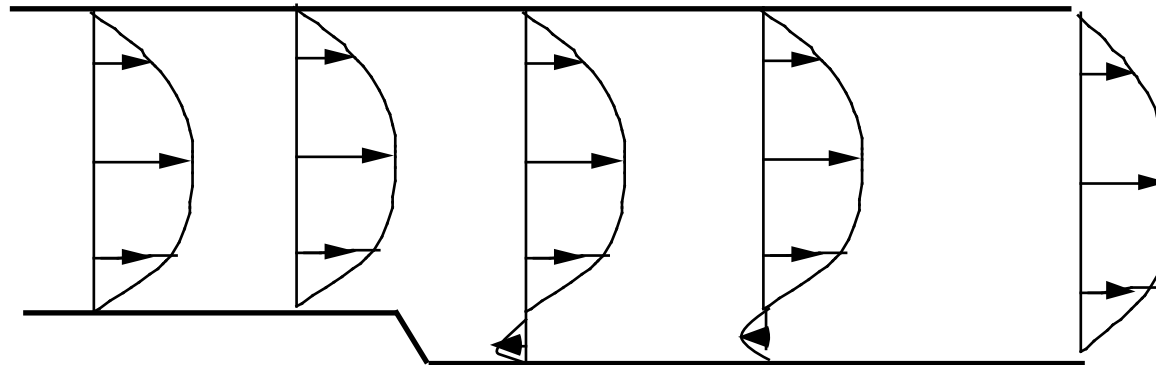


P.-Y. LAGRÉE
pyl@ccr.jussieu.fr
Laboratoire de Modélisation en Mécanique
Boîte 162
4 place Jussieu
75252 Paris

TRIPLE COUCHE // DOUBLE COUCHE DANS UN ECOULEMENT DE POISEUILLE

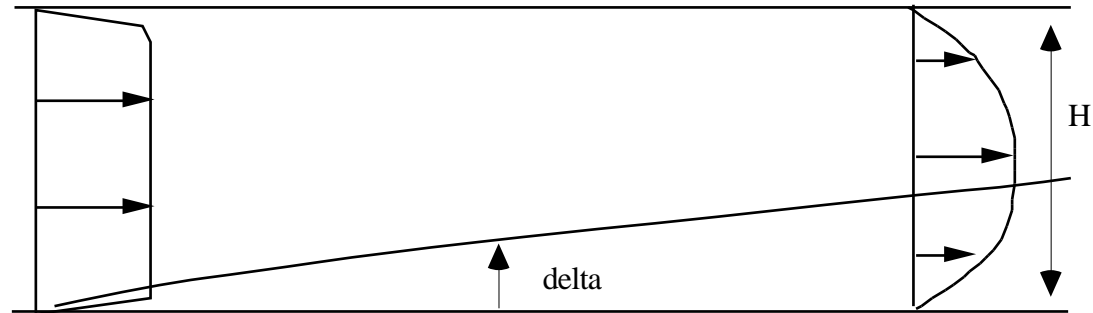
application à la marche descendante à $Re =$



Contournement d'un coin dans un écoulement de Poiseuille

Effet d'entrée.

cf Schlichting. Il s'agit d'estimer la longueur de l'effet d'entrée.



- soit on dit que l'on cherche la longueur L telle que la vitesse varie encore en x , la variation en y finissant par être en H , d'où:

$$\frac{u}{x} \sim \frac{u}{y} \left(\frac{u}{y} \right), \text{ donne } U/L \sim U^2/H^2$$

- ou on dit que les deux couches limites d'épaisseur $\delta = L/(\frac{U}{U})$ se rejoignent: $2\delta = H$, d'où on obtient l'ordre de grandeur de la longueur d'entrée:

$$L = H \left(\frac{UH}{U} \right)$$

Lorsque l'on étudie l'écoulement à une distance supérieure à 1 dans ces unités, l'écoulement est celui de Poiseuille.

L'écoulement de base est bien Poiseuille.

$$u^* = U_0 y^*/H(1-y^*/H)$$

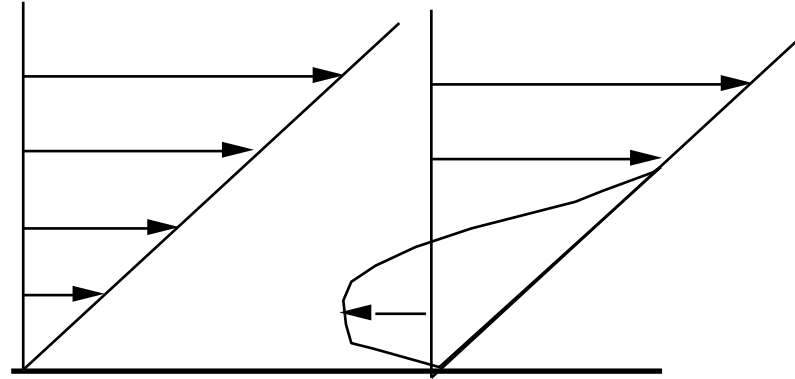
Avec pour la pression:

$$p^* = p_0 - 2 U_0^2 R^{-1} (x^*/H) \quad \& \quad R = U_0 H^2/\nu$$

Nous allons maintenant perturber cet écoulement avec une petite bosse de grande longueur.

Ordres de grandeur

puisque l'on est près de la paroi (cette région est nommée "Pont Inférieur", *Lower Deck*) la vitesse amont qui est celle avant l'accident est donc dans la partie



linéaire du profil de Blasius,

$$u \sim \frac{3}{4} \dots$$

Le but de cette description est d'autoriser des courants de retour, donc les variations de vitesses sont du même ordre que la vitesse de départ:

$$u \sim u$$

L'équilibre diffusif/ convectif doit être respecté pour assurer l'adhérence à la paroi:

$$u \frac{u}{x} \sim R^{-1} \frac{u^2}{y^2}$$

Ce qui s'écrit avec les ordres de grandeur précédents et compte tenu du fait que l'accident se produit sur une échelle rapide x_3 ,

