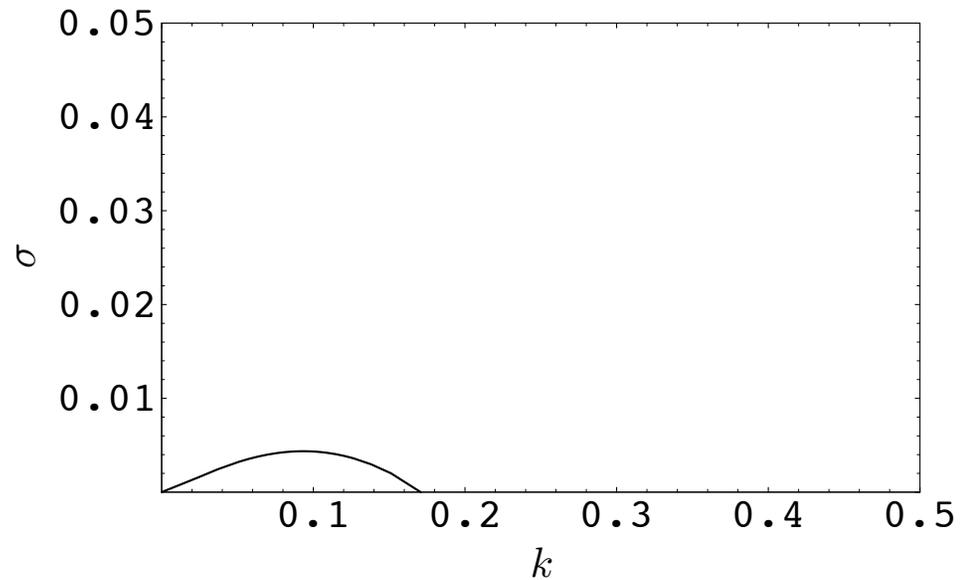
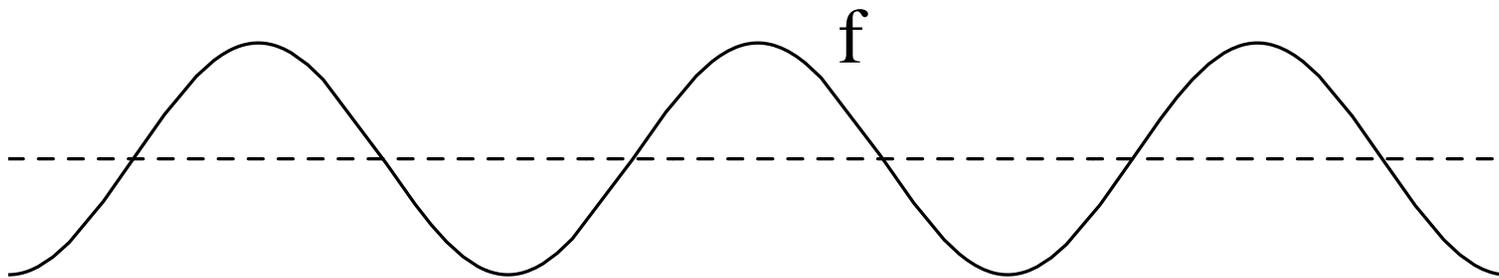


Figure 6: Amplification factor function of wave number. Averaged oscillating case, $\tilde{l}_K = 1$ case (6and 28).

Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

fluid

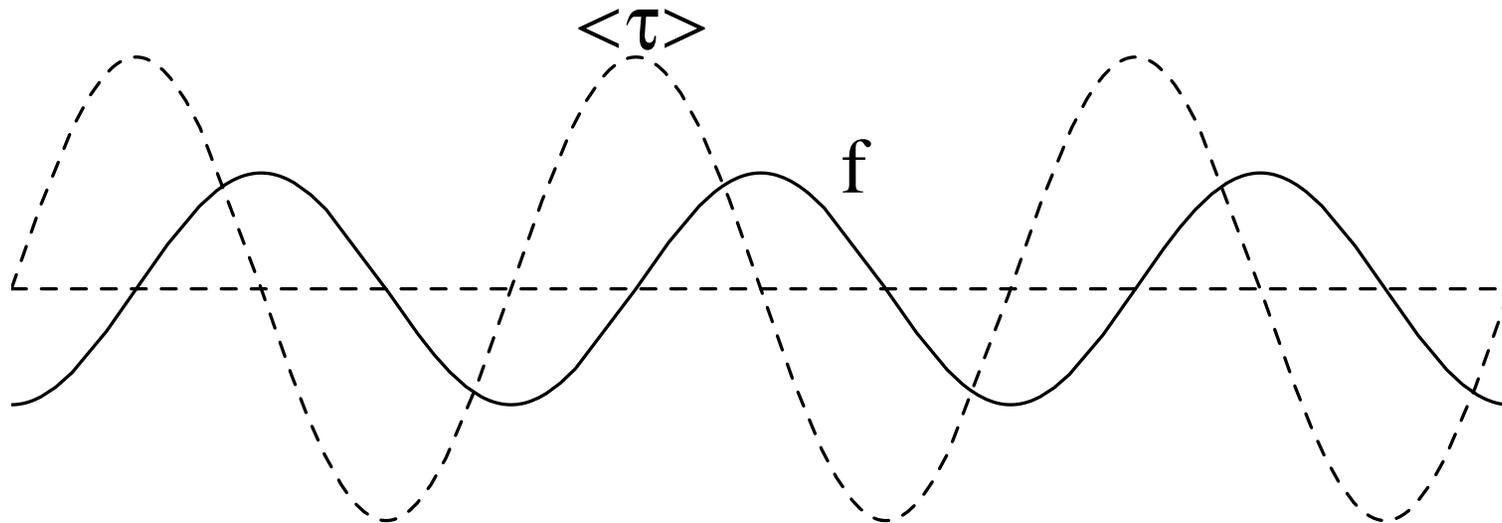


erodible bed

Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

fluid

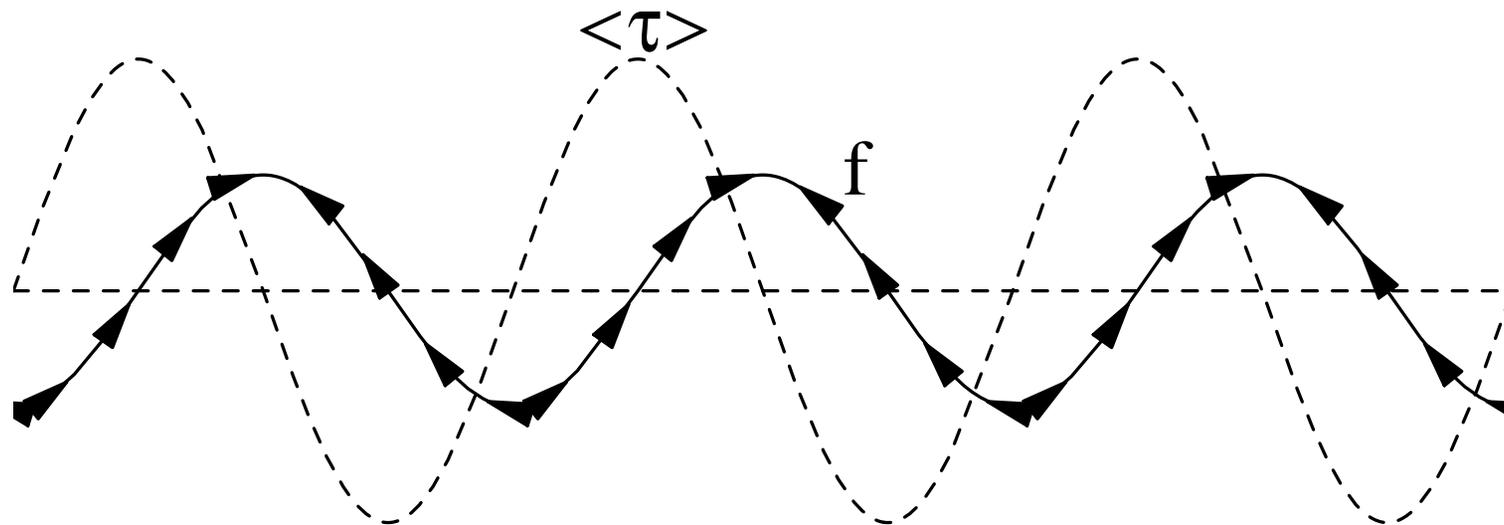


erodible bed

Interprétation

Ecoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

fluid

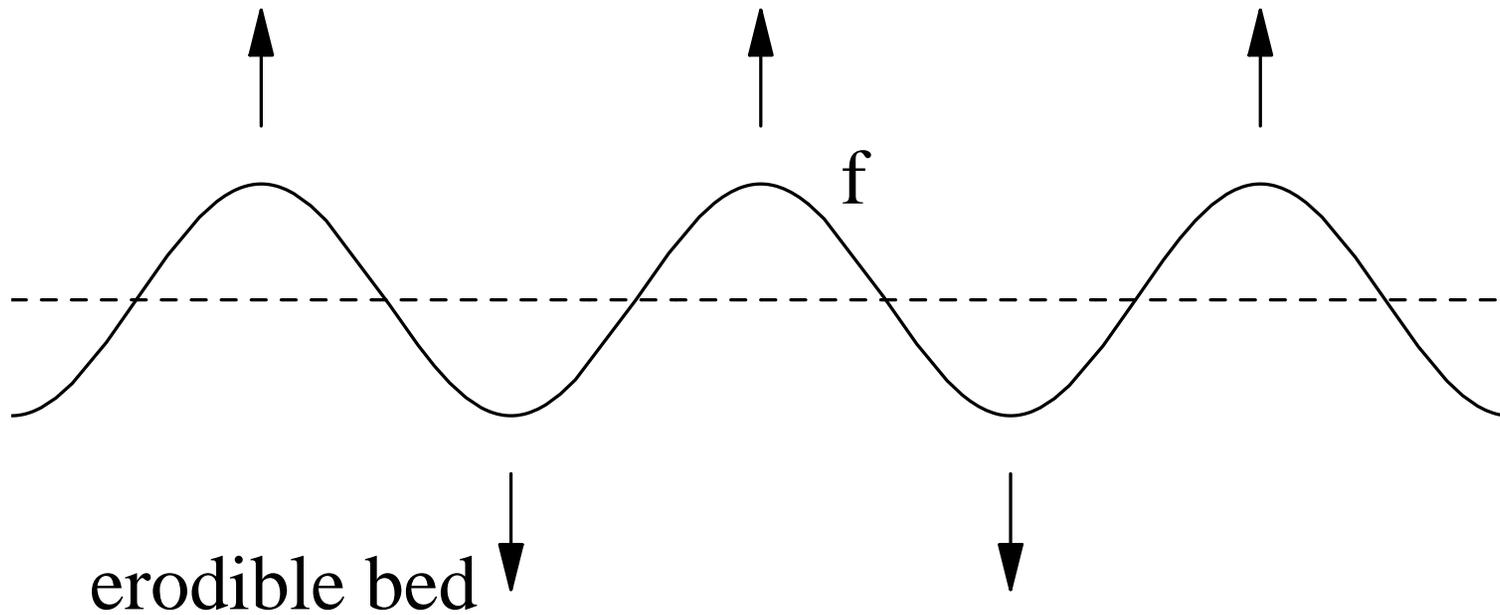


erodible bed

Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

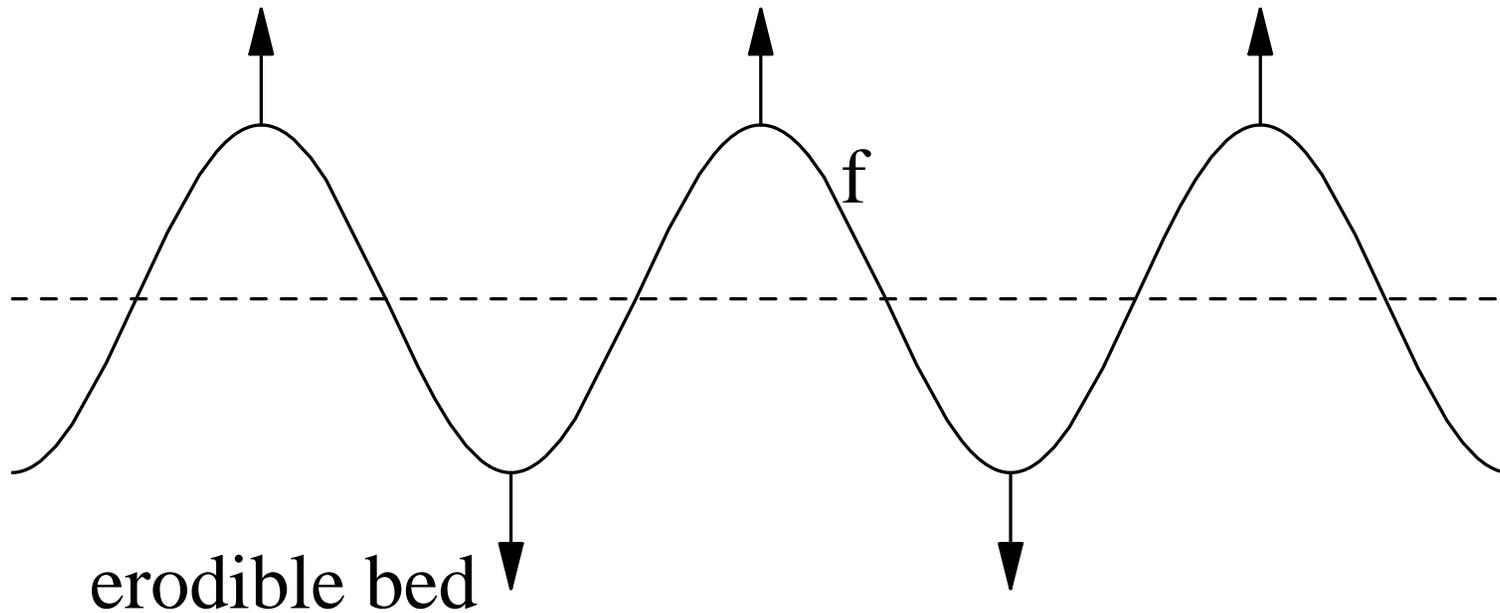
fluid



Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

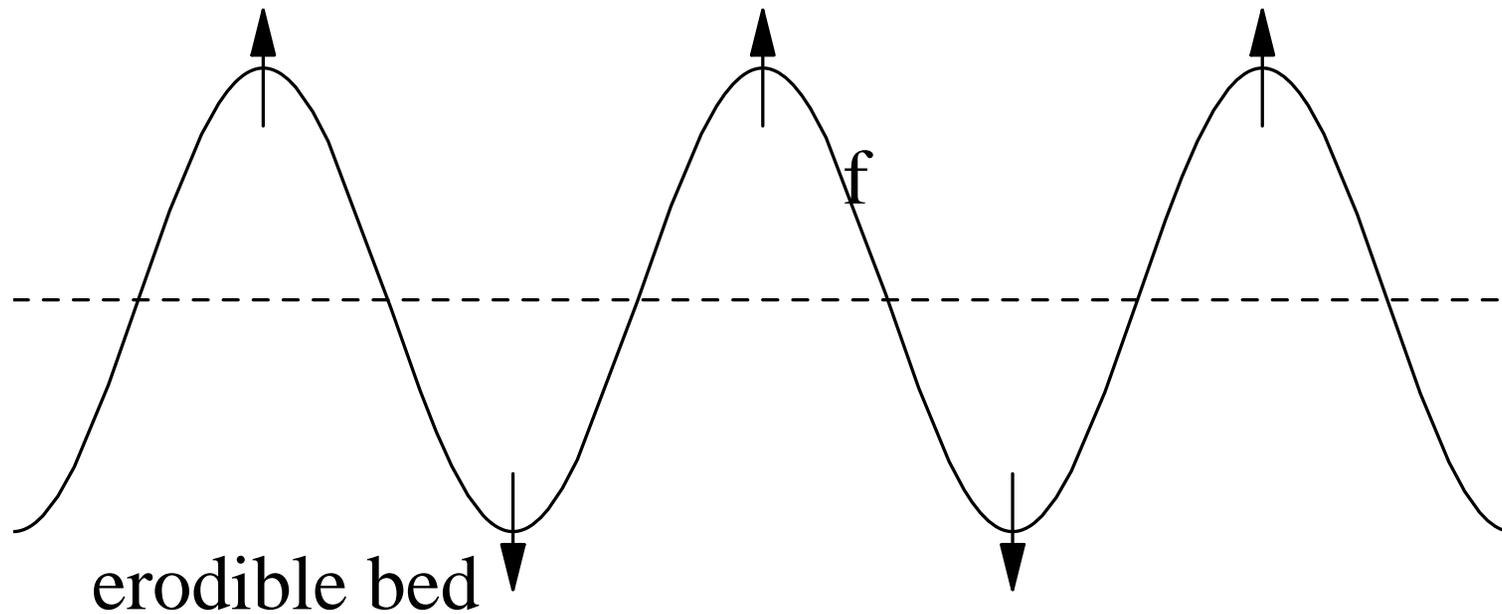
fluid



Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

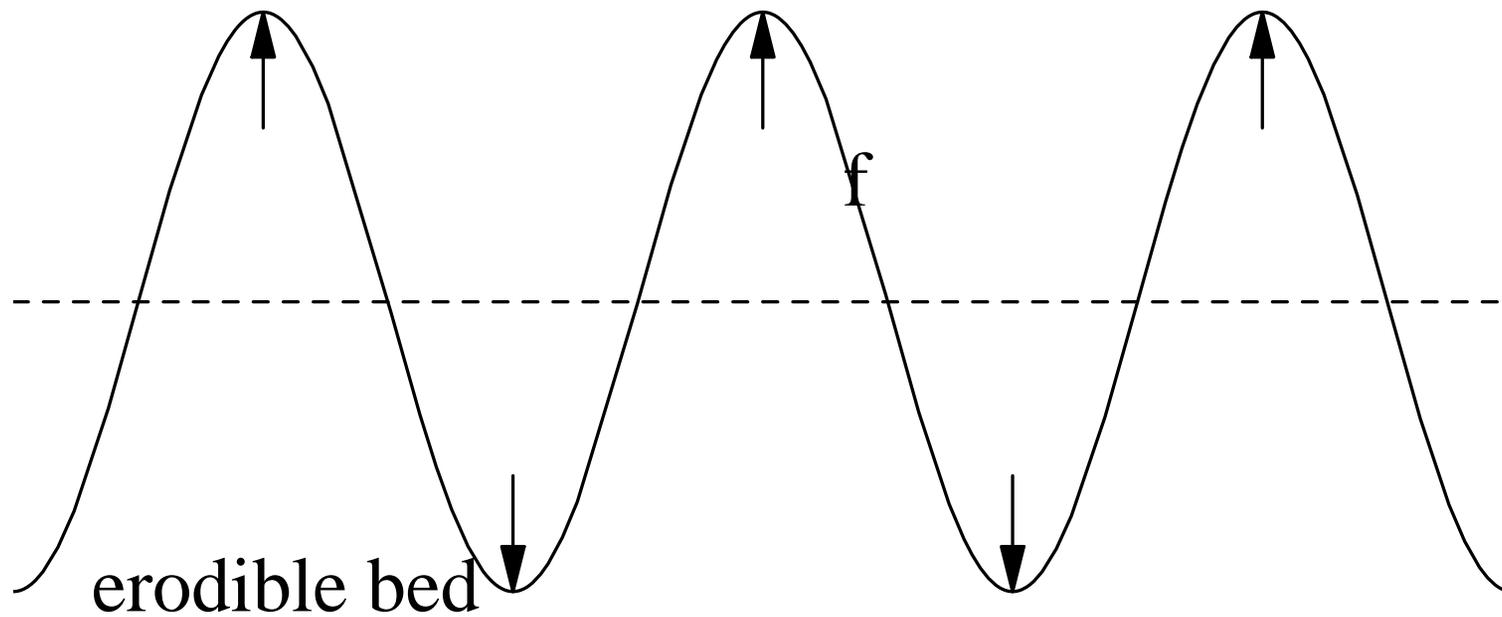
fluid



Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

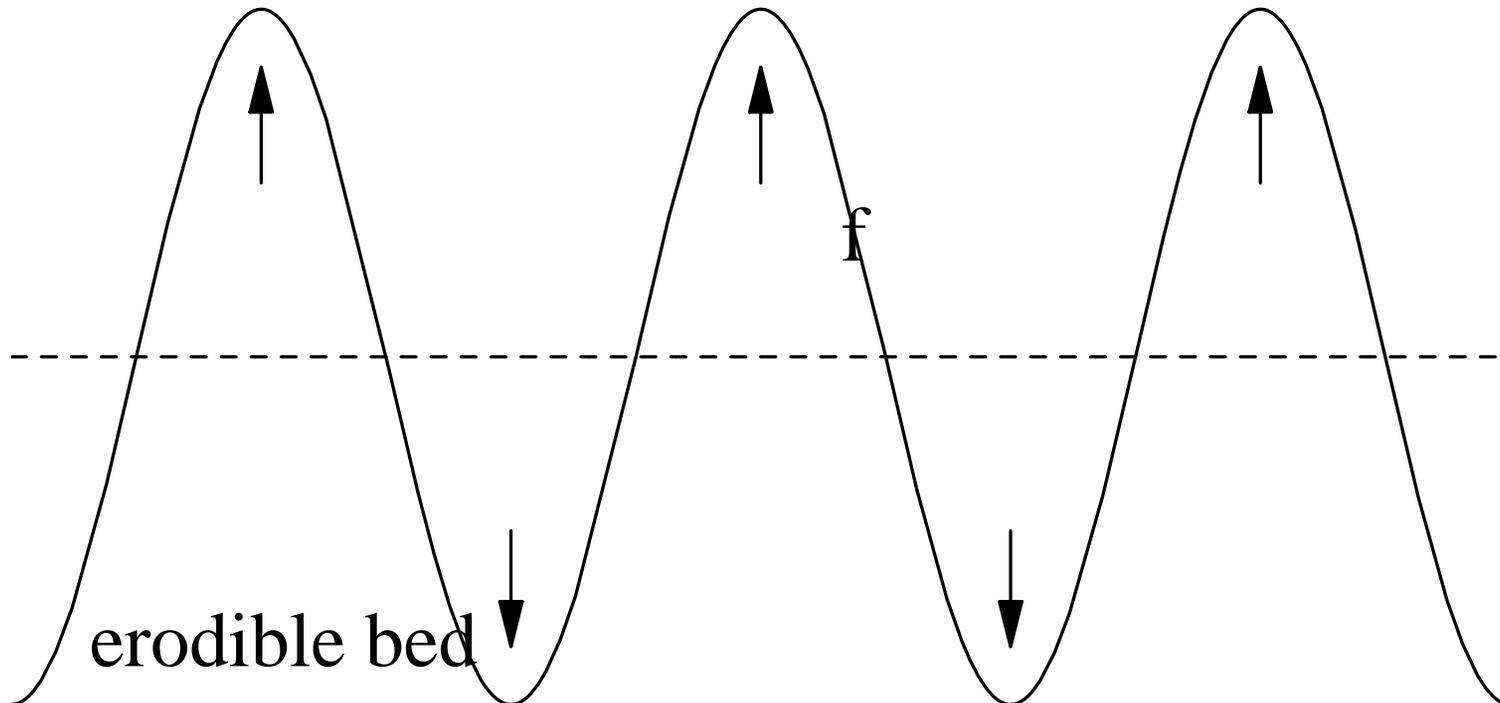
fluid



Interprétation

Écoulement oscillant $U'_0 = \cos(\bar{t})$

fluid



Sol complètement érodable

exemple de calculs :
animation (cuve circulaire).

”coarsening”

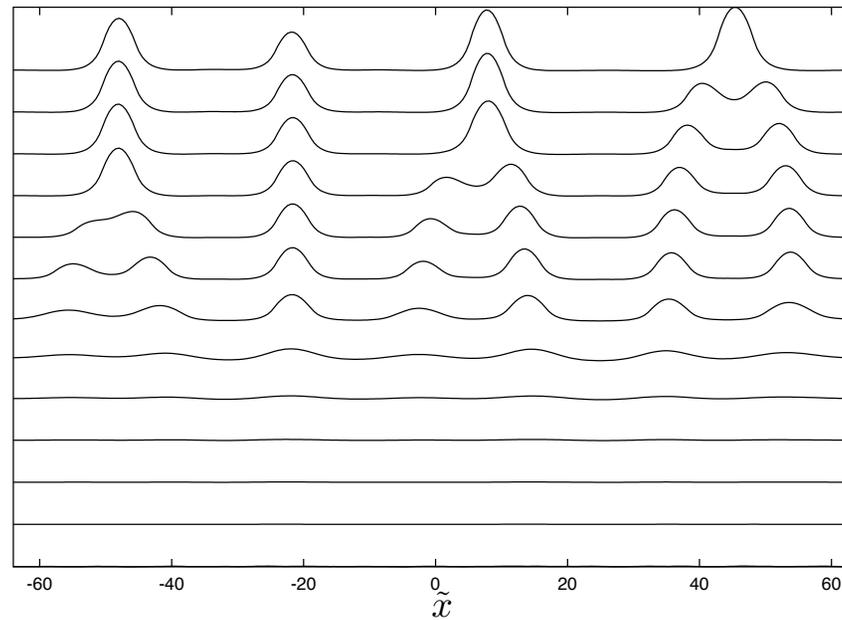


Figure 13: Oscillating régime with (22), spatio temporal diagram, time increases from bottom to top. Ripples growth from a random noise and merge two by two.

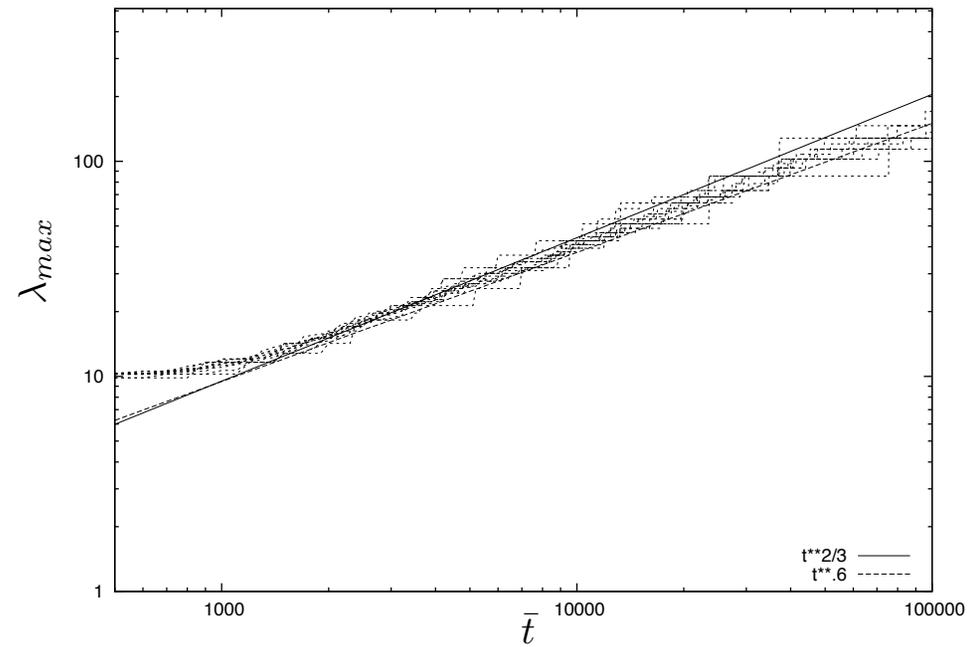


Figure 15: Oscillating shear, the wave length of the structure scales with a power law between $\bar{t}^{0.6}$ and $\bar{t}^{2/3}$.

$$q \simeq \tau$$

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruehle, Frette, and Rehberg (2002) :

La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3 \cdot 10^{-3} s^{-1}$

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruehle, Frette, and Rehberg (2002) :

La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3 \cdot 10^{-3} s^{-1}$

$$\lambda^* \simeq 15cm.$$

$$\sigma^* = 1.2 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruehle, Frette, and Rehberg (2002) :

La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3 \cdot 10^{-3} s^{-1}$

$$\lambda^* \simeq 15cm.$$

$$\sigma^* = 1.2 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

σ^* augmente avec le cisaillement, observé

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruehle, Frette, and Rehberg (2002) :

La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3 \cdot 10^{-3} s^{-1}$

$$\lambda^* \simeq 15cm.$$

$$\sigma^* = 1.2 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

σ^* augmente avec le cisaillement, observé

λ^* augmente avec $U_0'^{-1}$, pas observé

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)

$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm.$

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)

$$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm.$$

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)

$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm.$

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

La formule prédit $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, et $\lambda^* \propto \nu^{-1}$.

c'est dans le bon sens

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)

$$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm.$$

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

La formule prédit $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, et $\lambda^* \propto \nu^{-1}$.

c'est dans le bon sens

Rousseau et coll. ont fitté : $\lambda_{max} \propto \text{Log}(t)$ (Cahn-Hillard)

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)

$$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm.$$

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

La formule prédit $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, et $\lambda^* \propto \nu^{-1}$.

c'est dans le bon sens

Rousseau et coll. ont fitté : $\lambda_{max} \propto \text{Log}(t)$ (Cahn-Hillard)

$$\lambda_{max} \propto t^{2/3}$$

Bosse finale : une pseudo "dune"

