

Comparaisons numériques, analytiques et asymptotiques pour l'écoulement sur une dune sous marine.

K.K.J. Kouakou, H. Caps[†] & P.-Y. Lagrée

Lab. de Modélisation en Mécanique, UMR CNRS 7607, Boîte 162,
Université Paris 6, 75252 Paris FRANCE

kouakou@lmm.jussieu.fr

[†]GRASP, Université de Liège

Institut de Physique

Liège BELGIQUE

Résumé :

L'écoulement sur un sol constitué de rides est examiné du point de vue à la fois expérimental, numérique et asymptotique. L'idée sous tendant ce travail est que le frottement pariétal de l'écoulement modifie la forme du fond meuble, c'est pourquoi nous validons une résolution numérique avec des solutions asymptotiques sur une géométrie simple. Nous calculons ensuite la solution numérique correspondant à notre configuration expérimentale constituée d'un fond de billes. La loi exacte liant le frottement au transport de billes n'étant pas connue nous proposons une loi simplifiée, nous montrons qu'elle conduit à des instabilités formant des rides et nous proposons deux exemples d'évolutions temporelles correspondant à deux cas asymptotiques particuliers.

Abstract :

The flow of an erodible soil with ripples is examined from the experimental numerical and asymptotical point of view. The skin friction is supposed to change the topography. This is why we validate a numerical resolution with asymptotic solutions on a simple geometry. We compute then the numerical solution corresponding to our experimental configuration (made up of small glass beads). The exact friction/transport law being unknown, we propose a simplified law, we show that this leads to instabilities creating ripples. As examples, two temporal evolutions corresponding to two particular asymptotic cases are presented.

Mots-clefs :

méthodes asymptotiques ; érosion ;

Dans le cadre de l'étude de rides ou de dunes de sable sous marines une expérience de laboratoire constituée d'une cuve cylindrique remplie d'eau avec un fond de billes de verre a été construite. Nous nous proposons ici d'estimer l'écoulement hydrodynamique au dessus de ce fond de billes ayant dans l'idée que le frottement pariétal va faire glisser les billes à l'interface fluide/fond et modifier la forme de ce fond.

Nous comparons la résolution numérique directe de Navier Stokes sur des géométries données à des solutions analytiques asymptotiques. Une fois le code de résolution des équations de Navier-Stokes validé, nous calculons l'écoulement sur des motifs expérimentaux. L'examen du frottement pariétal met en évidence l'apparition de zones de recirculation en aval des rides. En outre, l'asymétrie des motifs observés provient d'une augmentation du frottement sur le sommet amont de la ride.

Finalement, une loi d'évolution du fond en fonction du frottement pariétal est proposée. Grâce à celle-ci, nous discutons la stabilité linéaire du fond, et simulons numériquement l'évolution du fond au temps longs.

1 Equations pour le fluide, hypothèses et validation à $Re = 0$ et à $Re = \infty$

On suppose ici que les équations de Navier Stokes s'appliquent pour le fluide au dessus de la paroi considérée comme imperméable et fixe, mais il est vraisemblable qu'il faudra par la suite tenir compte d'un léger écoulement dans le milieu poreux qu'est l'assemblée de billes. Nous nous intéressons d'abord à une "dune" unique et nous calculons comment un écoulement cisailé incident stationnaire laminaire est perturbé par cette bosse. La résolution numérique se fait avec le code Castem 2000. Auparavant, pour valider l'approche numérique nous allons étudier pour des bosses très petites en épaisseur deux cas limites qui peuvent se résoudre explicitement.

A $Re = 0$, il s'agit d'un écoulement de Stokes. On peut alors montrer que (dans les échelles sans dimensions) la perturbation linéarisée du frottement pariétal (τ) est pour chaque mode de Fourier $\exp(-ikx)$:

$$FT[\tau] = 2|k|FT[f]. \quad (1)$$

Sur la figure 1 (gauche) on trace la solution numérique du code CASTEM (5000 éléments) à $Re = 0$ que l'on compare à la solution linéarisée prédite par (1). On constate que l'accord est correct. Cependant, nous n'avons pas réussi à obtenir un meilleur accord en diminuant le nombre de Reynolds en dessous de 1 dans Castem (une vérification numérique a aussi été faite avec le code FreeFem dans le cas linéaire). On observe que le frottement pariétal est en phase avec la bosse.