$$u \frac{u}{x_3} \sim \frac{u^2}{(3/4)^2}$$

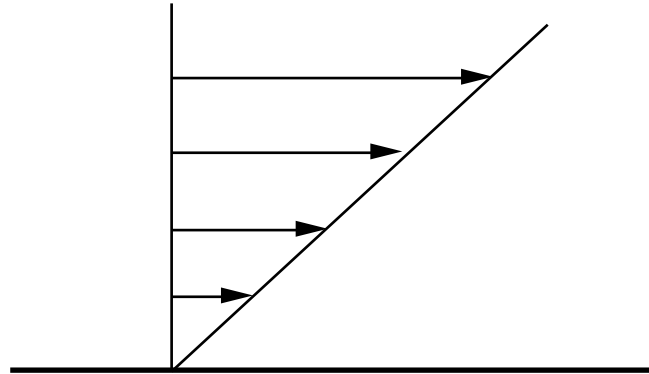
Cette expression fournit l'ordre de grandeur de l'échelle rapide en fonction du rapport des couches:

$$x_3 \sim (3/4)^3 = 3/8$$

On constate facilement ensuite que la pression est en $\frac{1}{2}$,

Equations

On se place toujours à la distance H de la paroi ($y^* = H - y$) dans la mince couche limite près de la paroi ($\delta \ll 1$), on a *a priori* $u = y$. (cf ci dessus) Attention, la longueur de variation longitudinale n'est peut être pas "1" mais une échelle x_3 inconnue pour l'instant. On se demande si on peut trouver une structure localisée petite (d'échelle x_3)...



Les équations de Navier Stokes deviennent en prenant:

$$x^* = x_3 H x \text{ (origine } x=0), y^* = H - y, u^* = U_0 u, v^* = \frac{2}{x_3} U_0 v,$$

$$\rho^* = \rho, \mu^* = \mu, p^* = p_0 - 2 \frac{p}{x_3^2} + p(x,y) \quad \rho U_0^2$$

La chute de pression de base est $p = \mu_0 U_0 / H = \rho U_0^2 / R$ avec le nombre de Reynolds construit sur le diamètre et la vitesse $R = U_0 H / \nu$. p_0 est la pression atmosphérique, on a vu que $p/p \ll 1$.

La moindre dégénérescence, c'est à dire garder les termes:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \text{ et } u \frac{\partial u}{\partial x} \sim v \frac{\partial u}{\partial y}$$

nous donne $\delta^3 R = x_3$ où $R = U_0 H / \nu$. On voit facilement que l'on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{p}{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ce sont encore les équations de Prandtl, mais avec de nouvelles échelles, et nous allons le voir, avec de nouvelles conditions aux limites.

Au centre équations

Près de la paroi, dans la couche d'épaisseur δ , la vitesse est en $\delta^{-1/2}$, et la pression en δ^{-2} . On regarde comment évoluent ces quantités loin de la paroi dans le coeur de l'écoulement, c'est à dire à l'échelle transversale H.

Loin de la paroi: pont principal $x^* = x / x_3 H$ et $y^* = H \tilde{y}$:

$$u = U_p(\tilde{y}) + u_1 + \dots; \quad v = \delta / x_3 v_1 + \dots; \quad p = p_1 + \dots$$

avec le profil de Poiseuille $U_p(\tilde{y}) = y^* / H (1 - y^* / H) = \tilde{y} (1 - \tilde{y})$,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} = 0; \quad \left(U_p \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{d}{d\tilde{y}} U_p \right) = 0 \quad \text{et} \quad p / \delta = 0$$

Ces équations sont vraies pour $\delta / x_3 / x_3 / \delta^2 \ll 1$ (pour ne pas avoir de gradient de pression transverse cela impose $\delta \gg R^{-2/7}$, donc $x_3 \gg R^{1/7}$, il n'y a pas de gradient transverse à cet ordre le raccord des pressions est bien $p_1 = p$, la pression varie si on a un gradient imposé de base), elles ont pour solution:

$$u = U_p(\tilde{y}) + A(x) U_p'(\tilde{y}) \quad \text{et} \quad v = -A'(x) U_p(\tilde{y}).$$

en $\tilde{y} \rightarrow 0$ on a: $U_p(\tilde{y}) + u_1 \rightarrow \tilde{y} + A(x)$

Ce comportement près de la paroi va nous donner la condition à l'infini pour la couche de paroi (pont inférieur) on retrouve le raccord $\tilde{y} = y$:

$$y \rightarrow \delta, \quad u \rightarrow y + A$$

Cette équation est la condition pour la couche inférieure. La fonction A est inconnue pour l'instant.

Interprétation physique de $-A$:

On voit en passant à la fonction de courant que:

$$\psi(x,y) = \psi(x,y) + A \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y}$$

on en déduit que $\psi(x,y) = \psi(x,y + A)$. On dit les lignes de courant sont déplacées de $-A$.

Attention pour la pression subtilité

La relation pression déplacement dépend de l'échelle

*) $x_3 \gg R^{1/7}$,

$$0 = - \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{y}}$$

Il n'y a pas de gradient de pression transverse. La pression est la même en haut en bas et au milieu. Le déplacement se transmet.

*) si $x_3 = R^{1/7}$, $\partial p_1 / \partial \tilde{y} = R^{-2/7}$,

$$U_p \frac{\partial v_1}{\partial x} = - \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{y}} \Rightarrow$$

ce qui donne

$$p_1(x, y = \text{en haut}) - p_1(x, y = \text{en bas}) = \frac{1}{30} A''$$

Il y a un saut de pression entre le haut et le bas.

*) si $1 < x_3 \ll R^{1/7}$, $U_p \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$. Il n'y a pas de v_1 donc pas de déplacement.

