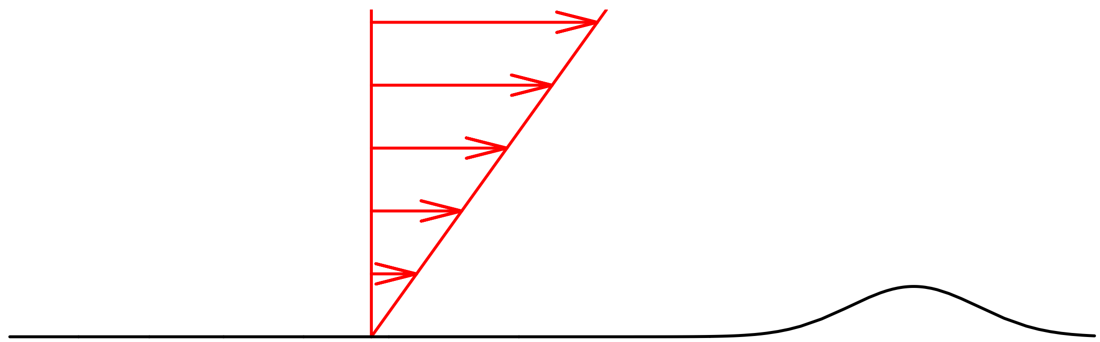
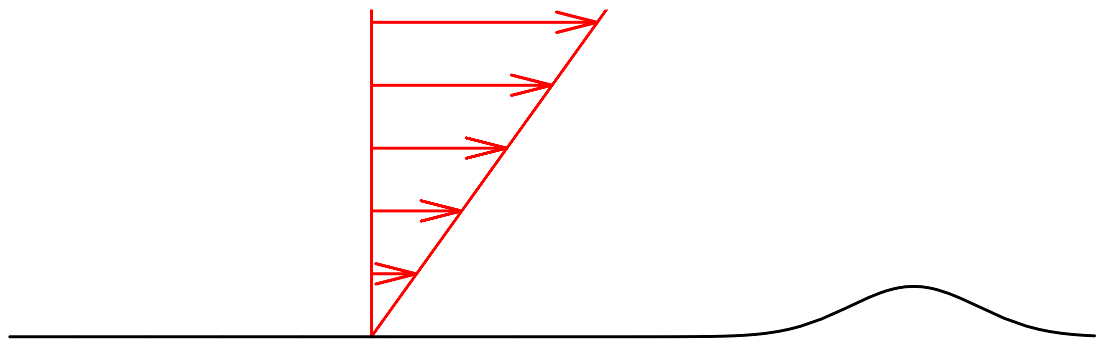
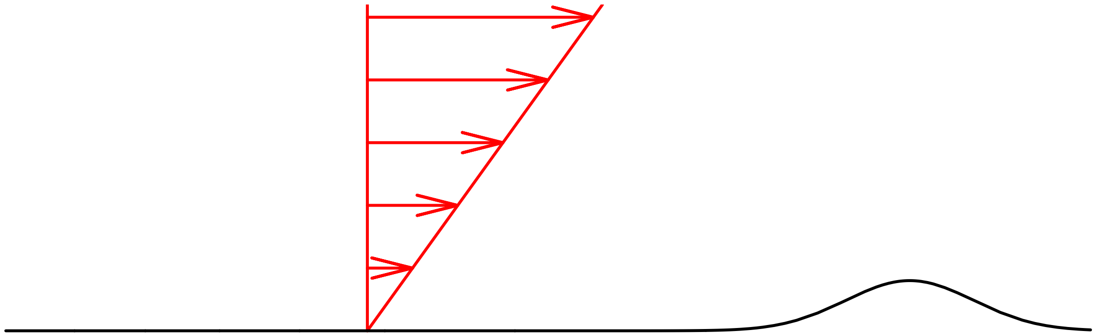
Stabilité d'un fond érodable dans un écoulement cisaillé
un modèle simplifié de formation de rides et de dunes

Pierre-Yves Lagrée,
& Kouamé Kan Jacques Kouakou
Laboratoire de Modélisation en Mécanique
UPMC-CNRS, Paris

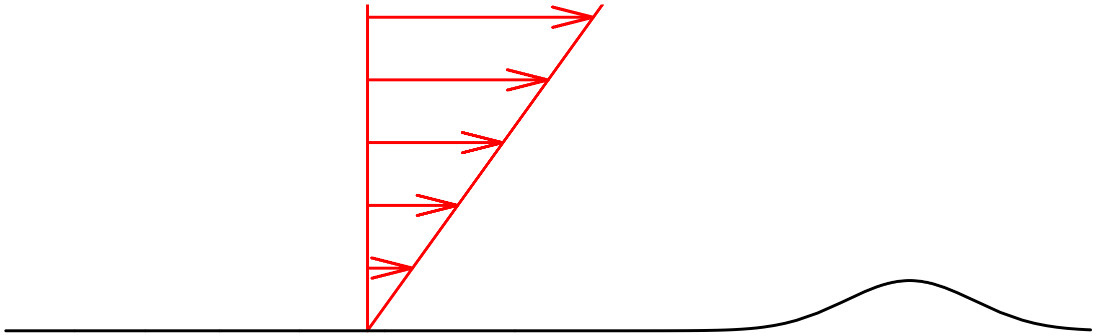




– interaction fluide / sol



- interaction fluide / sol
- problème complexe



– interaction fluide / sol
– problème complexe
– simplifications très fortes :
  - écoulement de base : cisaillement
  - écoulement stationnaire 2D
  - simple relation entre le cisaillement et le flux de matériaux

Mais : comparaisons entre des résultats linéaires et non-linéaires en 2D
3D linéaire

Plan

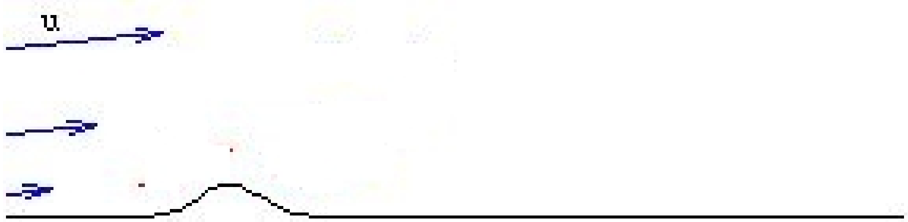
- relation entre le cisaillement et le flux de matériaux
- Cas $Re << 1$ perturbation d'un écoulement cisaillé, cas Stokes
- Cas $Re >> 1$ perturbation d'un écoulement cisaillé, cas "Double Deck" : , (erodable / lit solide)
- Conclusion,

Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x,t)$
- ...

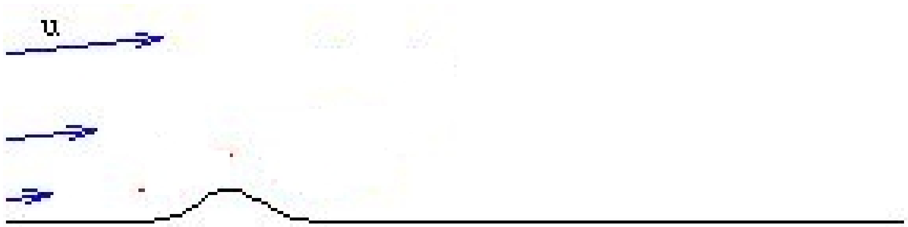
Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement ($u(x,y,t)$).



Le problème couplé

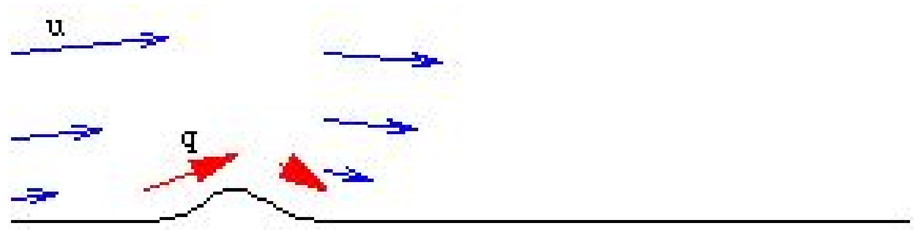
- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x,y,t))$.



- l'écoulement érode le sol.

Le problème couplé

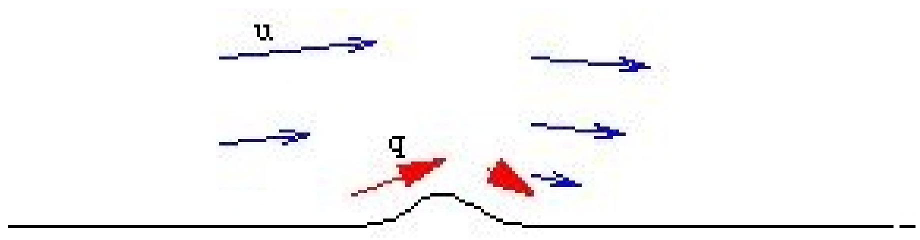
- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement ($u(x,y,t)$).



- l'écoulement érode le sol.

Le problème couplé

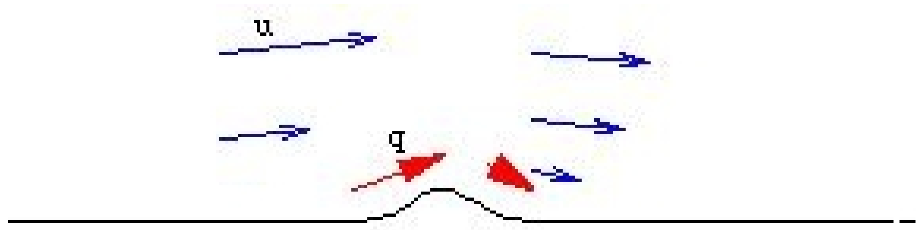
- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement ($u(x,y,t)$).



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.

Le problème couplé

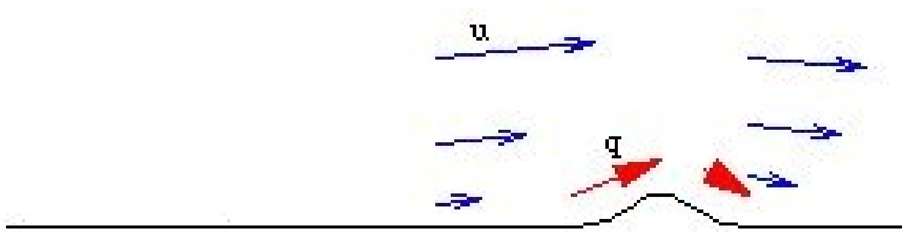
- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement $(u(x,y,t))$.



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.
- *etc*

Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement ($u(x,y,t)$).



- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.
- *etc*

Le problème couplé

- pour un sol donné $f(x,t)$
- nous devons calculer l'écoulement ($u(x,y,t)$).

- l'écoulement érode le sol.
- ce qui change le sol.
- *etc*

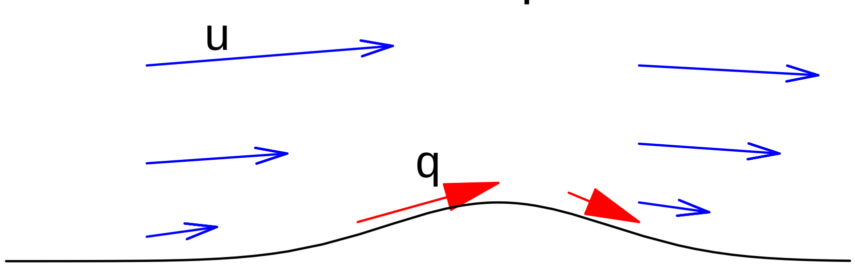
nous aller présenter une description simplifiée pour l'écoulement et
et pour l'interaction avec le sol.

Le sol érodable

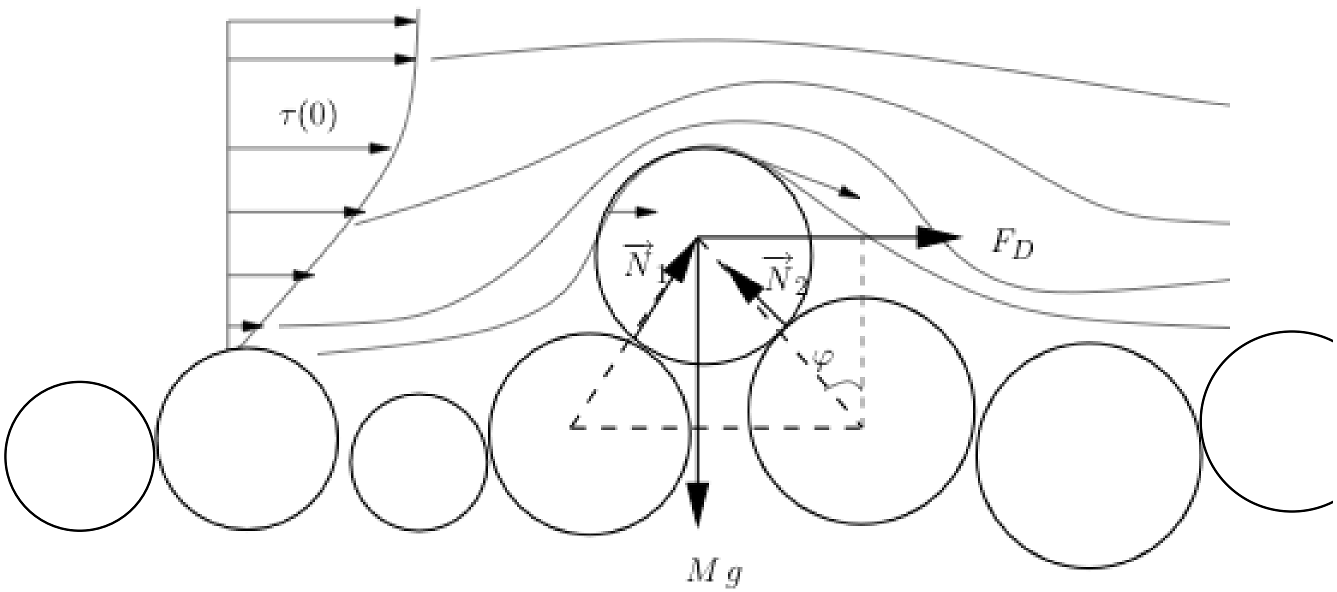
Conservation de la masse pour les sédiments :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

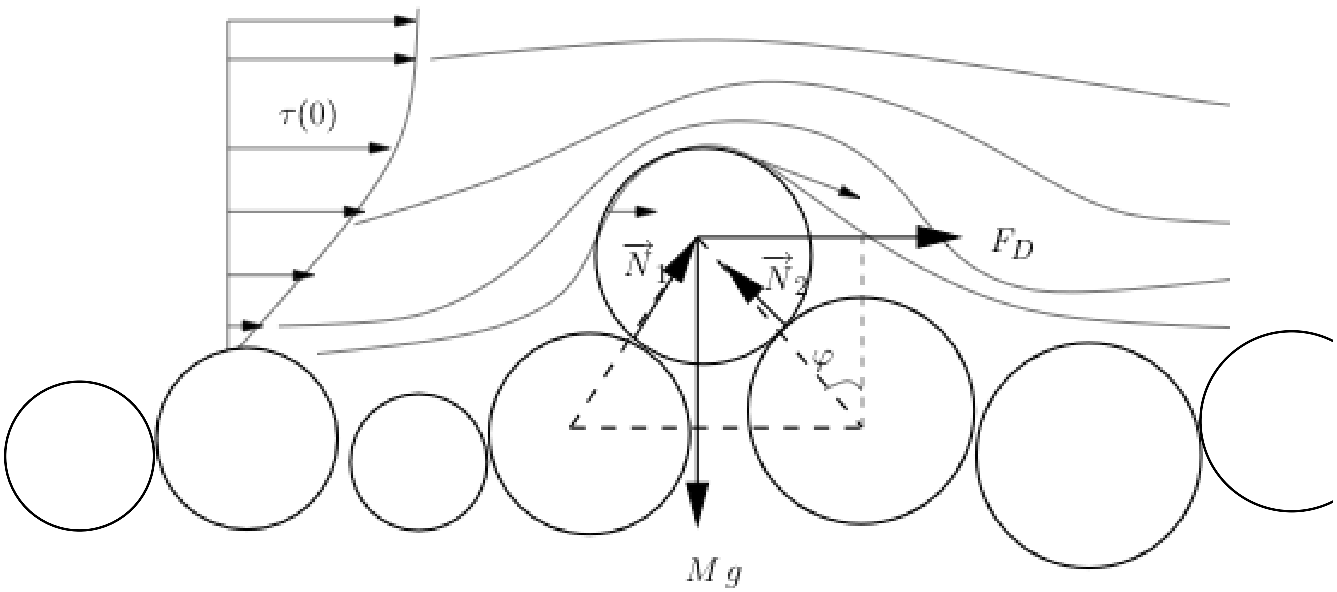
Problème :
Quelle est la relation entre q et l'écoulement ?
indication : plus u est grand, plus l'érosion est importante et plus grand est q
q semble être proportionnel au cisaillement pariétal



Mass : Seuil, Le critère de Shield



Mass : Seuil, Le critère de Shield



Les lois d'entraînement de M. Scipion Gras
sur les torrents des Alpes (Annales des ponts et Chaussées, 1857, 2^e semestre) résumées par du Boys 1879 :

"*un caillou posé au fond d'un courant liquide, peut être déplacé par l'impulsion des filets qui le rencontrent : le mouvement aura lieu si la vitesse est supérieure à une certaine limite qu'il (S. Gras) nomme vitesse d'entraînement. Cette vitesse limite dépend de la densité, du volume et de la forme du caillou ; elle dépend aussi de la densité du liquide et de la profondeur du courant.*"

Mass : Flux

dans la littérature :

$$q_s = E\varpi(\tau^a(\tau - \tau_s)^b)$$

si$(\tau - \tau_s) > 0$ alors $\varpi(\tau - \tau_s) = (\tau - \tau_s)$ sinon $\varpi((\tau - \tau_s)) = 0$.

avec une correction de pente pour le seuil :

$$\tau_s + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

a, E coefficients, $a = 0, b = 3$ ou $a = b = 1$ ou $a = 1/2, b = 1$ ou ...

Mass : Flux

dans la littérature :

$$q_s = E\varpi(\tau^a(\tau - \tau_s)^b)$$

si$(\tau - \tau_s) > 0$ alors $\varpi(\tau - \tau_s) = (\tau - \tau_s)$ sinon $\varpi((\tau - \tau_s)) = 0$.

avec une correction de pente pour le seuil :

$$\tau_s + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

a, E coefficients, $a = 0, b = 3$ ou $a = b = 1$ ou $a = 1/2, b = 1$ ou ...

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans dV =

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans dV=(ce qui rentre)

Masse : loi de conservation

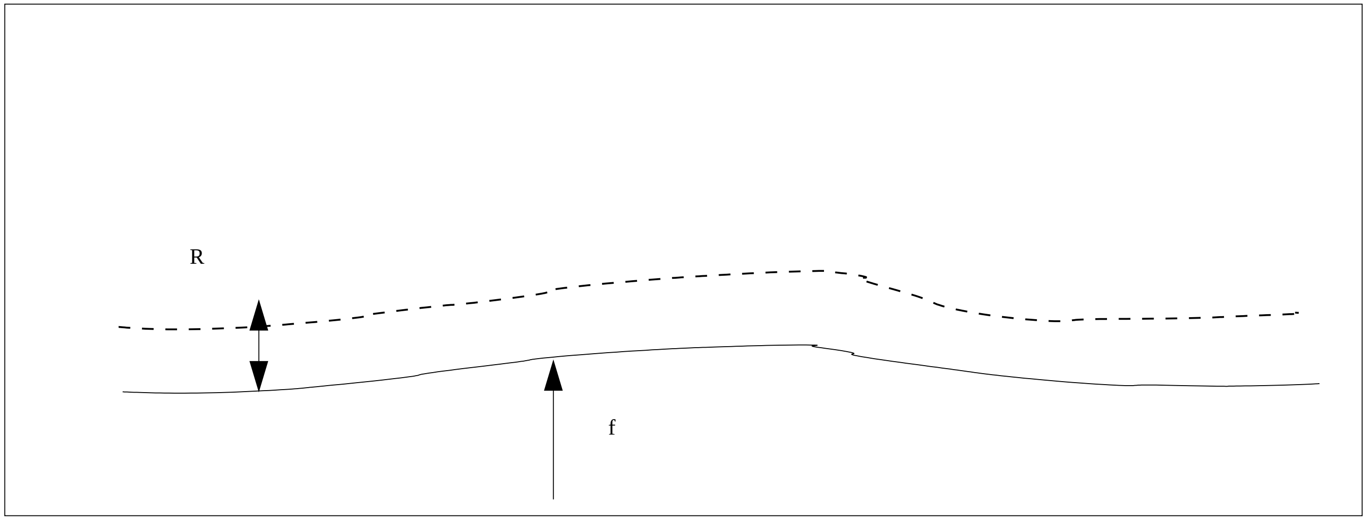
variation de la matière en suspension
dans dV=(ce qui rentre) - (ce qui sort)

Masse : loi de conservation

variation de la matière en suspension
dans dV=(ce qui rentre) - (ce qui sort)

...
Lagrée 03
Charru Hinch 05
Valance Langlois 05
...

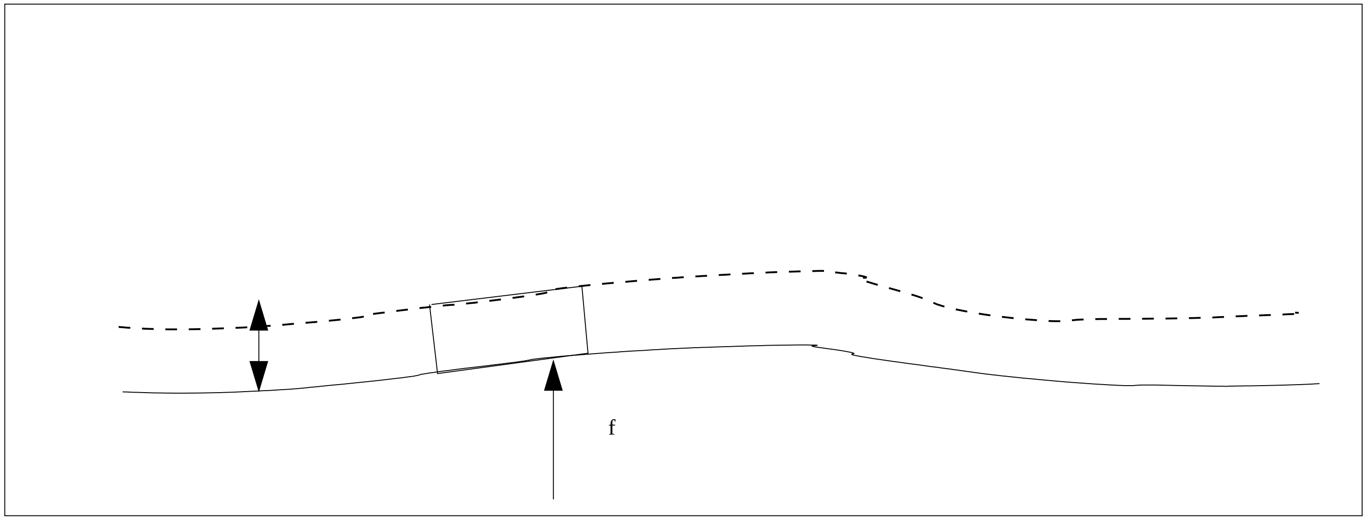
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dots$$

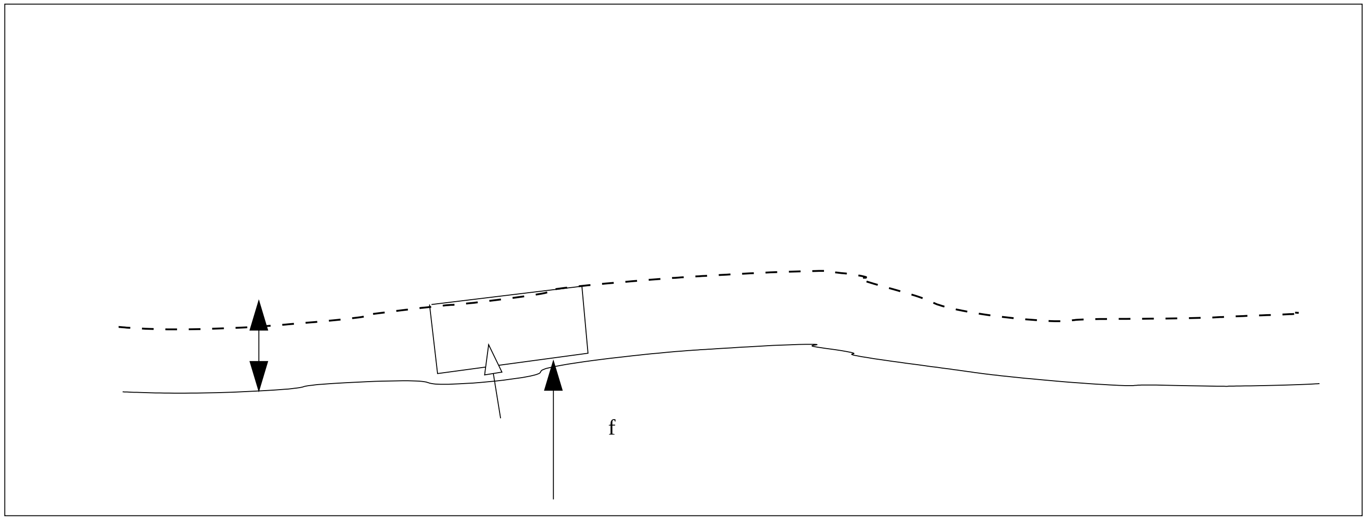
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \ldots$$

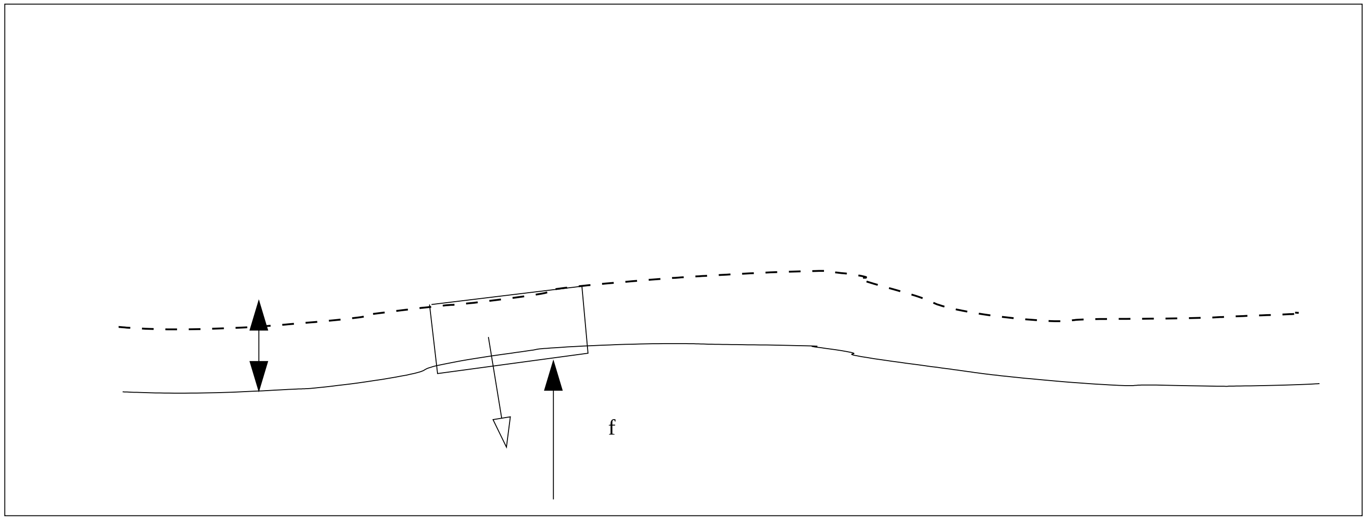
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = ... + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

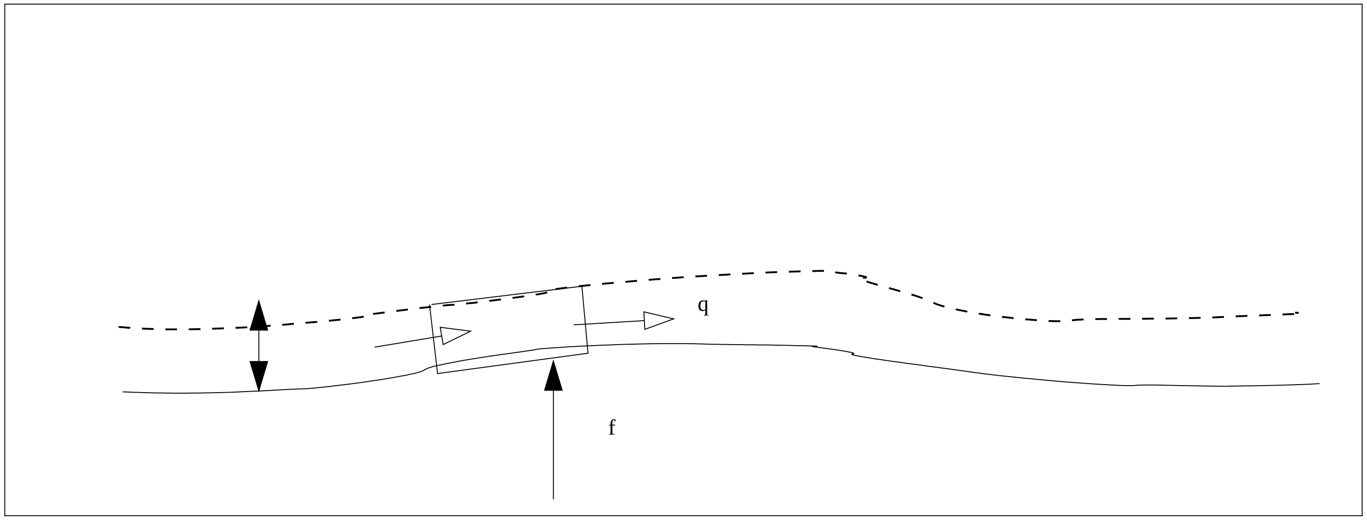
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = ... + \Gamma$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

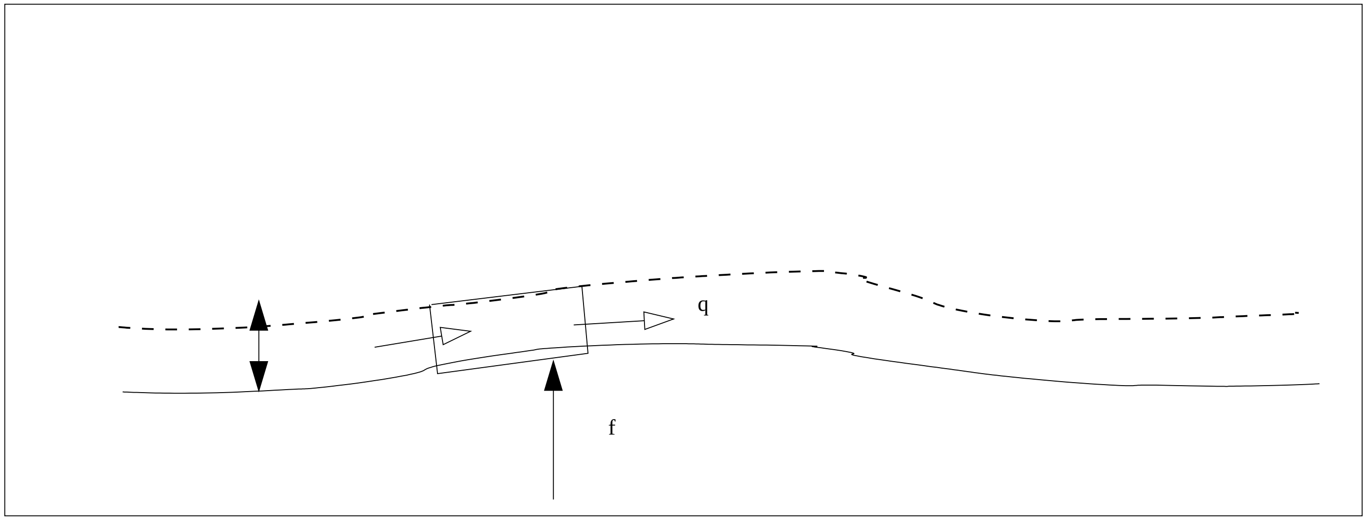
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma$$