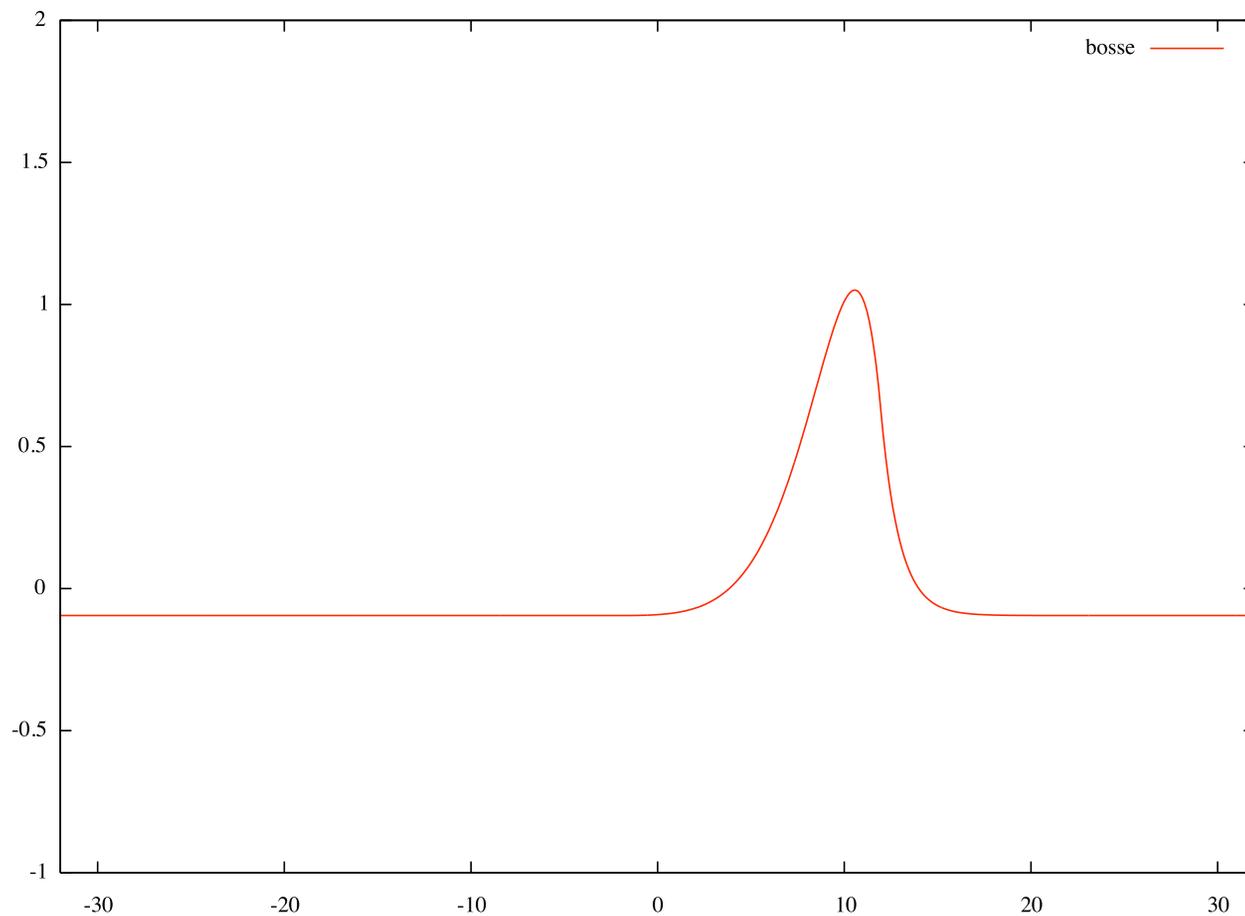
Processus de murissement

Il y a de moins en moins de bosses dans la boîte de calcul

Application au cas du cisaillement constant

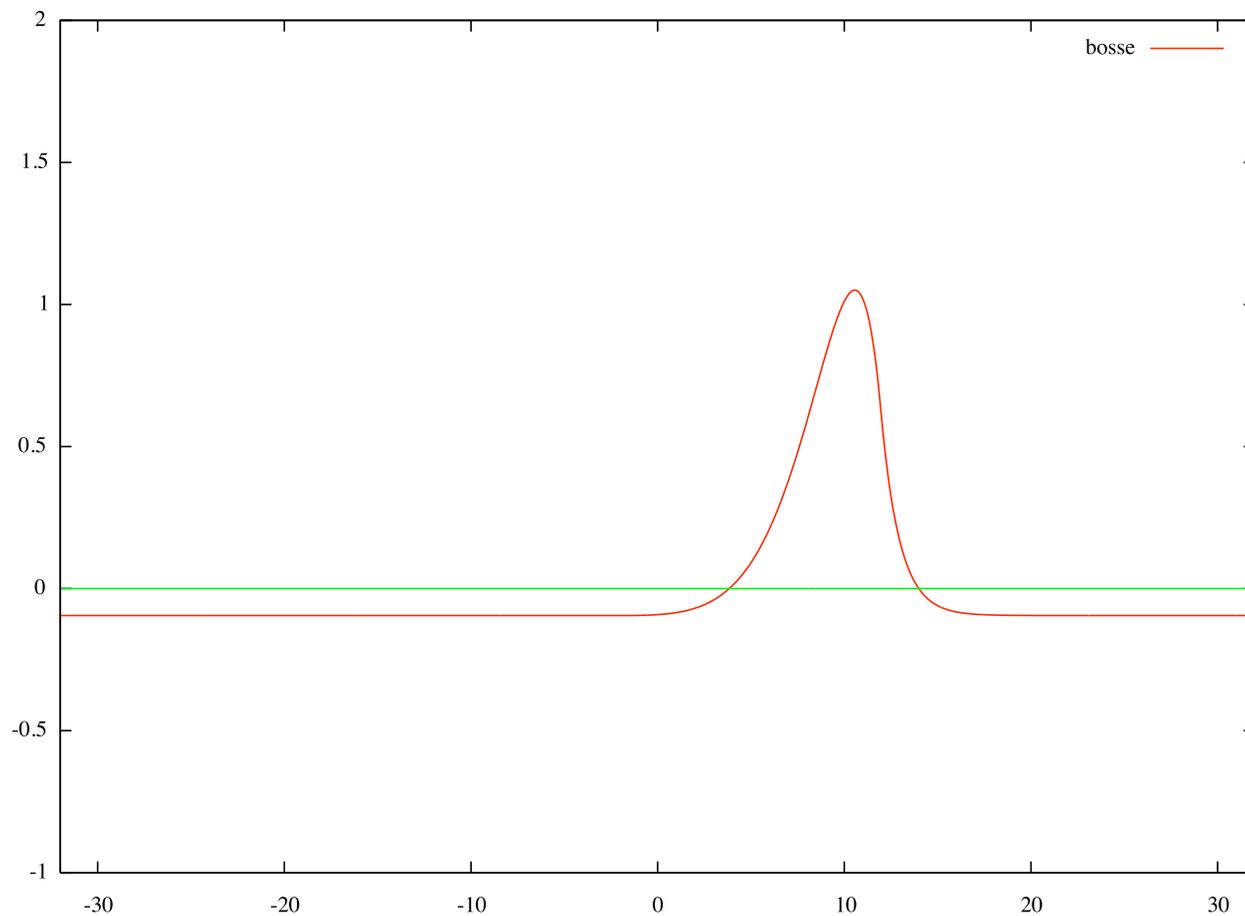
Bosse finale : une pseudo "dune"

En fin de murissement, il ne reste qu'une bosse qui occupe toute la boîte.



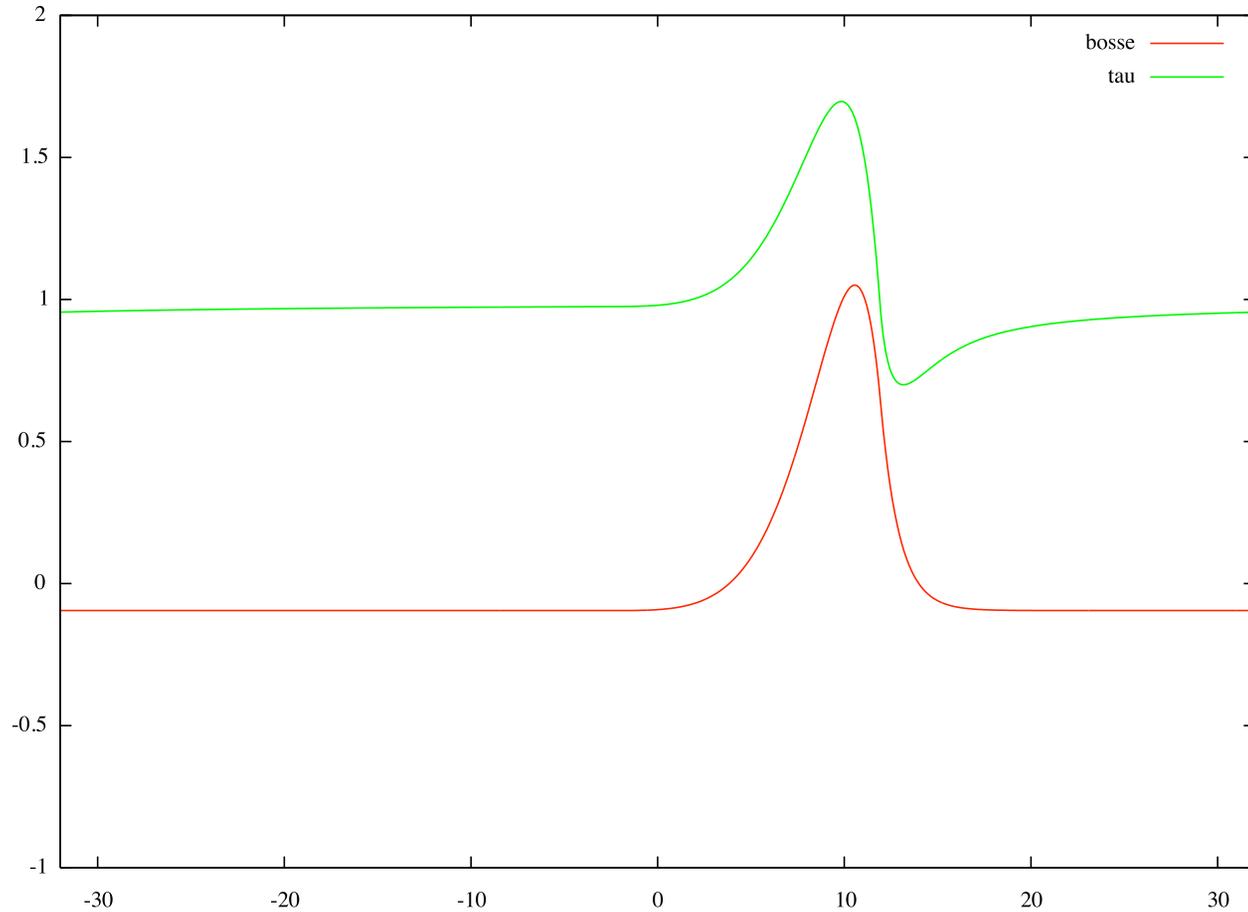
Bosse finale : une pseudo "dune"

En fin de murissement, il ne reste qu'une bosse qui occupe toute la boîte.



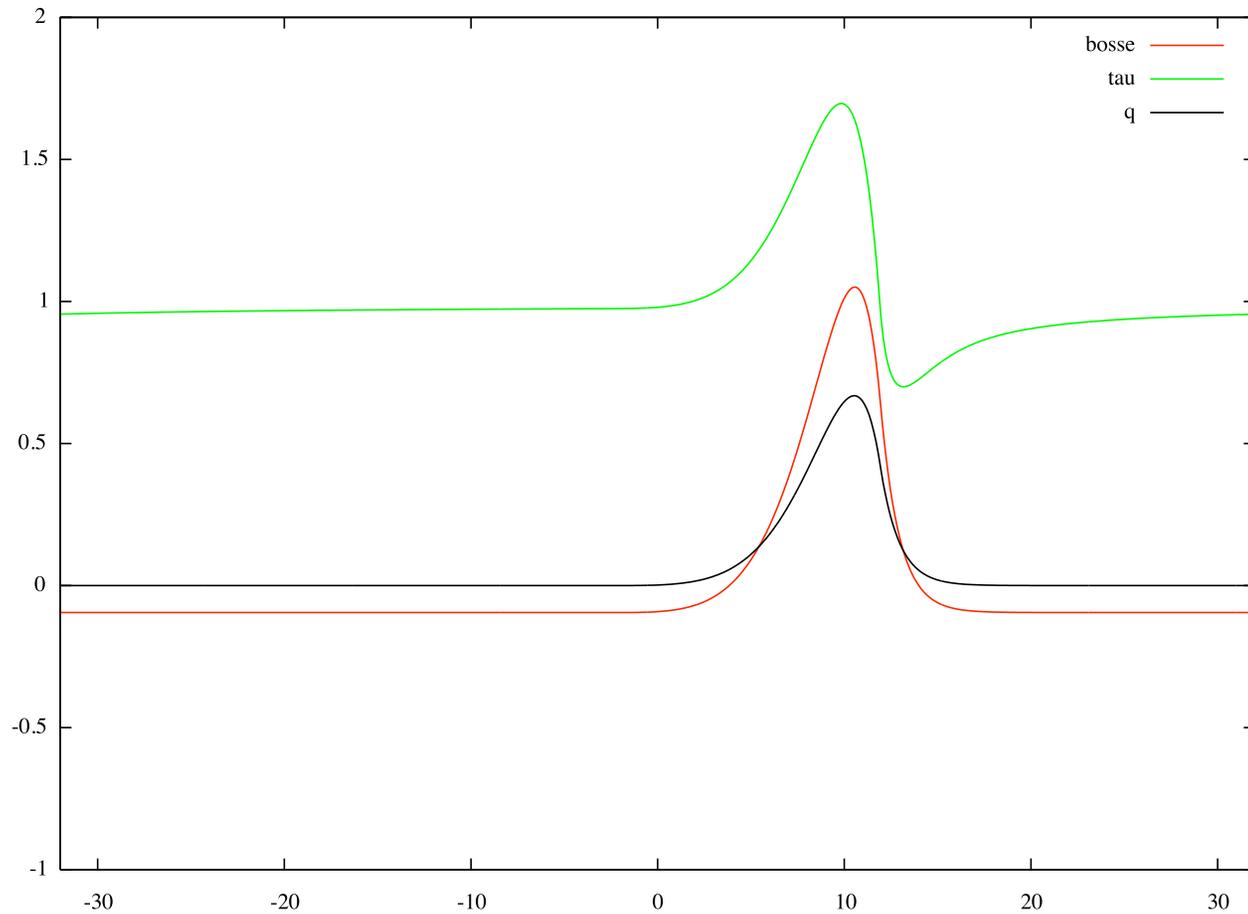
Bosse finale : une pseudo "dune"

En fin de murissement, il ne reste qu'une bosse qui occupe toute la boîte.



Bosse finale : une pseudo "dune"

En fin de murissement, il ne reste qu'une bosse qui occupe toute la boîte.



Déplacement d'une "dune" dans un écoulement cisailé : sol rigide

Solution de

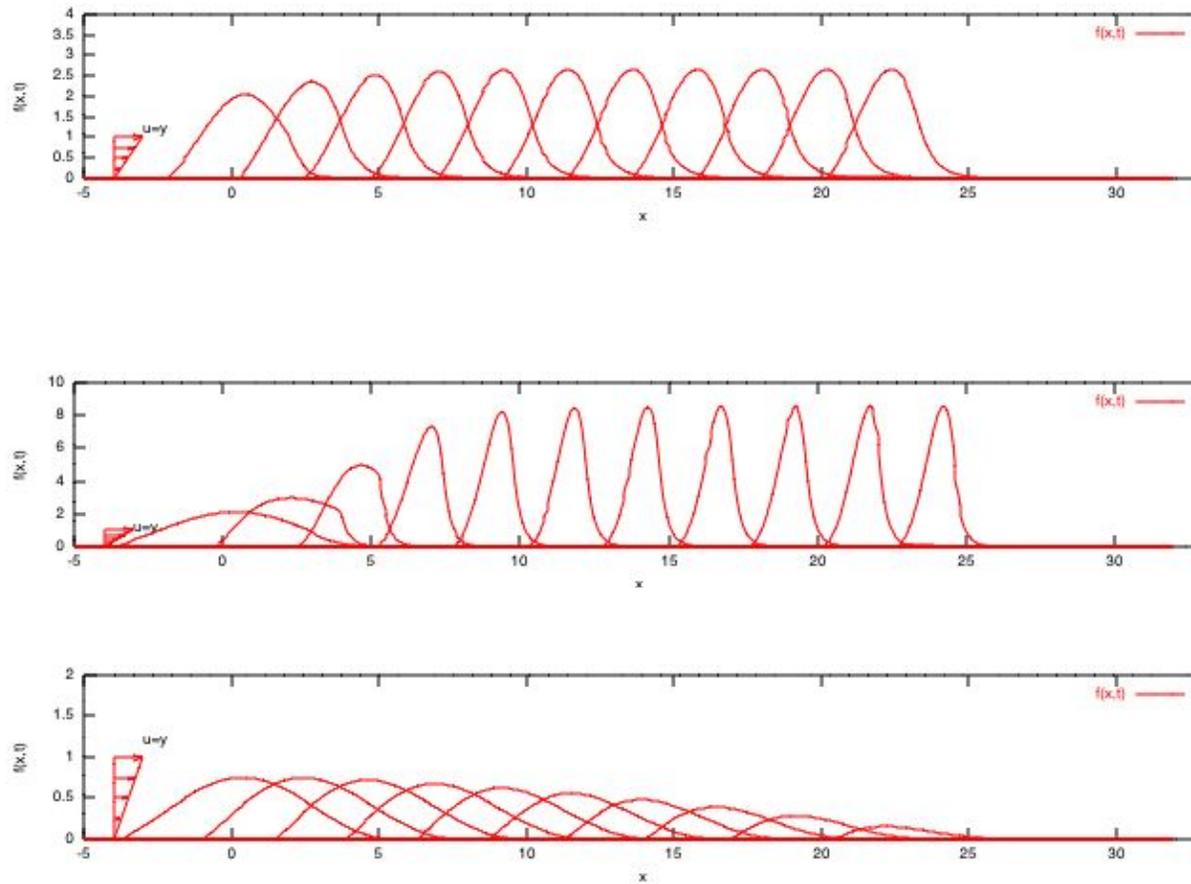
$$\tau = TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik)^{1/3}TF[f]]$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\varpi(\tau - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

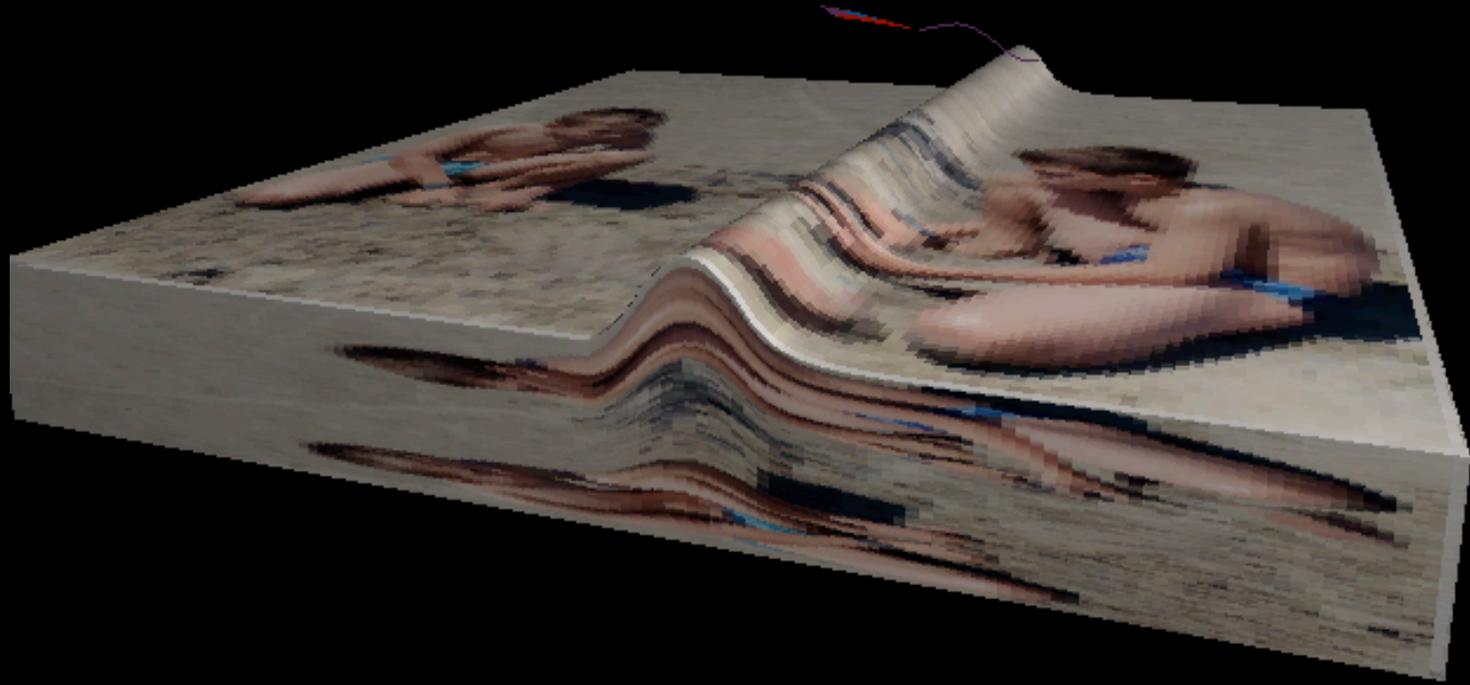
implémenter f toujours positif.