A $Re = \infty$, il s'agit en fait du cadre de la Triple Couche simplifiée (Bhattacharyya *et al.*(1) comparent aussi Navier Stokes et la théorie asymptotique). Soit U'_0 le cisaillement de vitesse incidente et δ l'échelle transverse de longueur, et soit $\varepsilon\delta$ l'ordre de grandeur de la hauteur des bosses. On a, par moindre dégénérescence $\lambda = \varepsilon^3 \left(\frac{U'_0 \delta^3}{\nu}\right)$. Comme dans la configuration cisailée il n'y a pas d'échelle caractéristique. On choisit ici $\lambda = \delta$, ce qui nous donne $\varepsilon = Re^{-1/3}$, avec $Re = U'_0 \delta^2 / \nu$. On montre alors que dans les échelles sans dimensions la perturbation linéarisée du frottement pariétal (τ) est (FT désigne la transformée de Fourier, Ai est la fonction d'Airy) :

$$FT[\tau] = (3Ai(0))(-ik)^{1/3}FT[f]. \quad (2)$$

Sur la figure 1 (droite) on trace la solution numérique du code CASTEM que l'on compare à la solution linéarisée prédite par (2) dans le cas arbitraire d'une bosse en $\exp(-8\pi x^2)$. On constate que l'accord est d'autant meilleur que le nombre de Reynolds est grand. On observe, contrairement au cas précédent, que le frottement pariétal est en avance sur la bosse.

2 Cas expérimental

Ayant validé la résolution numérique, nous calculons ensuite des exemples d'écoulement sur des rides dont le profil est issu de visualisations des expériences. Le dispositif expérimental est constitué d'un plateau horizontal de 33 cm de diamètre pouvant être mis en rotation à une vitesse déterminée ($8 < \omega < 100 \text{ rpm}$), pendant un temps déterminé [voir Figure 2 haut]. Le lit de billes de verre est initialement plan et mesure 3cm d'épaisseur. La hauteur d'eau h érodant ce lit est un paramètre expérimental ($h > 1\text{cm}$). L'ensemble est mis en rotation solide (à la vitesse ω), puis arrêté brusquement. Le fluide continue alors son écoulement par inertie tandis que le matériau granulaire reste globalement fixe. L'érosion produite par le fluide conduit à la formation de rides de courant. Des images de ces rides le long de la circonférence du récipient sont enregistrées à l'aide d'une caméra CCD située sur le côté du plateau. Le profil