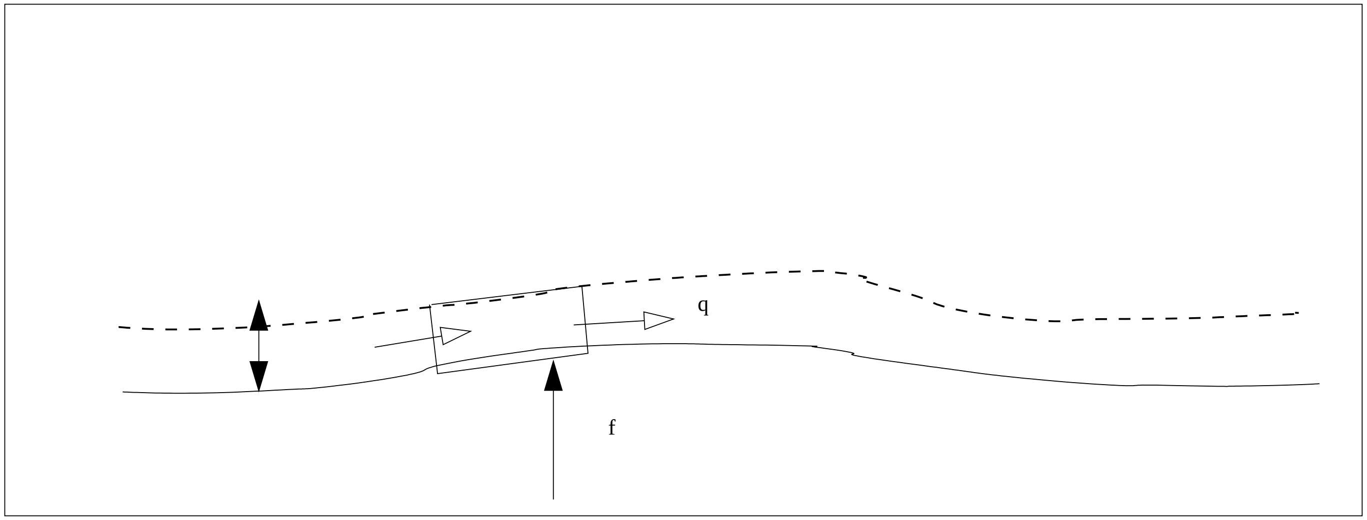
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

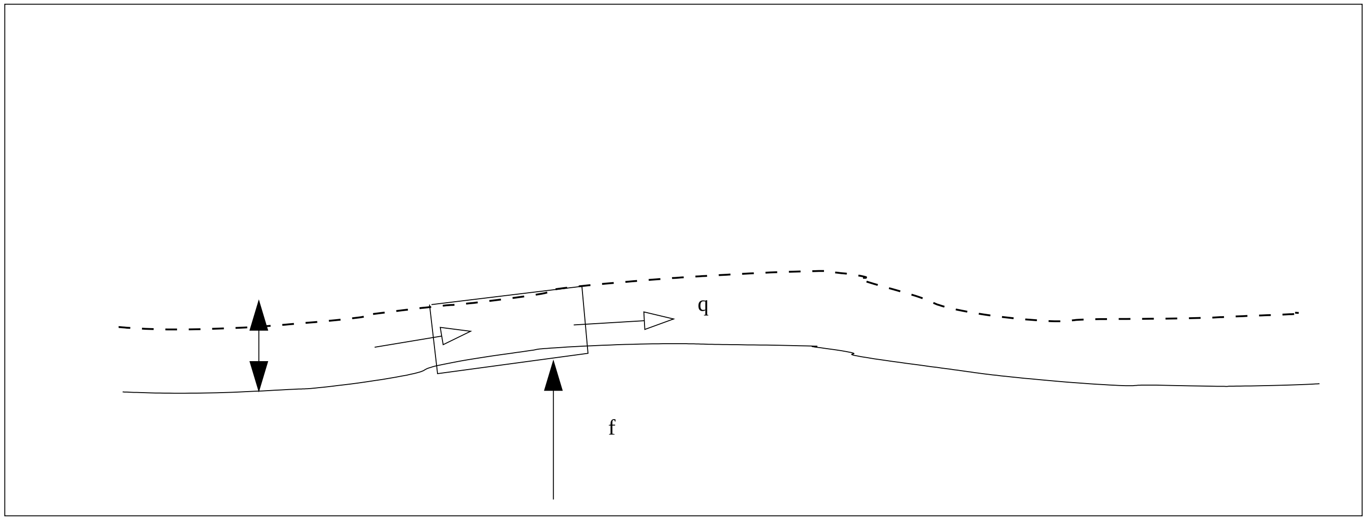
Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

$\Gamma =$ (érosion)-(déposition)

Masse : loi de conservation



$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + \Gamma \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma$$

$\Gamma =$ (érosion)-(déposition)

-(déposition) $\propto -R$ érosion $\propto (\tau - \tau_s)$ et $q \propto R$

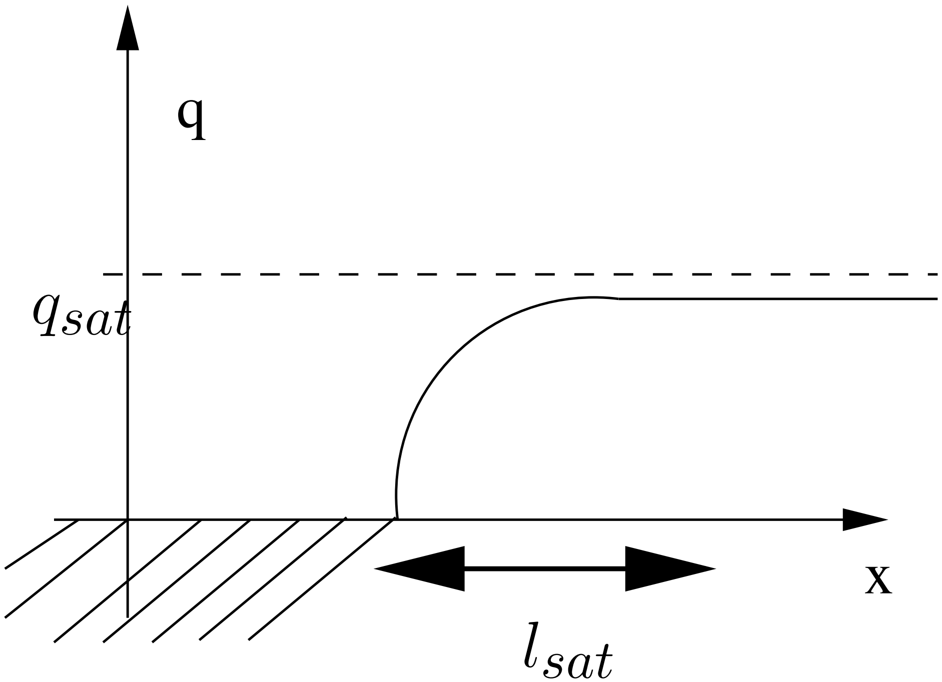
Masse : loi de conservation

$$l_{sat}\frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$q_{sat} \simeq \varpi((\tau - \tau_s))$$

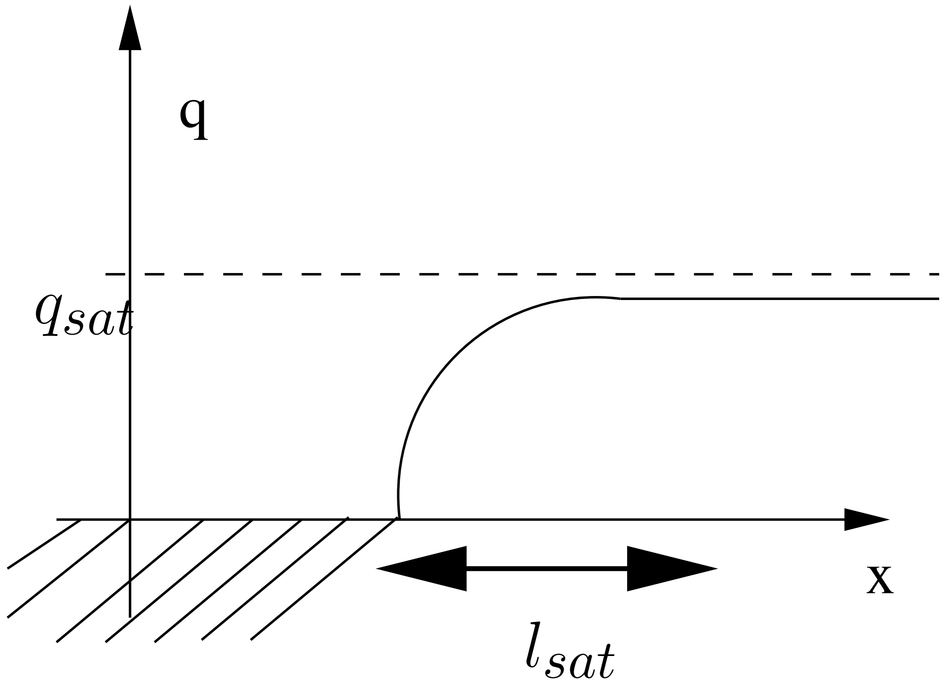
q_{sat}



Sauerman, Kroy, Hermann 01, Andreotti Claudin Douady 02,

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}$$

q_{sat}



Du Boy (1879) :

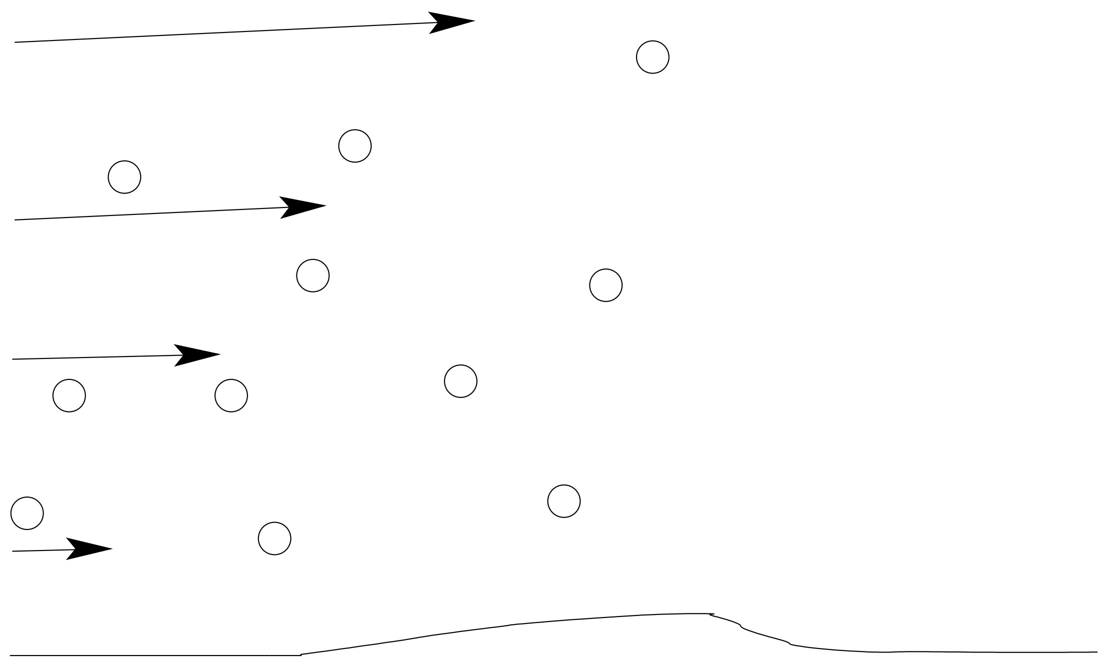
"*une fois une certaine quantité de matières en mouvement sur le fond du lit, la vitesse des filets liquides devient trop faible pour entraîner davantage : le cours d'eau est alors saturé. Un cours d'eau non saturé tend à le devenir en entraînant une partie des matériaux qui composent son lit, et en choisissant de préférence les plus petits.*"

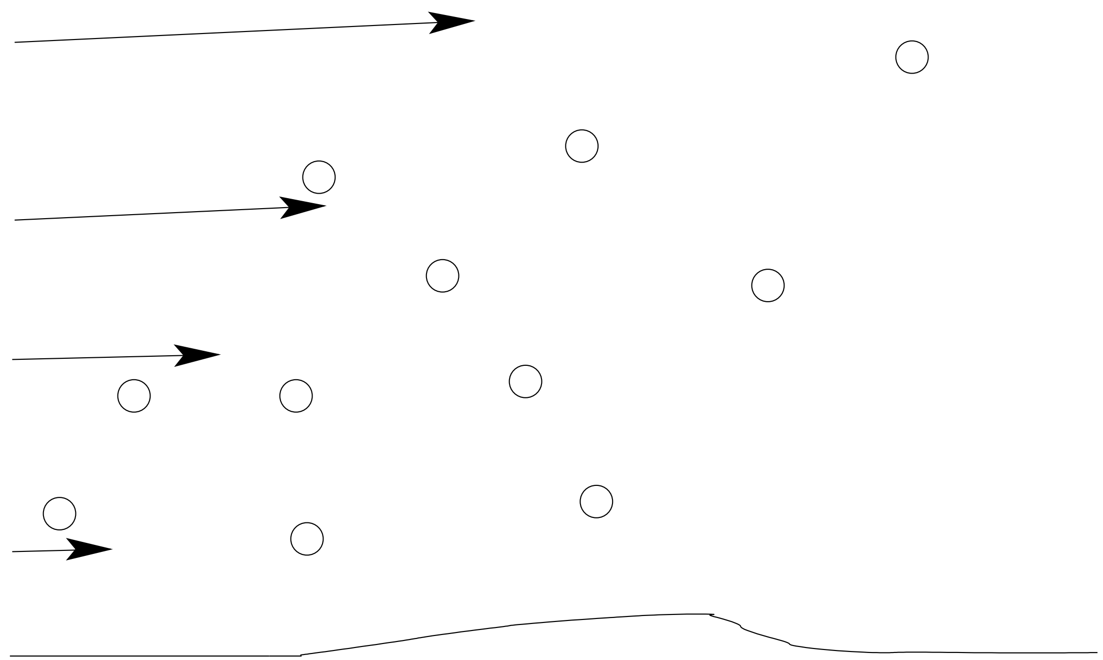
Transport de Masse

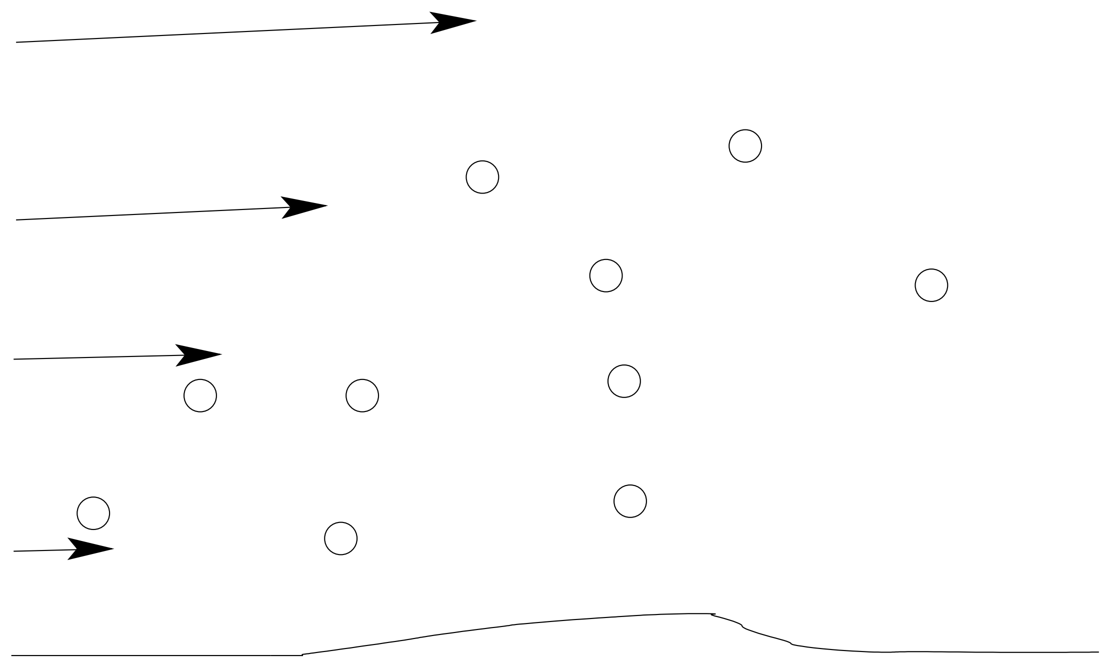
Un autre point de vue :

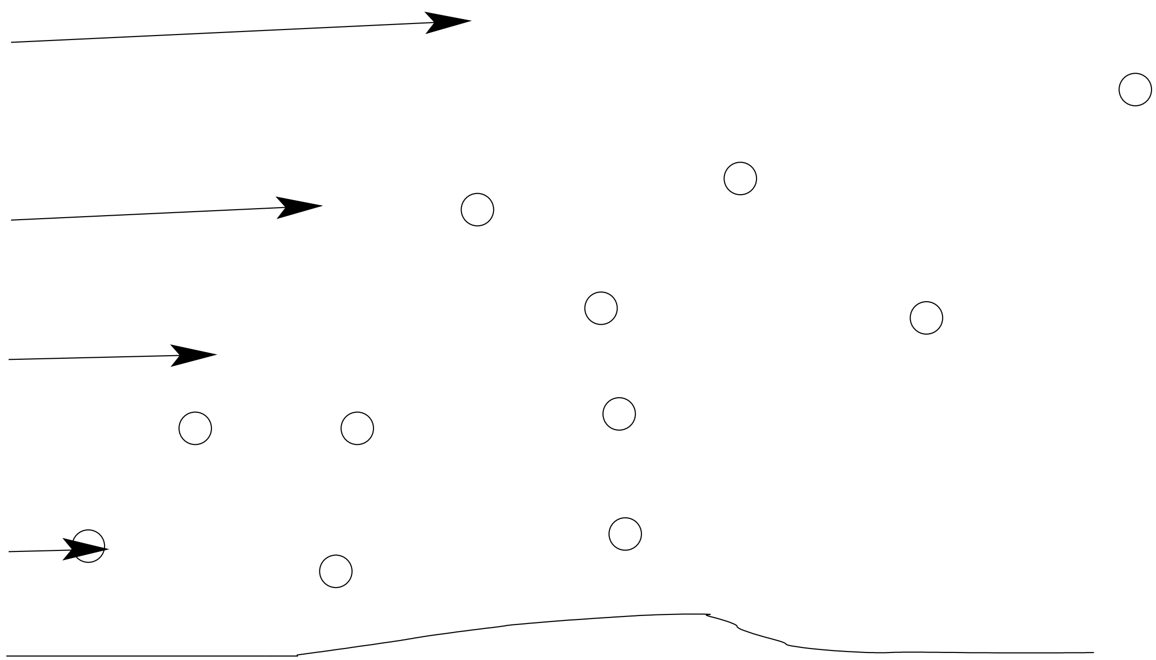
Transport de Masse

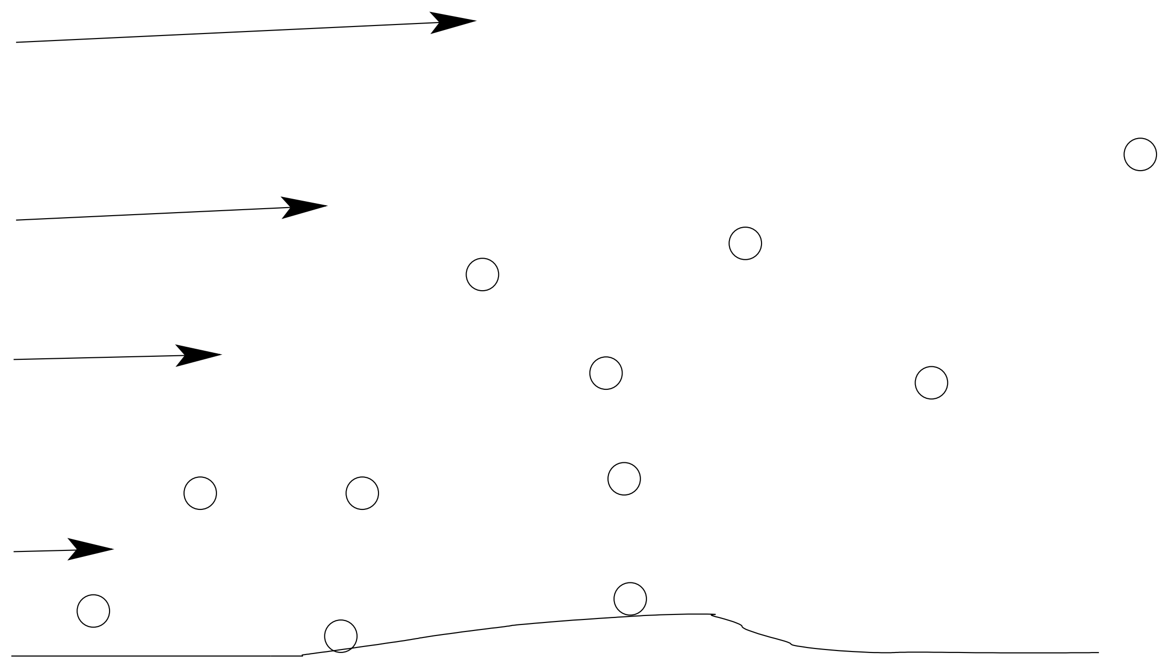
Un autre point de vue :
Convection
Sédimentation
Diffusion