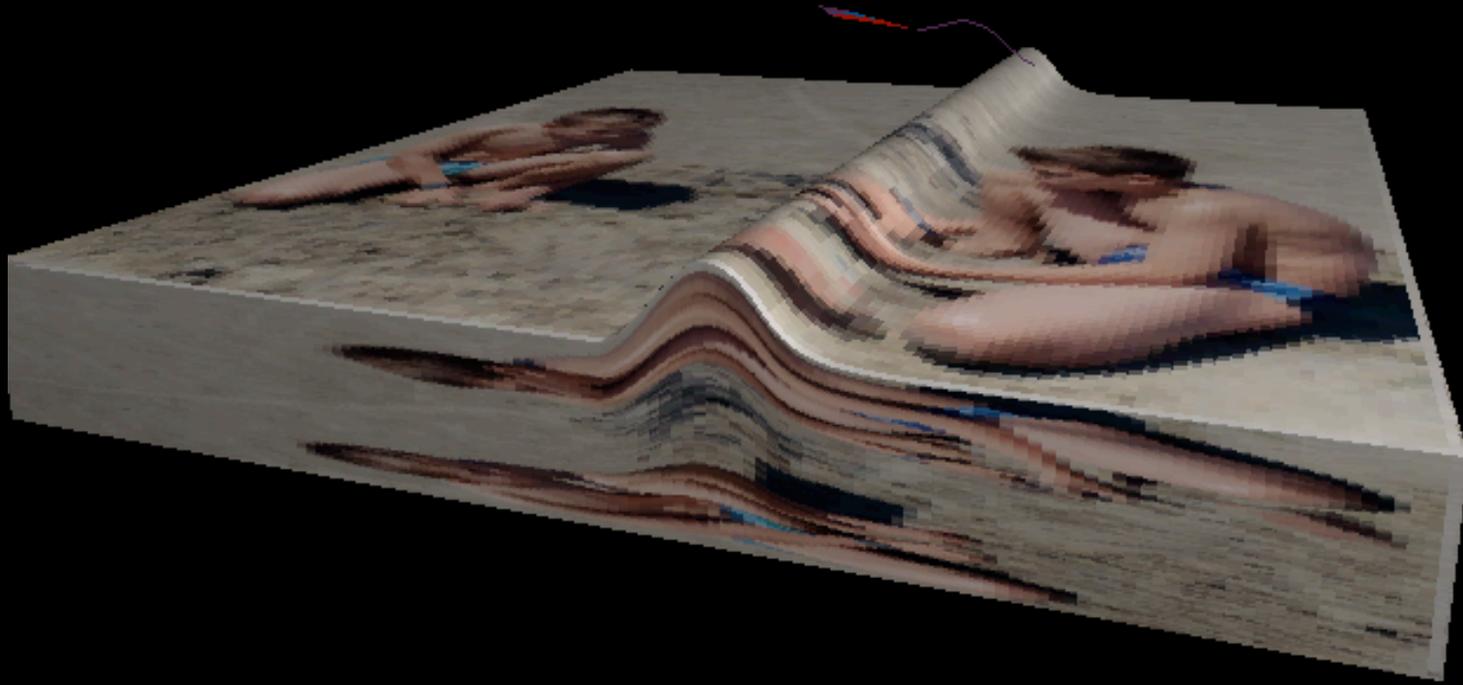
Déplacement d'une "dune" dans un écoulement cisailé :