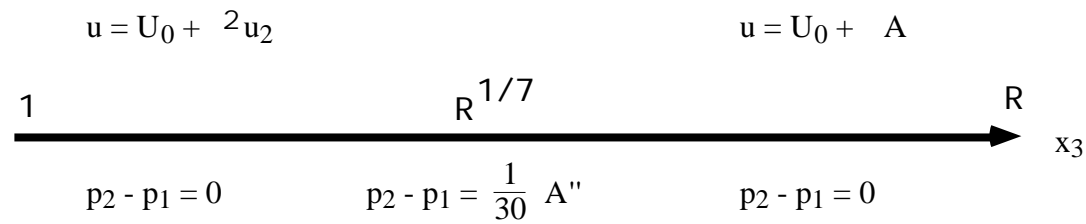
$A = 0$ au premier ordre, les pressions sont les mêmes en haut et en bas ($A'' = 0$ dégénéré)

*) si $x_3 = 1$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} = 0; \quad (U_p \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{d}{d\tilde{y}} U_p) = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \text{ et } U_p \frac{\partial v_1}{\partial x} = - \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{y}}$$

on trouve alors une équation pour v_1 à résoudre:

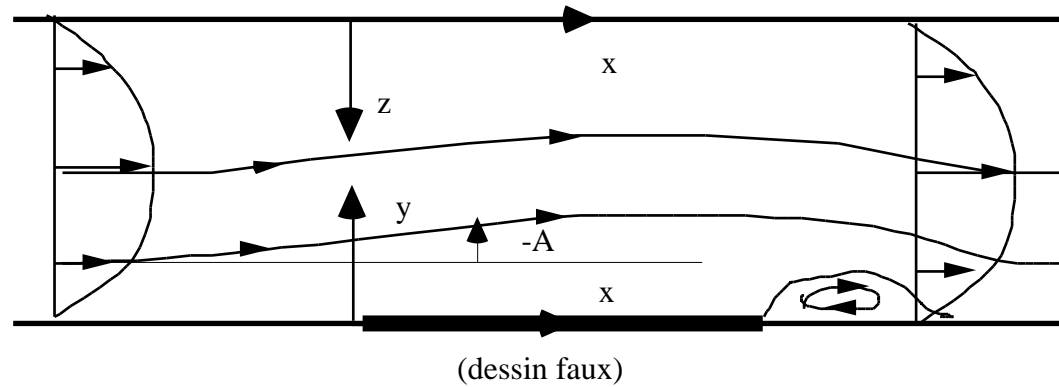
$$U_p \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + U_p \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{d^2}{d\tilde{y}^2} U_p v_1 = 0$$



*) il existe une région Navier Stokes: pour $x_3 = R^{-1/2}$,
 estimer son échelle=> toujours une petite remontée de l'information on ne peut pas paraboliser les équations...) à cette échelle, près de la paroi, il faut prendre tous les termes $u=v=0$, $x=y=0$.

En haut

Ce déplacement $-A$ des lignes de courant est transmis au travers du coeur de l'écoulement.



En effet, on a près de la paroi supérieure l'expression de la vitesse dans le coeur de l'écoulement.

$$u = U_p(\tilde{y}) + A(x)U'_p(\tilde{y})$$

or ici, $\tilde{y} = 1 - z$ (en $z=0$ on est sur la paroi du haut, quand $z \rightarrow 1$, on va vers le bas en s'éloignant et on est en $\tilde{y} \rightarrow 0$).

$$u = U_p(\tilde{y}) + A(x)U'_p(\tilde{y}) \text{ devient: } u = U_p(1-z) + A(x)U'_p(1-z).$$

pression de même $p = p$

Près de la paroi du haut, il faut résoudre (d'ailleurs $\mu = 1$ et $\nu = 1$ car on ne chauffe pas en haut):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{p}{x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

$$u = v = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } u \rightarrow U_p(1-z) - A(x) \text{ pour } z \rightarrow 1.$$

La couche du haut et la couche du bas sont couplées via le déplacement des lignes de courant dans la couche intermédiaire.

Transformation de Prandtl

En faisant la transformation de Prandtl (l'idée de la transformation est d'aplatir la bosse pour se ramener à un problème plan!), en posant

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= y - f(x) \text{ et si on garde } \tilde{x} = x; \\ / \quad x &= 1 \quad / \quad \tilde{x} - f/x \quad \tilde{y}; \\ / \quad y &= 0 + \tilde{y}; \end{aligned}$$

La continuité devient: $\tilde{u} / \tilde{x} + (v - f/x) / \tilde{y} = 0$.

et la dérivée totale de u devient (la conservation de qt de mvt en x):

$$u \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + (v - f/x) \frac{\partial u}{\partial \tilde{y}}$$

donc si on pose :

$$v = v - u \frac{df}{dx}$$

on voit que les équations dynamiques sont invariantes par cette transformation, mais, $u \rightarrow y + A$ se transforme en $\tilde{y} + f(x) + A(x)$.

Si $x_3 \gg R^{1/7}$, on a alors deux systèmes d'équations (en bas avec \tilde{y} , en haut avec z) qui sont exactement les mêmes (la pression étant la même)

paroi du haut

$$u=v=0 \text{ en } z=0 \text{ et } u \rightarrow z - g(x) - A(x) \text{ pour } z \rightarrow \infty. \text{ ce qui donne } p_{\text{haut}}$$

paroi du bas

$$u=v=0 \text{ en } y=0 \text{ et } u \rightarrow y + f(x) + A(x) \text{ pour } y \rightarrow \infty. \text{ ce qui donne } p_{\text{bas}}$$

dont les limites sont différentes

$$\text{comme } p_{\text{bas}} = p_{\text{haut}} \text{ alors } A = -\frac{1}{2}(f + g).$$

problème unique

$$u=v=0 \text{ en } y=0 \text{ et } u \rightarrow y + \frac{1}{2}(f(x) - g(x)) \text{ pour } y \rightarrow \infty. \text{ ce qui donne } p$$

Si la constriction est symétrique $f=-g$, donc $A=0$.

problème final interactif:

Les équations de Navier Stokes deviennent en prenant le paramètre magique $\delta = R^{-2/7}$, c'est notre choix final

$$\begin{aligned} x^* &= R^{1/7} x, \quad y^* = HR^{-2/7} y, \\ u^* &= R^{-2/7} U_0 u, \quad v^* = R^{-5/7} U_0 v, \\ \rho^* &= \rho, \quad \mu^* = \mu_0 \mu, \quad p^* = p_0 - 2 \rho x^*/H + \rho R^{-4/7} \delta U_0^2 \end{aligned}$$

en bas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{P}{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$u=v=0$ en $y=0$ la forme de la paroi du bas et $u \rightarrow y + A(x)$ pour $y \rightarrow \infty$

en haut

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z}) = -\frac{P}{x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