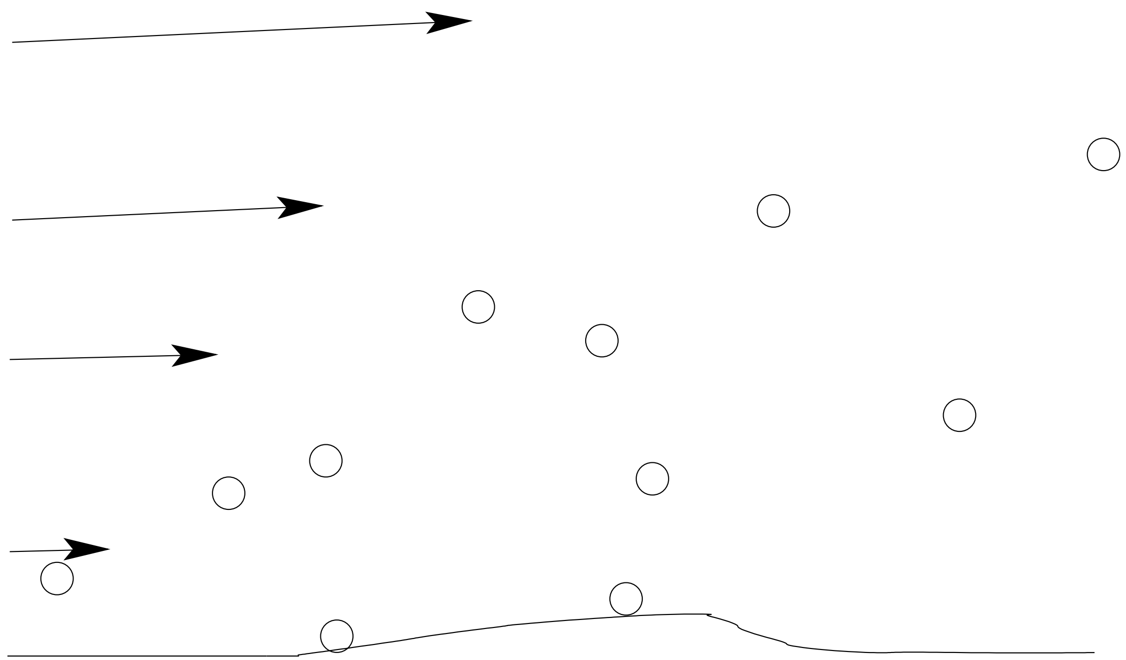


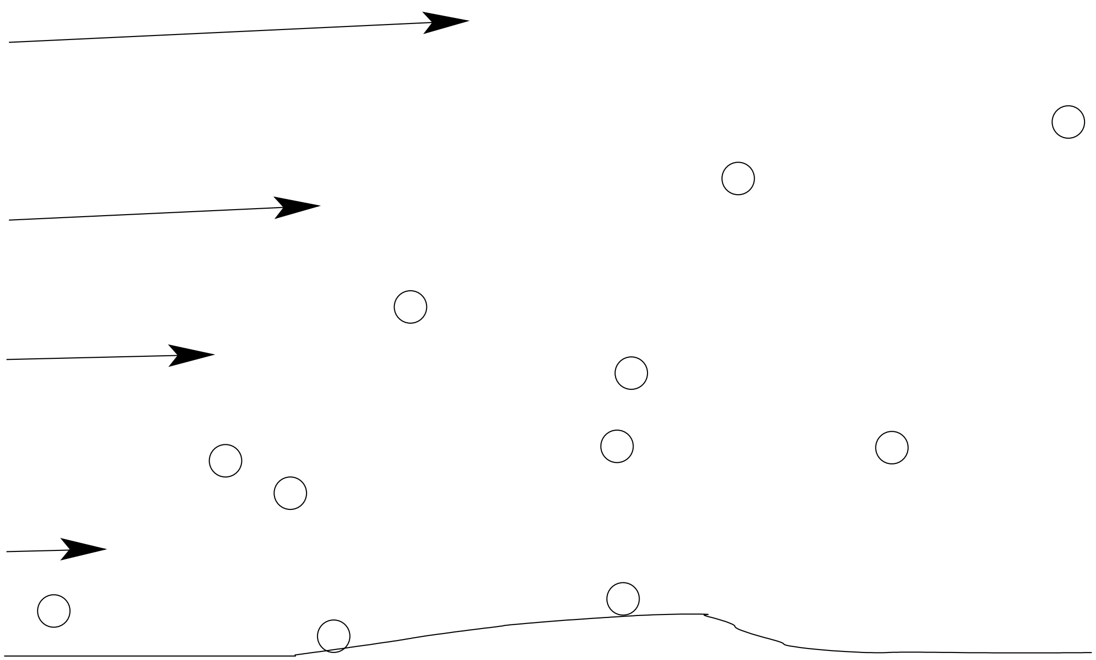


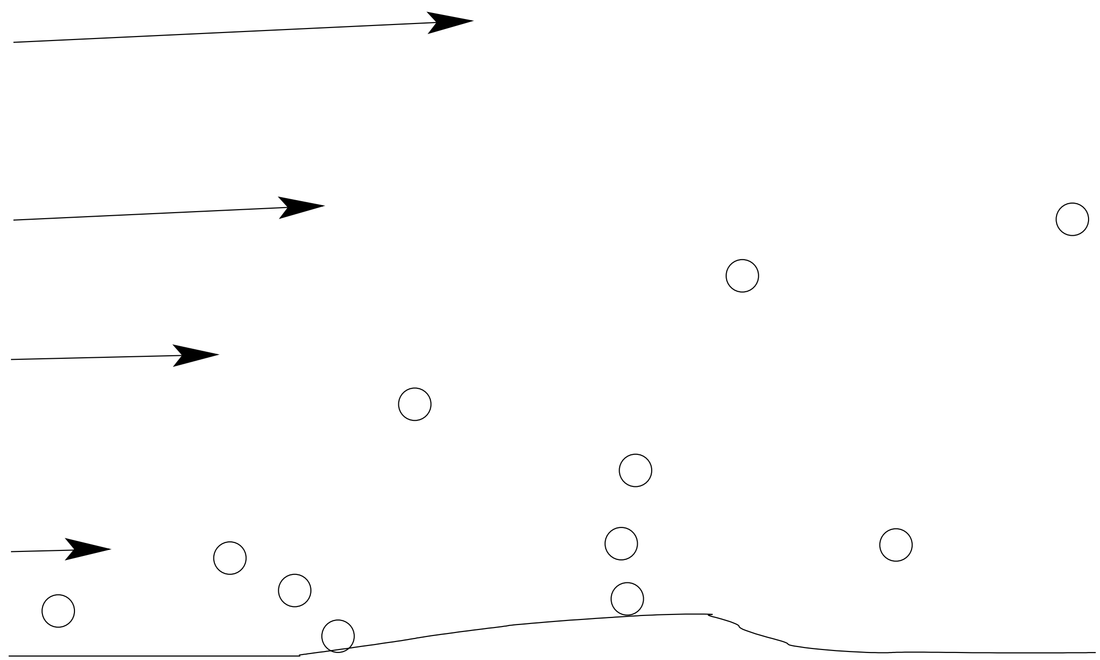


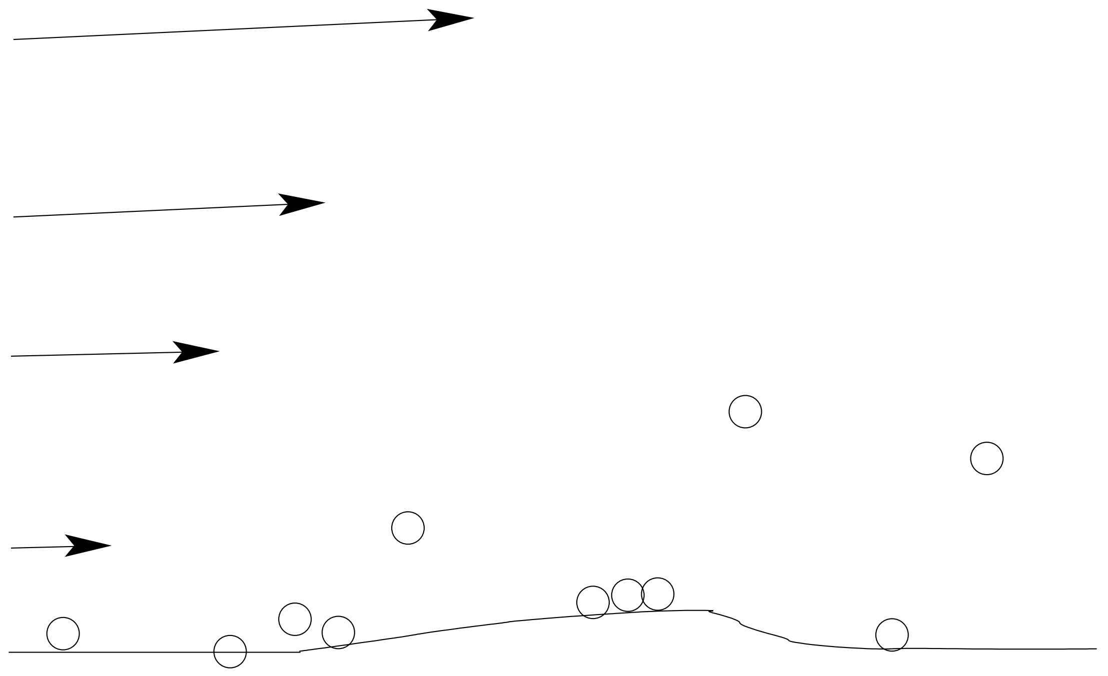


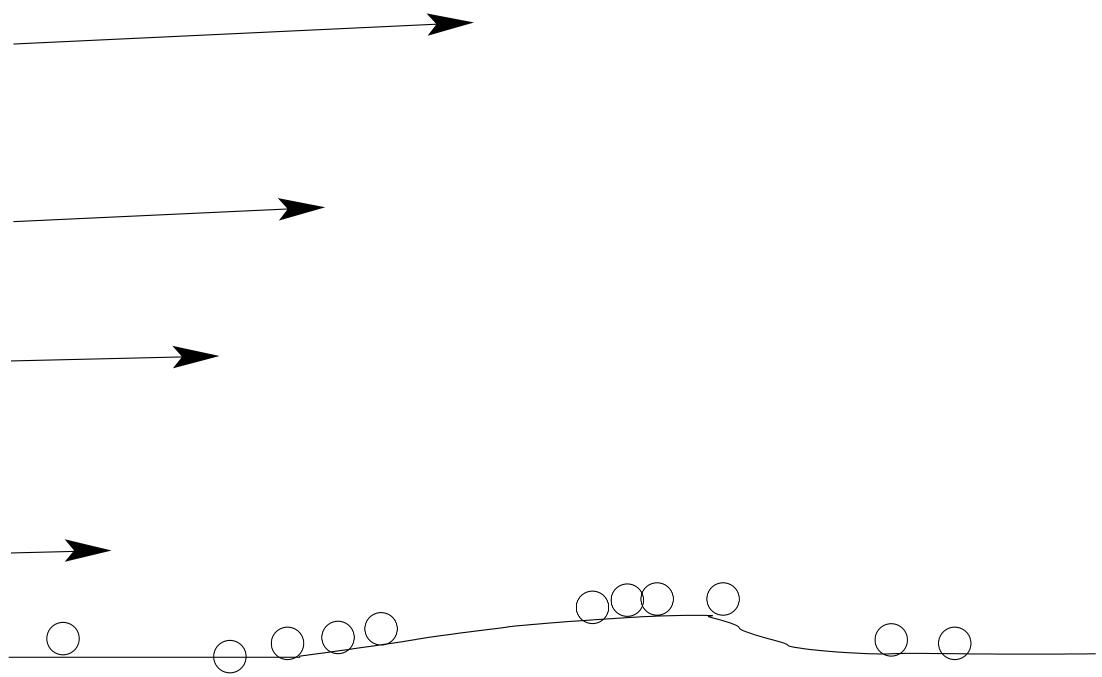


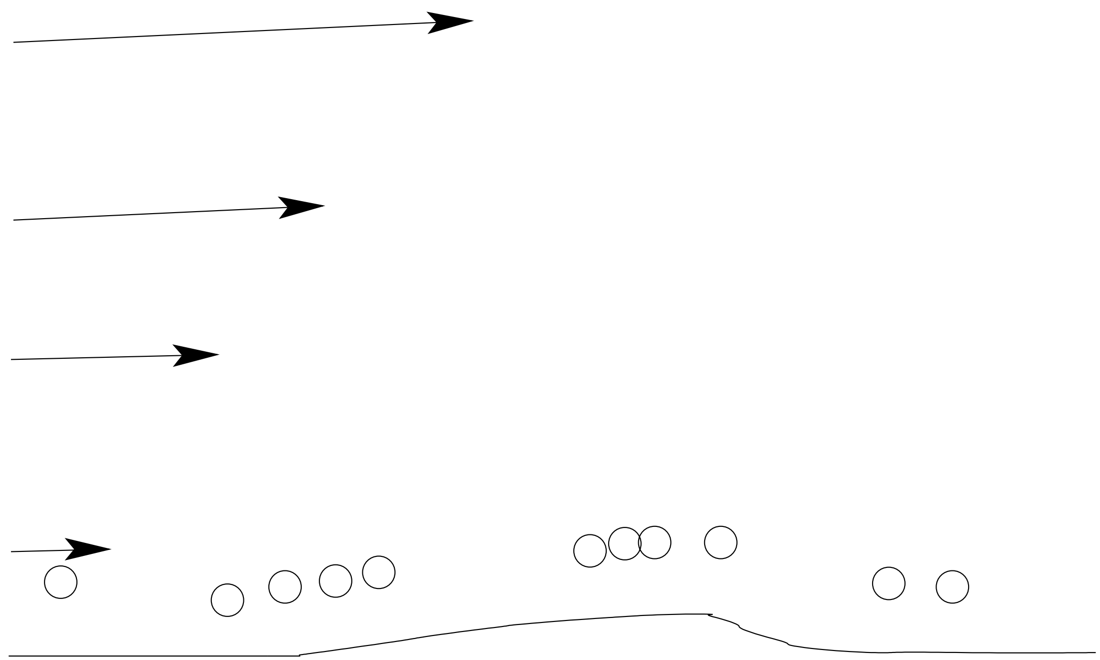












Vitesse des sédiments :

$u_p =$
$v_p =$

Vitesse des sédiments :

$u_p = u$
$v_p = v$
Convection

Vitesse des sédiments :

$u_p = u$
$v_p = v - V_f$
Sedimentation

Vitesse des sédiments :

$u_p = u - D\frac{\partial c}{\partial x}$
$v_p = v - V_f - D\frac{\partial c}{\partial y}$
Diffusion

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial x} D \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q$, ... $\Gamma = -c(x,0)(V_f) - D\frac{\partial c}{\partial y}(x,0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q$, ... $\Gamma = -c(x,0)(V_f) - D\frac{\partial c}{\partial y}(x,0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma;$$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q$, ... $\Gamma = -c(x,0)(V_f) - D\frac{\partial c}{\partial y}(x,0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma;$$

si $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 > \tau_s$ alors $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = \beta(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 - \tau_s)^\gamma$, sinon $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = 0.$

Equation de conservation de la masse des sédiments :

forme locale ;

$$\frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial c(v - V_f)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}$$

forme intégrale : $\int_0^\infty cudy = q$, ... $\Gamma = -c(x, 0)(V_f) - D\frac{\partial c}{\partial y}(x, 0)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \Gamma \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma;$$

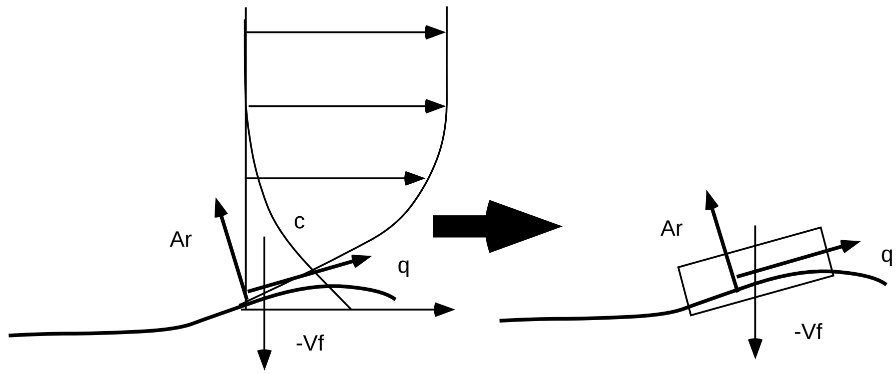
si $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 > \tau_s$ alors $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = \beta(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_0 - \tau_s)^\gamma$, sinon $-\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{y}}|_0 = 0.$

i.e. :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Brivois 05/ Lagrée 00, 03

Forme finale



Sauerman, Kroy, Hermann 01/ Andreotti Claudin Douady 02/ Lagrée 00/03 Valance Langlois 05 Hinch Charru (sm) Kouakou Lagrée (05 et 06)

$$l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = (\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})^\gamma).$$

- flux total de sédiments convectés q.
- effet de seuil τ_s
- effet de pente $\Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$
- $\varpi(x) = x$ si $x > 0$ (sinon 0), γ, l_s ...
- attention : $l_s \propto U_s'$ ou $l_s \propto 1/U_s'$

Remarque

- utilisation d'une seule loi : la loi de conservation de la masse

- la loi de la conservation de la quantité de mouvement est sur simplifiée (absente !)

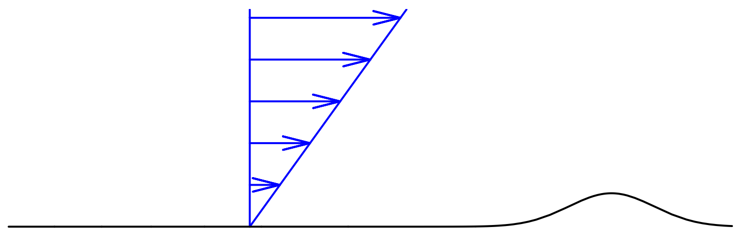
Le fluide

Résolution numérique des équations de Navier Stokes.
En "vrai" : la viscosité change... turbulence...

Ici on présente des simplifications sévères :

• Ecoulement quasistationnaire
• Solution Asymptotique de N.S. : théorie laminaire visqueuse à $Re = 0$
• Solution Asymptotique de N.S. : théorie laminaire visqueuse à $Re = \infty$
Triple Deck Stewartson 69/ Neiland 69 (en fait *Double Deck* Smith 80)
En fait Fowler 01
• Solutions linéarisées

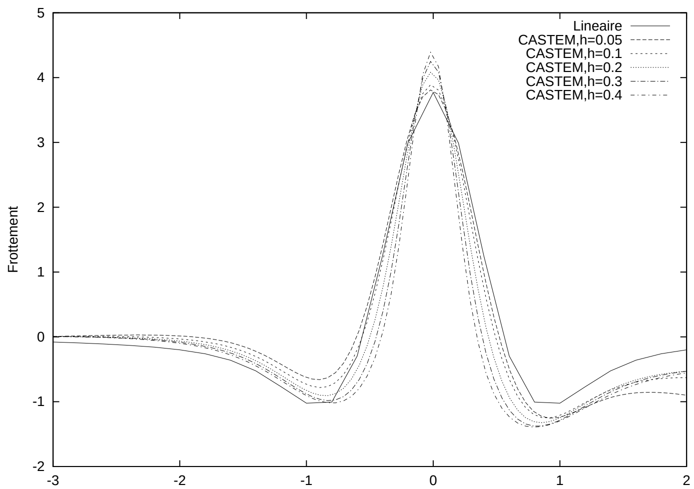
Cas très visqueux $Re = 0$

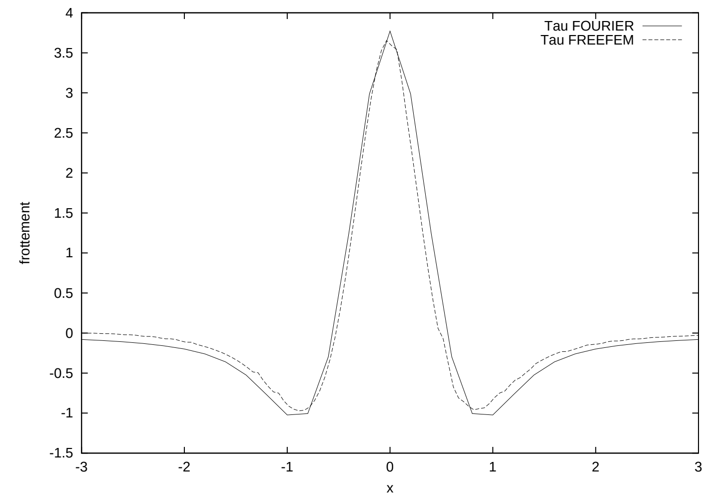


Ecoulement cisaillé sur la bosse $f(x,t)$ a faible nombre de Reynolds

$$f(x,t) \text{ donne } \tau = 1 + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'}{x-\xi}d\xi$$

perturbation d’un écoulement cisaillé $Re = 0$





perturbation du frottement pariétal calculé par CASTEM $\frac{1}{h_0}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}$ pour $0.05 < h_0 < 0.4$ (hauteur) et $Re = 1$
perturbation calculée avec FreeFem.

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

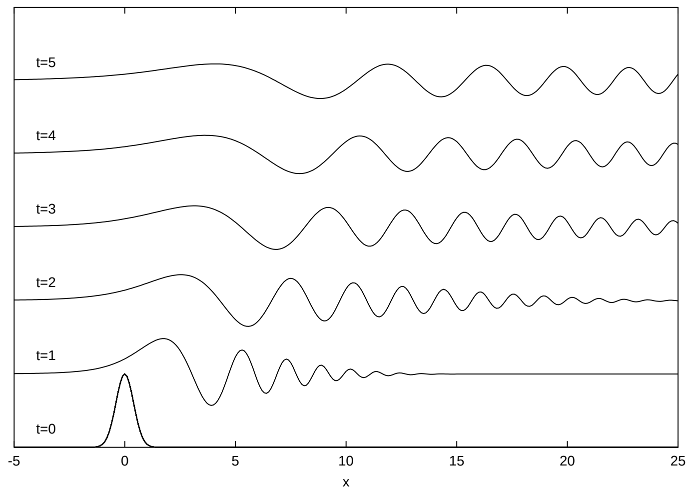
si $q = \tau - \tau_s$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{f'}{x-\xi}d\xi.$$

on obtient l'équation de Benjamin -Ono linéaire.

Evolution calculée, cas $Re = 0$

Résolution numérique
dispersion d'une bosse donnée



animation une autre animation

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

- si $q = (\varpi(\tau - \tau_s))$ neutre, dispersif.

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

- si $q = (\varpi(\tau - \tau_s))$ neutre, dispersif.

- si $l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = (\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})$ configuration stable...

Couplage fluide fond, cas $Re = 0$

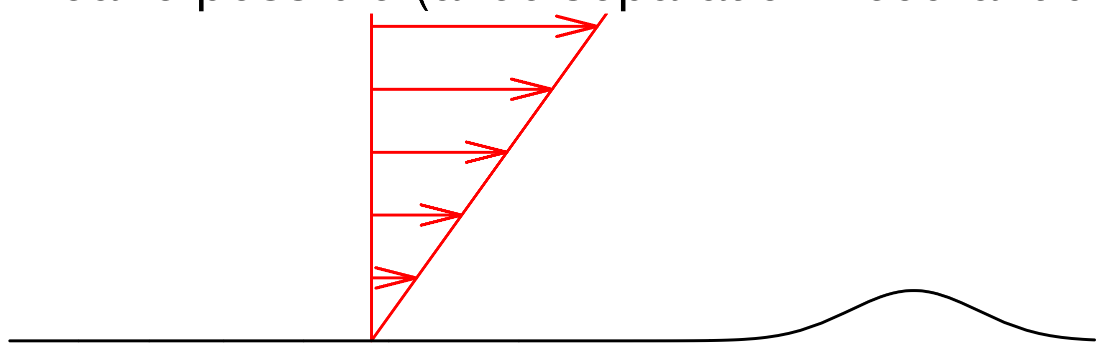
- si $q = (\varpi(\tau - \tau_s))$ neutre, dispersif.

- si $l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = (\varpi(\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})$ configuration stable...

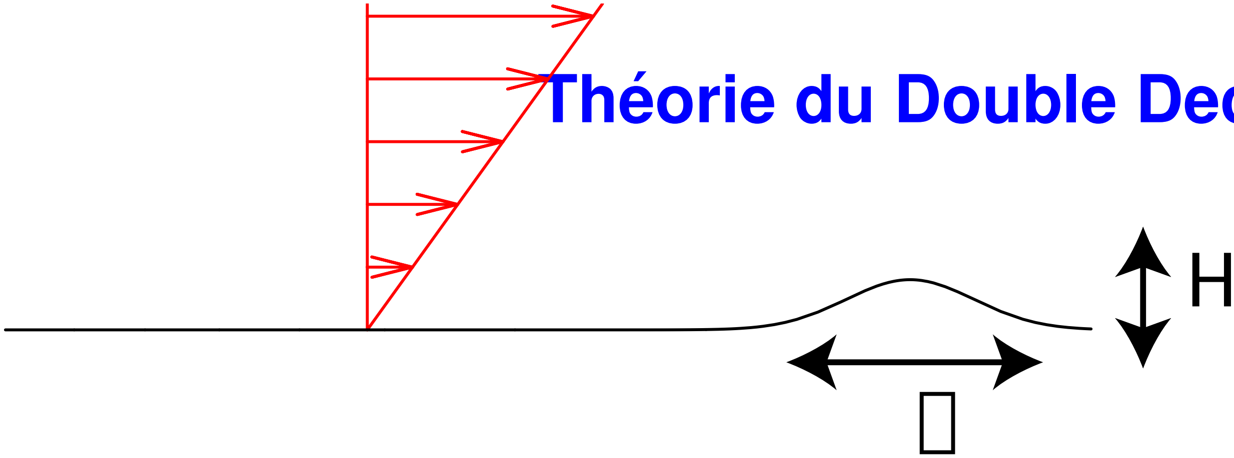
on passe à $Re = \infty$...

Solution Asymptotique "double deck theory"

Effets visqueux toujours prédominants au fond
Perturbation d'un écoulement cisaillé
Résolution Non Linéaire possible (avec séparation : courant de retour)



Théorie du Double Deck



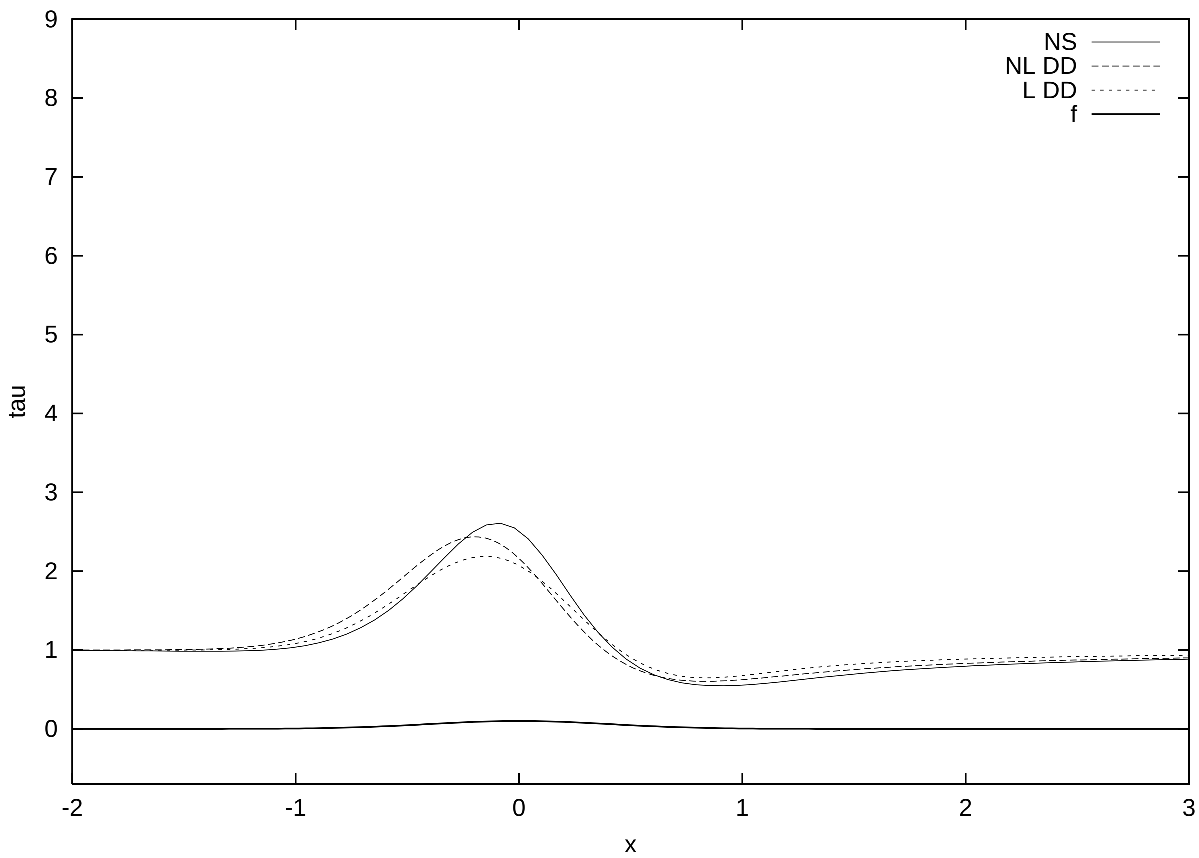
Pour une bosse de longueur d'ordre λ et de hauteur d'ordre $H << \delta$:

$$\tau = \mu U_0'(\bar{U}_S'(1 + (\frac{U_0'}{\nu\lambda})^{1/3} H\tilde{c})), \text{avec } \tilde{c} = FT^{-1}[FT[\tilde{f}]3Ai(0)(-(i2\pi\tilde{k})\bar{U}_S')^{1/3}]$$

la fonction du temps $\bar{U}_S'$ est un nombre d'ordre 1.

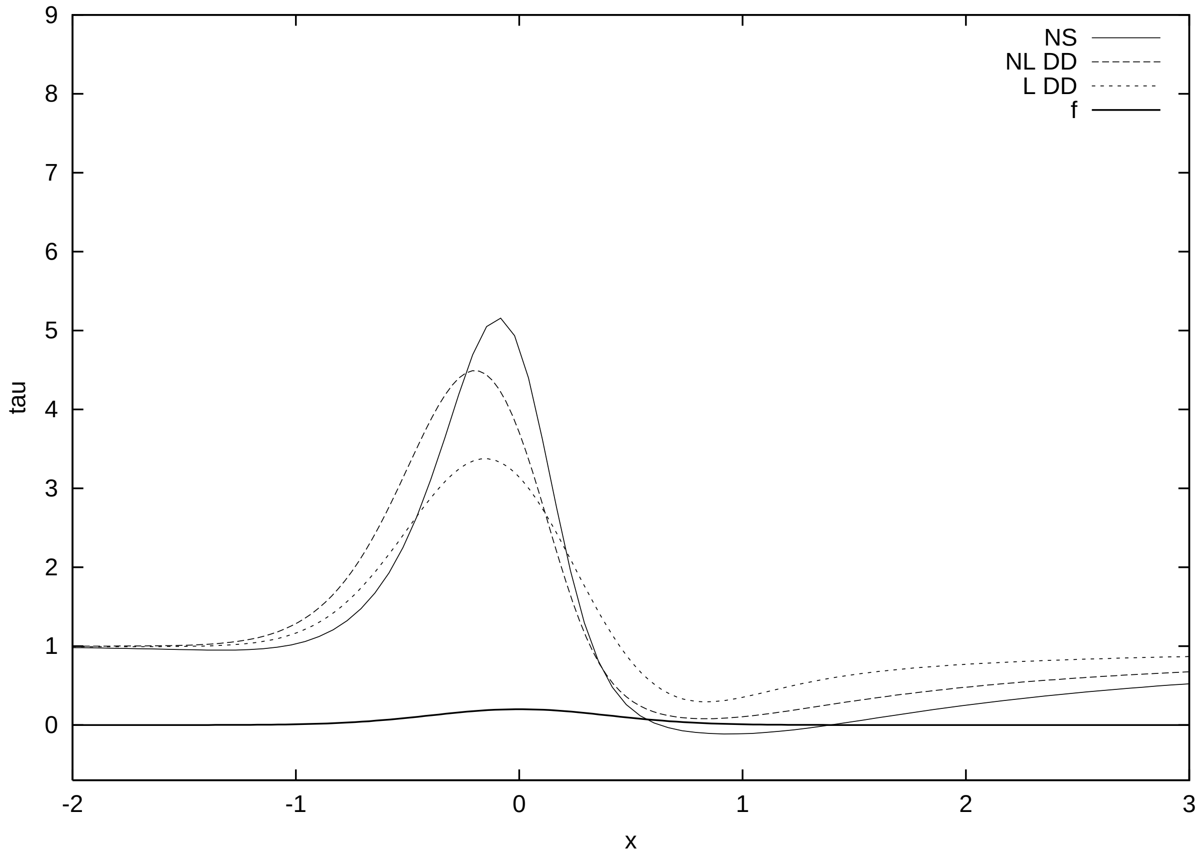
$$(\frac{U_0'}{\nu\lambda})^{1/3} H \leq 1$$

NS/ Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



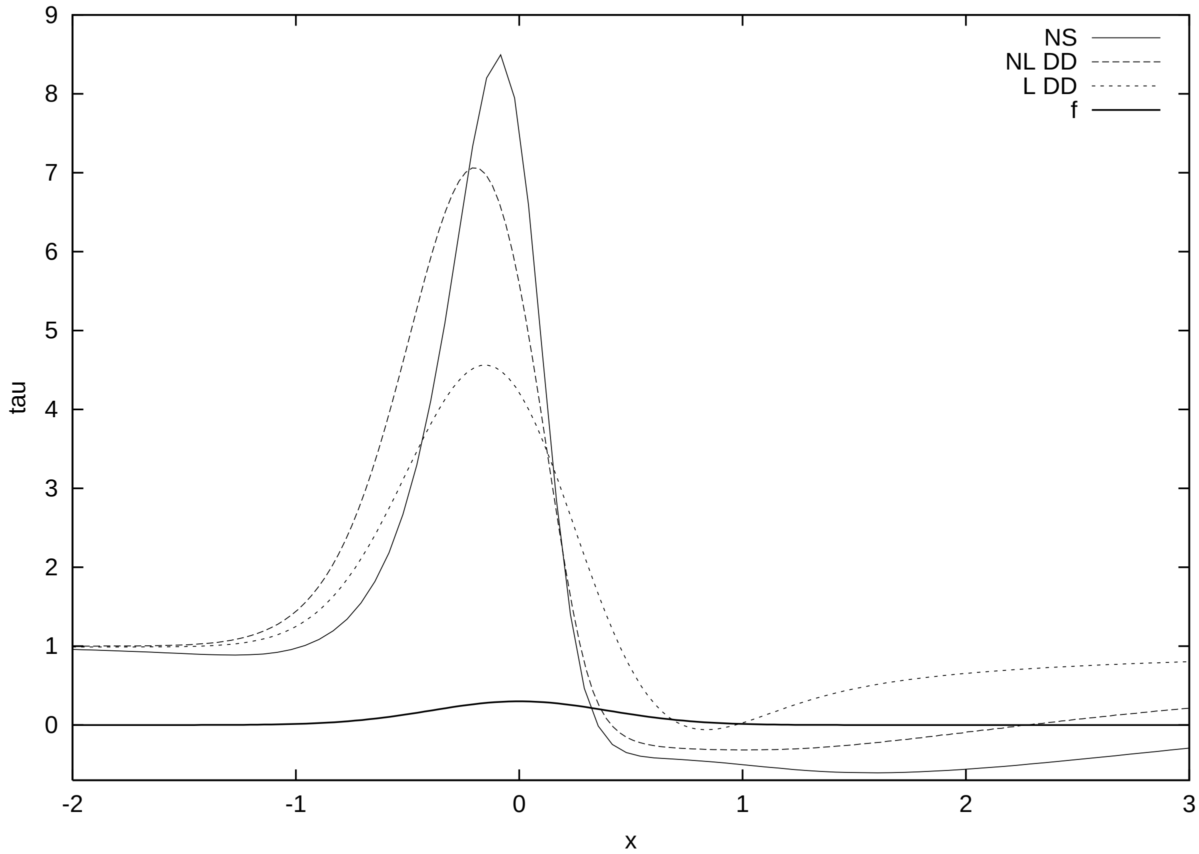
$h = 0.1,\ Re = 1000$

NS/ Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



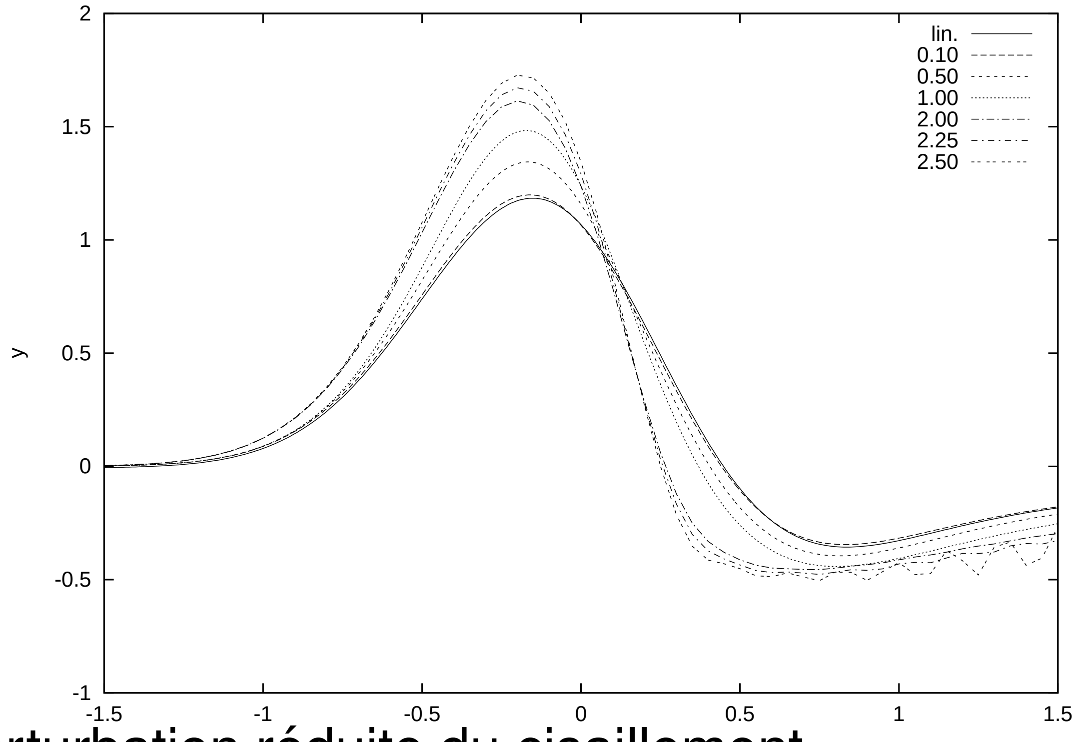
$$h = 0.2,\ Re = 1000$$

NS/ Double Deck Linéaire et Non-Linéaire



$h = 0.3,\ Re = 1000$

Double Deck Linéaire et Non-Linéaire

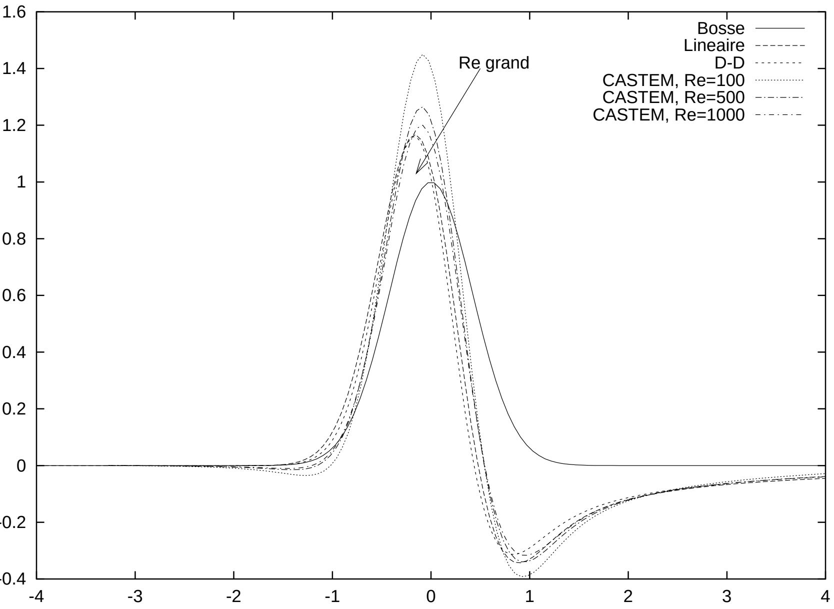


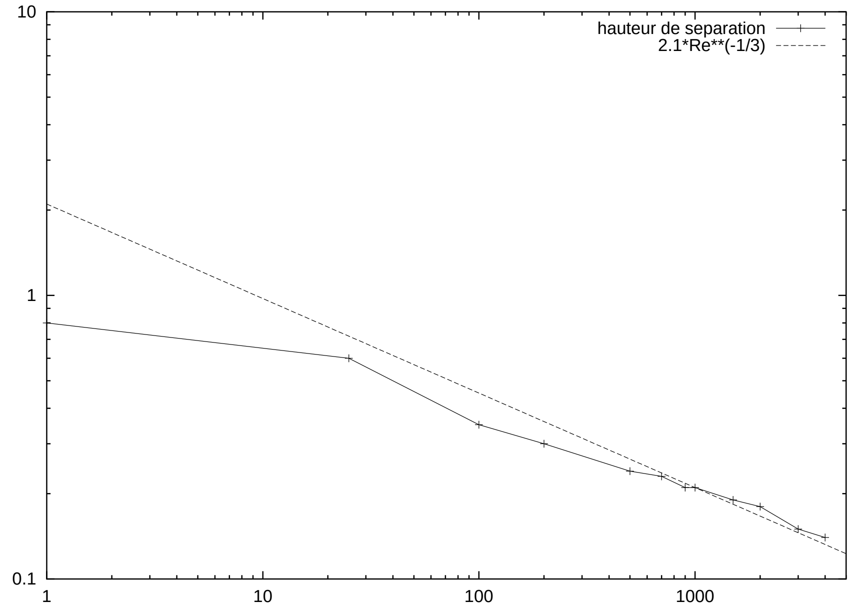
Perturbation réduite du cisaillement $(\frac{\partial u}{\partial y}_0 - 1)/\alpha$ en fonction de x

pour la bosse $\alpha e^{-\pi x^2}$
avec $\alpha = 0.10$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1.0$,
$\alpha = 2$, $\alpha = 2.25$, $\alpha = 2.50$.
La courbe "lin." est la prédiction linéaire, les autres sont les résolutions numériques nonlinéaires.