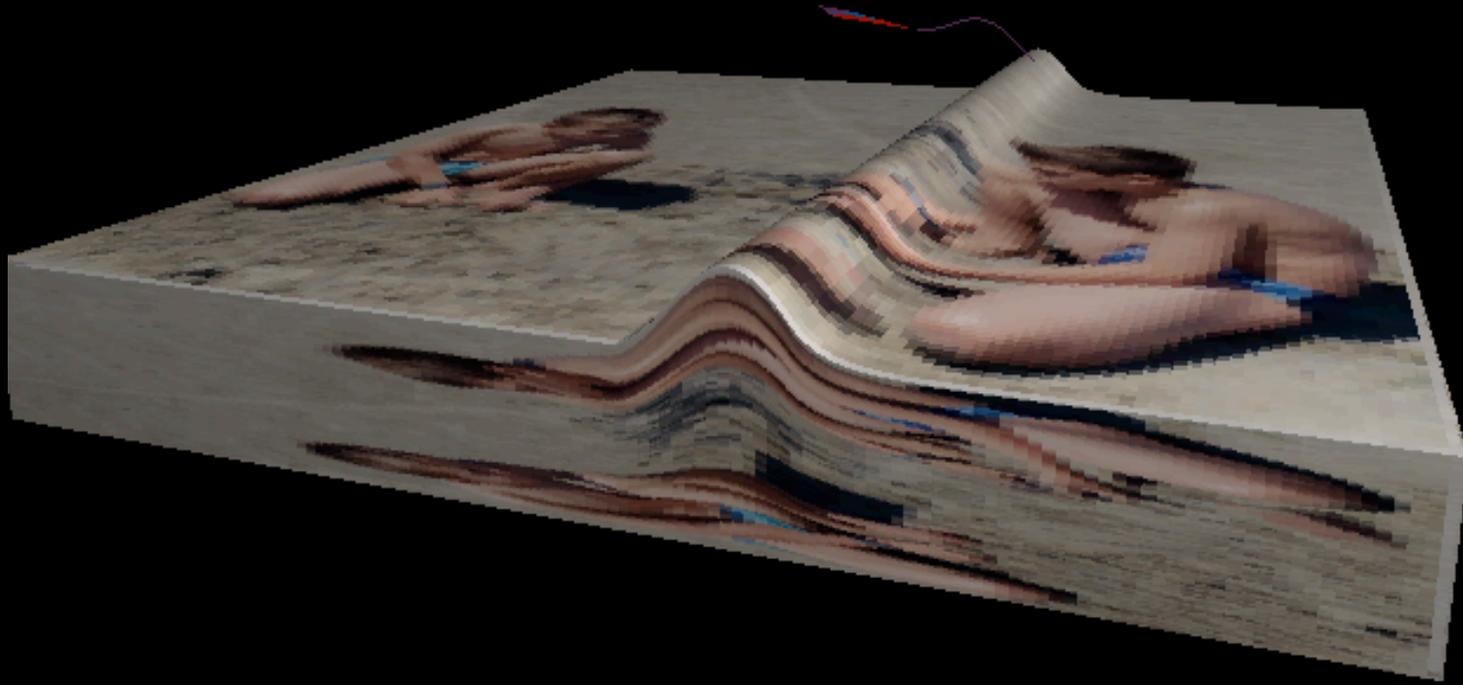


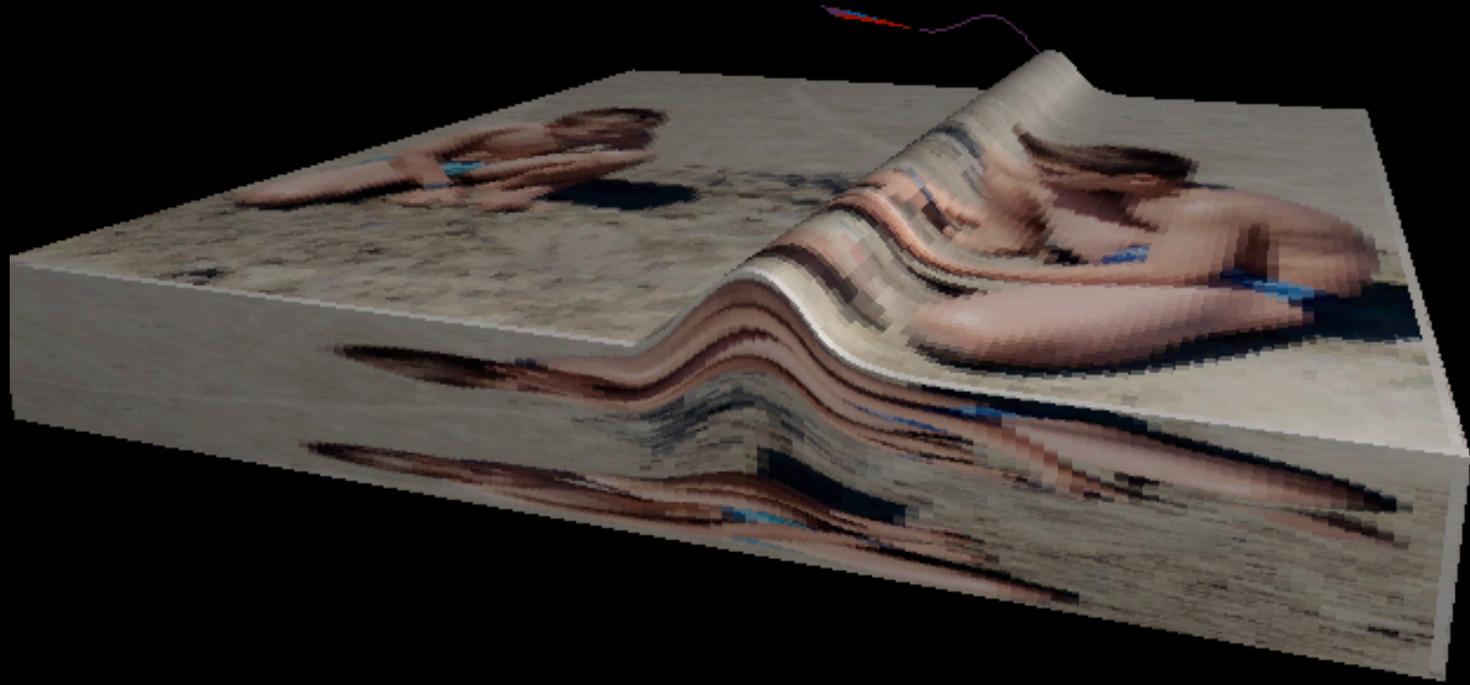
animation

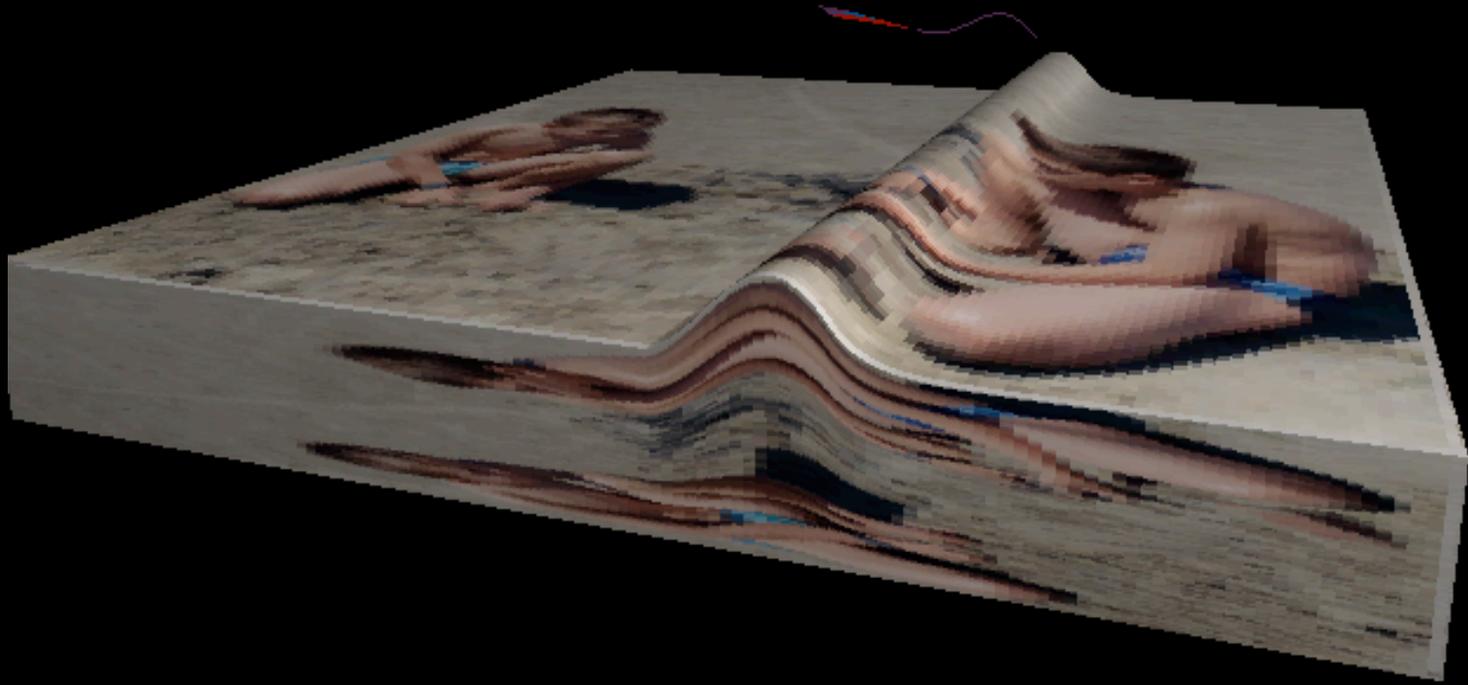
Exemple

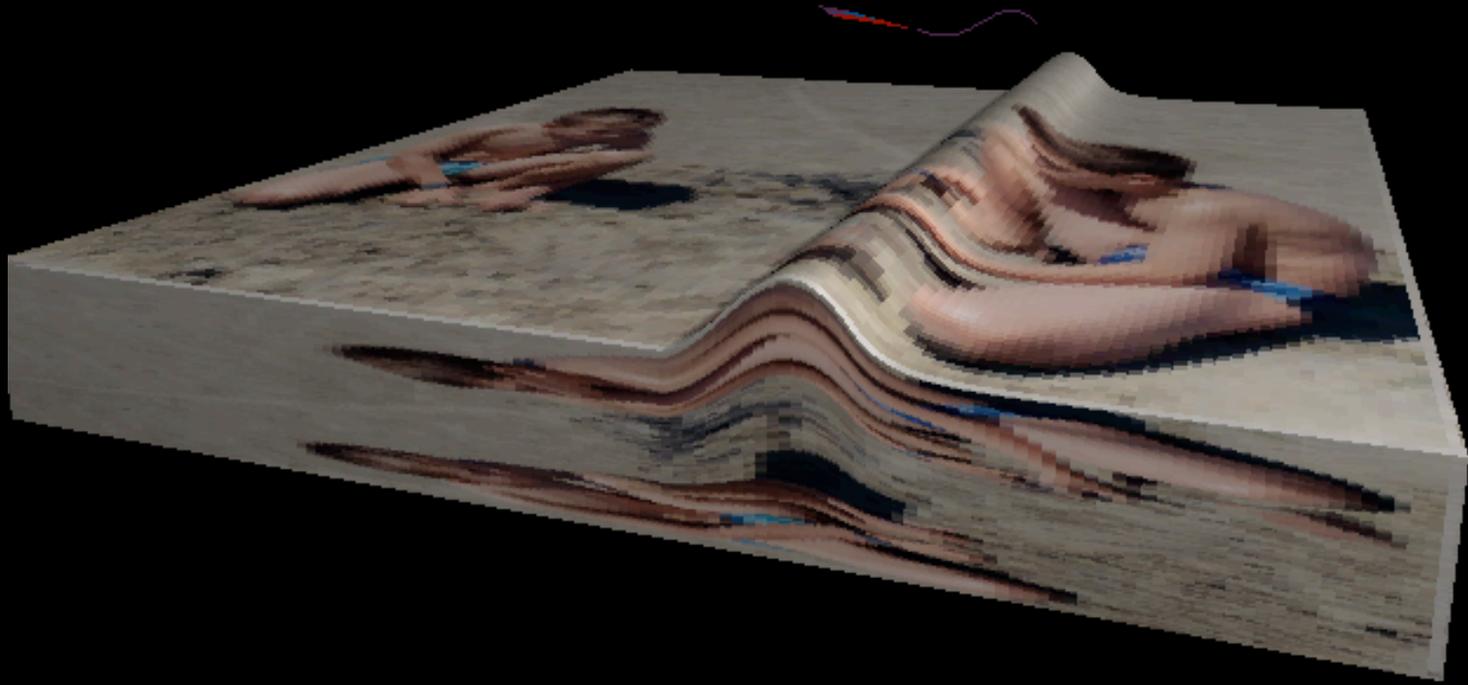


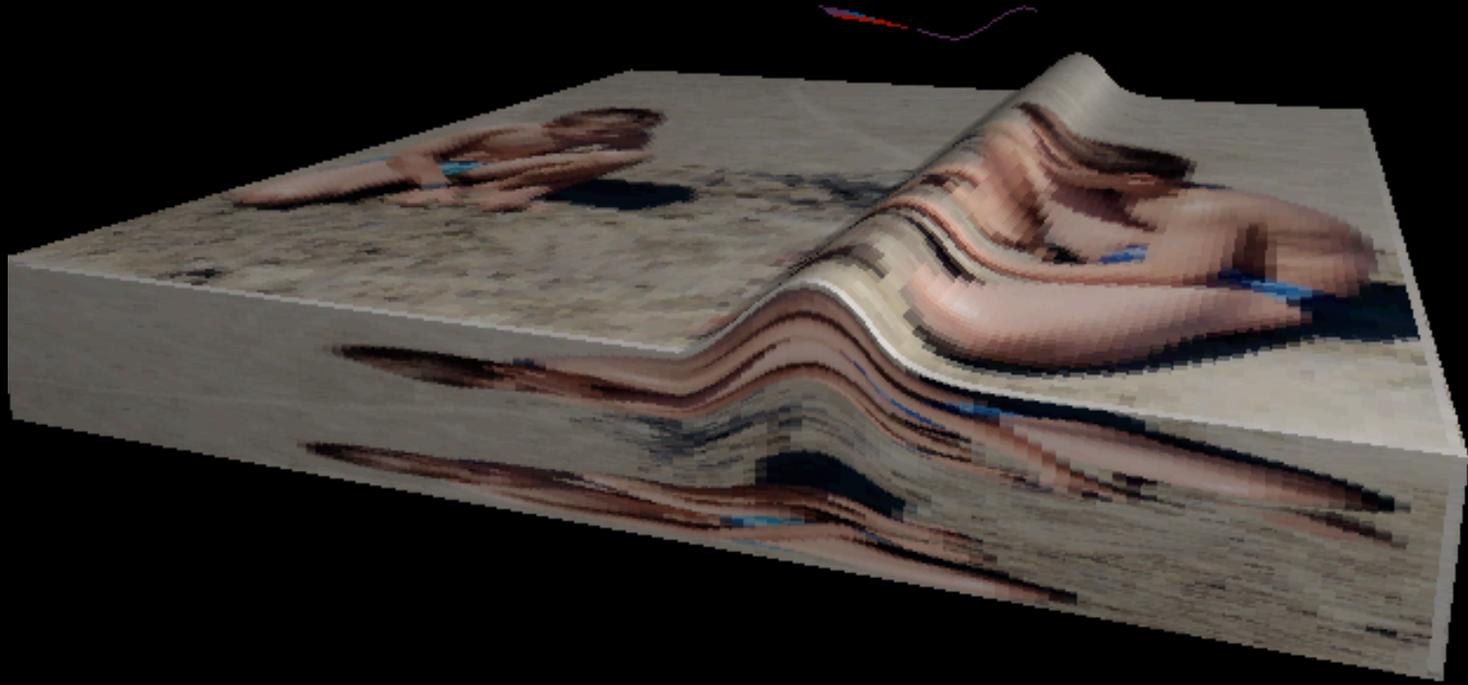


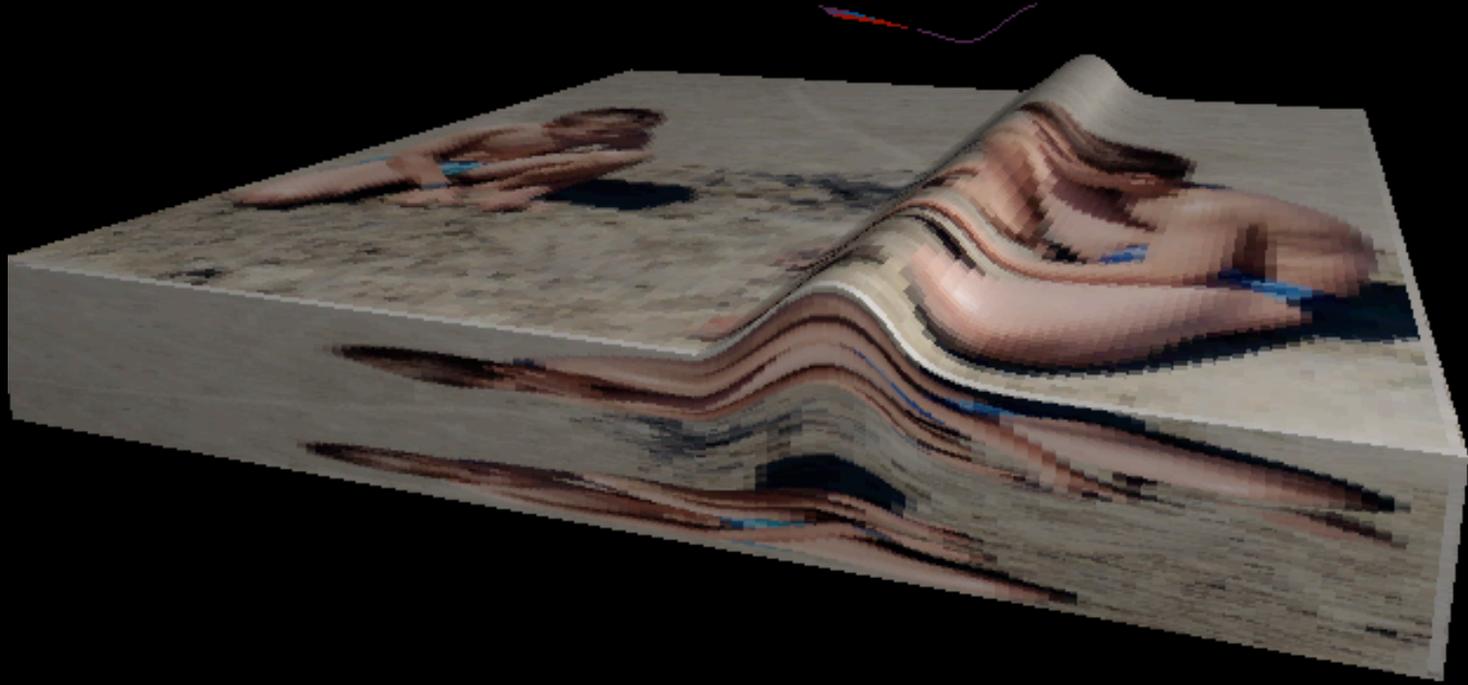


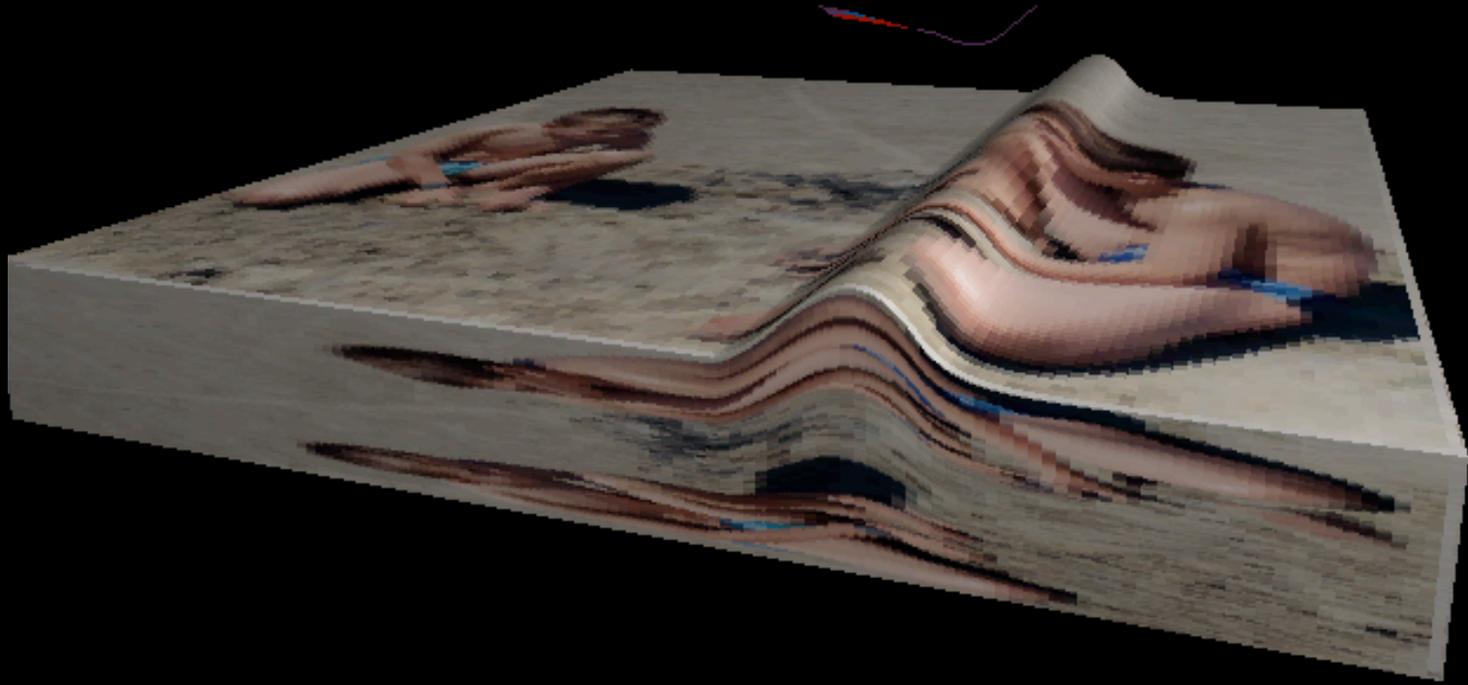


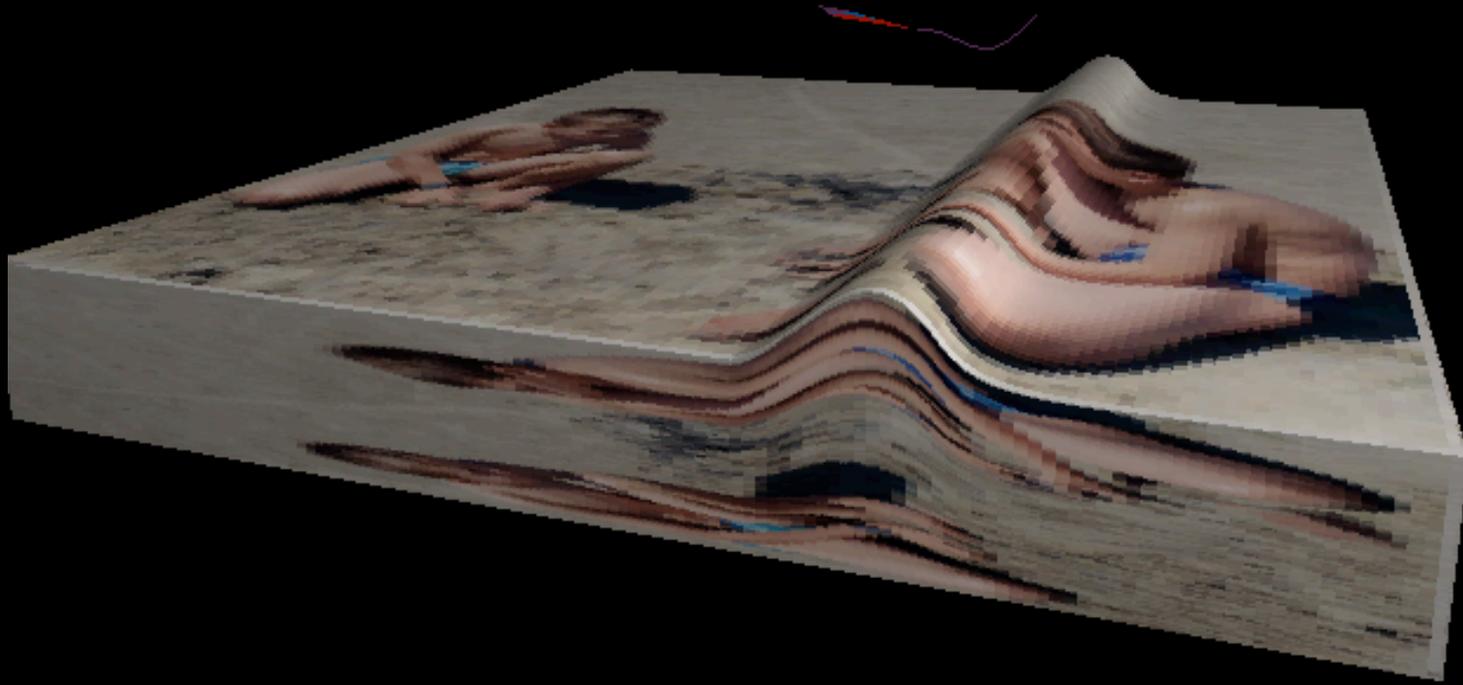


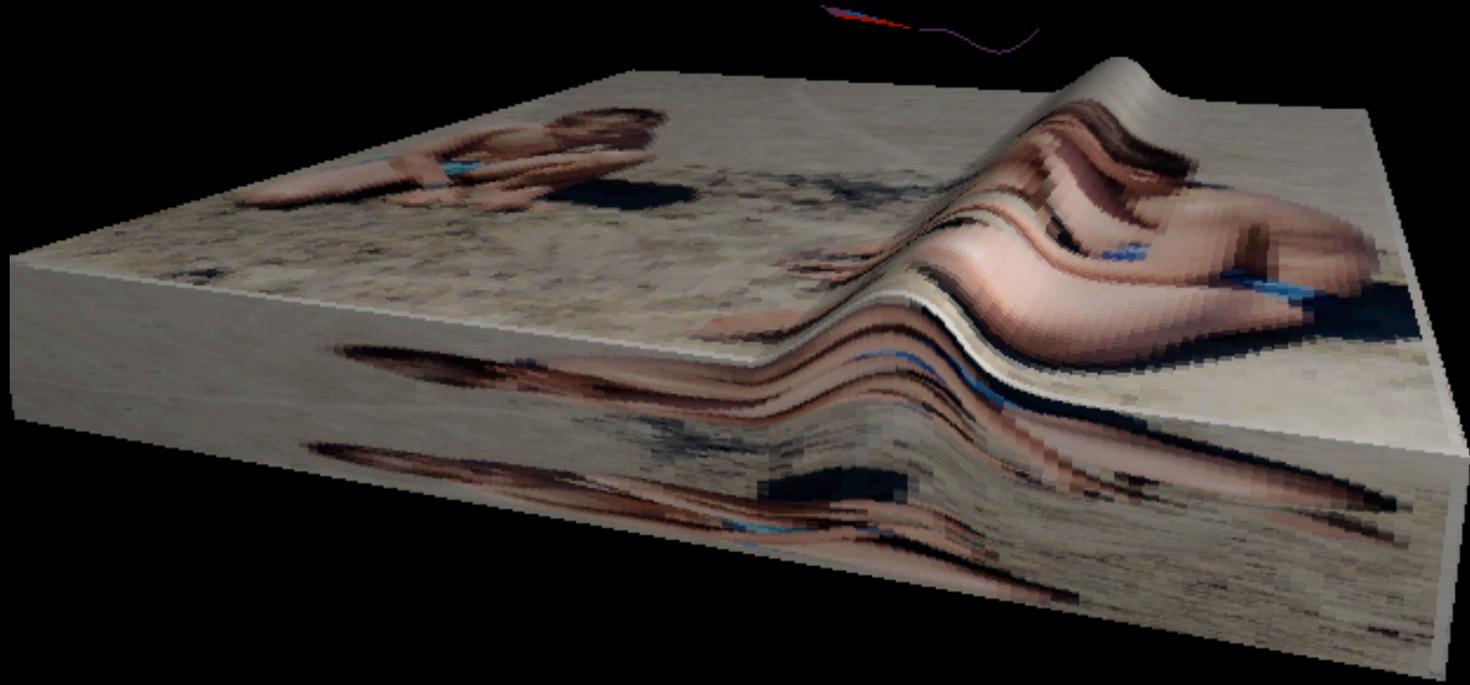


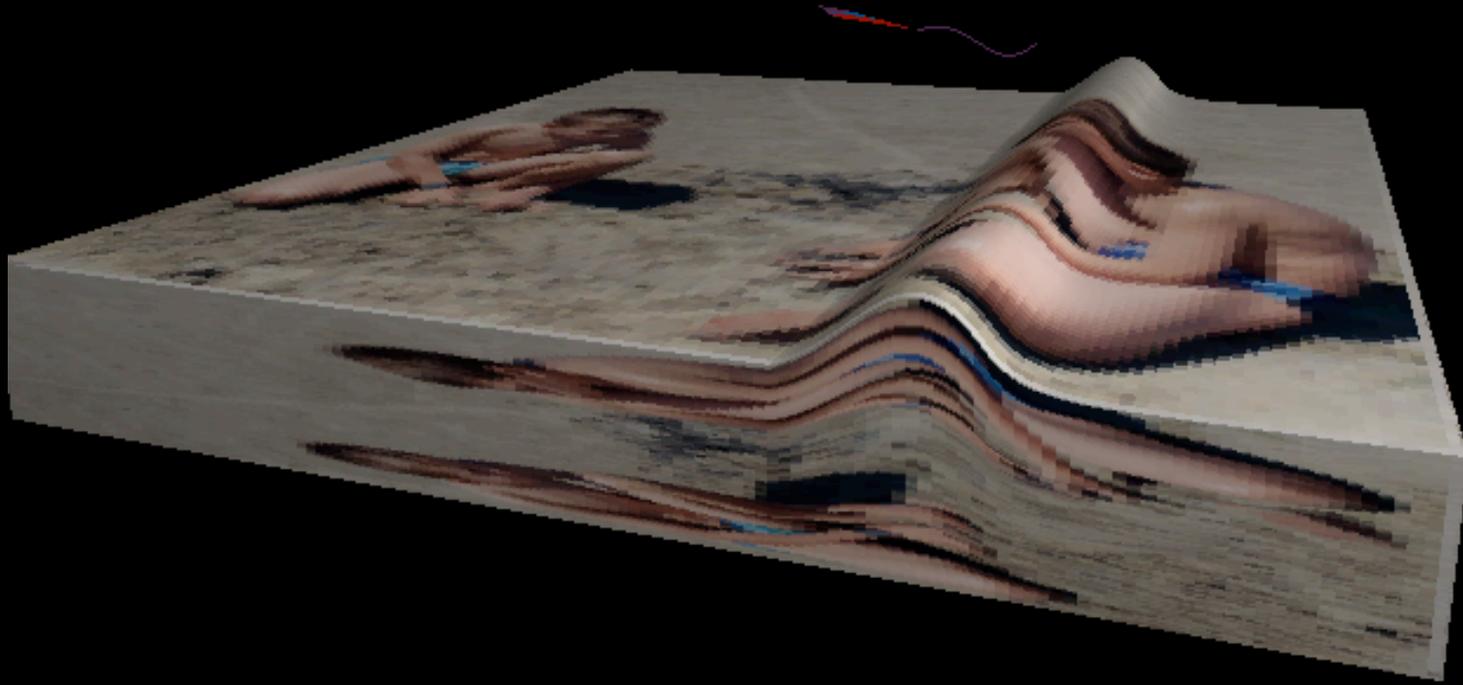


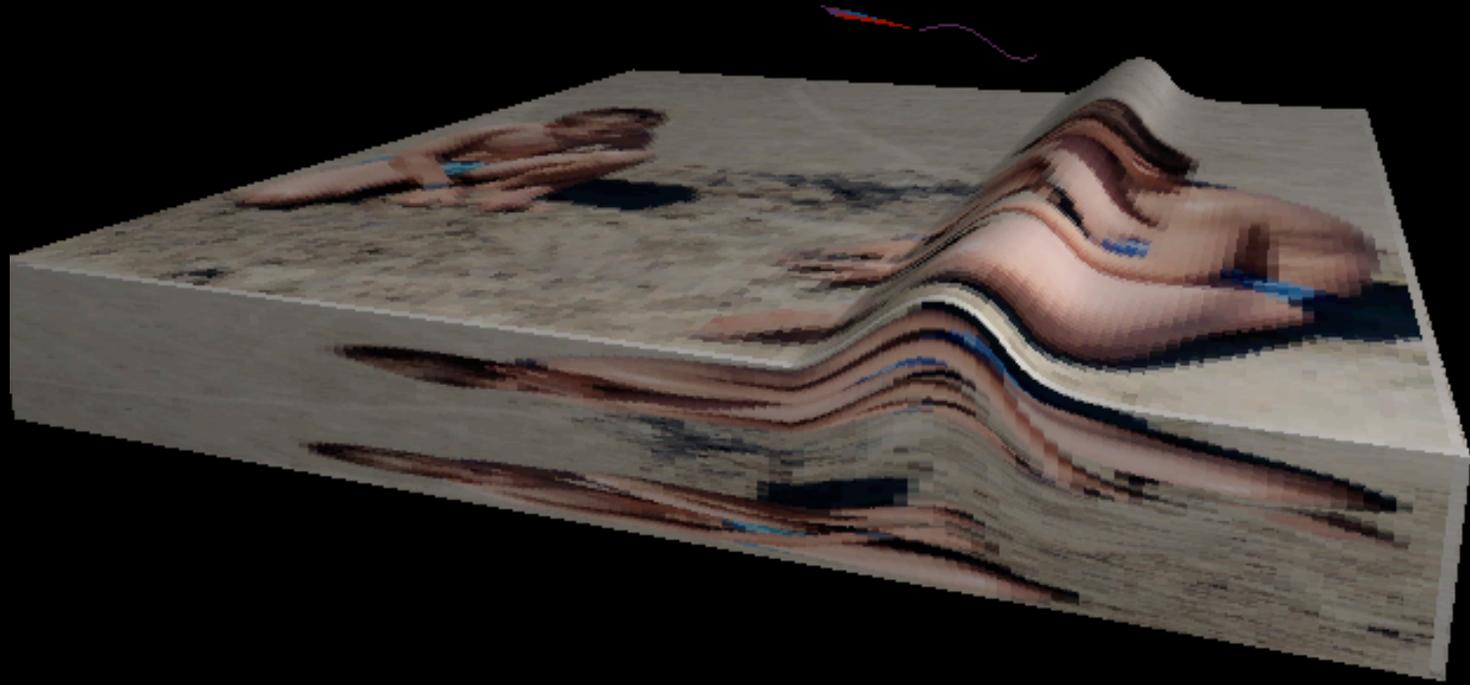






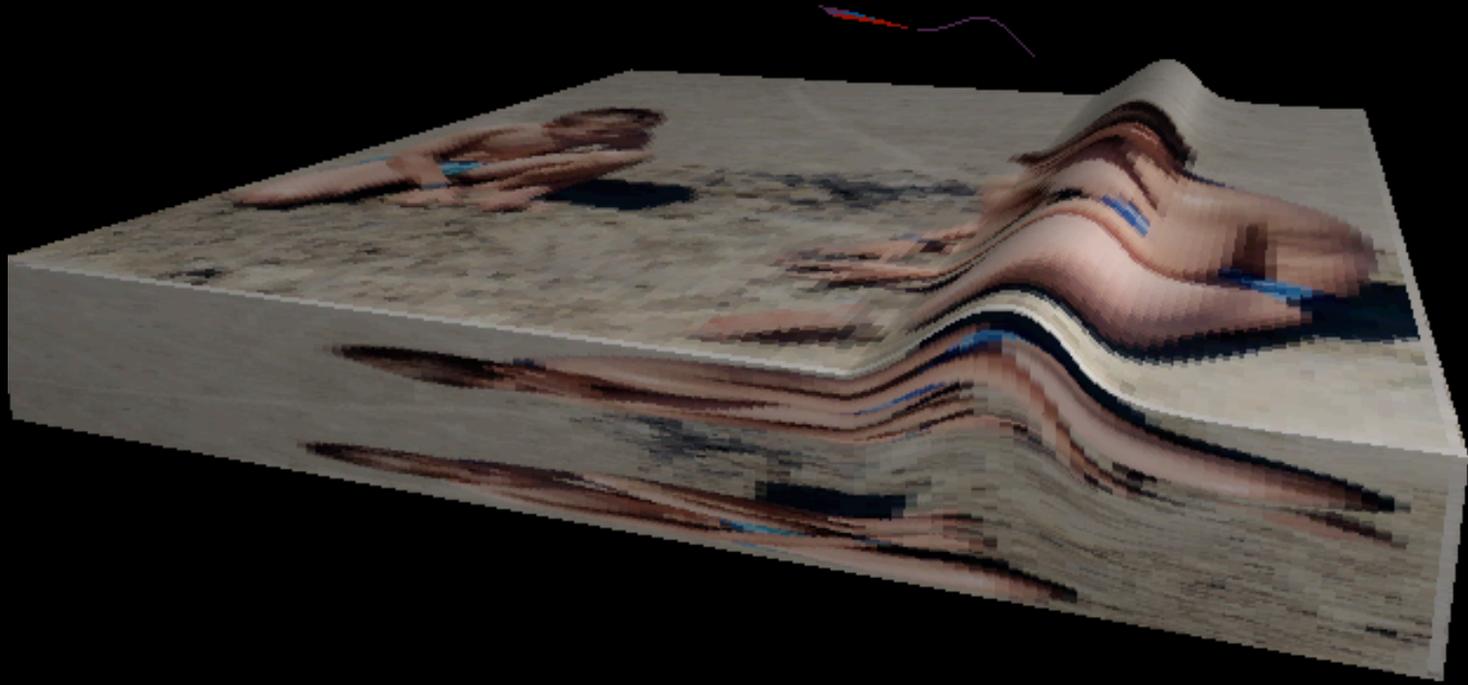


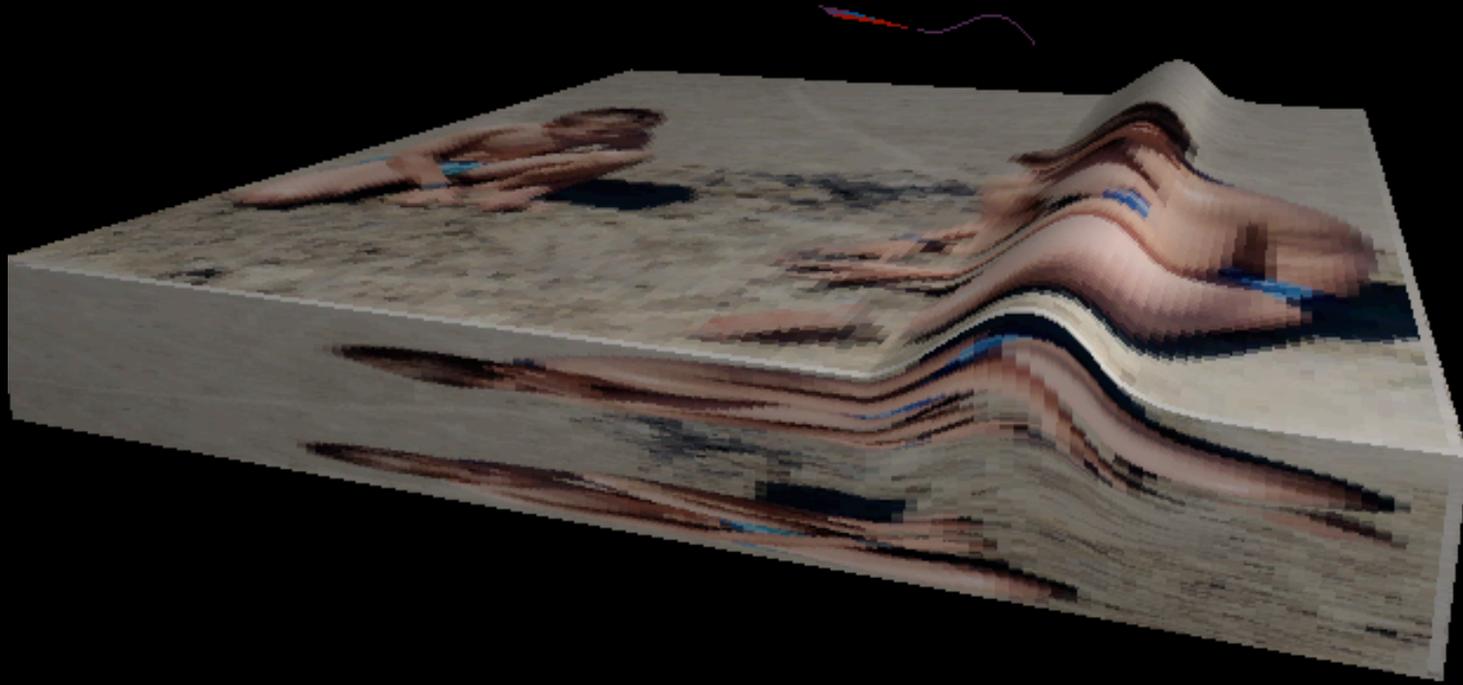


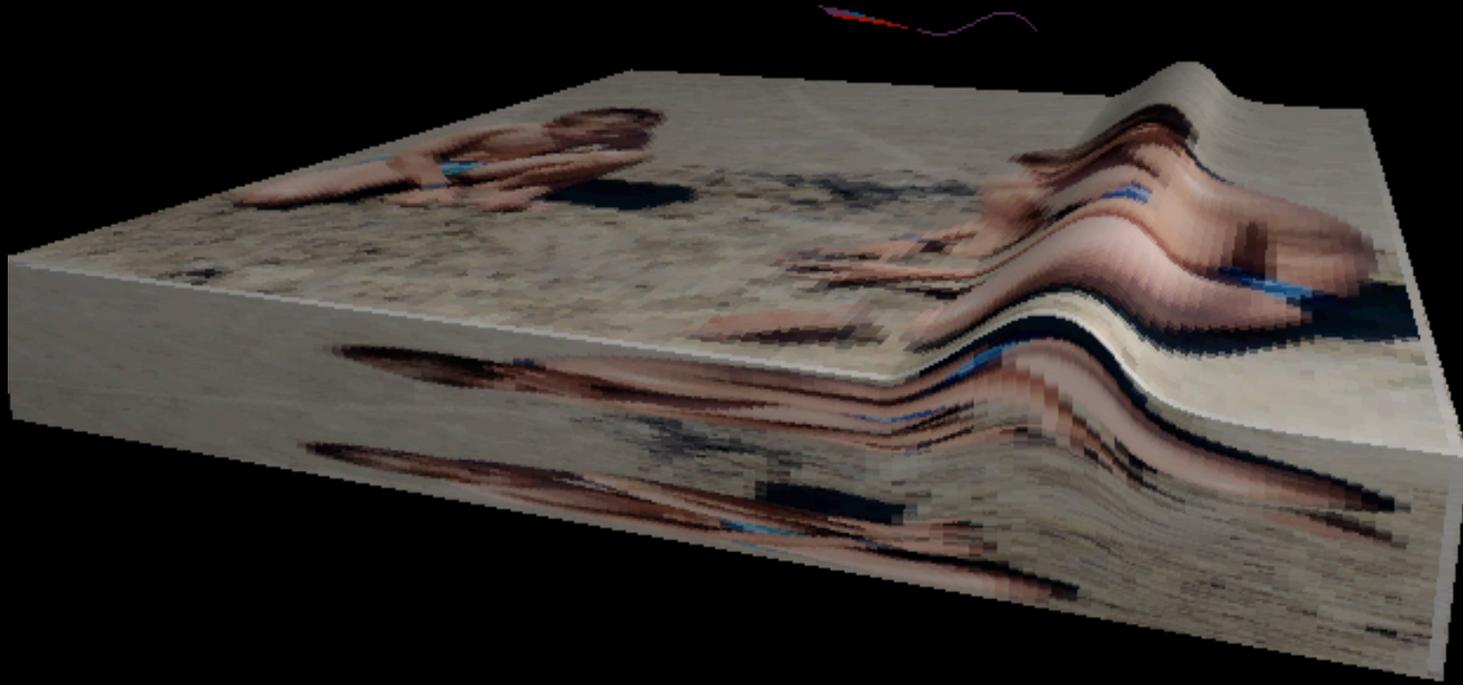