$u=v=0$ en $z=0$ pour $z \rightarrow 0$ et $u \rightarrow z - A(x)$ pour $z \rightarrow \infty$.

et le couplage entre les pressions:

$$p(x, y=\text{en haut}) - p(x, y=\text{en bas}) = \frac{1}{30} A''$$

Problème final à pression conservée:

S'il y a deux bosses une en haut et l'autre en bas et soit x_3 leur longueur et h leur hauteur. Les équations de Navier Stokes deviennent en prenant:

$$R = x_3 \text{ où } R = U_0 H / \nu$$

avec

$$\begin{aligned} x^* &= x_3 x, \quad y^* = H y, \\ u^* &= U_0 u, \quad v^* = (\nu/x_3) U_0 v, \\ p^* &= p_0 - 2 \rho x^*/H + \rho \nu^2 / U_0^2 \end{aligned}$$

en bas et en haut le problème est le même:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0; \quad \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} \right) = -\frac{p}{x} + \frac{\nu}{y} \left(\frac{du}{dy} \right), \quad \frac{dp}{dy} = 0$$

> Cas non symétrique:

si la bosse du bas a pour forme $f(x)$ et la bosse du haut a pour forme $g(x)$

[en variable de la transformation de Prandtl, en $y=0$ $u=v=0$ en $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow y + \frac{1}{2}(f - g)$].

> Cas symétrique $g = -f$:

$u=v=0$ en $y=0$ la forme de la paroi du bas et $u \rightarrow y$ pour $y \rightarrow \infty$, [en variable de la transformation de Prandtl, en $y=0$ $u=v=0$ en $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow y + f(x)$].

La pression s'adapte pour satisfaire les conditions aux limites.

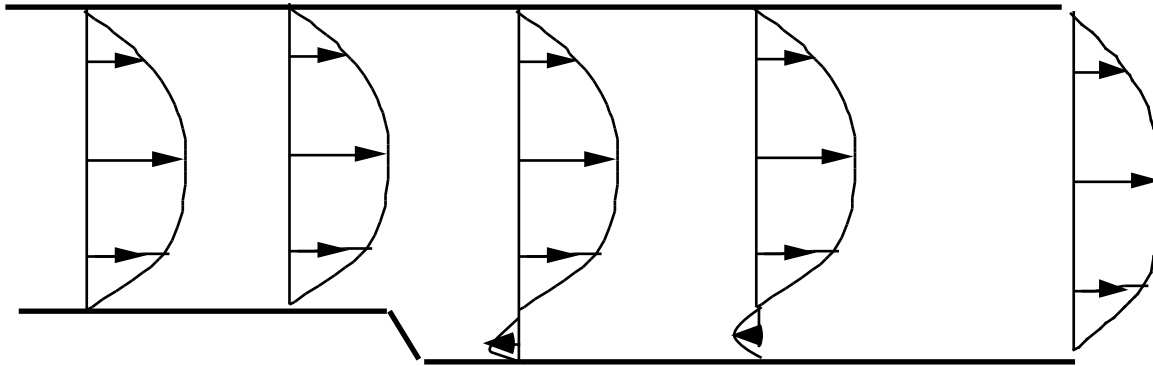
Ces problèmes à déplacement imposé nul sont donc valables pour:

$$R \gg x_3 \gg R^{1/7} \text{ et } R^{1/7} \gg x_3 - 1 \quad A=0.$$

Application au tuyau avec une marche

$g=0,$

$f=0$ pour $x<0$ $f=-1$ pour $x>0$



Equations de Triple Couche: Pont Inferieur

On veut résoudre (après transformation de Prandtl):

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0; \quad \left(u \frac{u}{x} + v \frac{v}{y} \right) = -\frac{p}{x} + \frac{1}{y} \left(\frac{u}{y} \right), \quad \frac{p}{y} = 0$$

$$u=v=0 \text{ en } y=0 \text{ et } u \rightarrow y + f(x) / 2 \text{ pour } y \rightarrow$$

$$f \text{ forme de la bosse. ici } f(x) = -h_0 (1 + \tanh(x/L_b))/2$$

h_0 hauteur de la bosse

Solution linéarisée

$$u = y + u_1 \quad v = v_1 \quad p = p_1$$

$$-\frac{u_1}{x} + \frac{v_1}{y} = 0; \quad (y \frac{u}{x} + v_1) = -\frac{p_1}{x} + \frac{1}{y} (-u_1), \quad \frac{p_1}{y} = 0$$

$u_1 = v_1 = 0$ en $y=0$ et $u_1 \rightarrow a$ pour $y \rightarrow \infty$ (valeur constante de la vraie marche)

Solution en Fourier

On a tout pour résoudre les équations linéarisées lorsque l'on se donne une paroi $f(x)$ de taille petite et la relation de fluide parfait notée $p=v$ ou $p=F(A)$ et la relation pour la couche limite notée $-A/p= *$.

$$\text{FFT}[p_1] = - \frac{\text{FFT}[f]}{[(-i)^{1/3}/3\text{Ai}'(0)]}$$

la perturbation de frottement est:

$$1 = \text{FFT}^{-1}[(i)^{2/3}/\text{Ai}'(0) \text{Ai}(0) \text{FFT}[p_1]]$$

Solution autosemblable:

$$u_1 = f'(\eta)$$

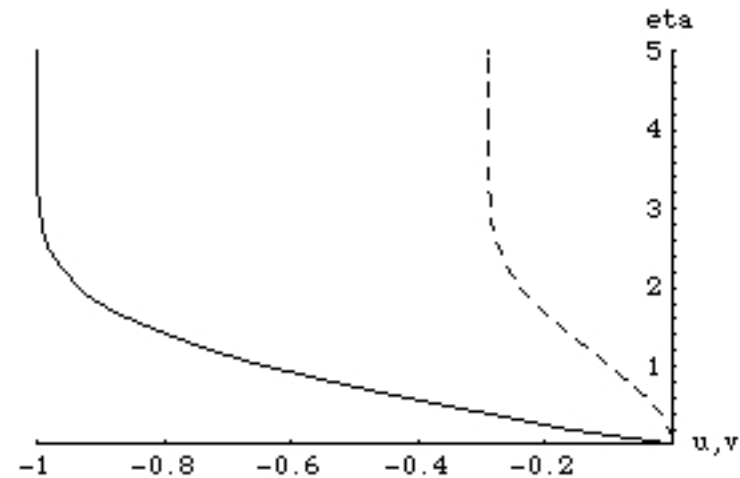
$$v_1 = \left(-\frac{f(\eta)}{3} + \frac{f'(\eta)}{3}\right) x^{-2/3}$$