(séparation pour $\alpha > 2.1$)

Comparaison avec Navier Stokes





pas mal !

conclusion : la perturbation du cisaillement est en avance par rapport au sommet de la bosse.

Sol complètement érodable

Solution de

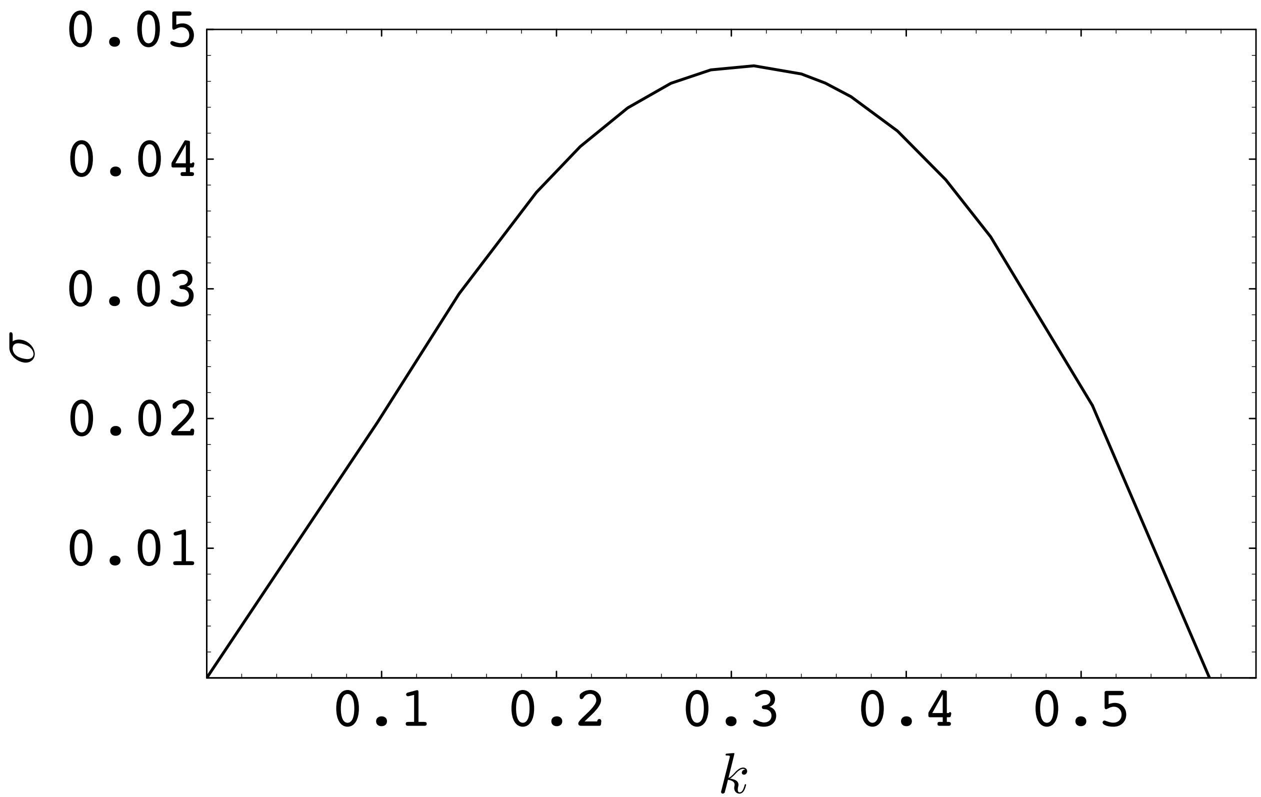
$$\tau = TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik)^{1/3}TF[f]]$$

$$l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = \varpi(\tau - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

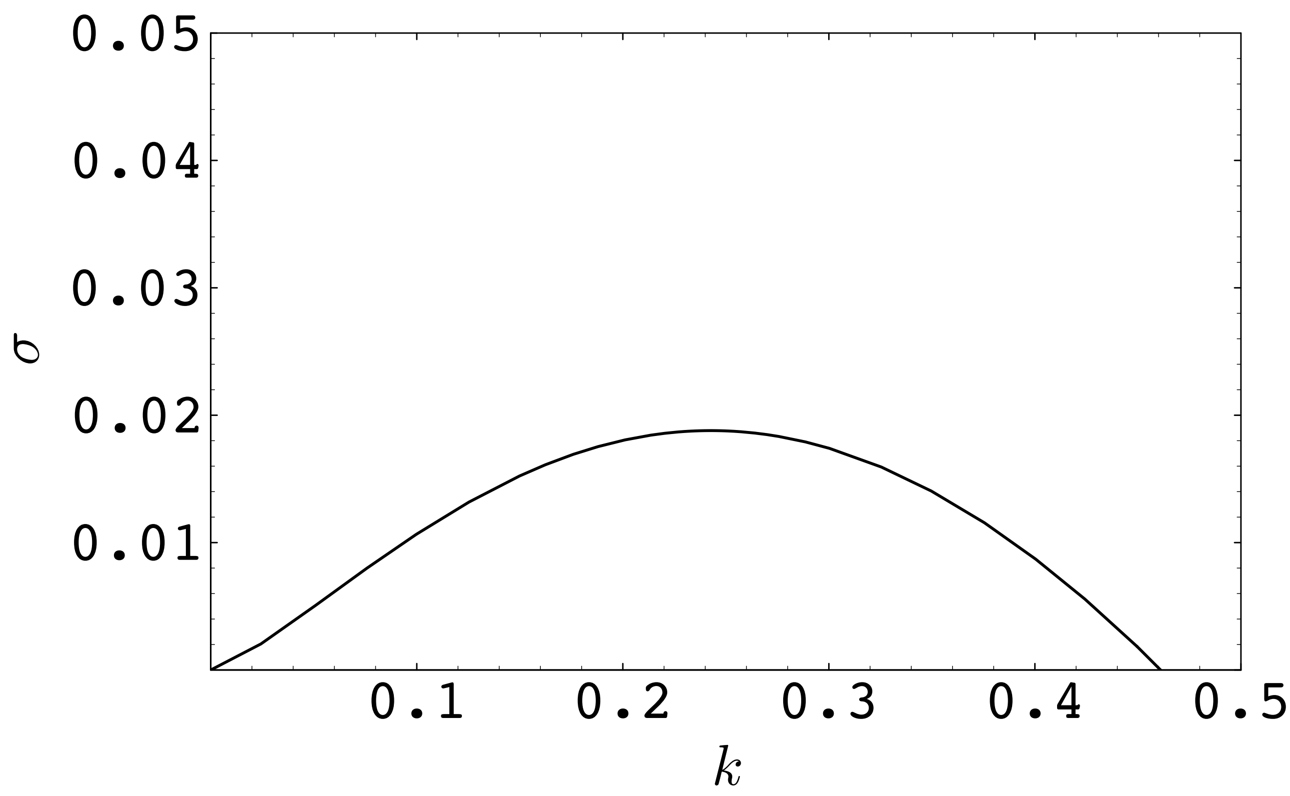
Stabilité linéaire

écoulement cisaillé pur (Lagrée 03, Kouakou & Lagrée 05)



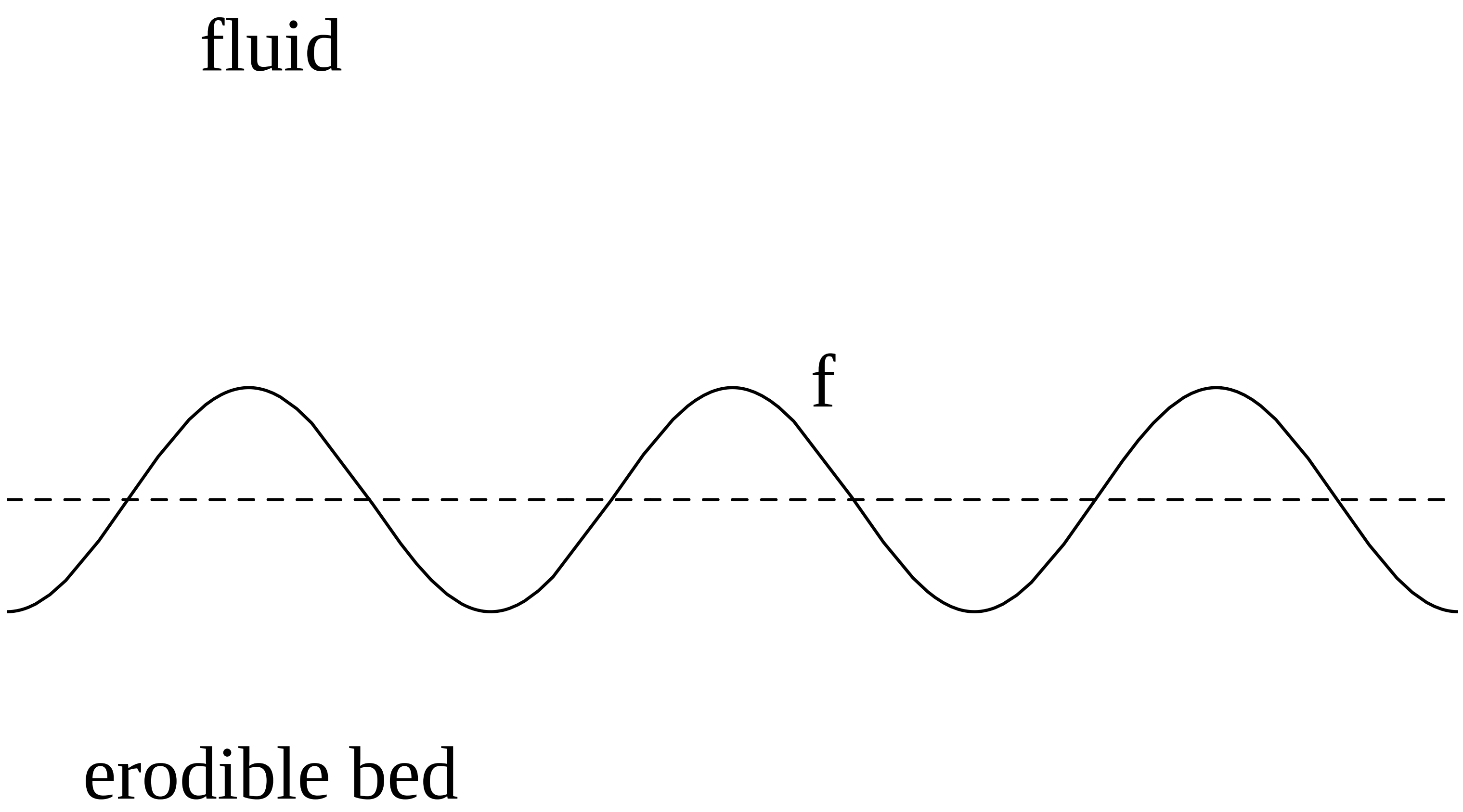
Stabilité linéaire

écoulement cisaillé pur (Lagrée 03, Kouakou & Lagrée 05)