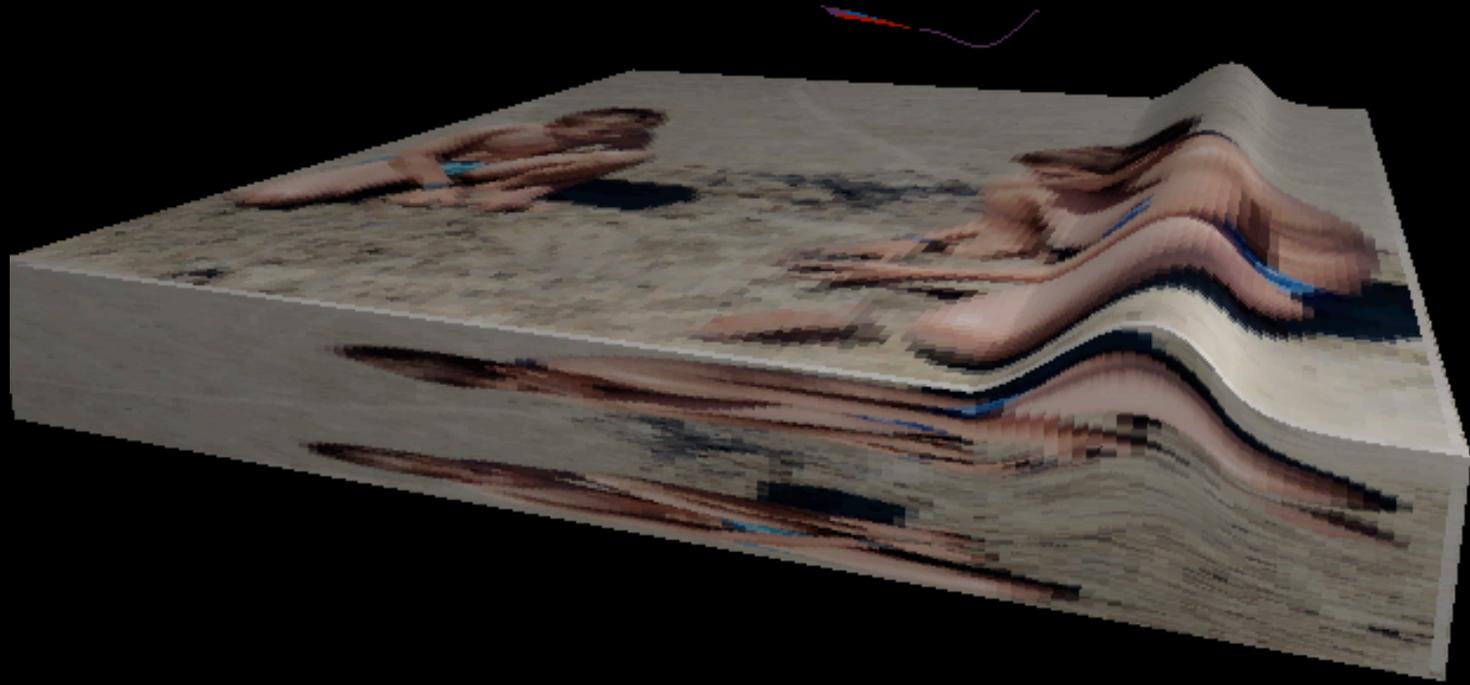






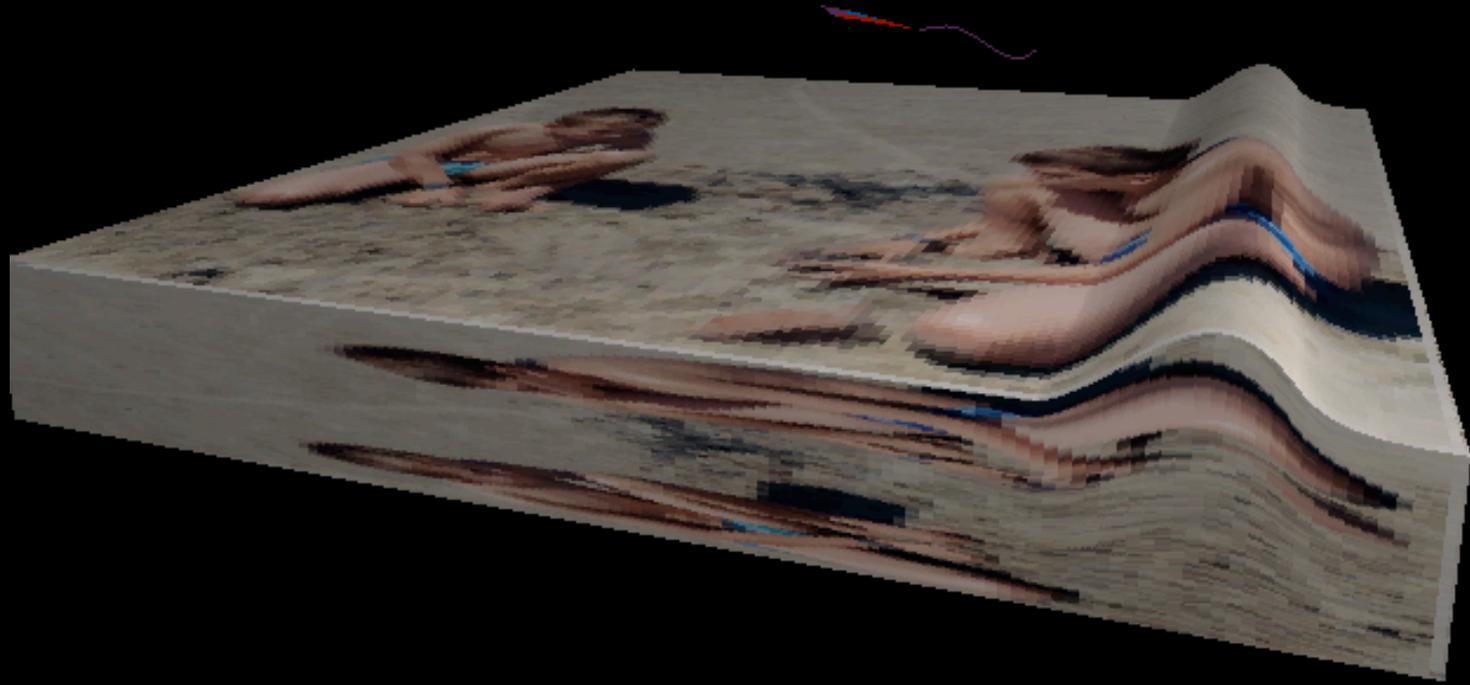


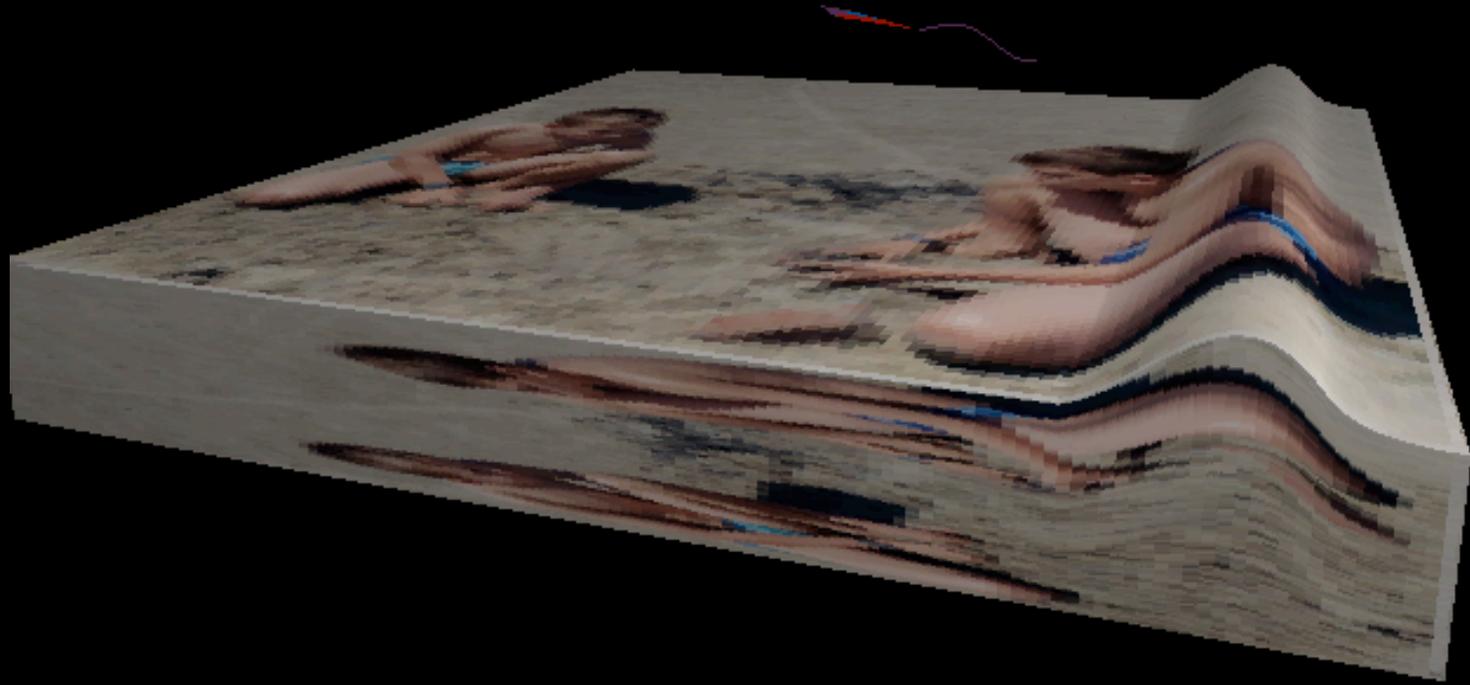












Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

$\int f dx = m$ d'où $L^{4/3} = m$ avec $\int f^* dx^* = 1$

$$\left(\frac{l_s}{L}\right)\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s)$$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

$\int f dx = m$ d'où $L^{4/3} = m$ avec $\int f^* dx^* = 1$

$$\left(\frac{l_s}{L}\right)\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*}$$