$$p = p_0 x^{1/3}$$

$$p_0 - f(\eta) + f'(\eta) - 2 f''(\eta) - 3 f'''(\eta) = 0$$

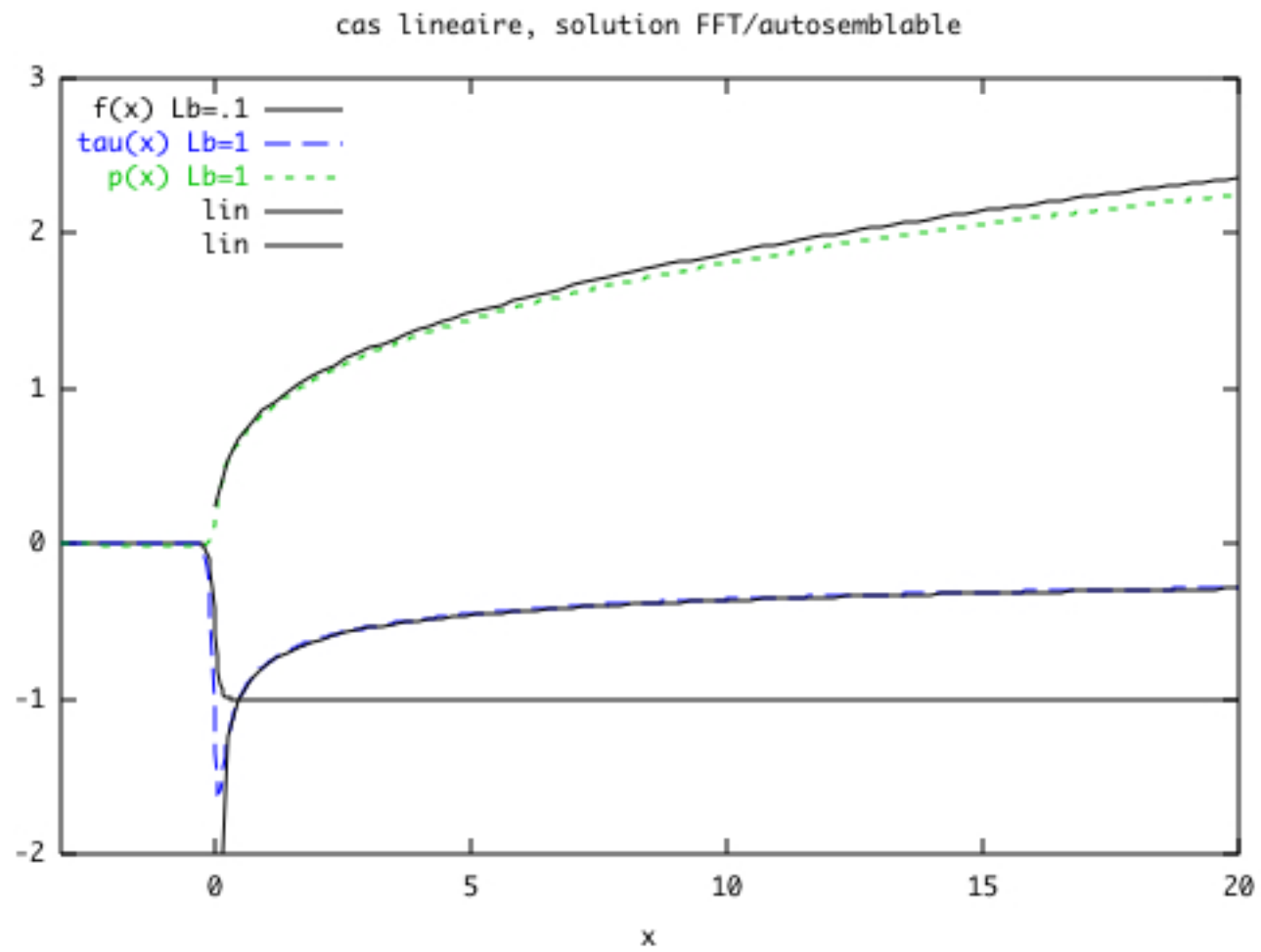
$$p_0 = 0.869515$$

$$f'(0) = -0.786552$$



La pression se comporte donc en $0.869515 x^{1/3}$
le frottement se comporte donc en $-0.786552 x^{1/3}$