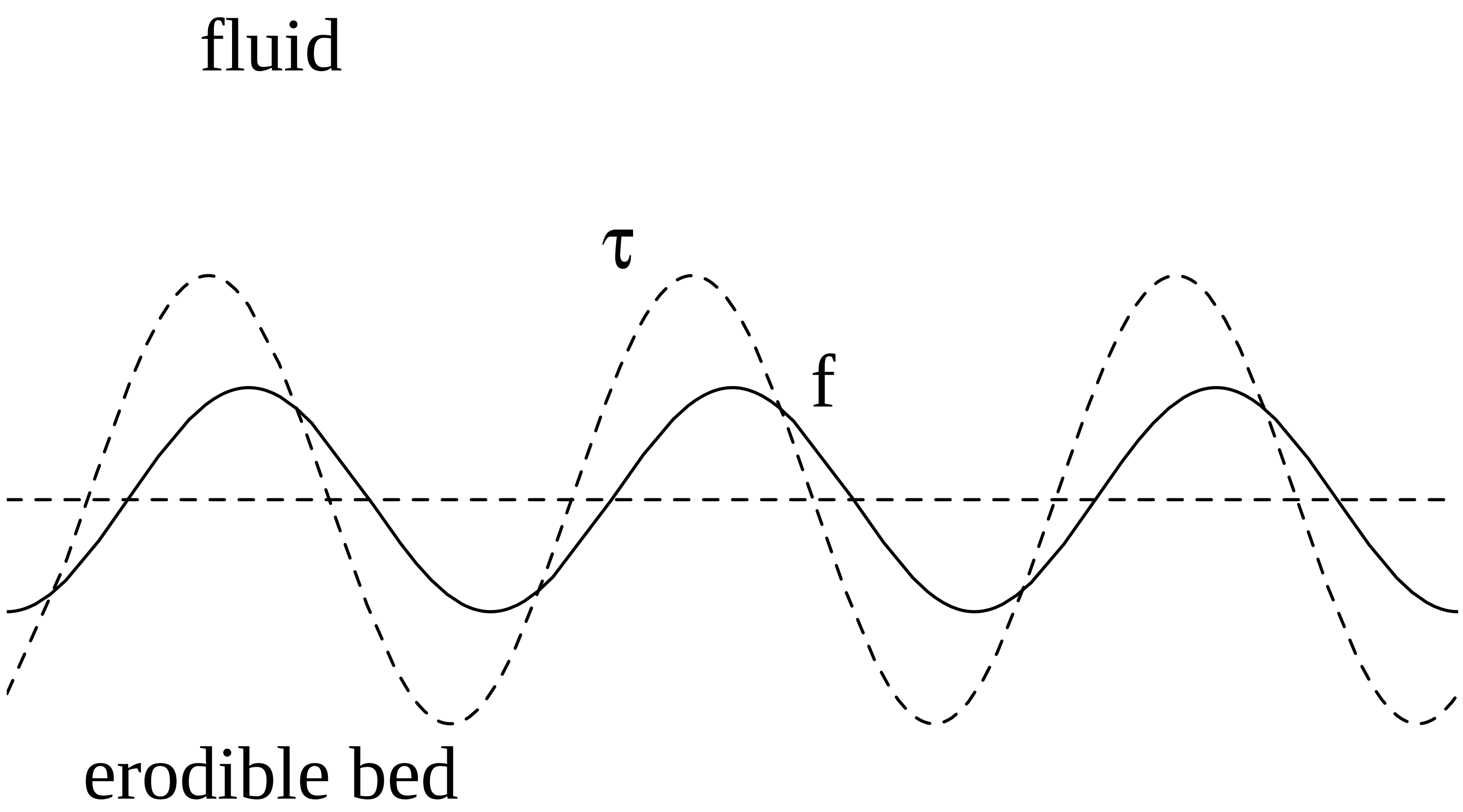
Interprétation

écoulement cisaillé pur



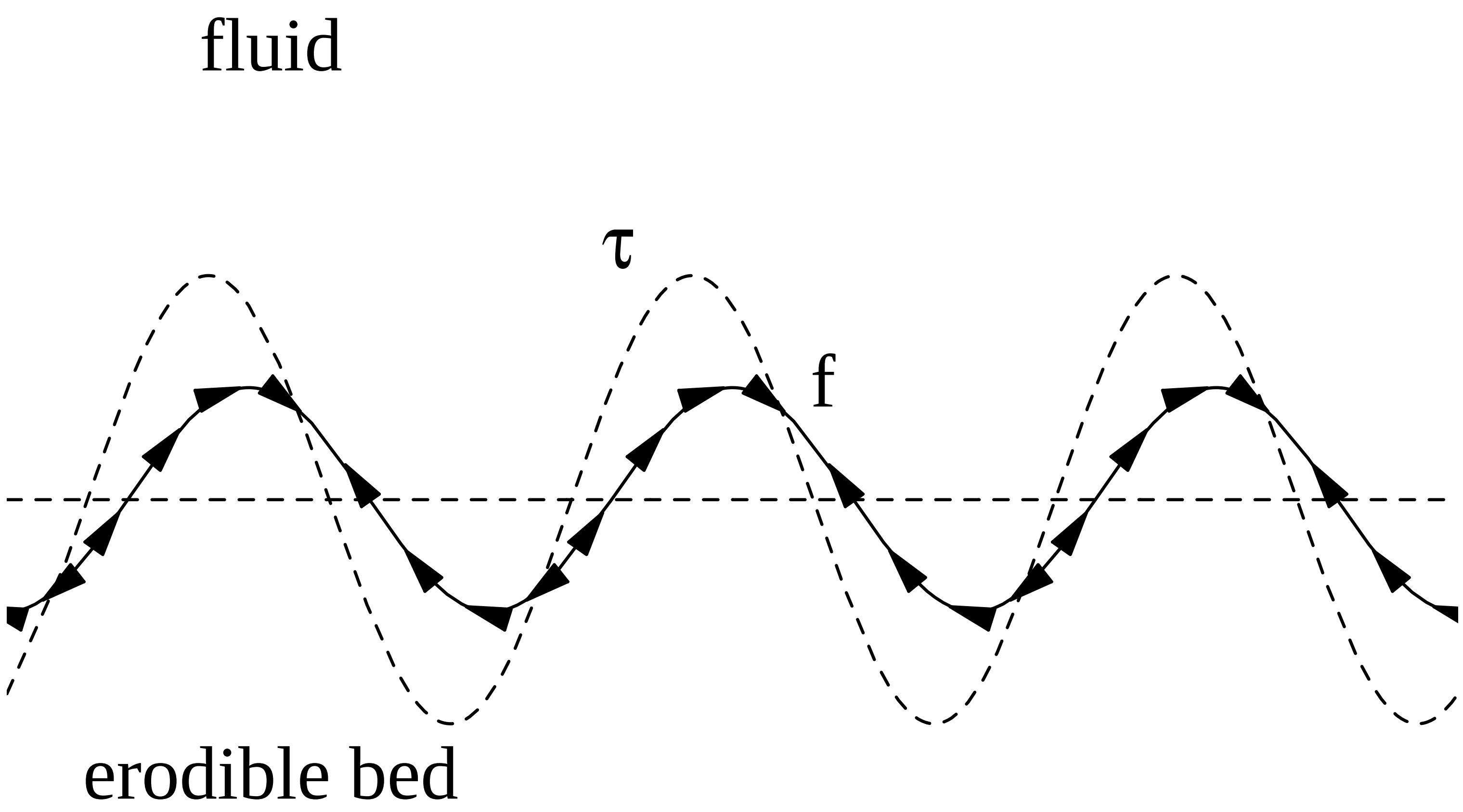
Interprétation

écoulement cisaillé pur



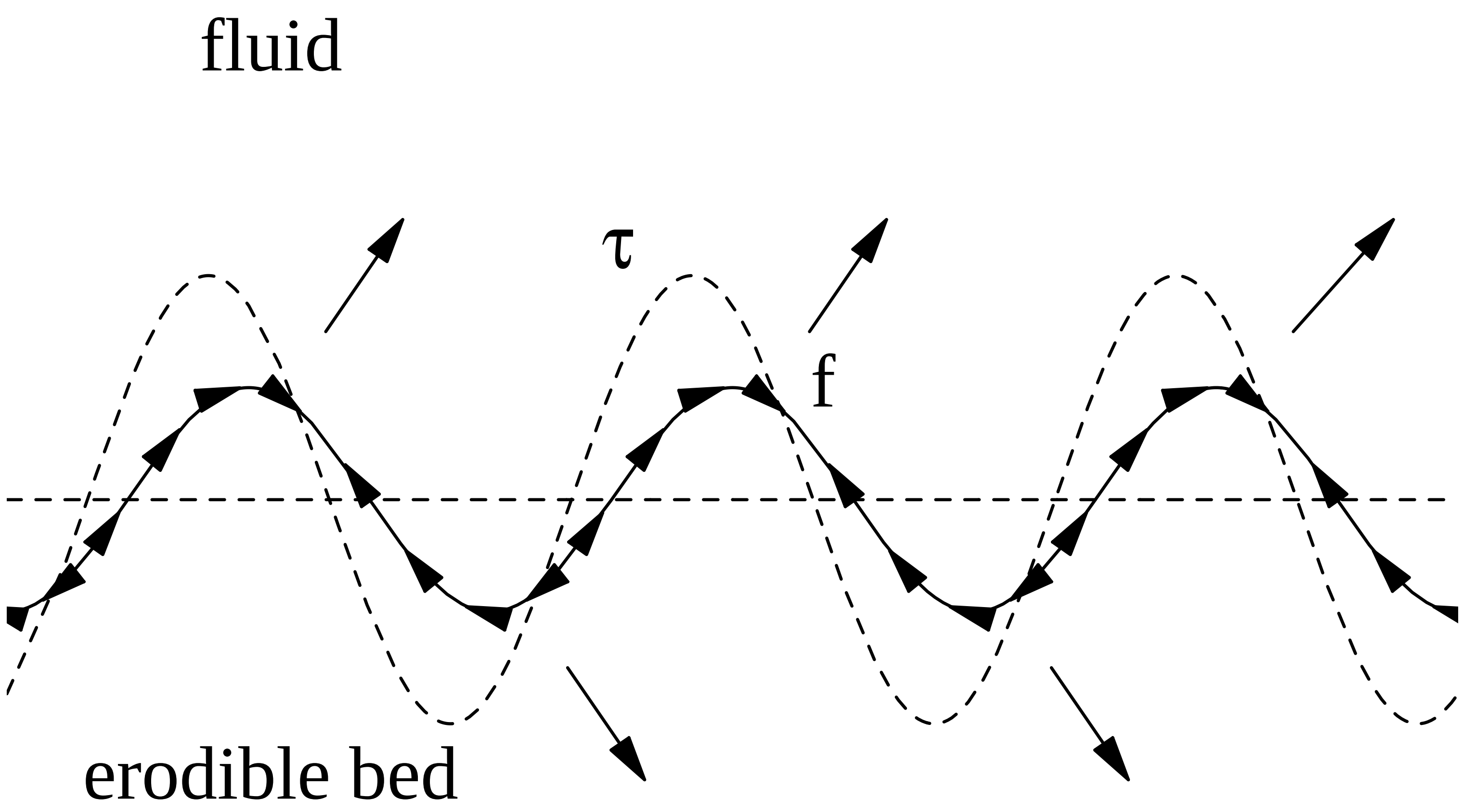
Interprétation

écoulement cisaillé pur



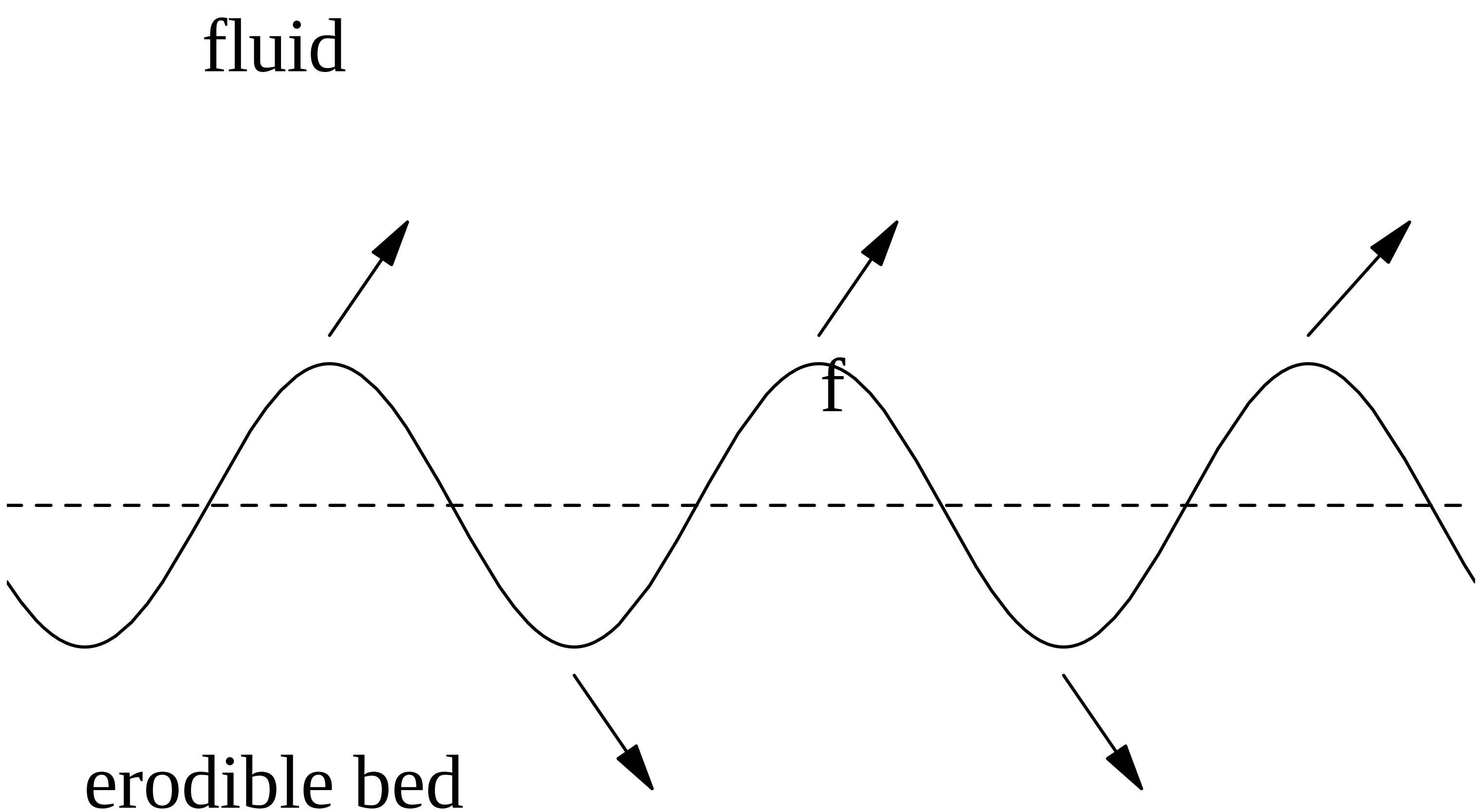
Interprétation

écoulement cisaillé pur



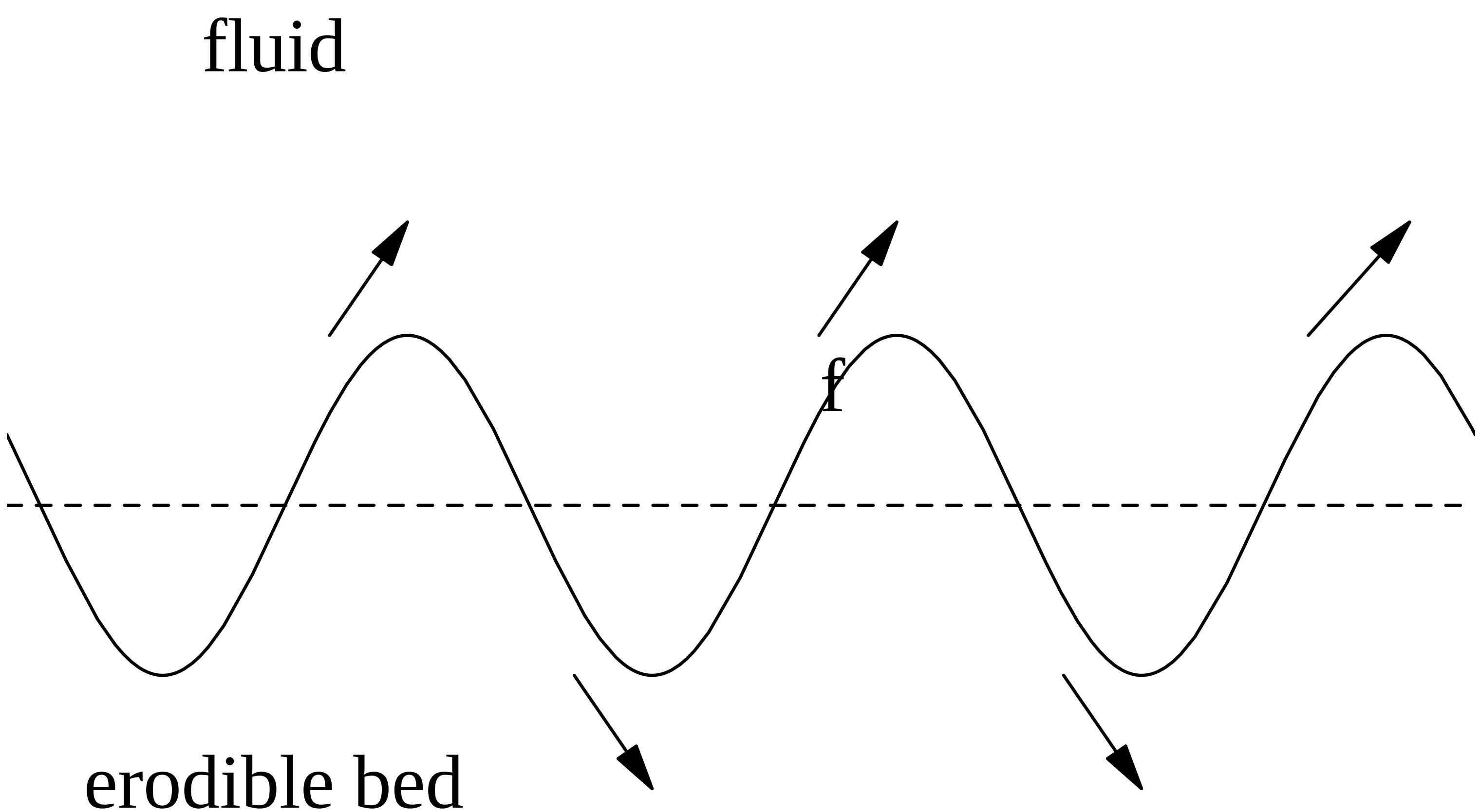
Interprétation

écoulement cisaillé pur



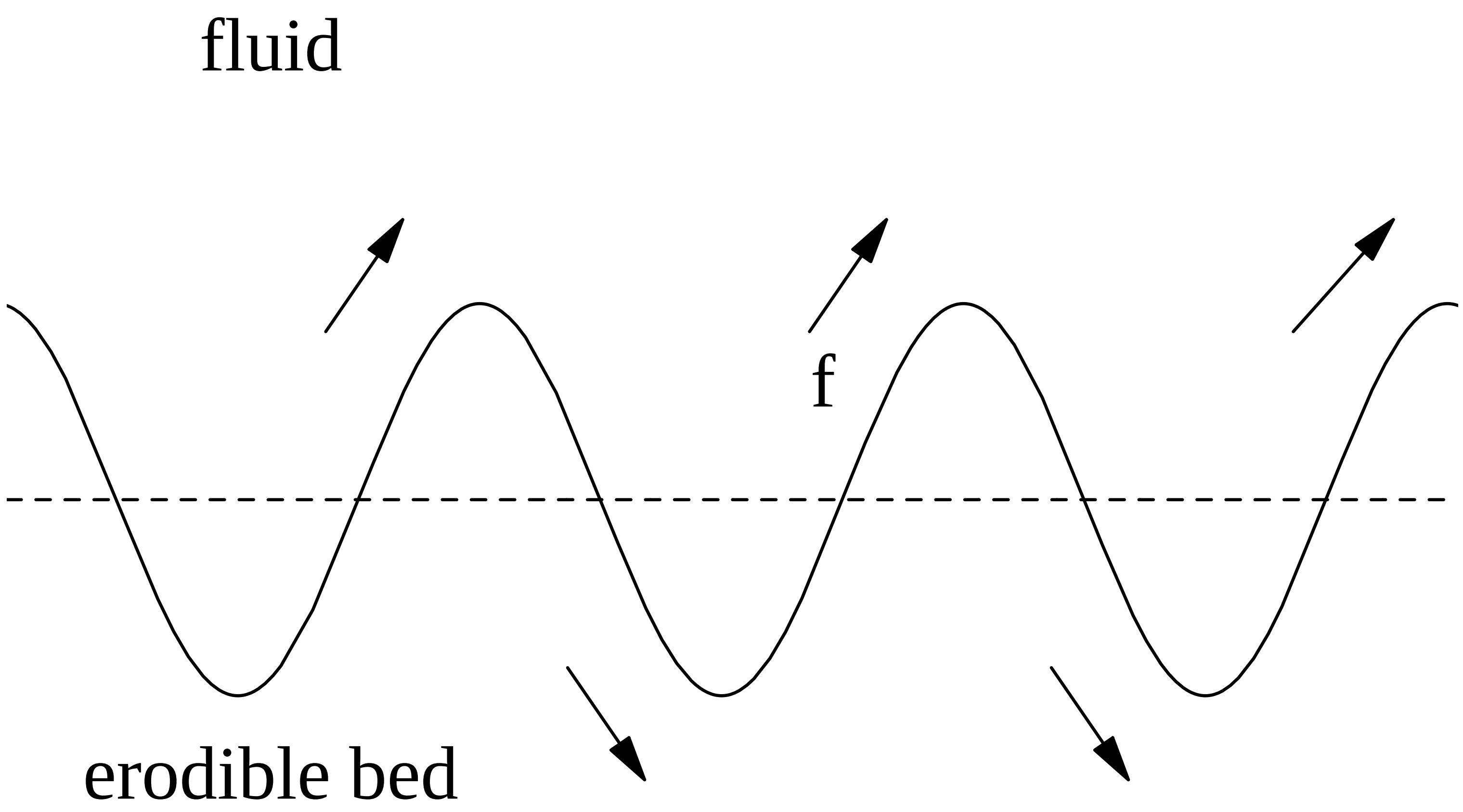
Interprétation

écoulement cisaillé pur



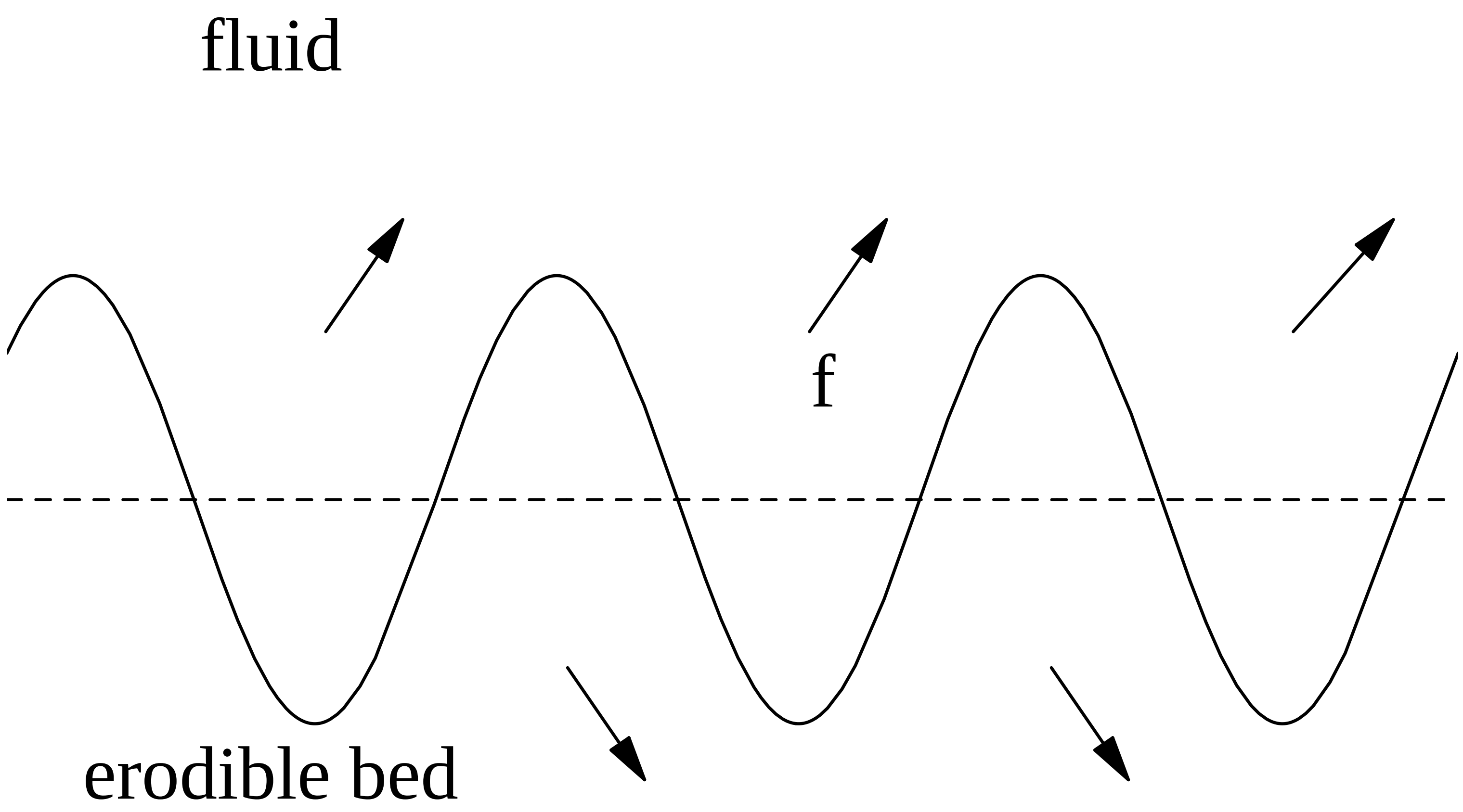
Interprétation

écoulement cisaillé pur



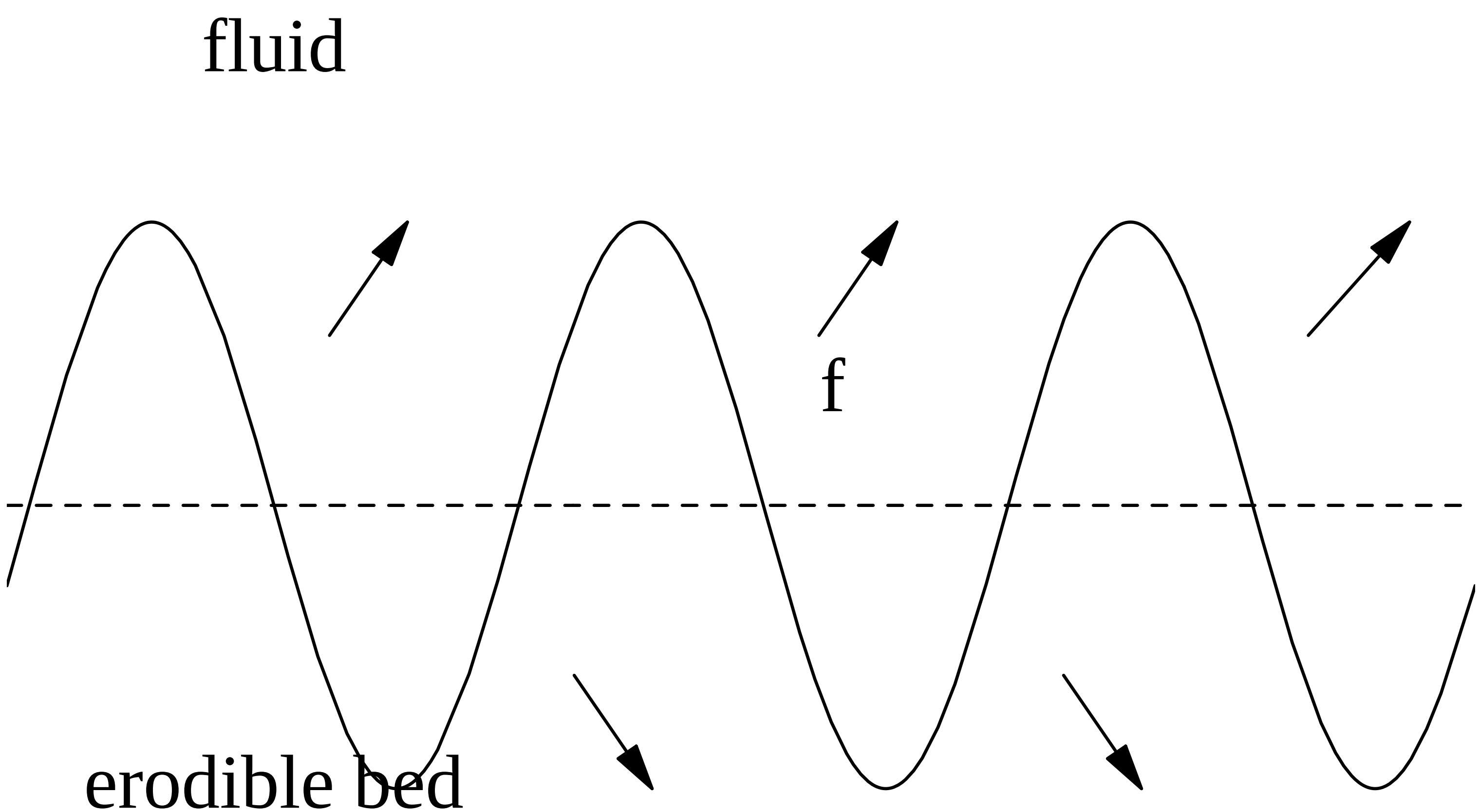
Interprétation

écoulement cisaillé pur

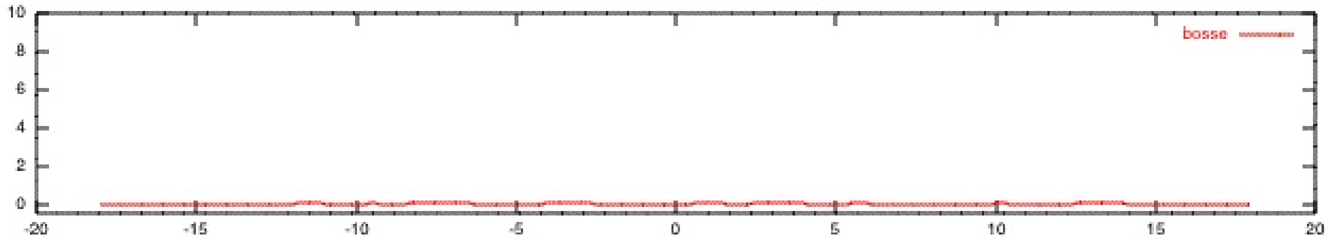


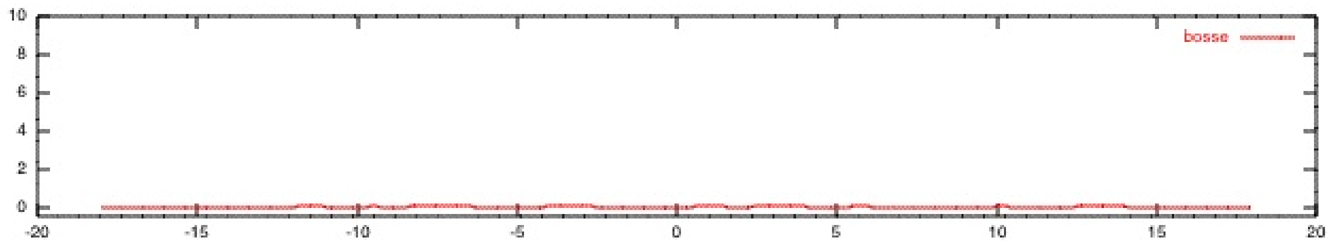
Interprétation

écoulement cisaillé pur



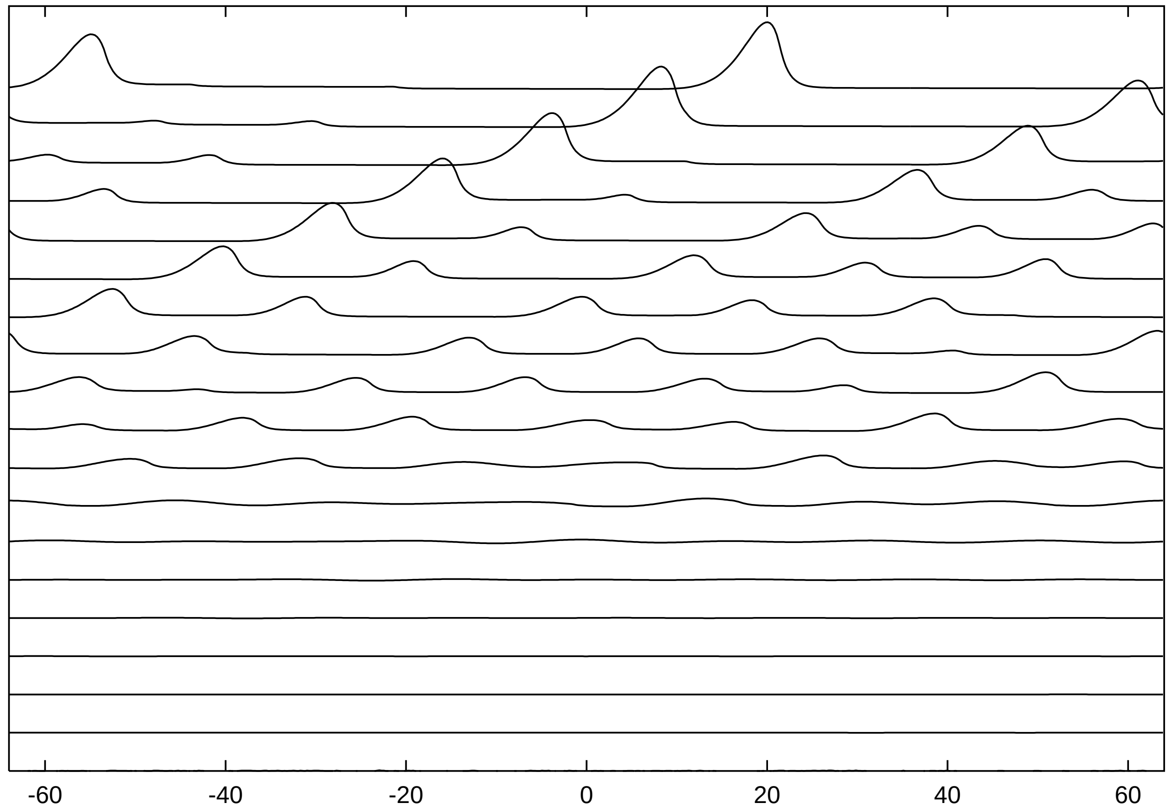
Sol complètement érodable exemple de calculs :

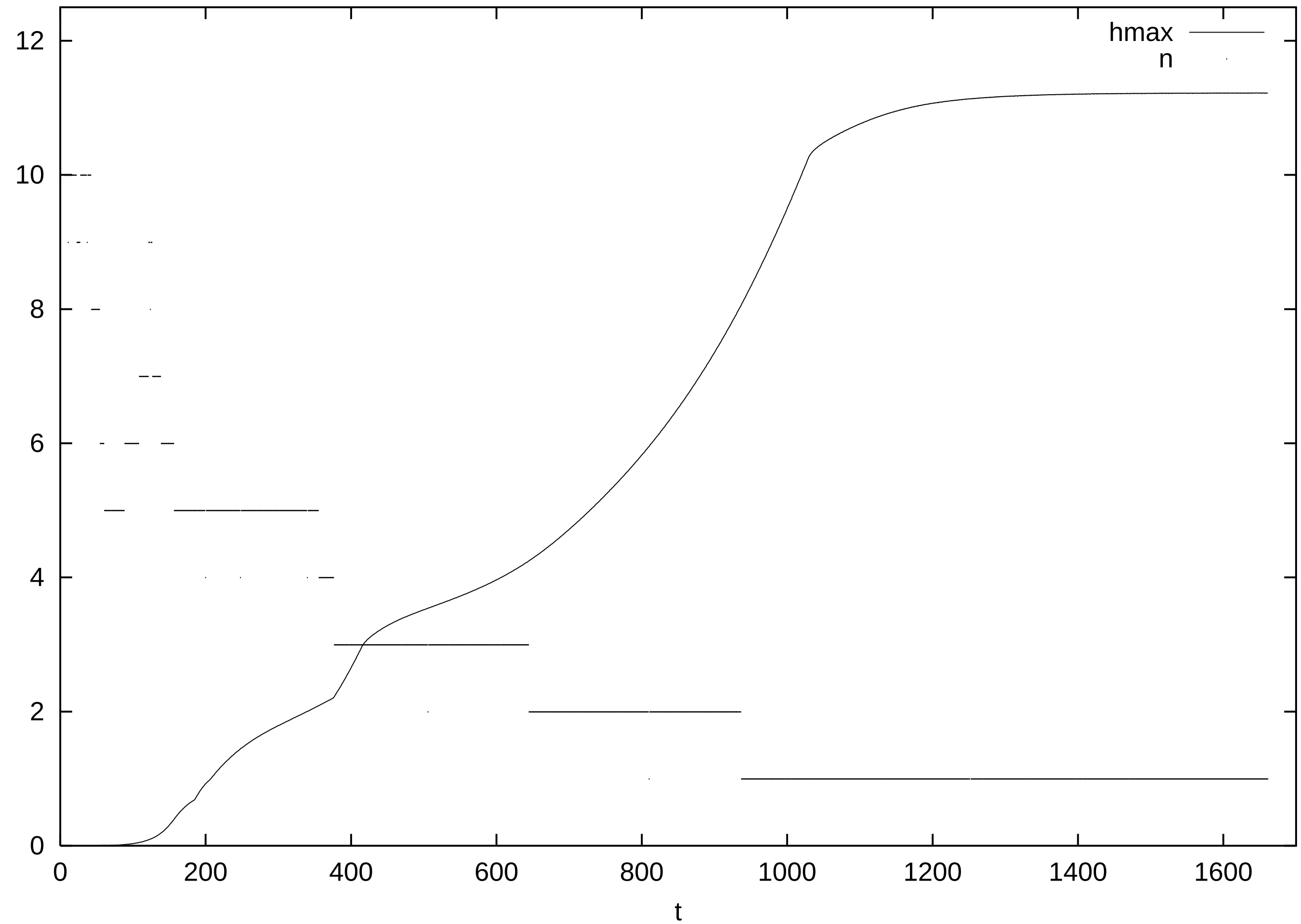




animation 1, **animation 2** (longueur doublée. **animation 2** (cuve circulaire).

Il y a toujours *coarsening*, ”Murissement”. Il ne reste qu’une bosse dans la boîte.


-60
-40
-20
0
20
40
60
x


hmax
n
0
2
4
6
8
10
12
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
t

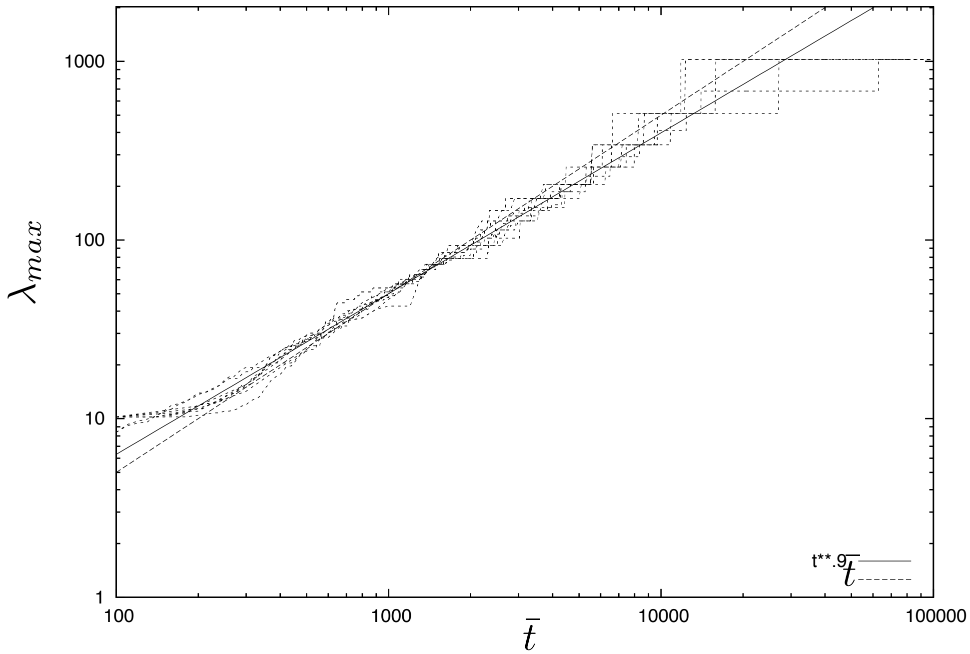


Figure 11: Constant shear, the wave length of the structure scales with a power between $\bar{t}^{0.9}$ and $\bar{t}$.

Stabilité linéaire

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$ (Kouakou & Lagrée 05)

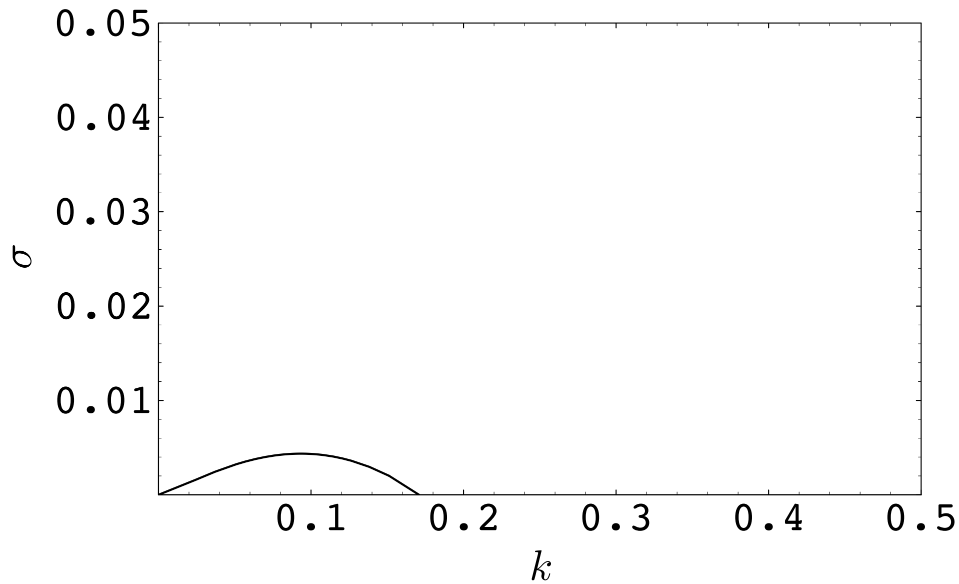
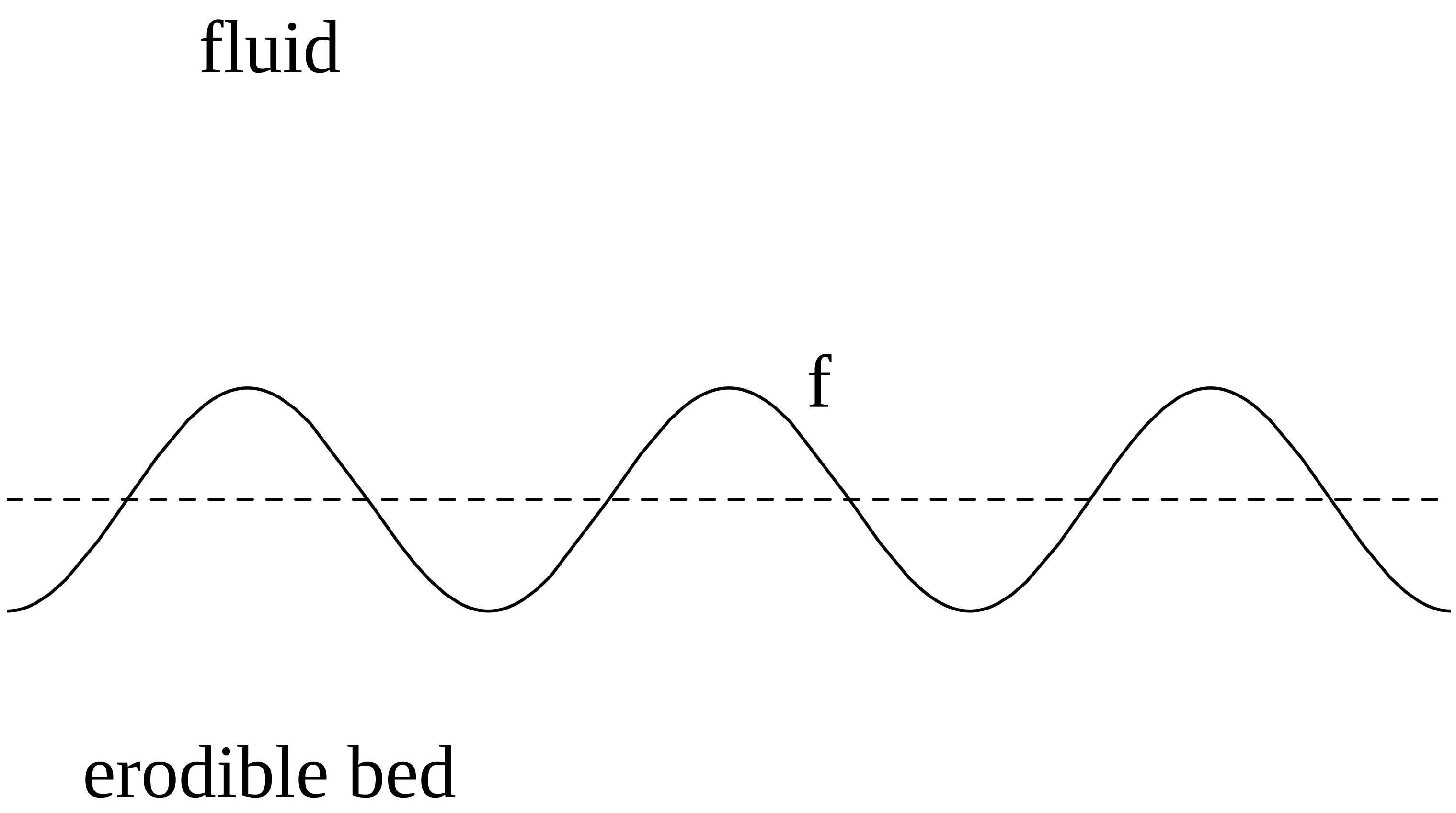


Figure 6: Amplification factor function of wave number. Averaged oscillating case, $\tilde{l}_K = 1$ case (6and 28).