$t = L^{4/3}t^*$ and $c = L^{-1/3}c^*$ d'où $c = m^{-1/4}c^*$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

$\int f dx = m$ d'où $L^{4/3} = m$ avec $\int f^* dx^* = 1$

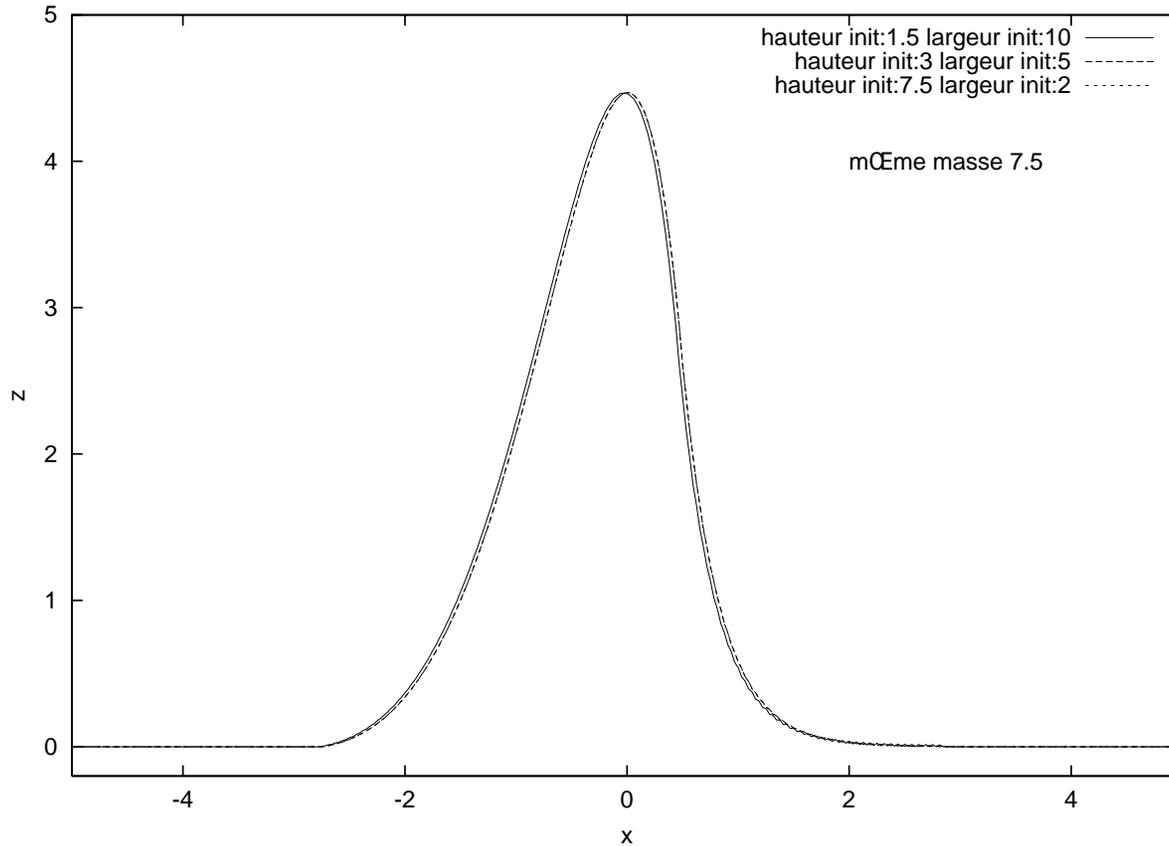
$$\left(\frac{l_s}{L}\right)\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*}$$

$t = L^{4/3}t^*$ and $c = L^{-1/3}c^*$ d'où $c = m^{-1/4}c^*$

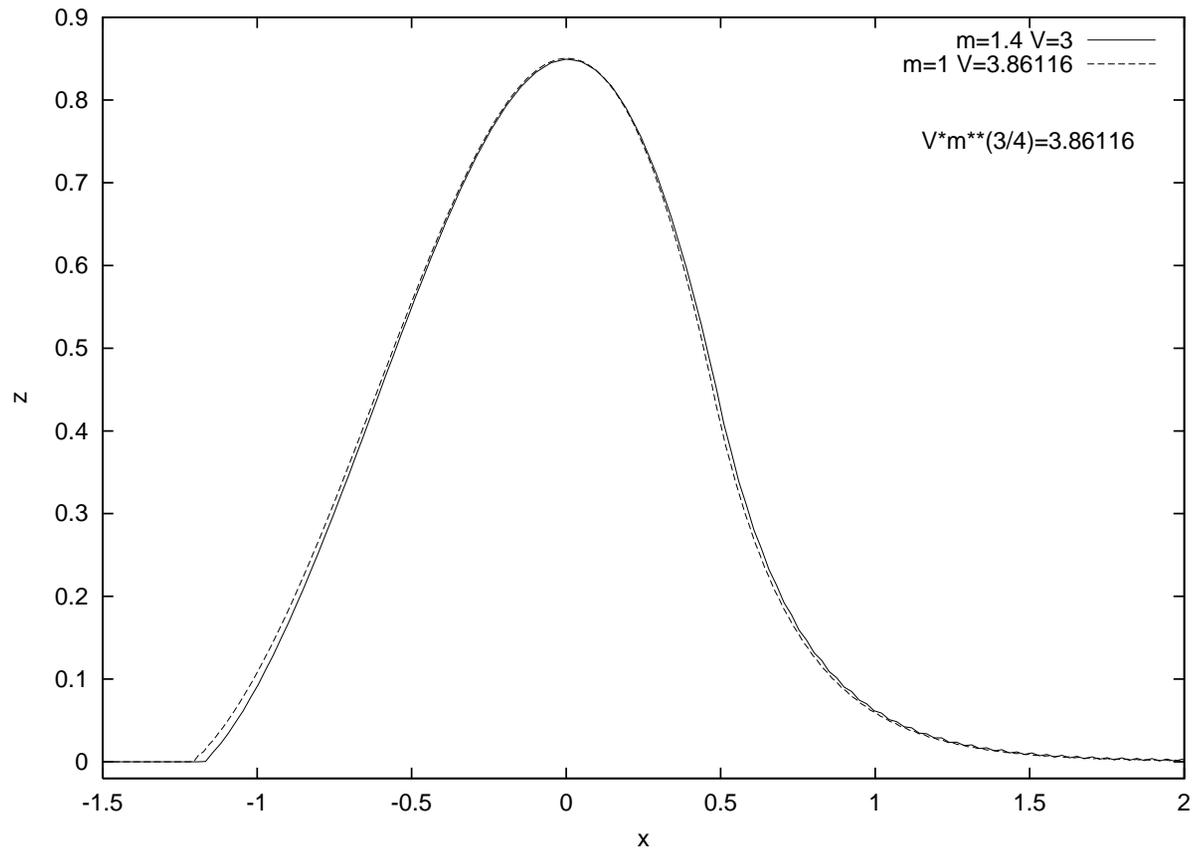
$1/c$ proportionnel à $m^{1/4}$ et fonction de $l_s^{-1}m^{3/4}$

Problème Auto Semblable



Deux différentes bosses de même masse donnent le même état final

Problème Auto Semblable



Deux cas de même $l_s^{-1} m^{3/4}$.