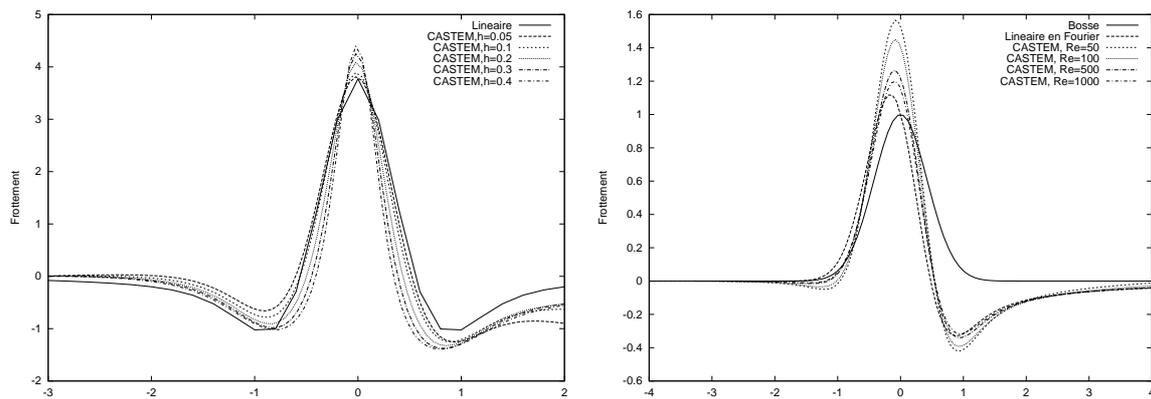


FIG. 1 – Comparaison de la perturbation du frottement pariétal pour une bosse de forme Gaussienne. A gauche : cas linéaire issu de (1) et CASTEM $\frac{1}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ pour h_0 (hauteur de bosse en échelle δ) variant de 0.05 à 0.4 et pour $R_e = 1$. A droite résolution linéaire en Fourier de (2) comparé à CASTEM écrit en échelles de double couche $\frac{\bar{u}-1}{h_0 R_e^{1/3}}$ pour des hauteurs de bosse $h_0 = 0.01$ (en échelle δ) et pour R_e variant de 50 à 1000.

est décomposé en une série de 20 images de 160x120 pixels qui sont ensuite recombinaées [voir Figure 2 bas]. Une seconde caméra CCD est située au-dessus du récipient et enregistre des images globales de la surface granulaire. Dans ce cas, les profils des rides sont enregistrés sur des cercles concentriques de rayons différents. Grâce à un éclairage homogène, la luminance permet de déterminer l'élévation de la surface granulaire, i.e. le relief. Il est à noter que pour des raisons de convergence numérique, les profils expérimentaux sont "adoucis" par le biais d'une séquence décomposition/ recombinaison en série de Fourier. En substituant les modes de plus hautes valeurs, les irrégularités dues à la nature granulaire de la surface sont ainsi éliminées, sans perte d'information sur la morphologie des structures (longueur d'onde, amplitude. . .). Sur

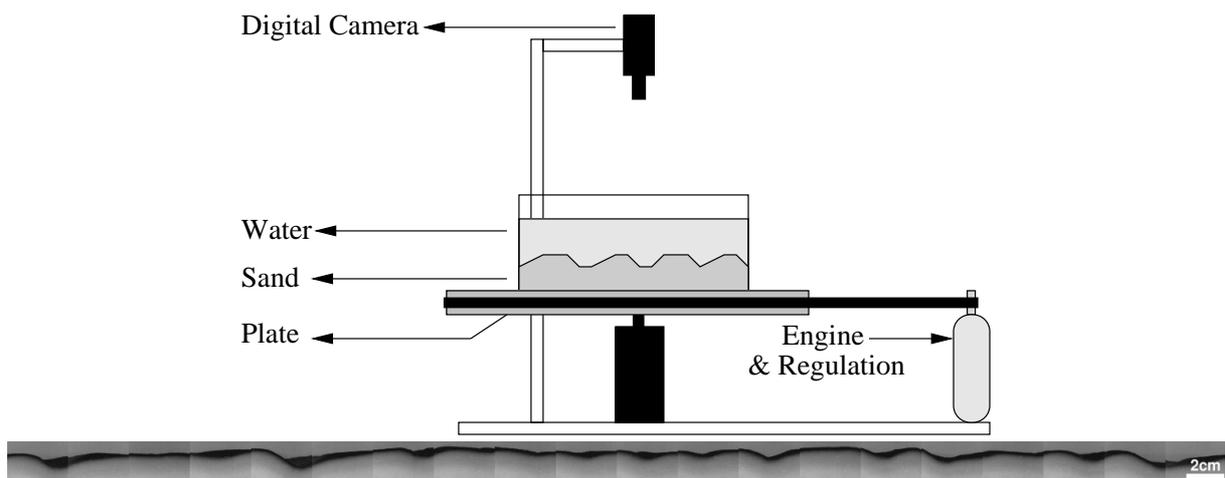


FIG. 2 – Schéma du dispositif expérimental (haut) et exemple de profil observé expérimentalement (bas).