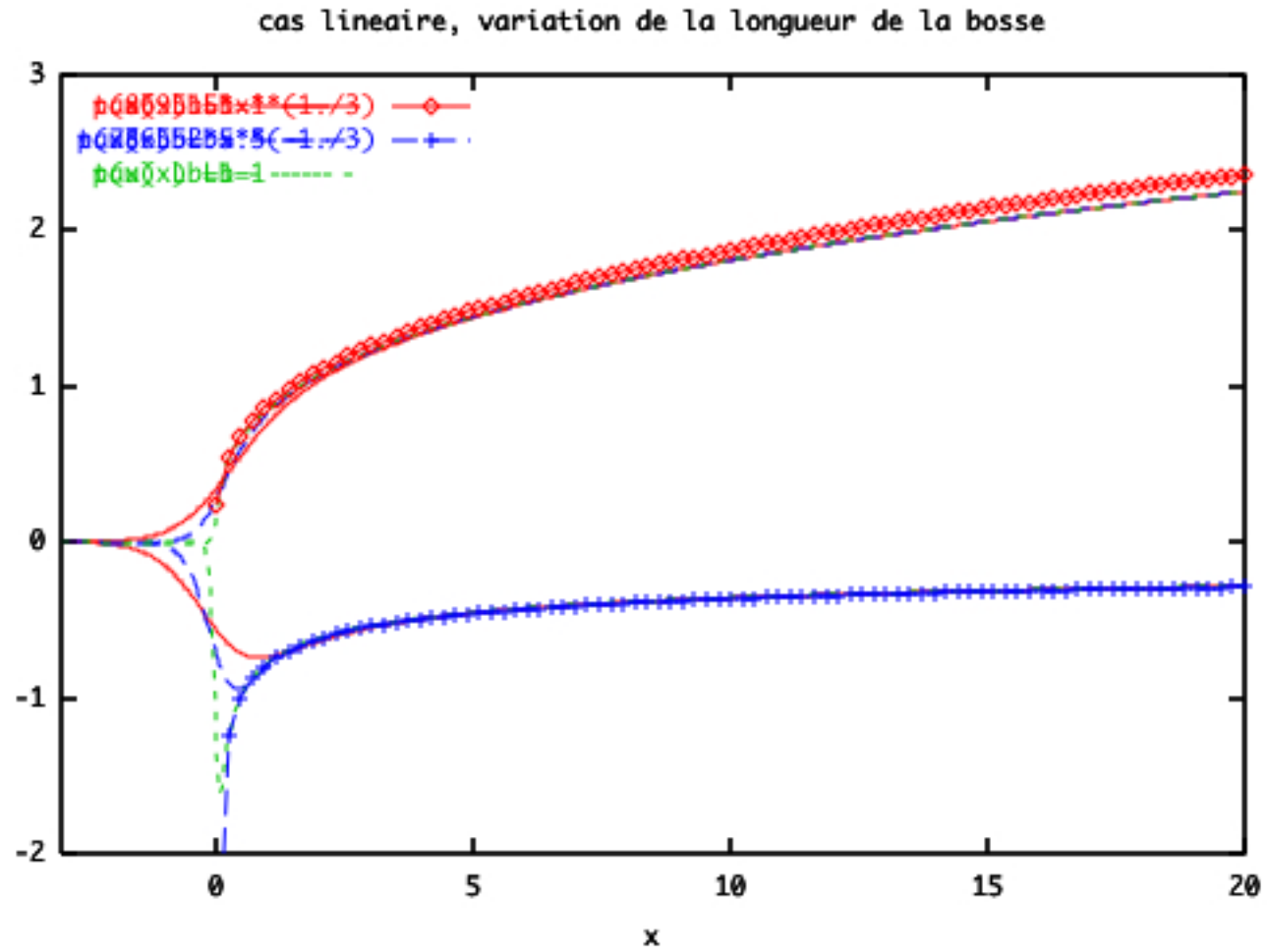
Résolutions numériques en Fourier



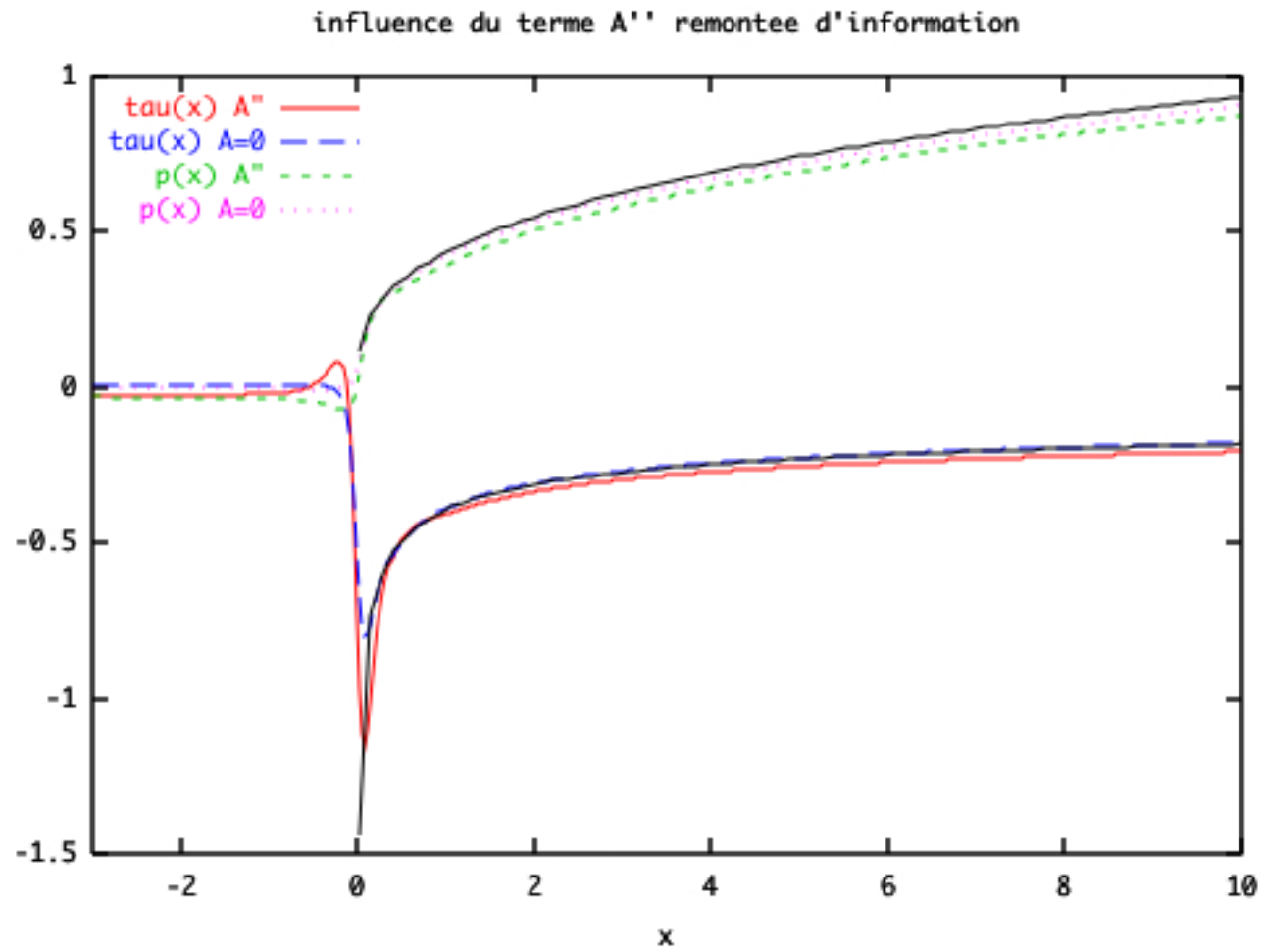
Résolutions numériques en Fourier

influence de la forme de la marche:

$$-(1+\tanh(x/L_b))/2$$

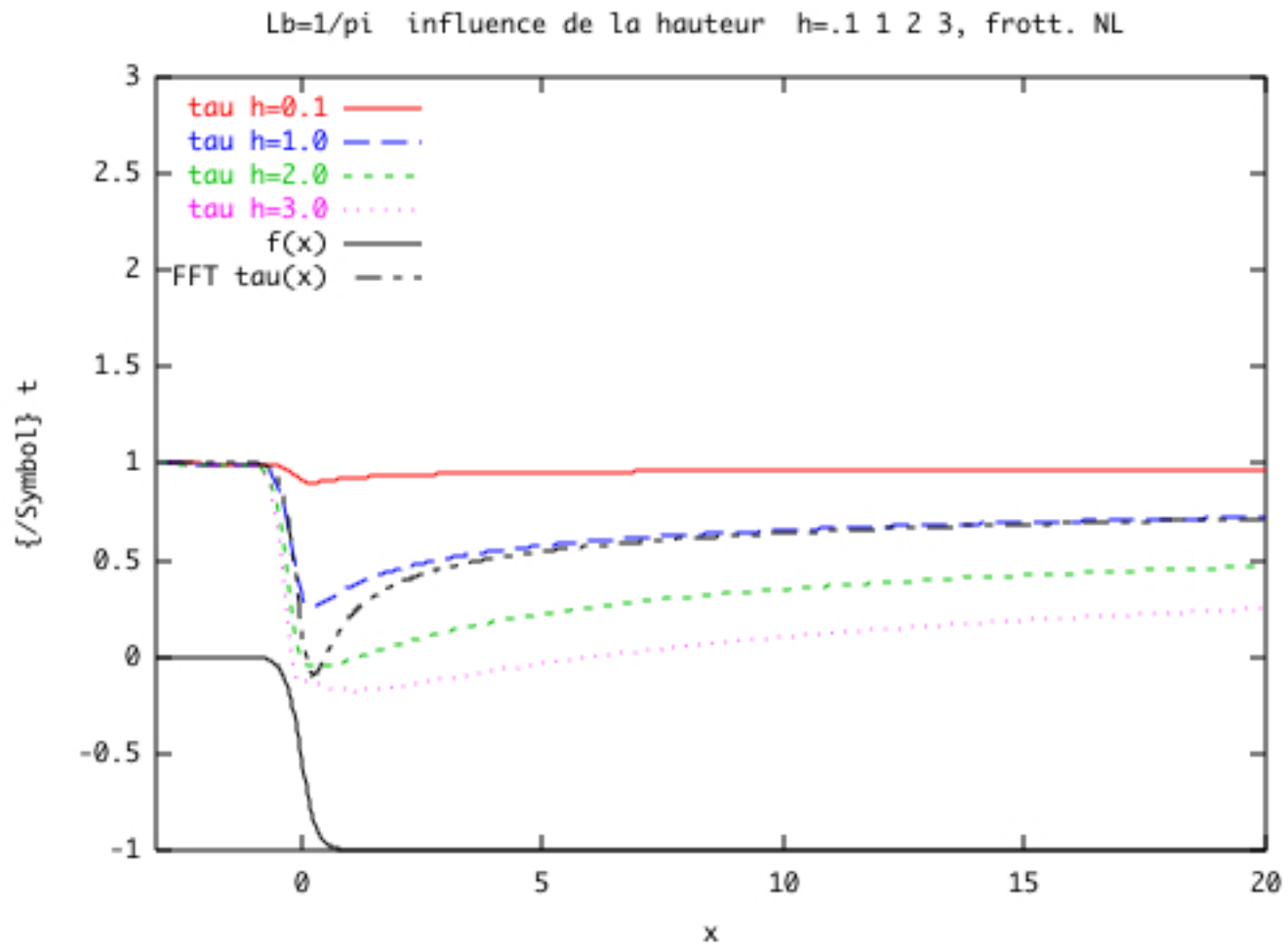


Subtilité influence de A''