Self Similarity

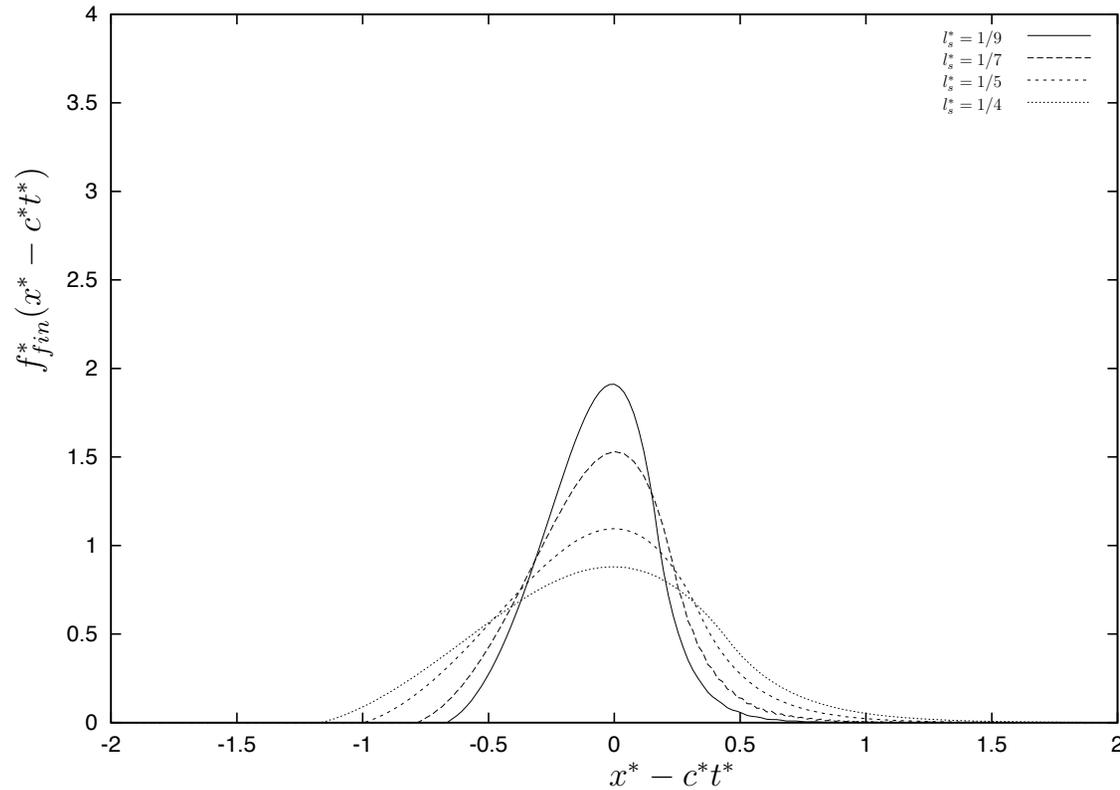


Fig. 8. "Dunes" of unit mass with $l_s^* = 1/4, 1/5, 1/7, 1/9$ ($\tau_s = 0.9$). The smaller l_s^* is, the thinner and higher the "dune" is.

selfsimilarity, unit mass $m = 1$, different $l_s^{-1} m^{3/4}$.

Problème Auto Semblable

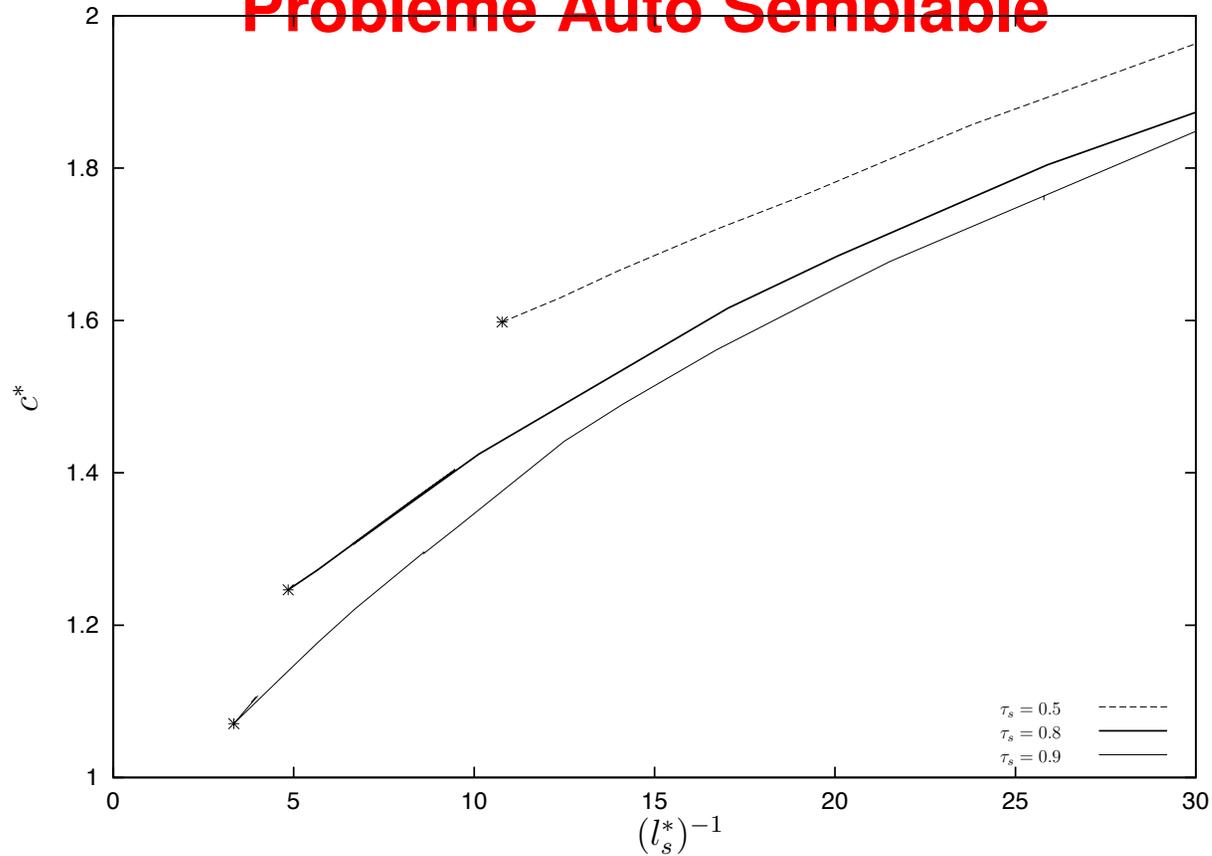


Fig. 7. The selfsimilar relation between the mass m , the inverse of the saturation length $l_s^* = l_s m^{-3/4}$, and the velocity $c^* = c m^{1/4}$ of the "dune" for three values of the threshold: $\tau_s = 0.9, 0.8$, and 0.5 . For a fixed threshold, there is a maximal value of the saturation length l_s^* over which there is no solution.

$$c m^{1/4} \text{ fonction de } l_s^{-1} m^{3/4}.$$

Linéaire / Non linéaire : comparaison

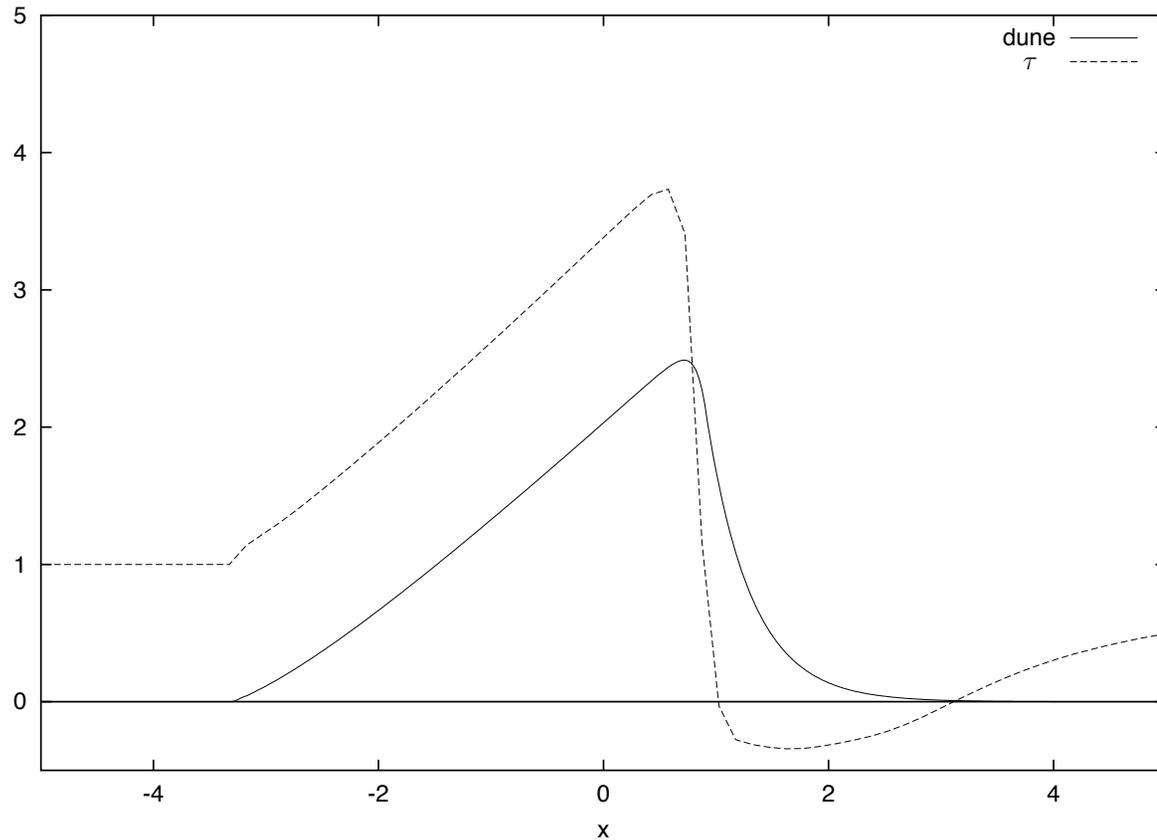


Fig. 6. An example of a non-linear final moving “dune” solution ($\tau_s = 0.9$, $1/l_s = 2.5$, $m = 6$). The weather side is nearly flat. The skin friction is represented; it is negative in the lee side: there is boundary layer separation.

formes finales lin/ non lin

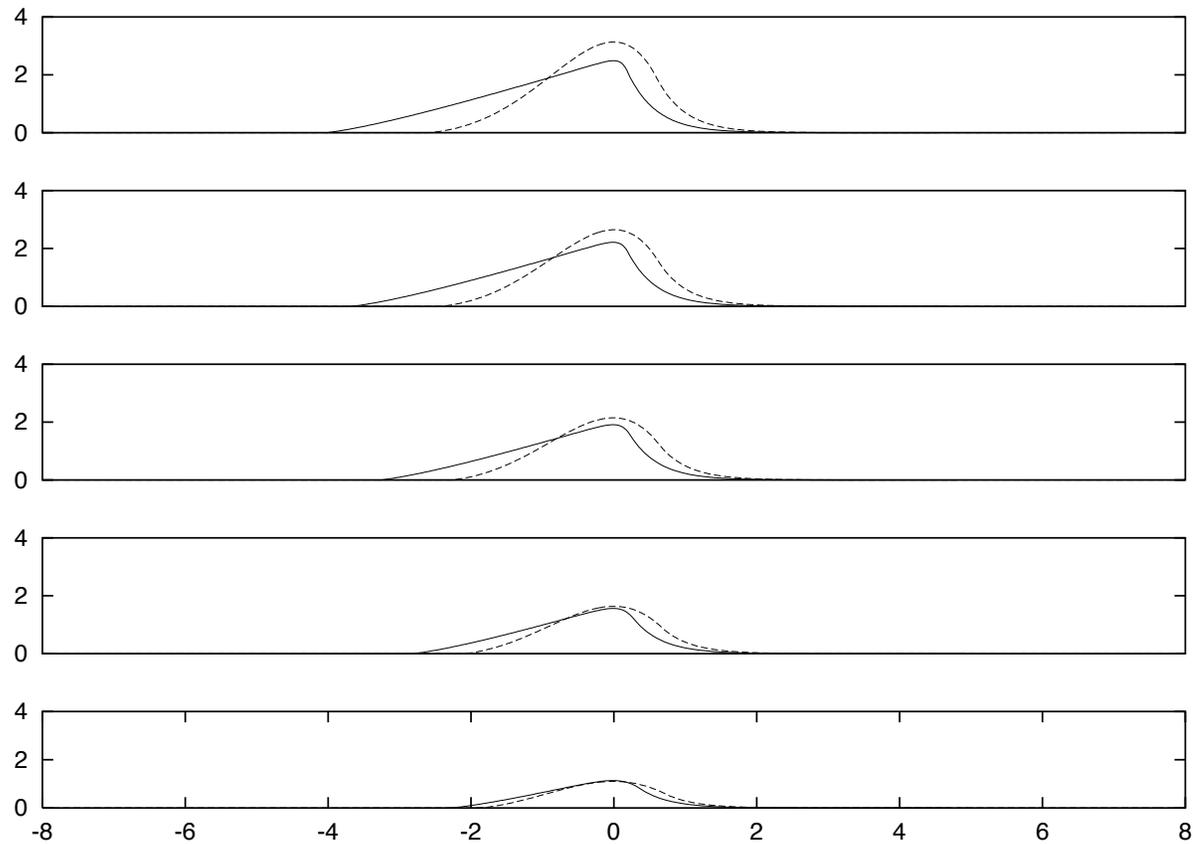


Fig. 5. The non-linear final moving "dune" solution $f_{fin}(x - ct)$ is represented with solid lines, the linear solution is represented with dashed lines, and $\tau_s = 0.9$, $1/l_s = 2.5$, $m = 2, 3, 4, 5$ (bottom curve to top curve).

Conclusion

- pas trop réaliste

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects
- temps de calcul assez court
- "coarsening"

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects
- temps de calcul assez court
- "coarsening"
- prédiction de la dépendance spéciale de la vitesse de la pseudo dune en $m^{-1/4}$

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects
- temps de calcul assez court
- "coarsening"
- prédiction de la dépendance spéciale de la vitesse de la pseudo dune en $m^{-1/4}$

Perspectives

- Application à un cas spécial : Hele Shaw
- Cas turbulent "Interacting Boundary Layer"

springen,

Zurück zur vorher angezeigten Seite.