la Figure 3, nous présentons le frottement calculé numériquement à l'aide du code CASTEM ($R_e = 300$) sur une ride créée par l'écoulement de 3cm de hauteur d'eau, à une vitesse de 48.5 rpm. Pour des raisons de lisibilité, une seule ride, isolée, est représentée sur le graphique. De

part et d'autre de cette ride, la surface granulaire est supposée plane et la hauteur de sable égale à la hauteur moyenne (notée $h = 0$ ici). Il est à noter que le calcul numérique est réalisé à 2D alors que les rides sont tridimensionnelles. Nous considérons en effet que sur un cercle de rayon r , le problème (écoulement plus motifs engendrés) peut-être vu comme bidimensionnel. Expérimentalement, on observe que les motifs engendrés dans cette géométrie, peuvent "scaler" avec ceux créés dans des dispositifs bidimensionnels (4). On constate encore que le frottement

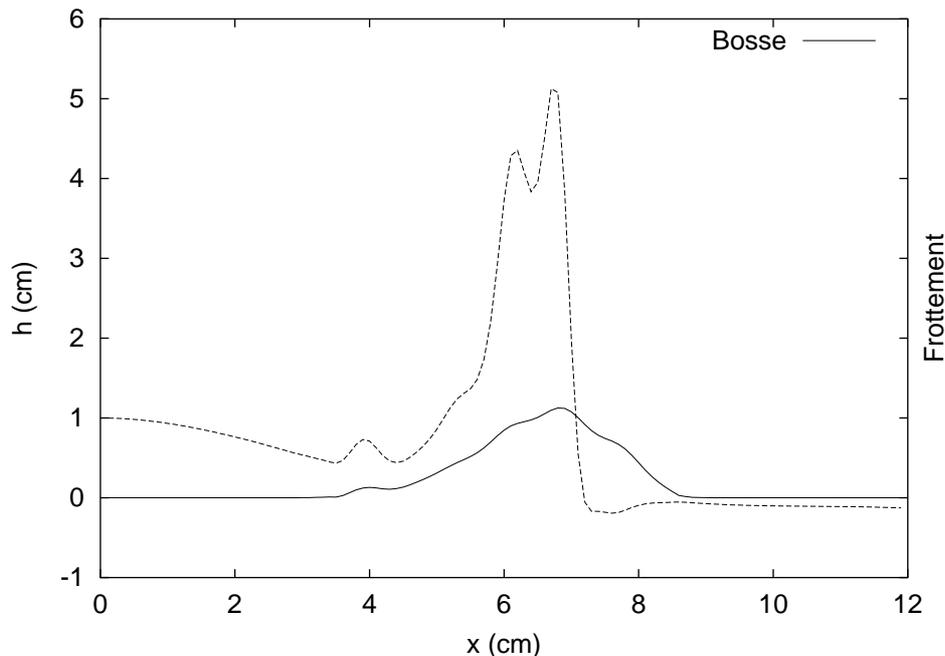


FIG. 3 – Frottement pariétal sur un profil expérimental.

est maximum en amont de la bosse. La partie de la crête exposée à l'écoulement est ainsi le siège d'une érosion plus importante. D'un point de vue expérimental, ce résultat se traduit pas une asymétrie de la ride. D'autre part, le frottement devient négatif en aval de la ride, signature d'un courant de retour. La zone de recirculation prédite par le calcul est observée expérimentalement et vient accentuer l'asymétrie du motif. Il est à noter que les rides présentant cette zone de recirculation sont dénommées "rides à tourbillons". Pour les rides de plus petites amplitudes, aucune zone de recirculation n'est prédite, en accord avec l'expérimentation. Le calcul de l'écoulement sur le train complet de rides est présenté Figure 4. Les caractéristiques principales mise en évidence sur une seule ride se retrouvent ici sur chacune des rides. En outre, il apparaît que les rides de plus grande importance peuvent "écranter" les plus petites.