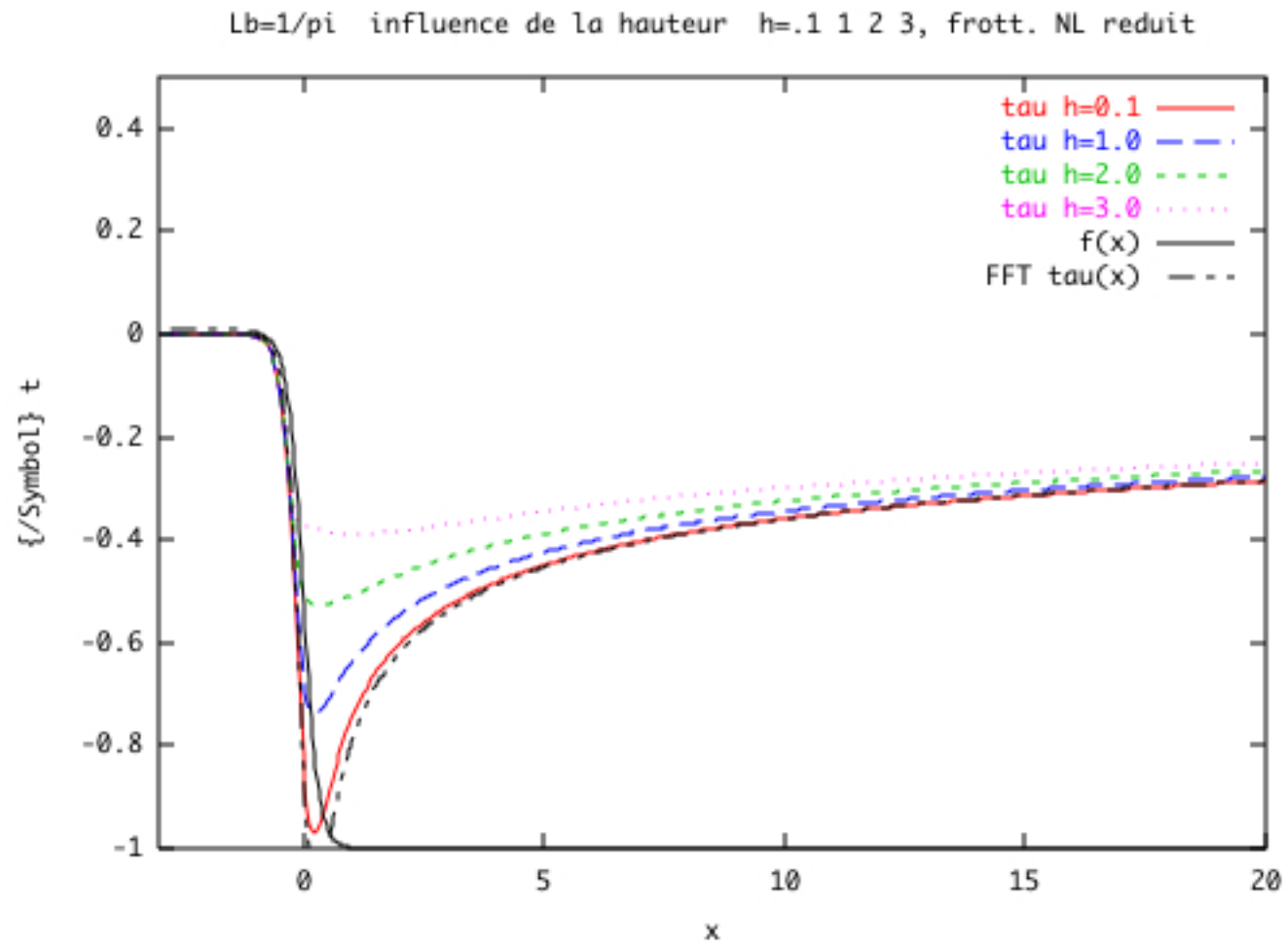
Cas non linéaire

influence de la hauteur (cas linéaire pour mémoire)

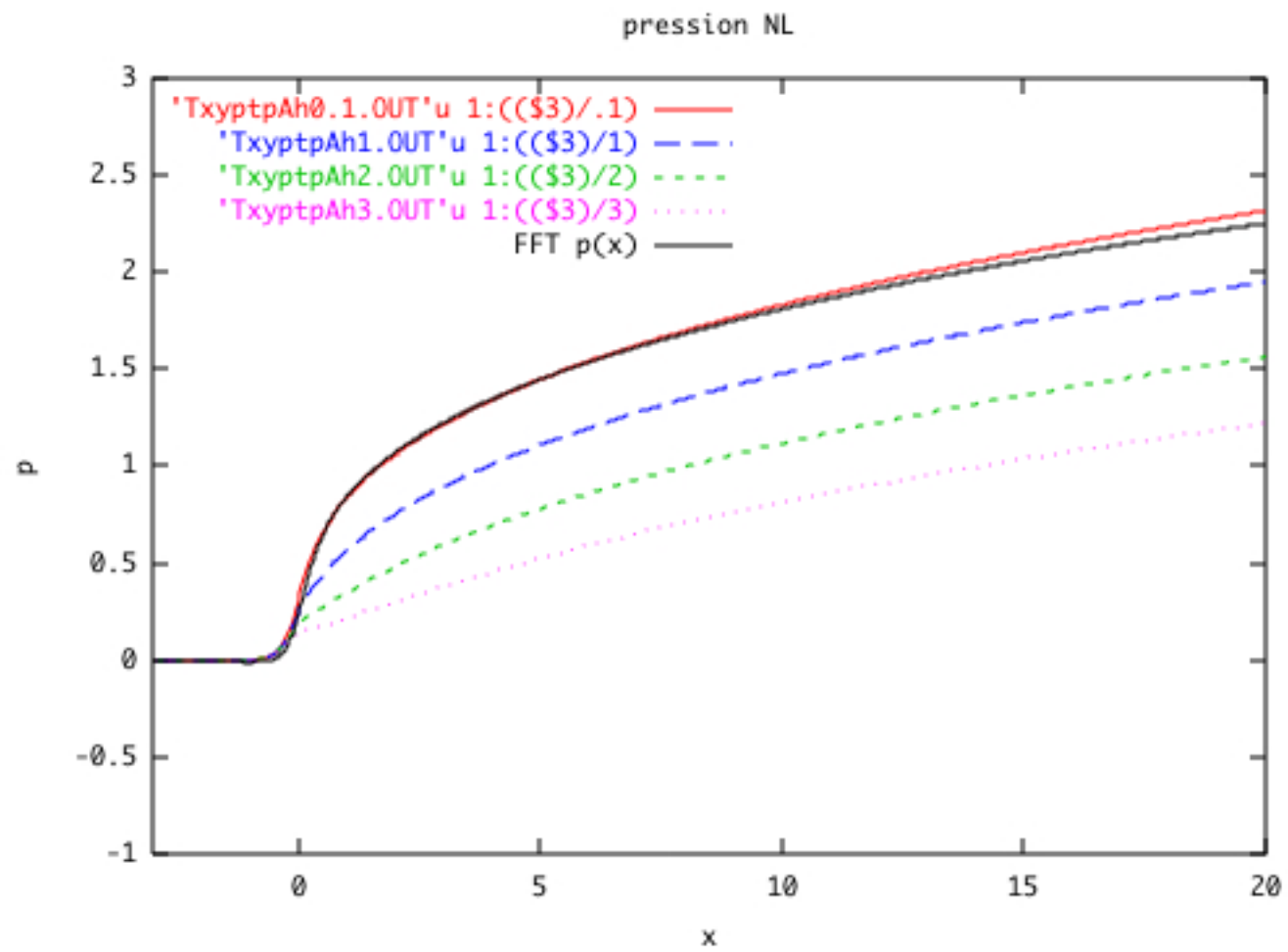


réduction au cas linéaire

linéaire



Pression



Application évaluation de la longueur du bulbe de séparation....

Ecoulement cisailé sur une bosse

Description supplémentaire: équations RNSp
Application au tuyau cylindrique...