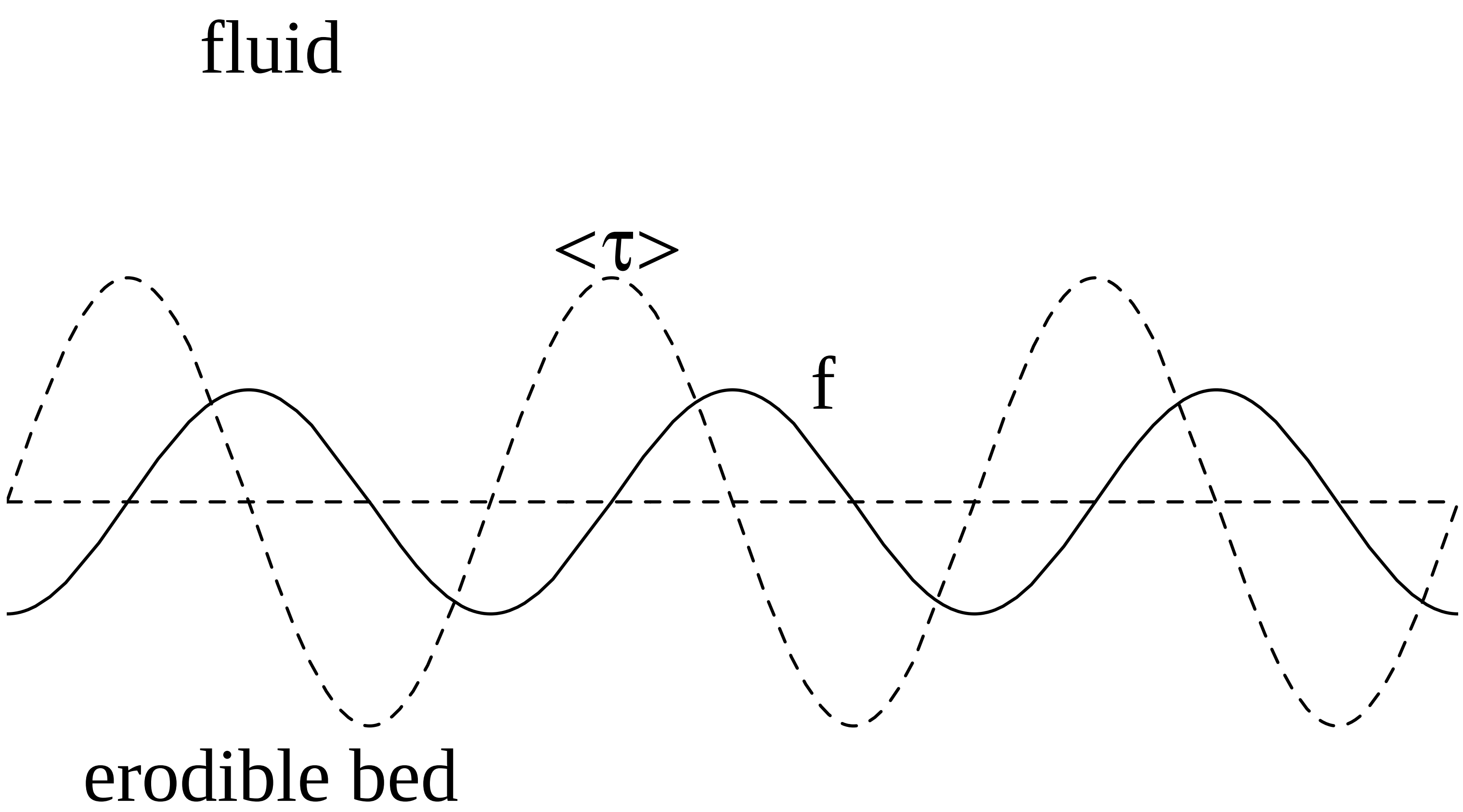
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



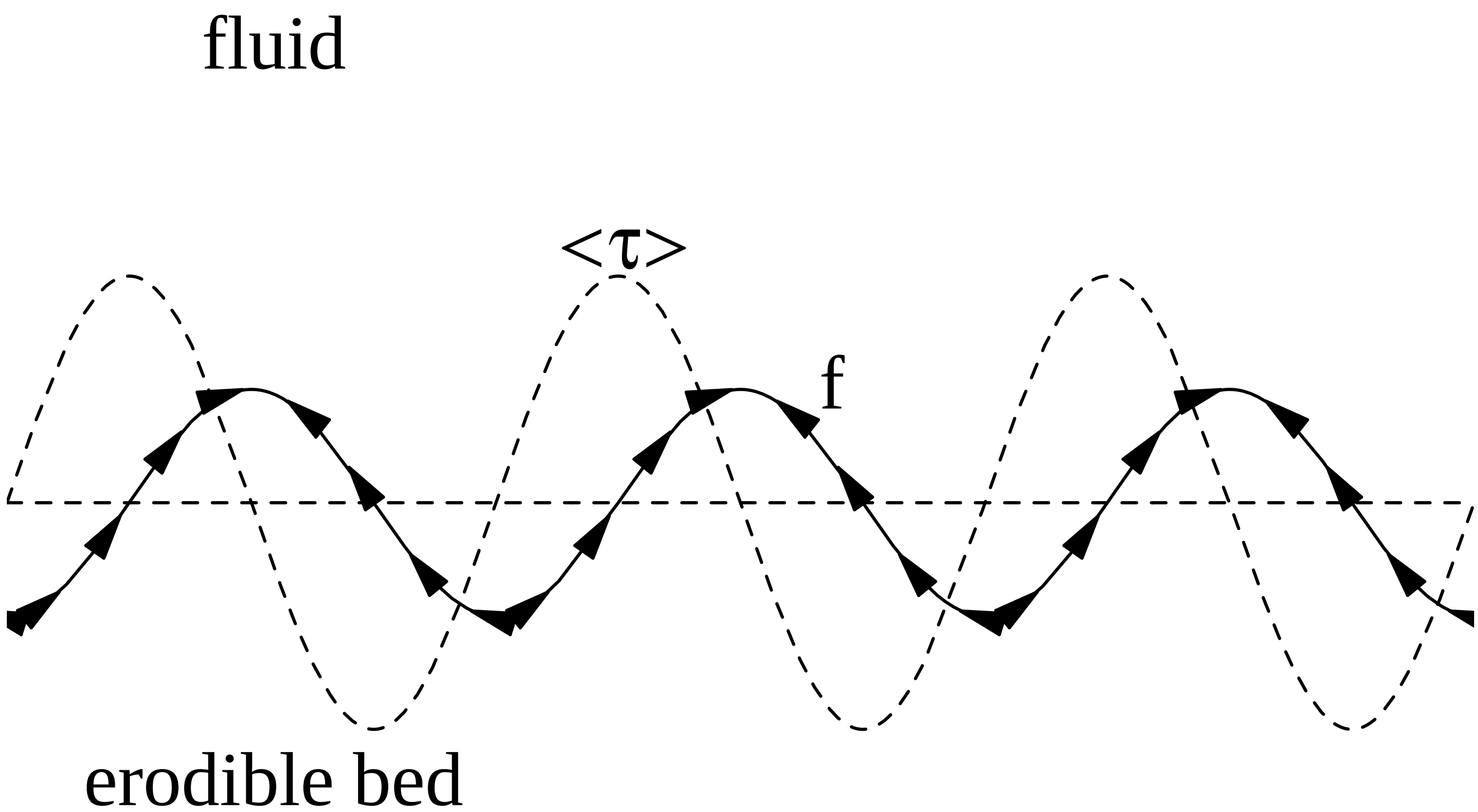
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



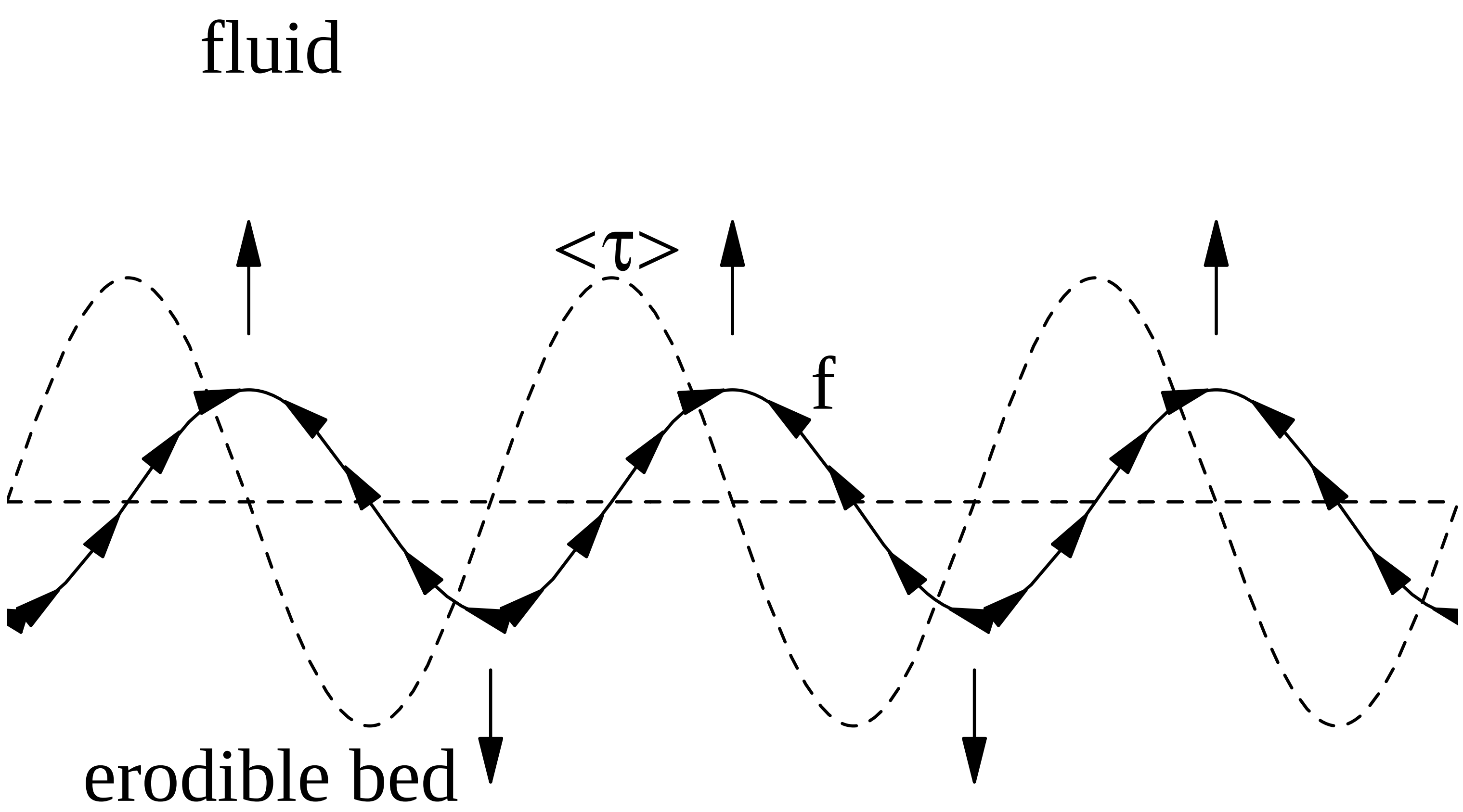
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



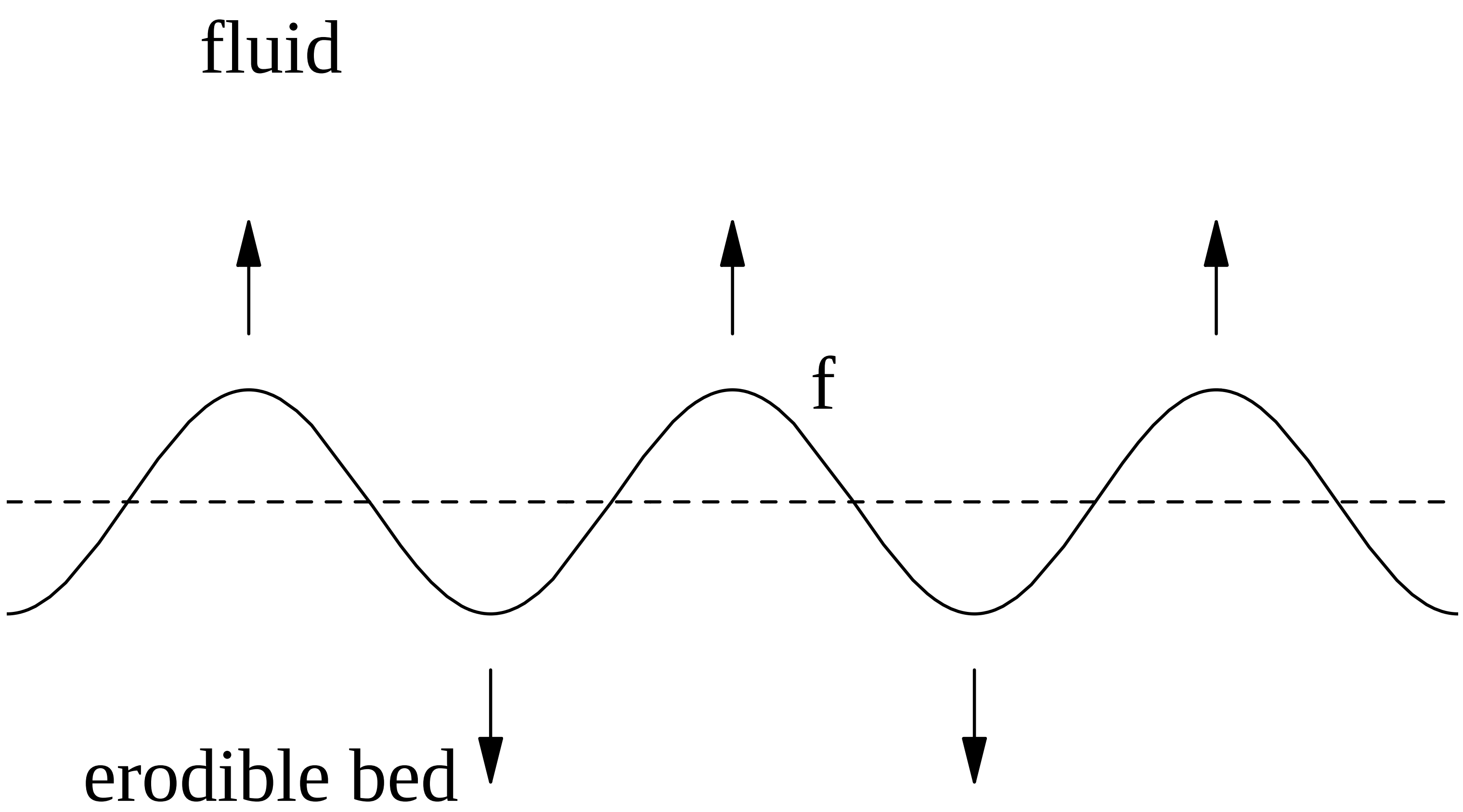
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



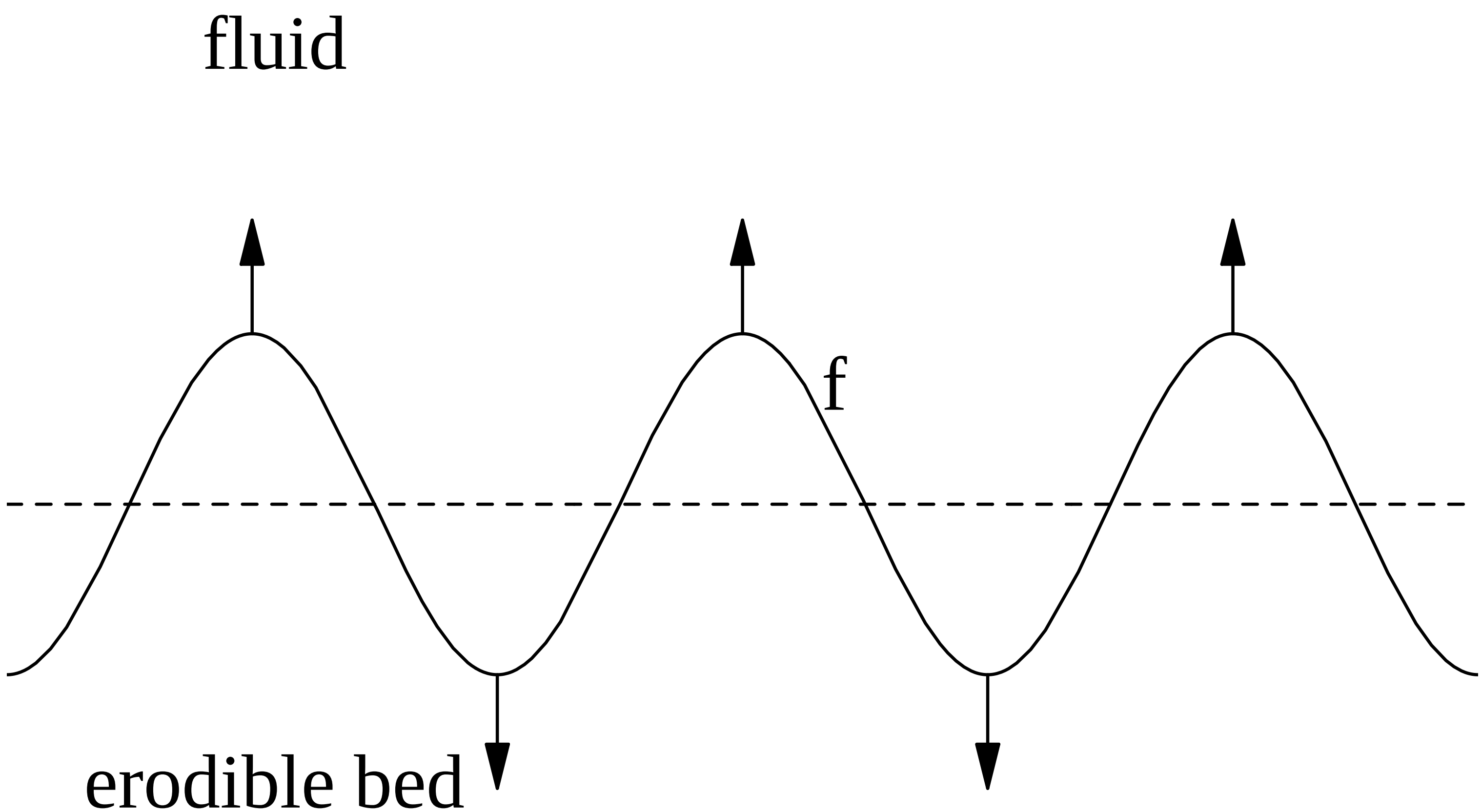
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



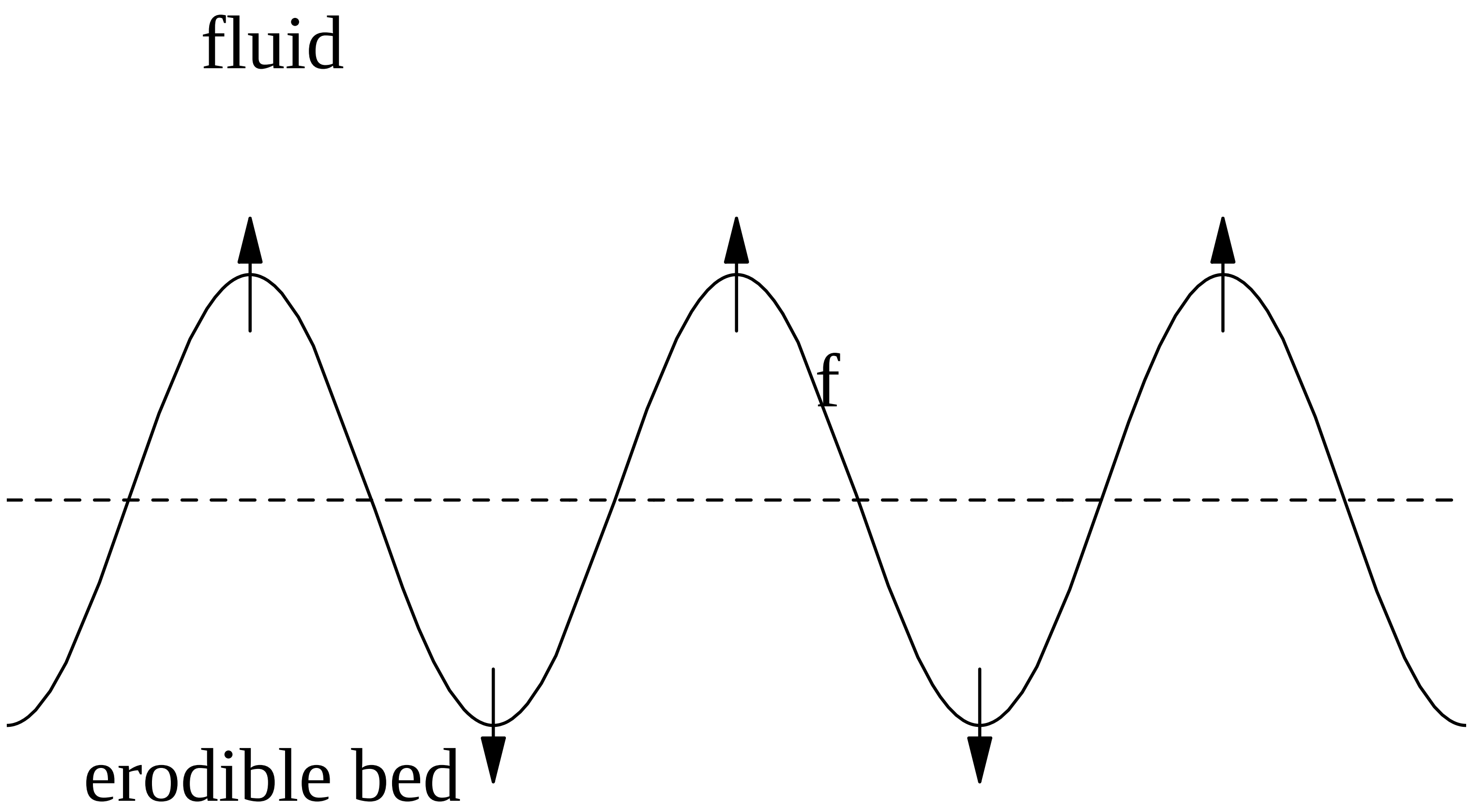
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



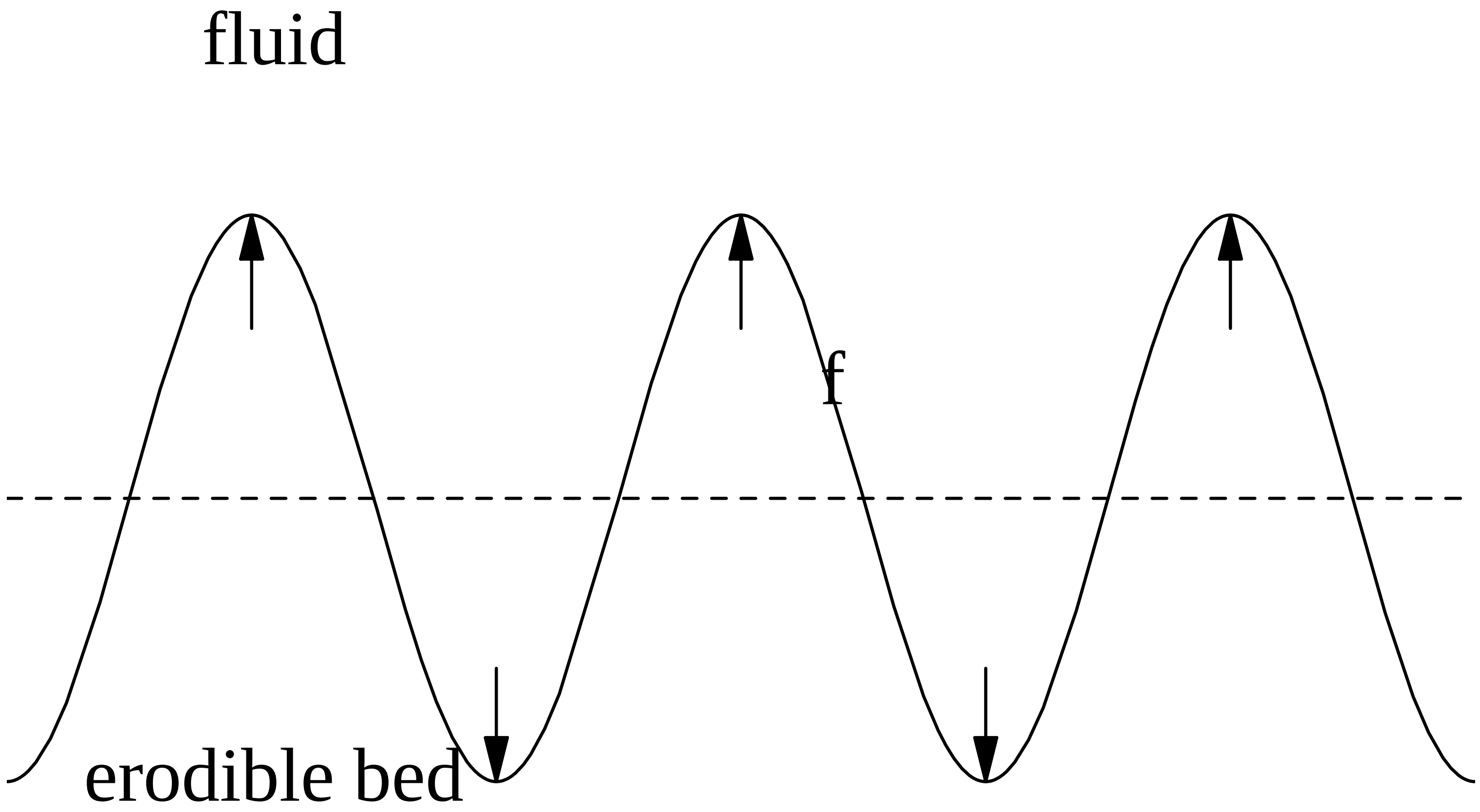
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



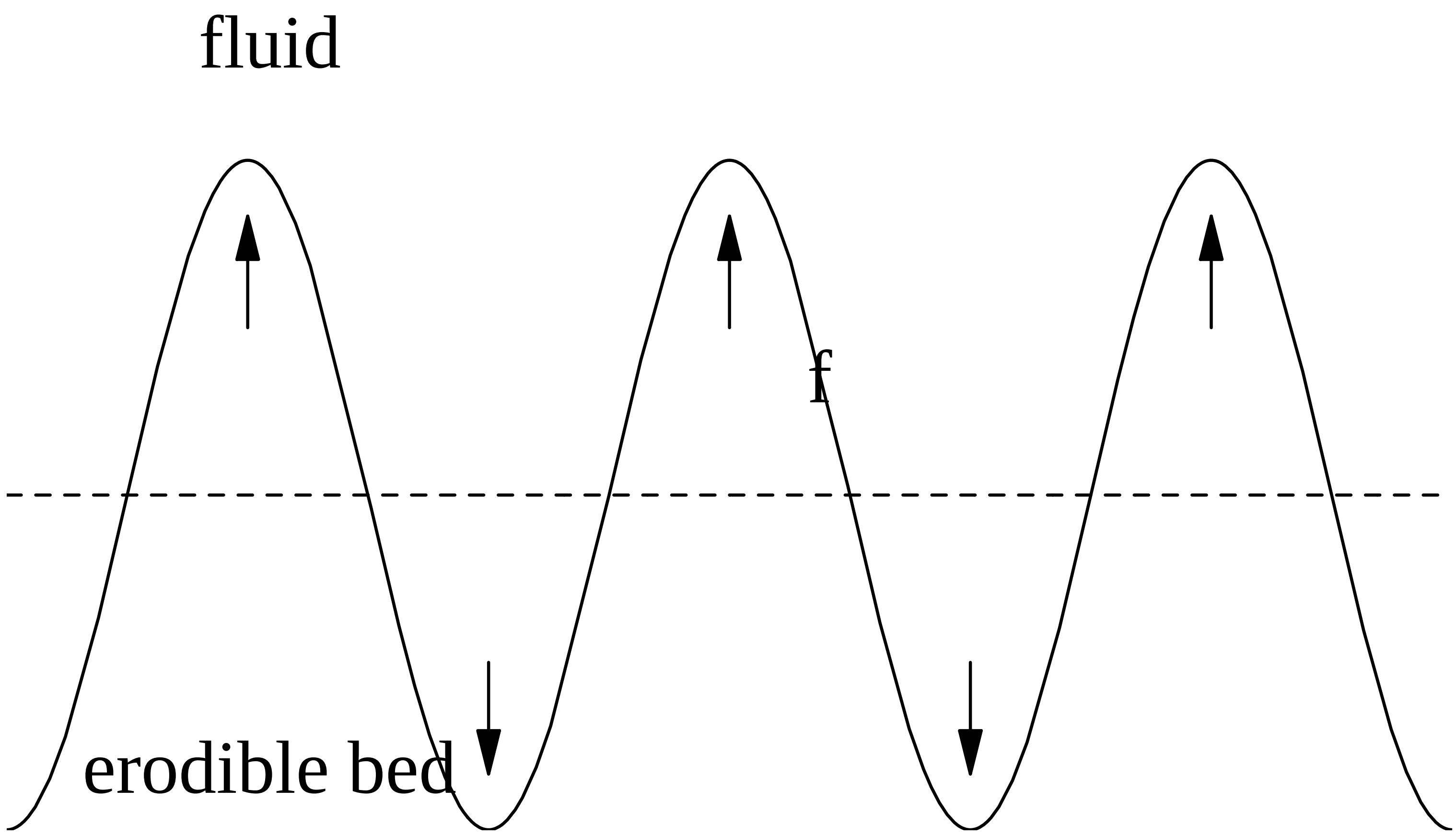
Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



Interprétation

Ecoulement oscillant $U_0' = cos(\bar{t})$



Sol complètement érodable

exemple de calculs :
animation (cuve circulaire).

"coarsening"

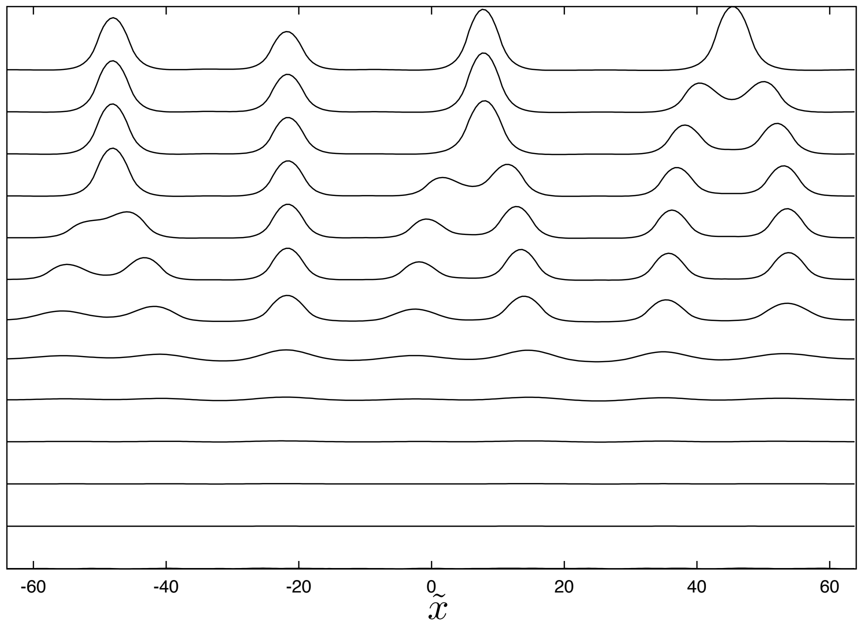


Figure 13: Oscillating régime with (22), spatio temporal diagram, time increases from bottom to top. Ripples growth from a random noise and merge two by two.

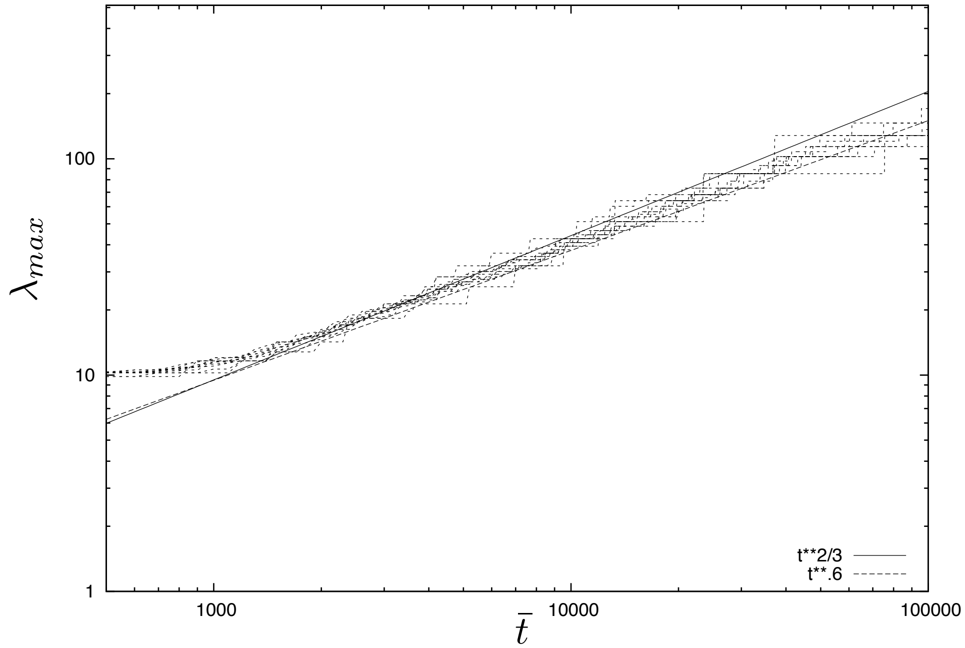


Figure 15: Oscillating shear, the wave length of the structure scales with a power law between $\bar{t}^{0.6}$ and $\bar{t}^{2/3}$.