3 Le sol érodable : problème couplé

Ensuite, nous permettons au fond d'évoluer (en supposant que la déformation du fond se fait à des temps plus long que le temps hydrodynamique) en écrivant la loi de conservation de la masse (qui relie la variation temporelle de la forme du fond à la divergence du flux de matière) et une loi liant le flux de matière entraîné au fond à la valeur du frottement pariétal (lois d'Exner,

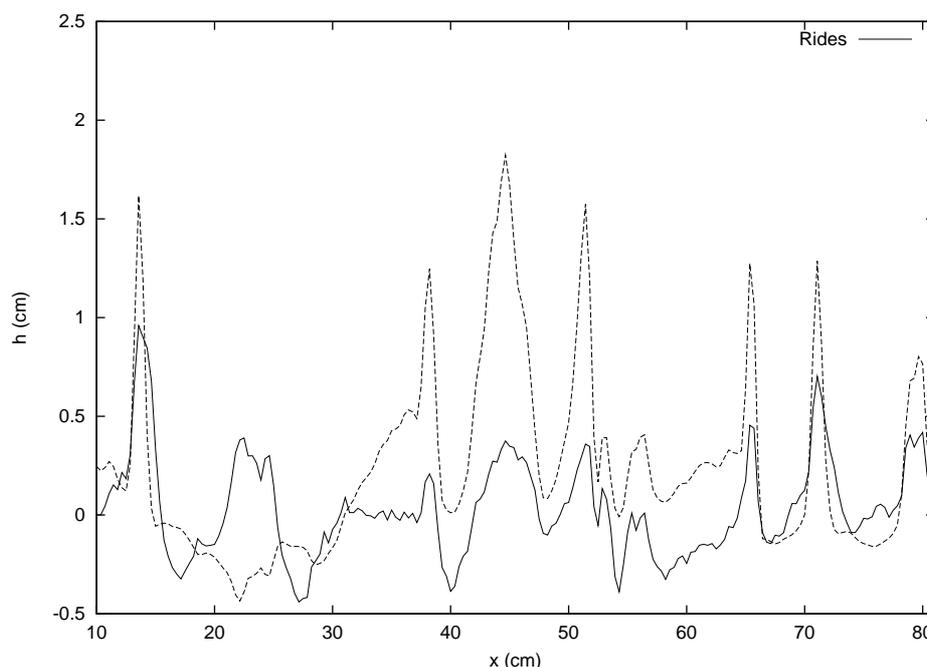


FIG. 4 – Frottement pariétal sur un profil expérimental complet.

Yang (1995) (3)), cette équation est écrite ici sous forme adimensionnée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}q, \quad q = \varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}). \quad (3)$$

La fonction $\varpi(x)$ est telle que si $x < 0$, $\varpi(x) = 0$ et si $x > 0$, $\varpi(x) = x$. La relation portant sur q traduit que plus la contrainte tangentielle est élevée plus il y a de matière entraînée par l'écoulement. Le coefficient τ_s signifie qu'il existe un seuil pour la contrainte, le coefficient Λ traduit un effet de gravité : le seuil est modifié suivant le signe de la pente (si la pente est positive il faut exercer une contrainte supérieure).

4 Stabilité et évolution en temps

Dans le cadre asymptotique ($Re = 0$ et $Re = \infty$) on peut obtenir la relation de stabilité temporelle explicite ($e^{\sigma t - ikx}$). Dans le cas $Re = 0$, la configuration est toujours stable. En revanche, on a dans l'autre cas limite :

$$\sigma = (ik)(3Ai(0))(ik)^{-1/3} + ik\Lambda. \quad (4)$$

Pour $0 < k < 0.39\Lambda^{-3/2}$, σ est positif. Le taux de croissance maximum est obtenu pour $k = 0.2\Lambda^{-3/2}$, pour les nombres d'onde $k > 0.39\Lambda^{-3/2}$ la configuration est stable.

Partant d'une même bosse nous montrons comment elle est déformée par l'écoulement en comparant les différentes prédictions (Castem/ modèles asymptotiques résolus en différences finies et par FFT) pour des temps courts. Pour des temps assez long, seules les descriptions asymptotiques sont exploitables, on observe alors (figure 5 à gauche) que pour $Re = 0$ la dune est détruite et qu'elle est transformée en un train de rides dont la hauteur décroît en fonction du temps (la théorie de stabilité linéaire nous avait effectivement montré que cette configuration est stable et dispersive).

En revanche pour $Re = \infty$, la dune croît dans un premier temps. La théorie de stabilité linéaire nous avait effectivement montré que cette configuration est instable, pour des temps plus longs on peut obtenir une bosse unique (figure 5, droite). Plus généralement, partant d'un fond plat avec une perturbation faible, on observe que des petites rides se forment et grandissent, puis elles se réunissent et finissent par former une dune unique qui remplit tout le domaine de calcul.

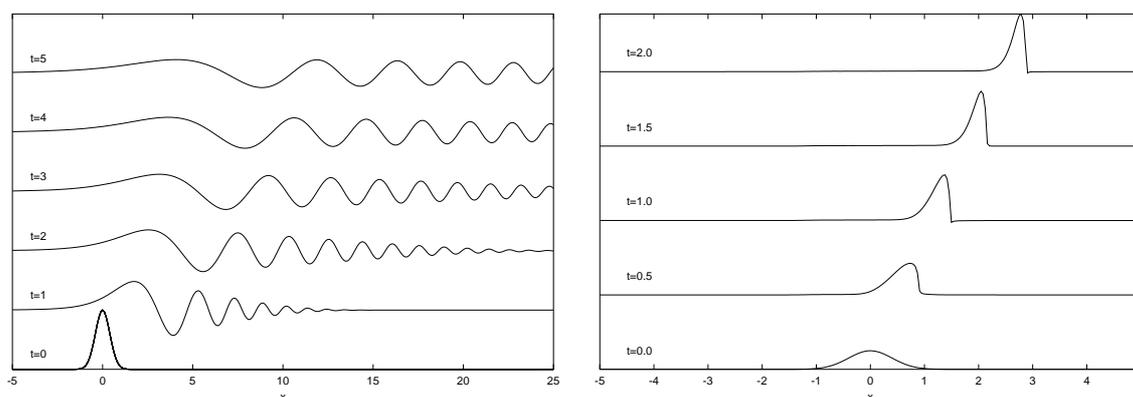


FIG. 5 – Gauche : exemple (pas de seuil τ_s , $\Lambda = 0$ i.e. simplement $q = \tau$) calculé numériquement, dans le cas $Re = 0$, d'évolution en fonction du temps d'une dune initiale en un train de rides, le domaine de calcul est supérieur à celui représenté. Droite : exemple calculé numériquement (par FFT, $\tau_s = -0.025$, $\Lambda = 0.1$) de déformation d'une dune initiale arbitraire en une dune de forme invariante se déplaçant.

5 Conclusion

Nous avons considéré la résolution numérique directe des équations de Navier Stokes sur une bosse dans un écoulement cisailé que nous avons comparé très favorablement à des solutions asymptotiques à petit et grand Reynolds. Nous avons ensuite calculé sur des configurations expérimentales le frottement pariétal. Parmi les perspectives on envisage d'affiner les cas asymptotiques (étude des seconds ordres) et surtout d'introduire des lois plus complexes de transport pour tenter de reproduire les expériences.

Références

- [1] Bhattacharyya, S, Dennis S.C.R., & Smith, F.T. 2001 *Journal of Engineering Mathematics* **39**, 47-62.
- [2] H. Caps and N. Vandewalle (2002), *Physica A* **313**, 357.
- [3] C.T. Yang (1995) : "Sediment transport : theory & practice", Mc Graw Hill.
- [4] F. Zoueshtiagh and P. J. Thomas (2000), *Phys. Rev. E* **61**, 5588.