$q \simeq \tau$

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruelle, Frette, and Rehberg (2002) :
La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3\,10^{-3} s^{-1}$

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruelle, Frette, and Rehberg (2002) :
La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3\,10^{-3}s^{-1}$

$$\lambda^* \simeq 15cm.$$

$$\sigma^* = 1.2\,10^{-3}s^{-1},$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruelle, Frette, and Rehberg (2002) :
La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3\,10^{-3}s^{-1}$

$$\lambda^* \simeq 15cm.$$

$$\sigma^* = 1.2\,10^{-3}s^{-1},$$

C'est l'ordre de grandeur correct.
σ^* augmente avec le cisaillement, observé

Quelques vérifications expérimentales grossières

Betat, Kruelle, Frette, and Rehberg (2002) :
La longueur d'onde la plus instable est environ $9cm$, $\sigma^* = 3\,10^{-3}s^{-1}$

$$\lambda^* \simeq 15cm.$$

$$\sigma^* = 1.2\,10^{-3}s^{-1},$$

C'est l'ordre de grandeur correct.
σ^* augmente avec le cisaillement, observé
λ^* augmente avec ${U_0'}^{-1}$, pas observé

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)

$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm$.

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)
$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm$.

$$\lambda^{*} \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)
$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm$.

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.
La formule prédit $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, et $\lambda^* \propto \nu^{-1}$.
c'est dans le bon sens

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)
$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm$.

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.
La formule prédit $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, et $\lambda^* \propto \nu^{-1}$.
c'est dans le bon sens

Rousseau et coll. ont fitté : $\lambda_{max} \propto Log(t)$ (Cahn-Hillard)

Quelques vérifications expérimentales grossières

Cas Oscillant Rousseaux Stegner Wesfreid (2004)
$\lambda_{initial} \simeq 0.5cm$.

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

C'est l'ordre de grandeur correct.
La formule prédit $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, et $\lambda^* \propto \nu^{-1}$.
c'est dans le bon sens

Rousseau et coll. ont fitté : $\lambda_{max} \propto Log(t)$ (Cahn-Hillard)

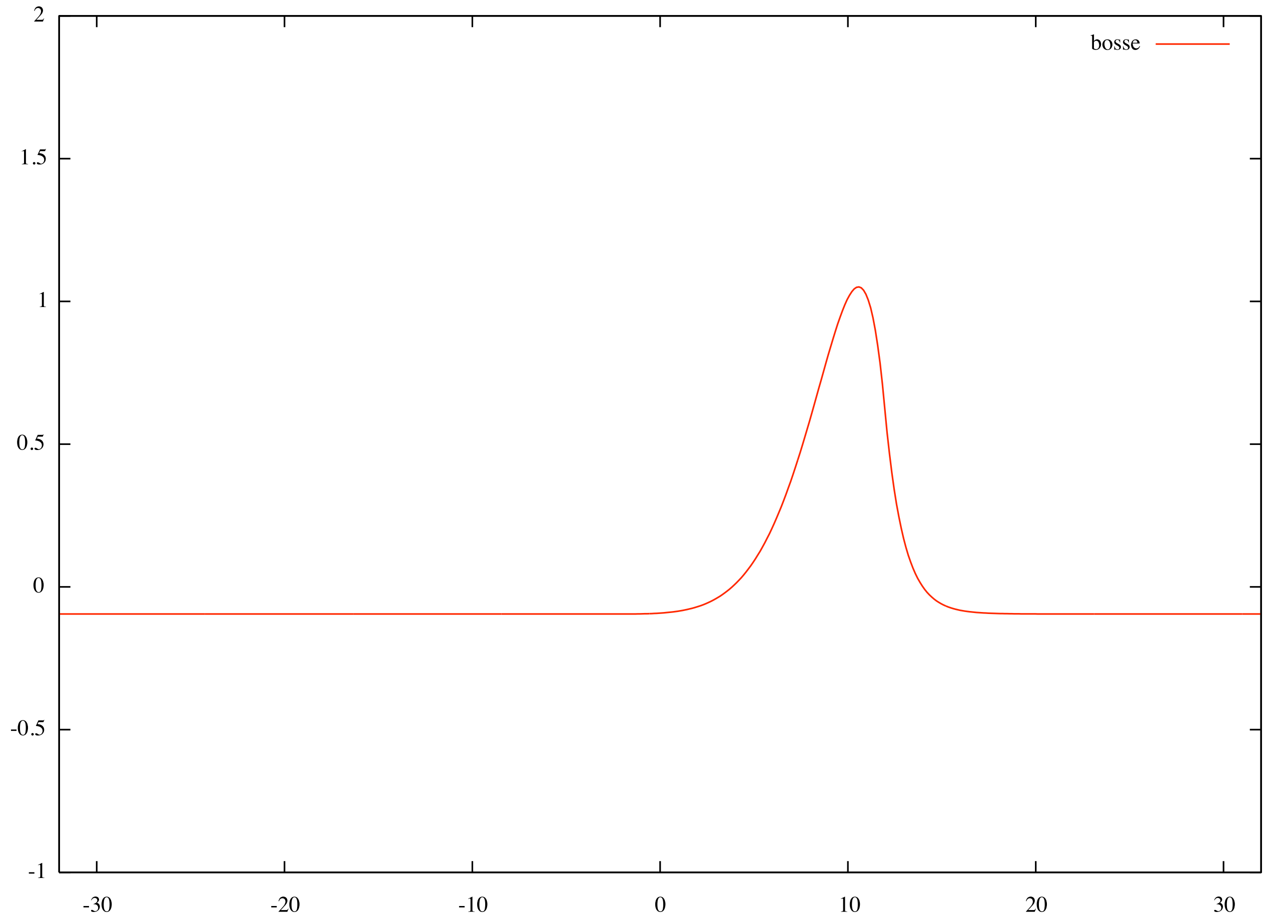
$$\lambda_{max} \propto t^{2/3}$$

Bosse finale : une pseudo ”dune”

(Kouakou & Lagrée 06) Processus de murissement
Il y a de moins en moins de bosses dans la boîte de calcul
Application au cas du cisaillement constant

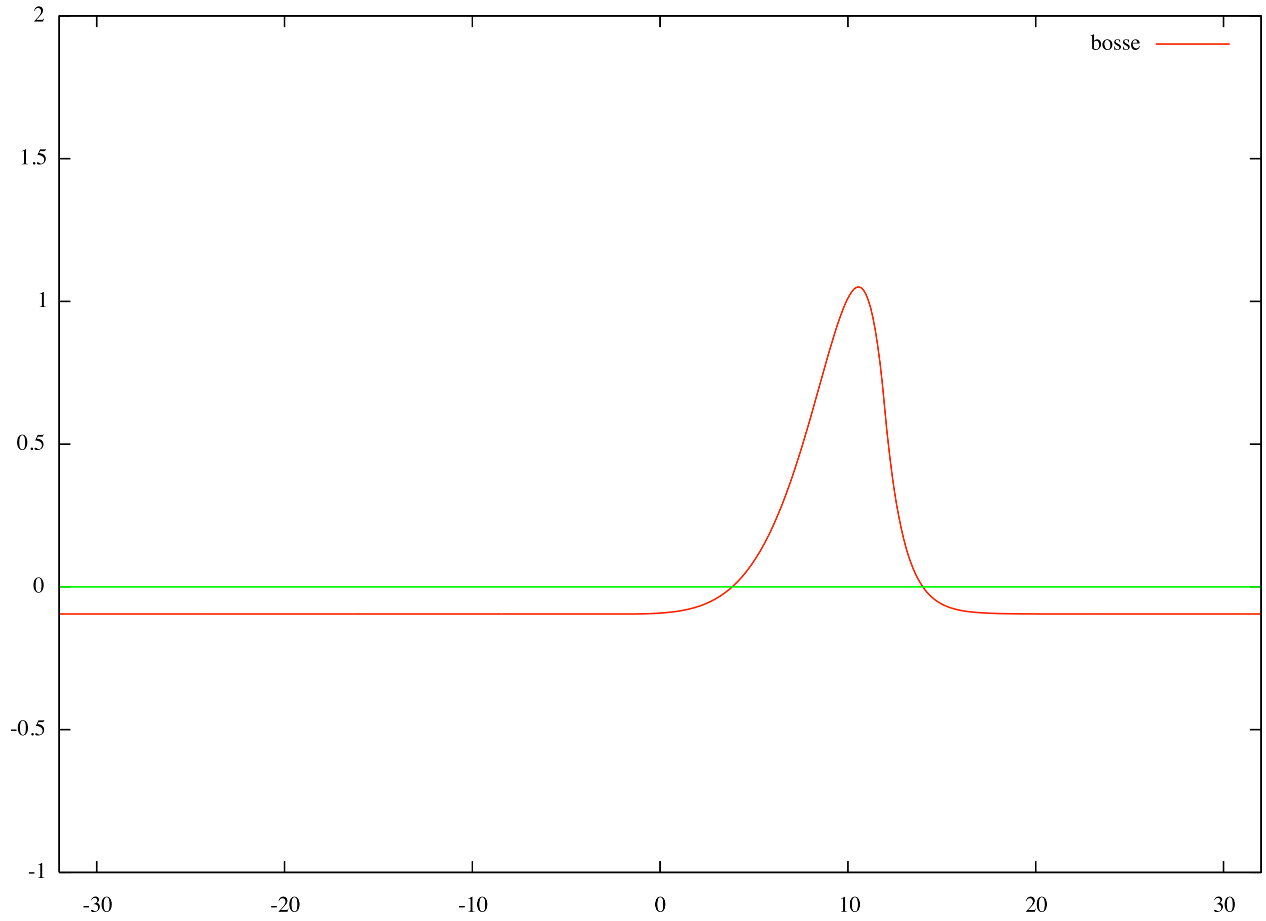
Bosse finale : une pseudo "dune"

En fin de murissement, il ne reste qu'une bosse qui ocupe toute la boîte.



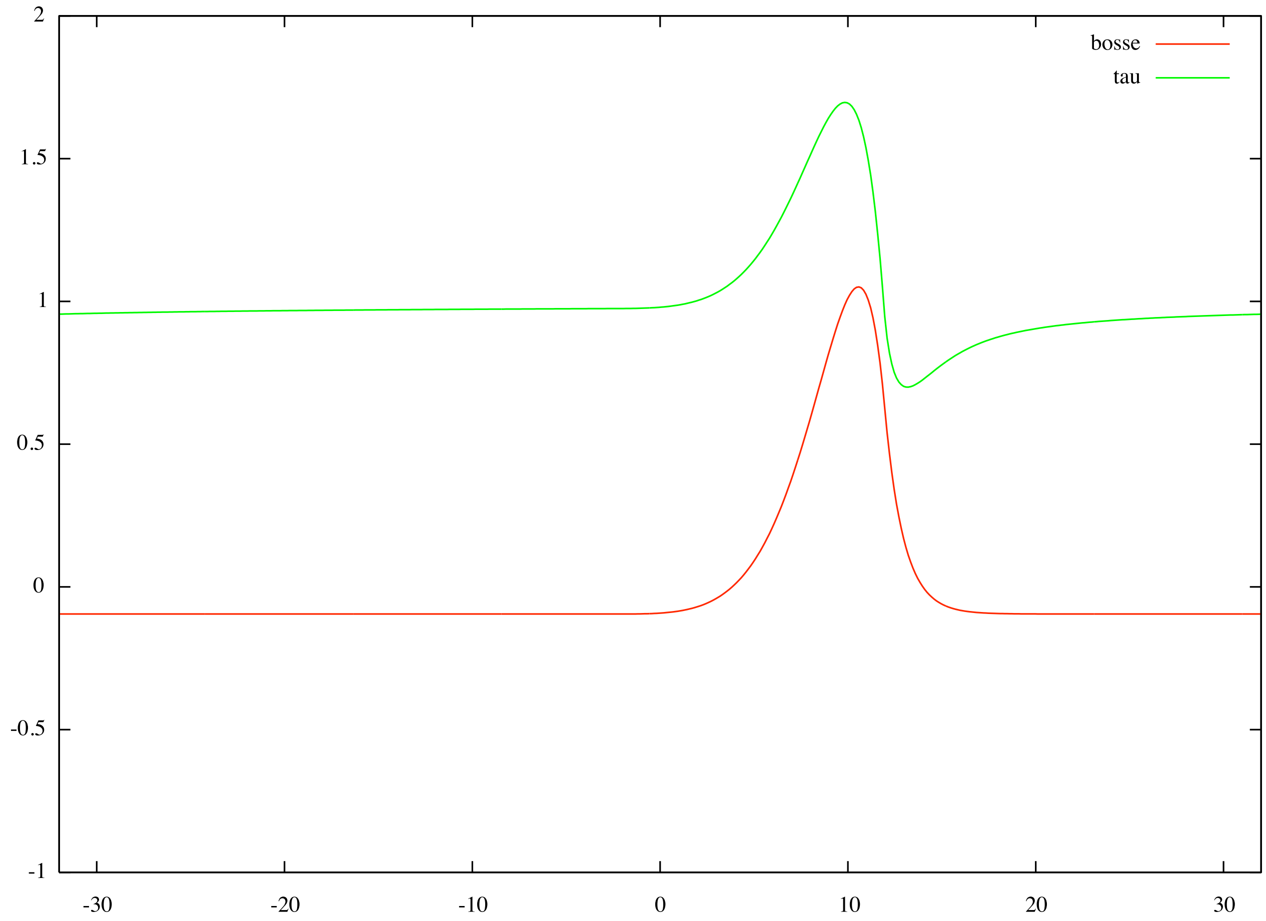
Bosse finale : une pseudo ”dune”

En fin de murissement, il ne reste qu’une bosse qui ocupe toute la boîte.



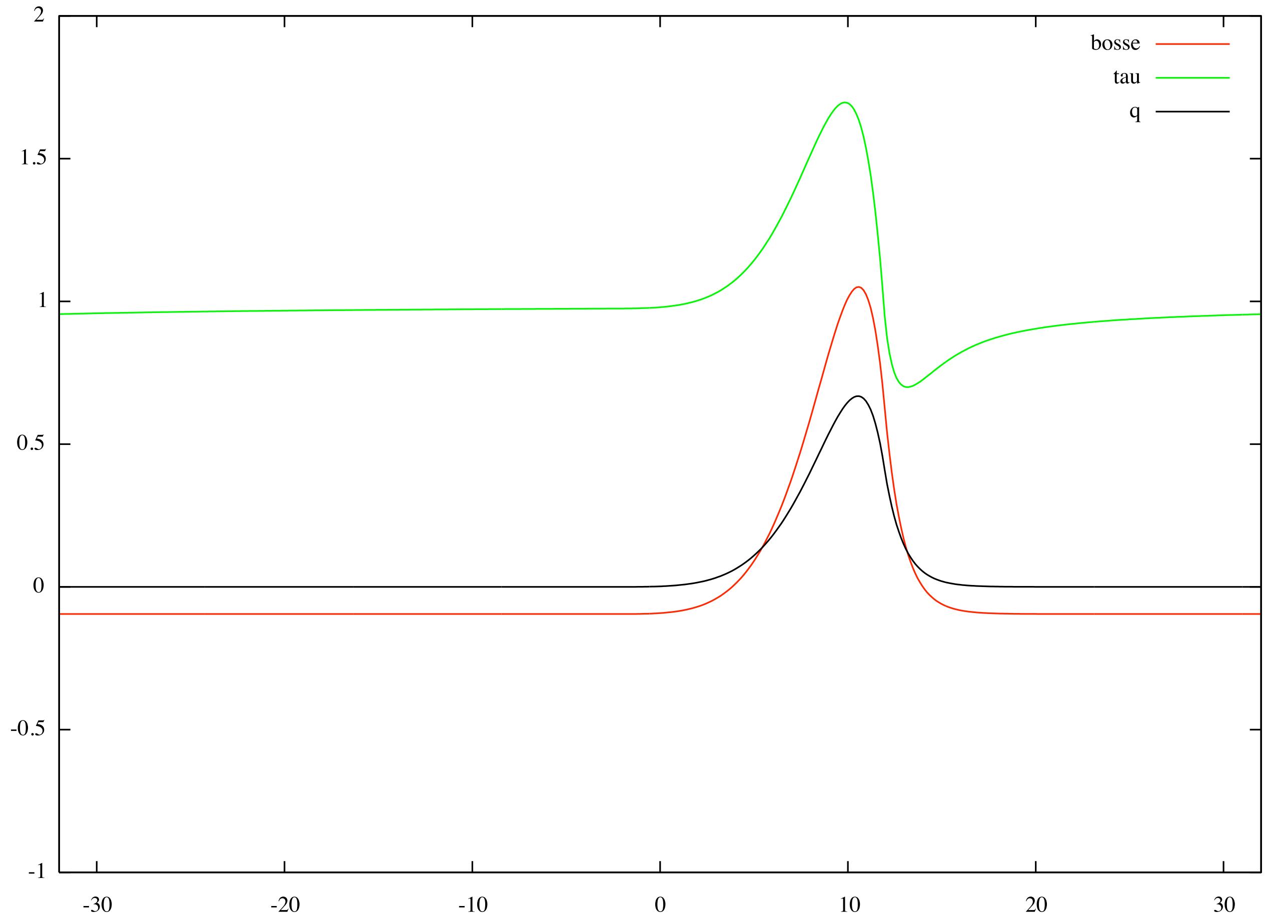
Bosse finale : une pseudo ”dune”

En fin de murissement, il ne reste qu’une bosse qui ocupe toute la boîte.



Bosse finale : une pseudo "dune"

En fin de murissement, il ne reste qu'une bosse qui ocupe toute la boîte.



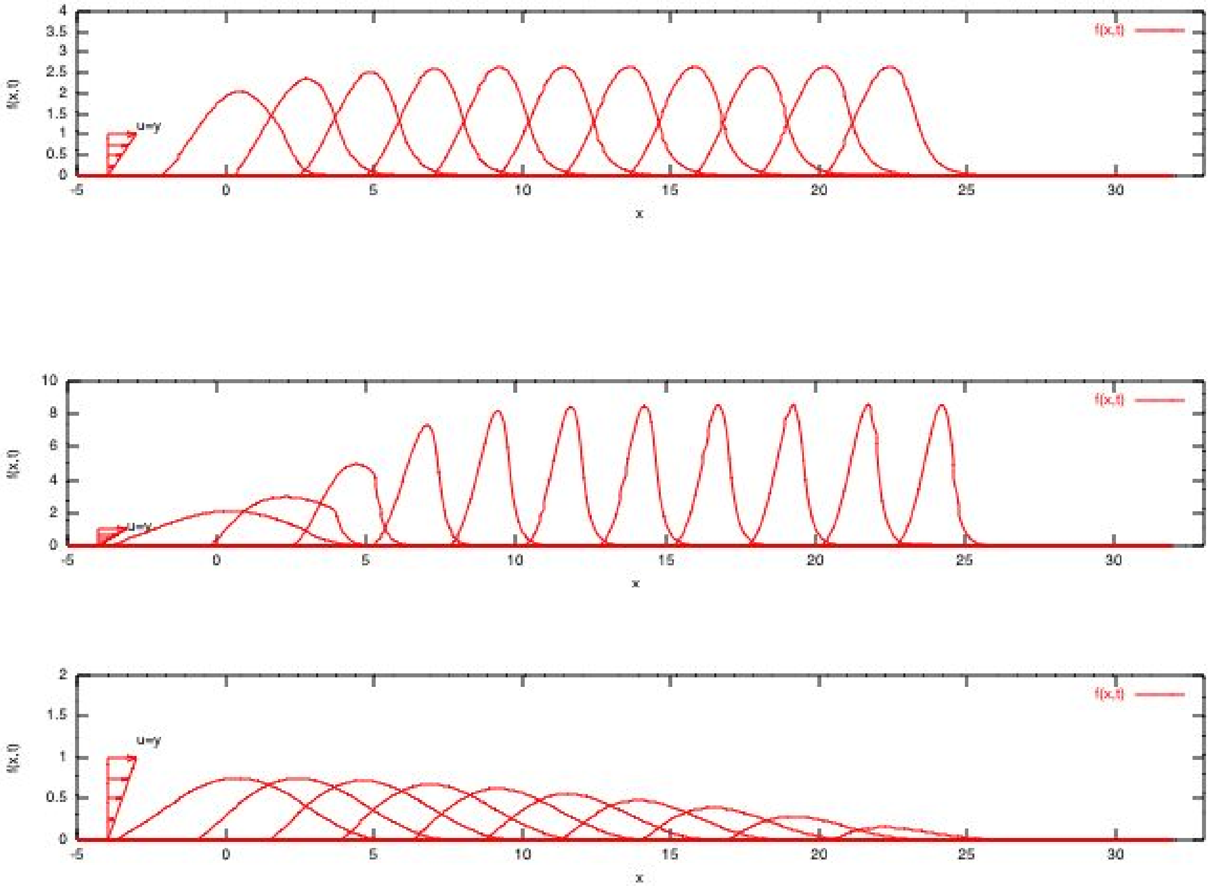
Déplacement d'une "dune" dans un écoulement cisaillé : sol rigide

Solution de

$$\tau = TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik)^{1/3}TF[f]]$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} + Vq = V\varpi(\tau - \tau_s)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

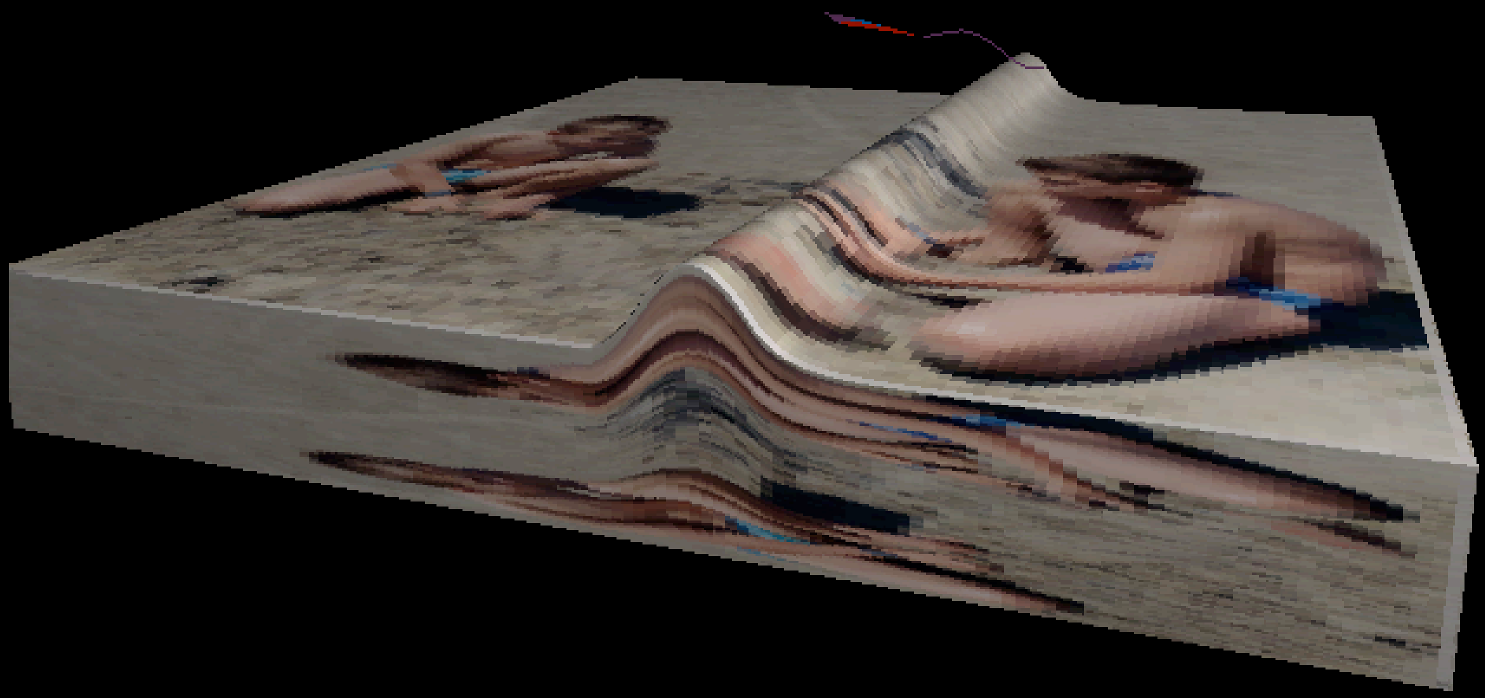
implémenter f toujours positif.

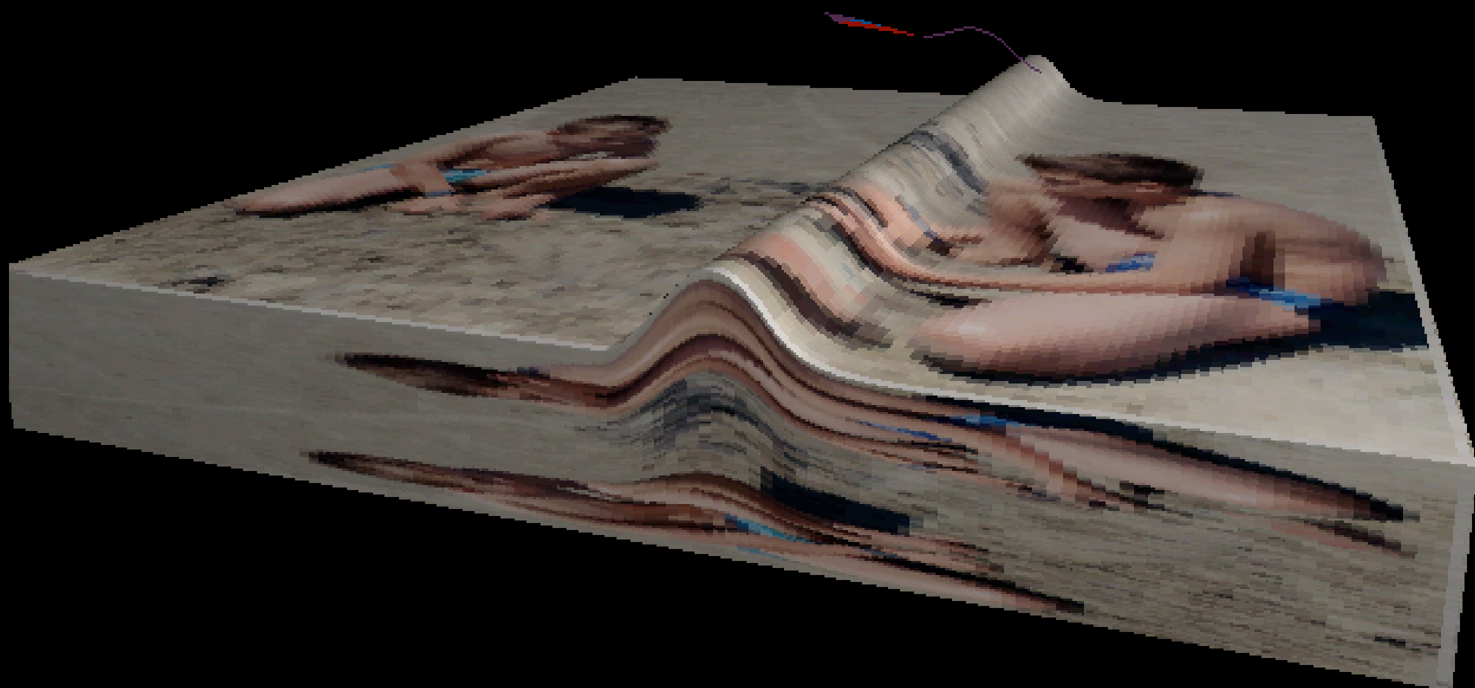
Déplacement d'une "dune" dans un écoulement cisaillé :

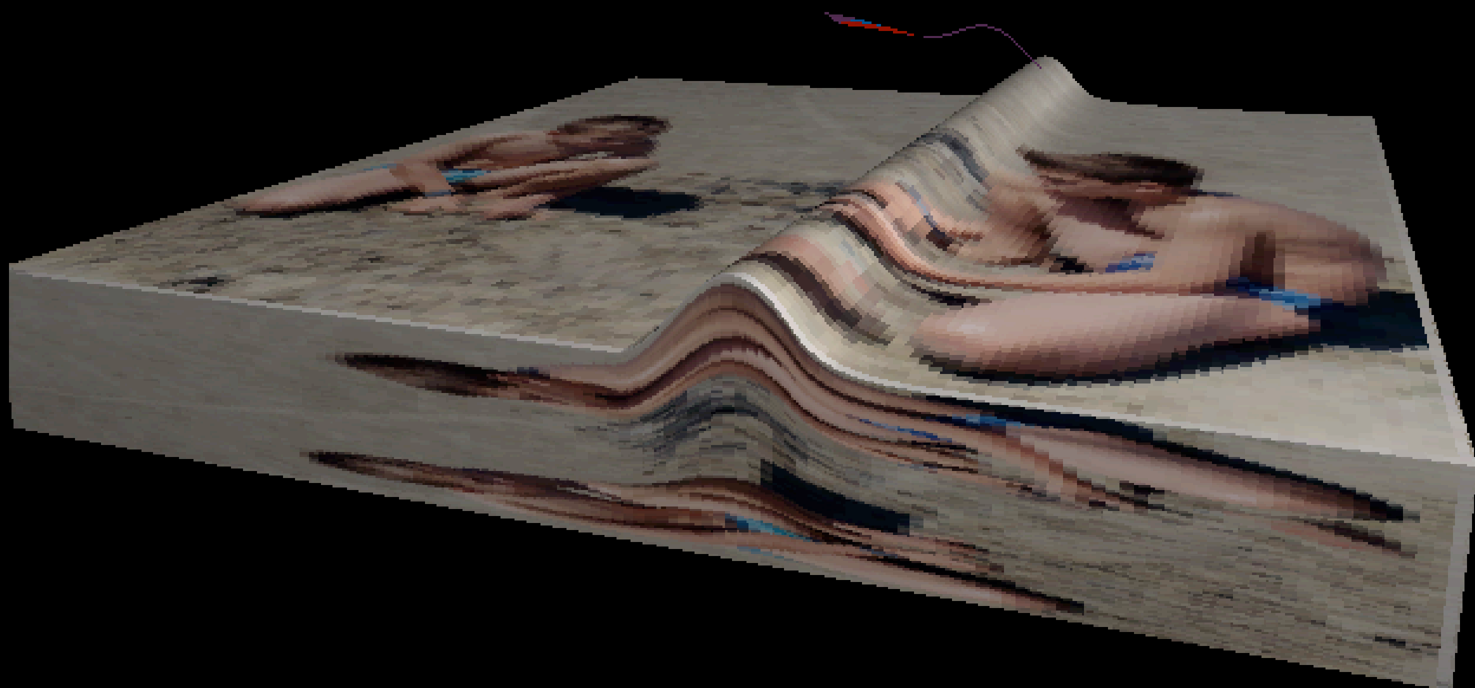


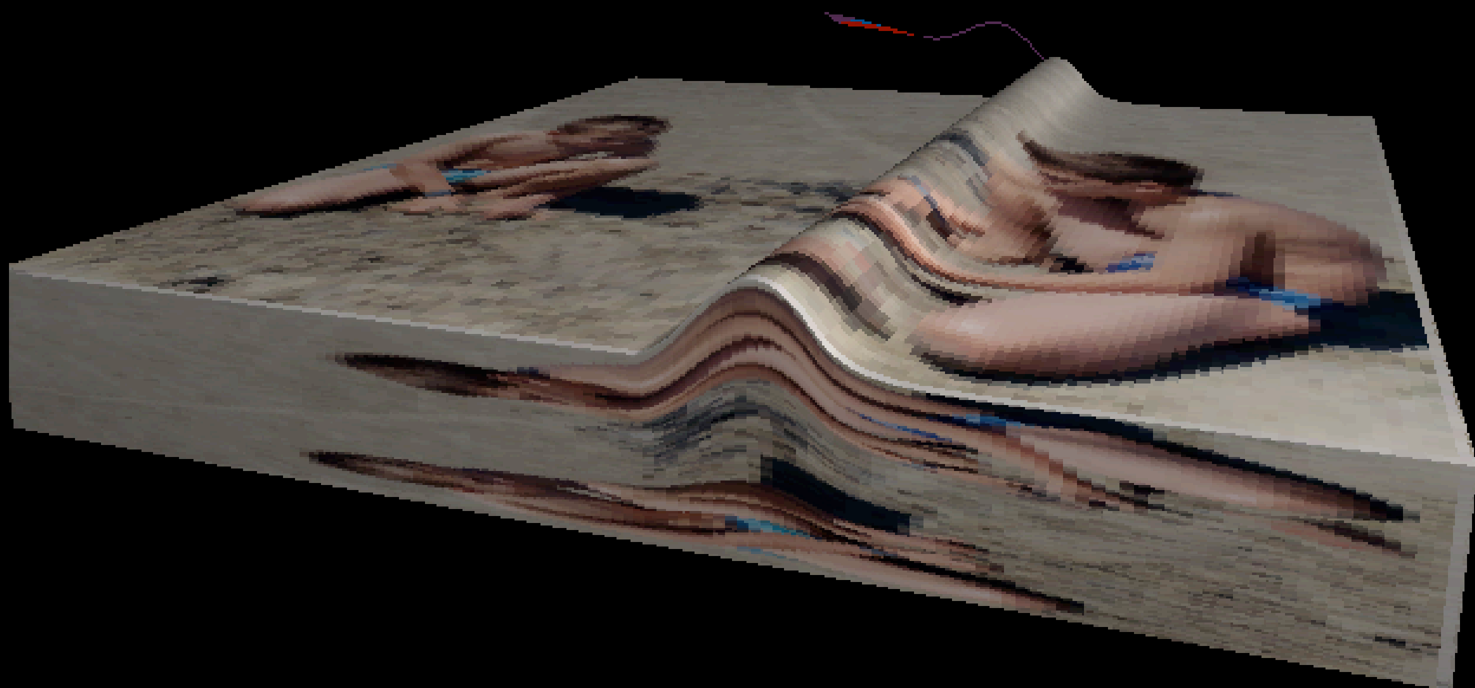
animation

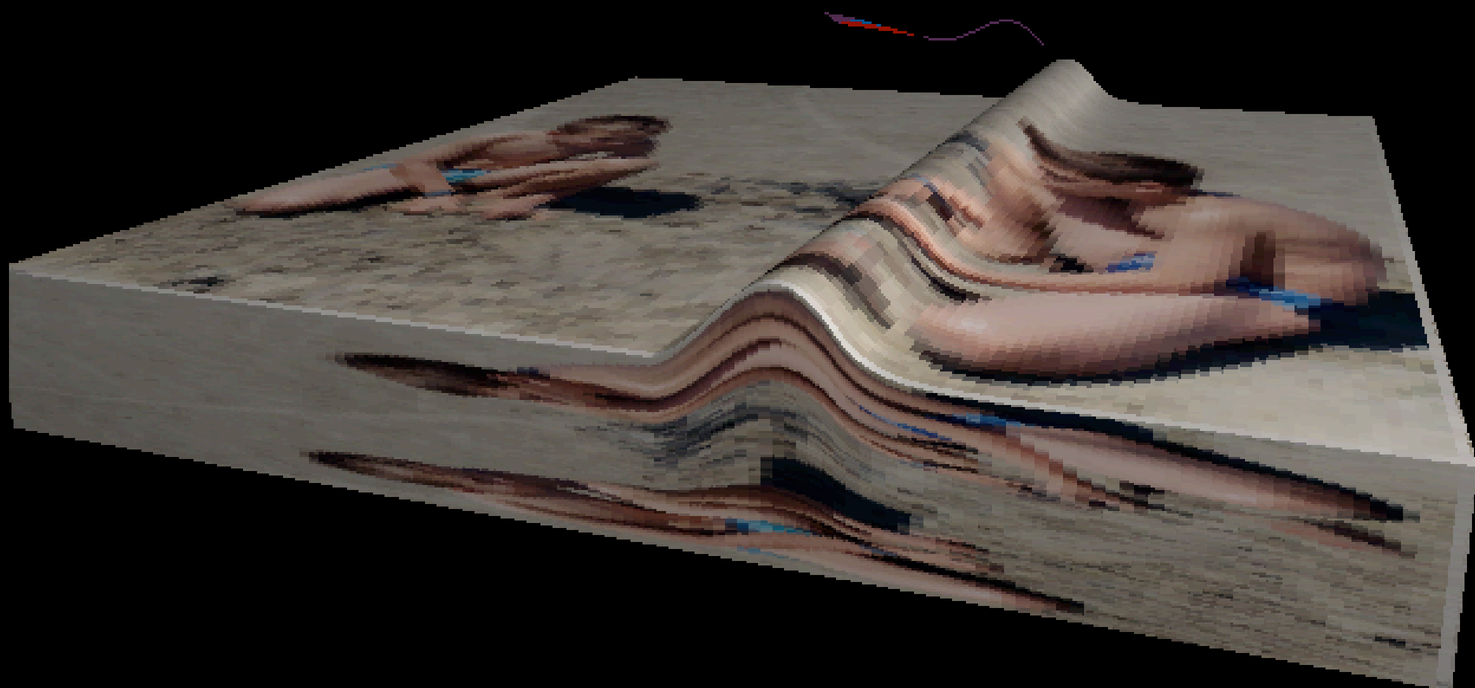
Exemple

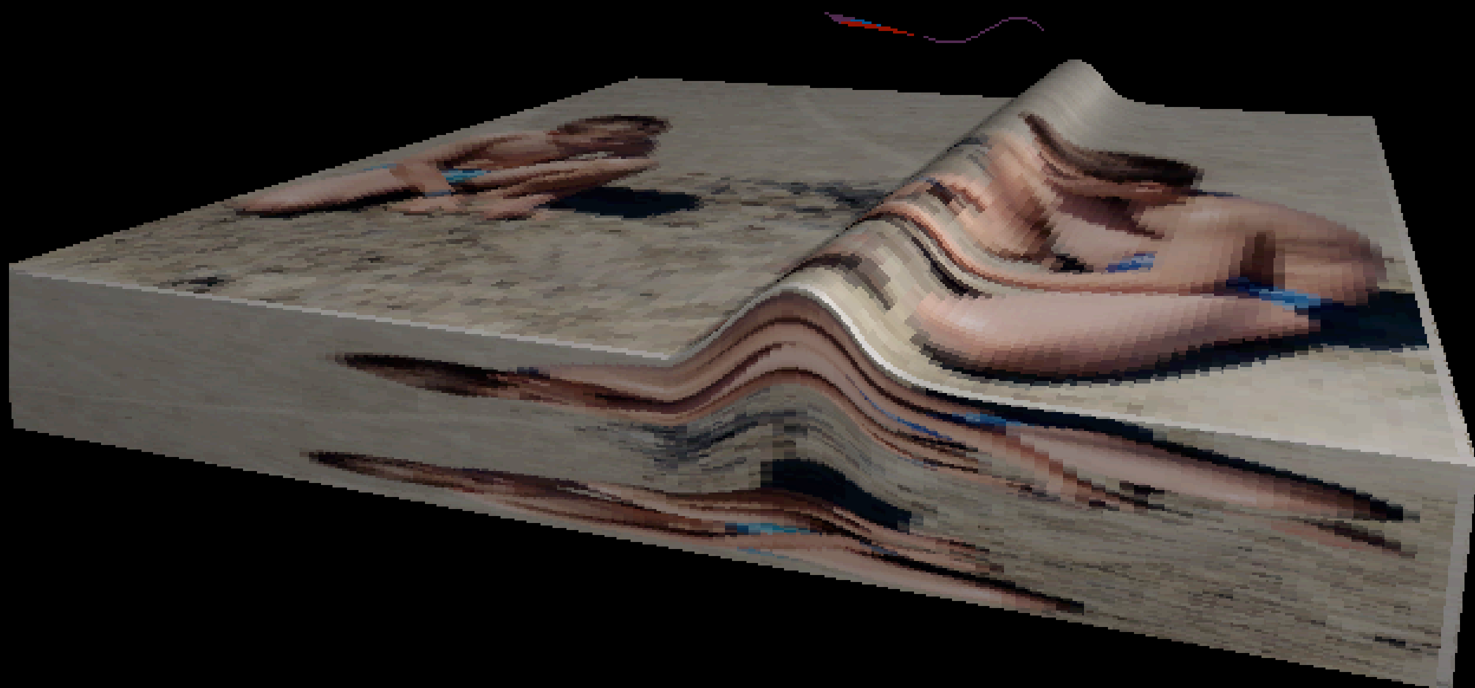


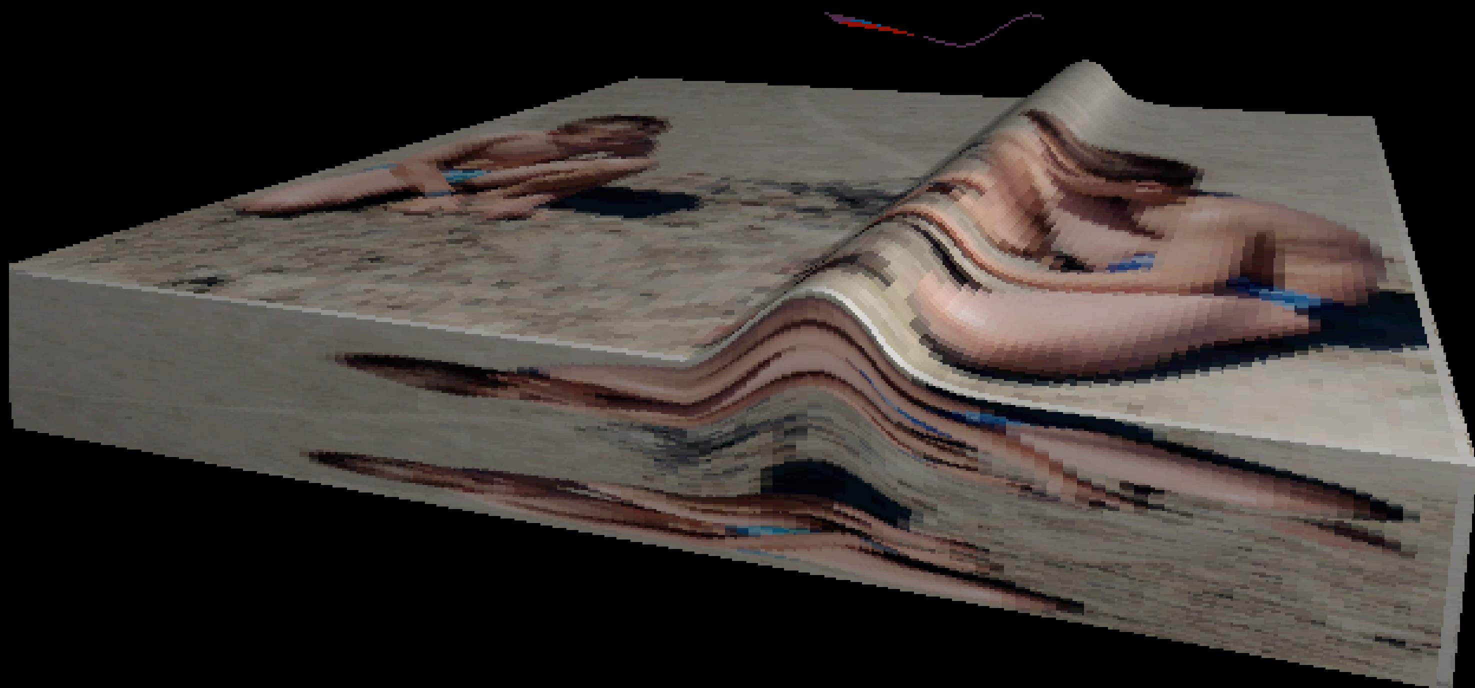


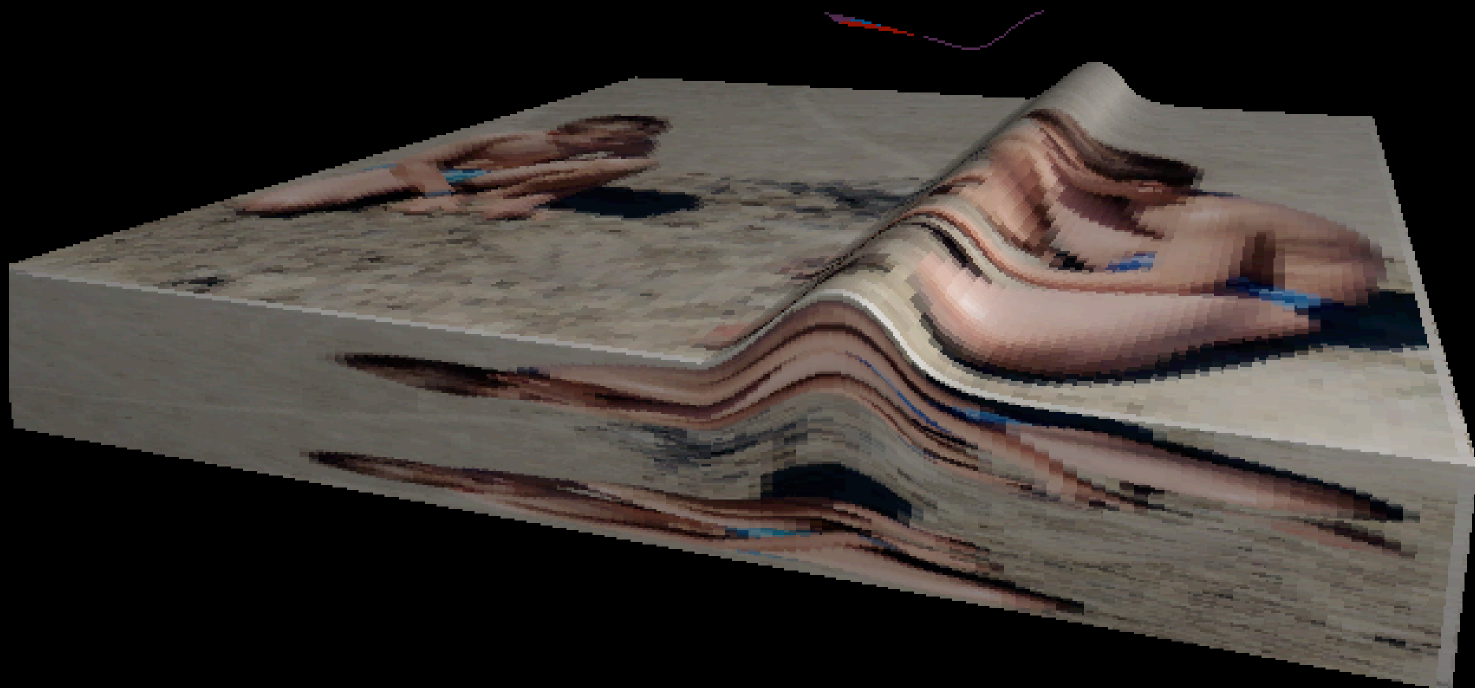


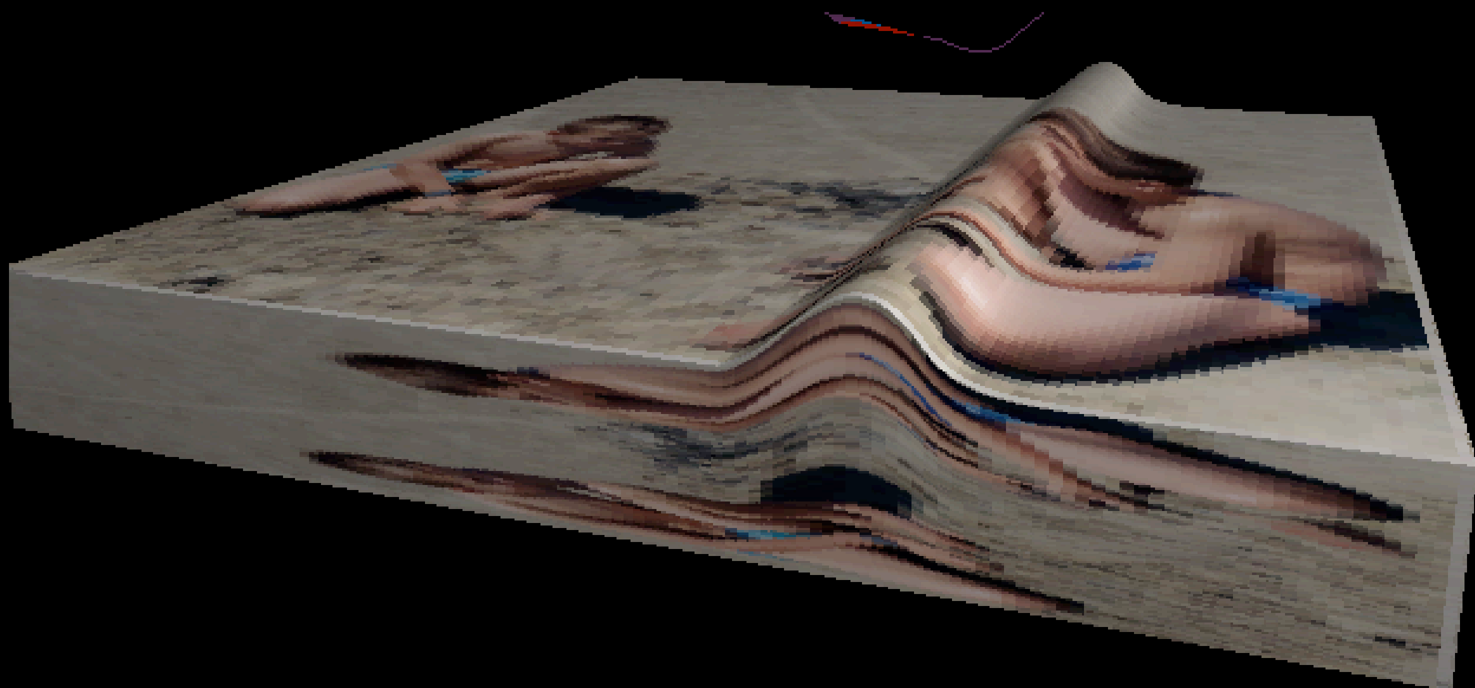


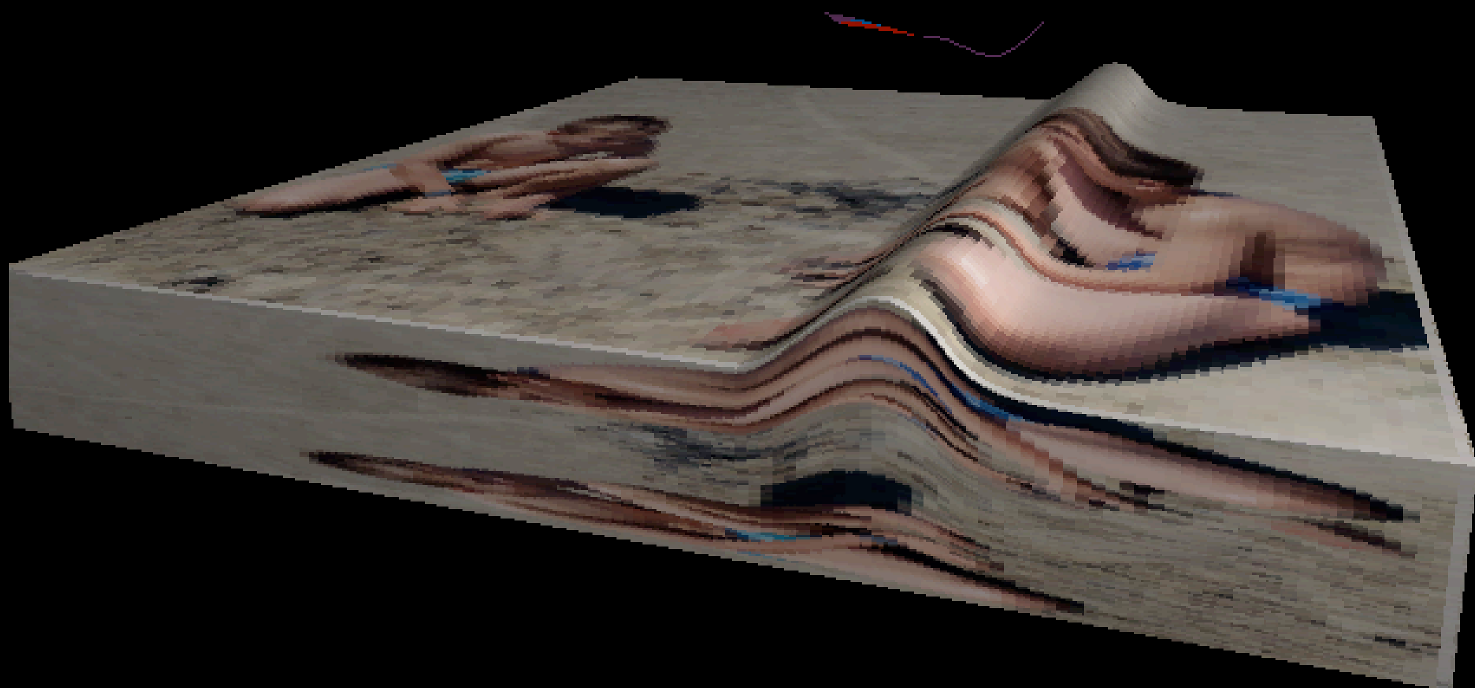


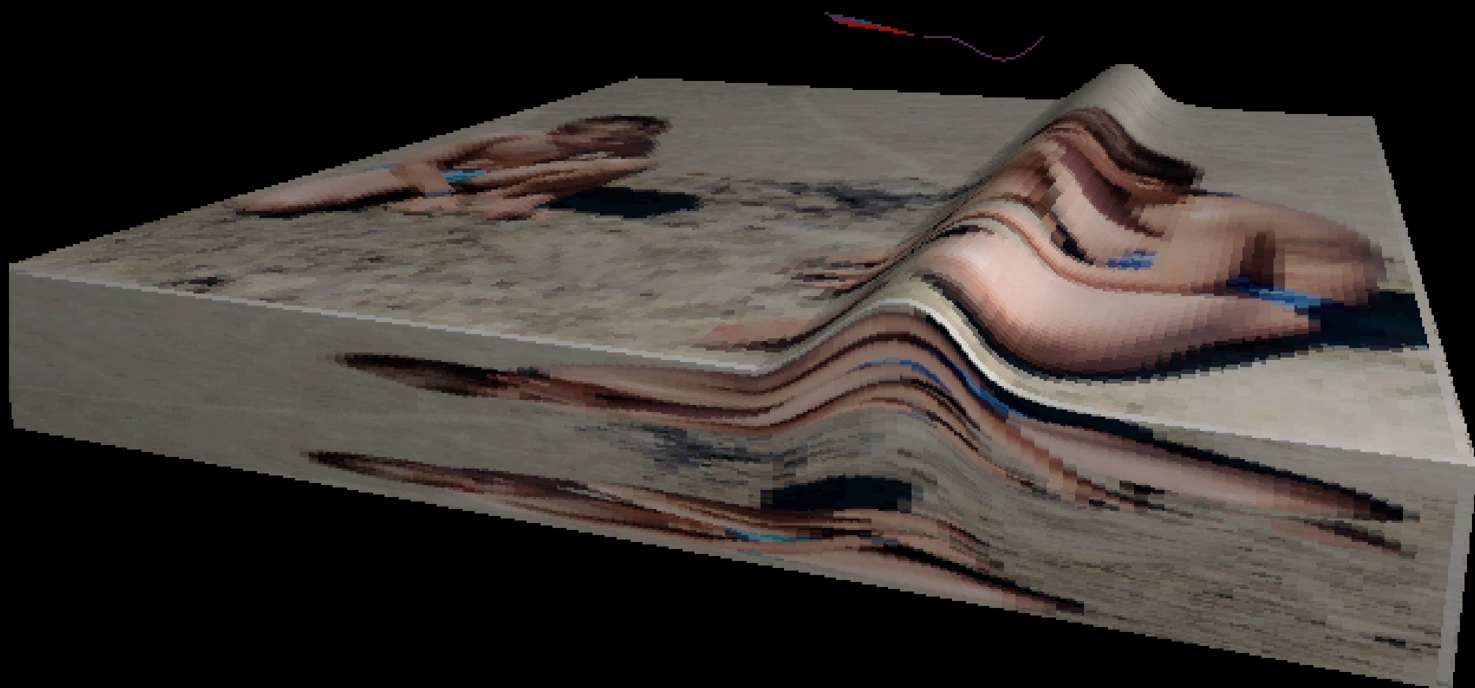


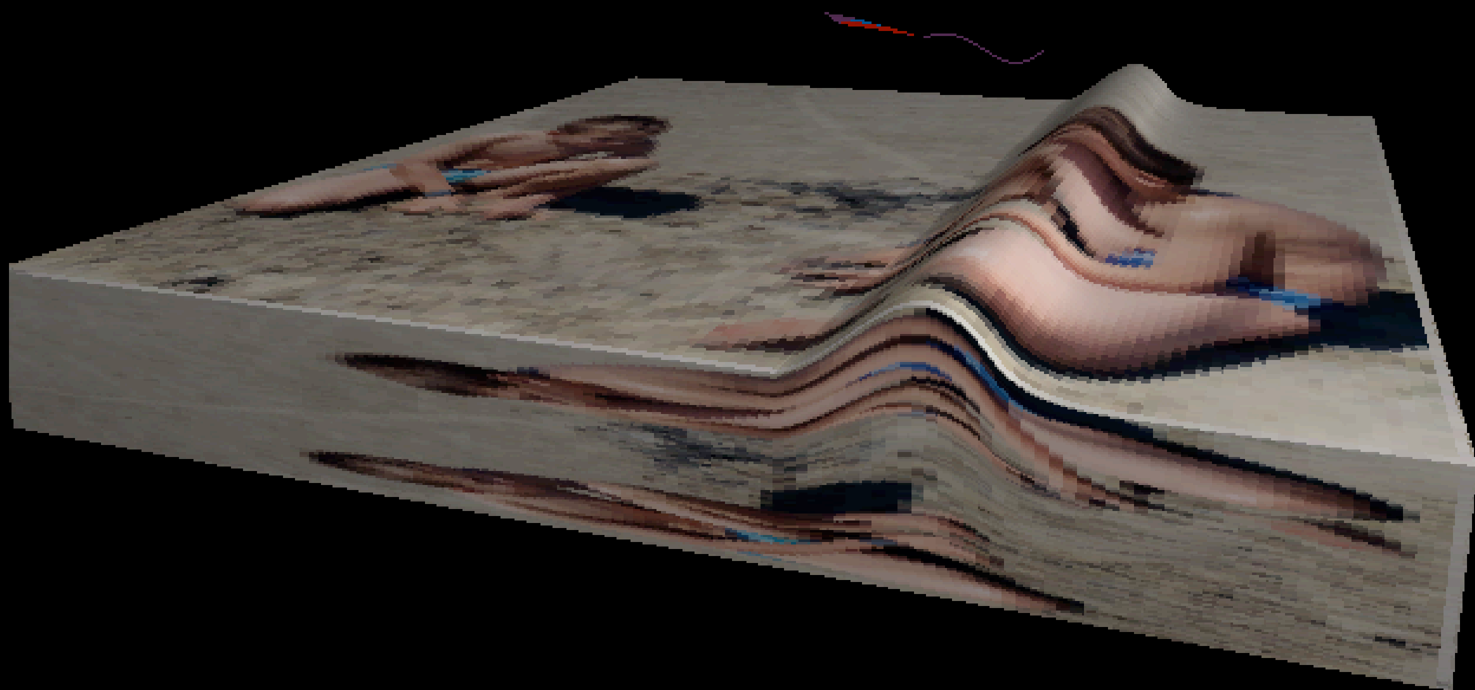


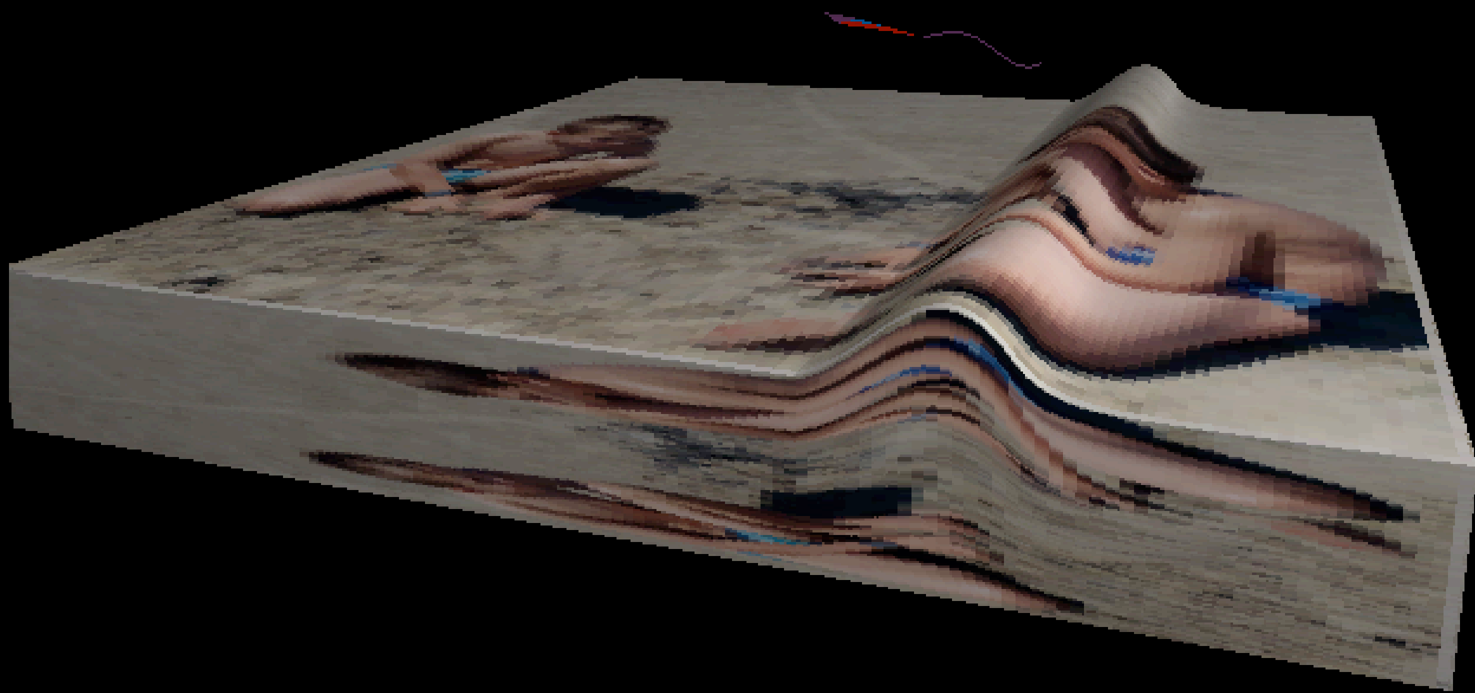


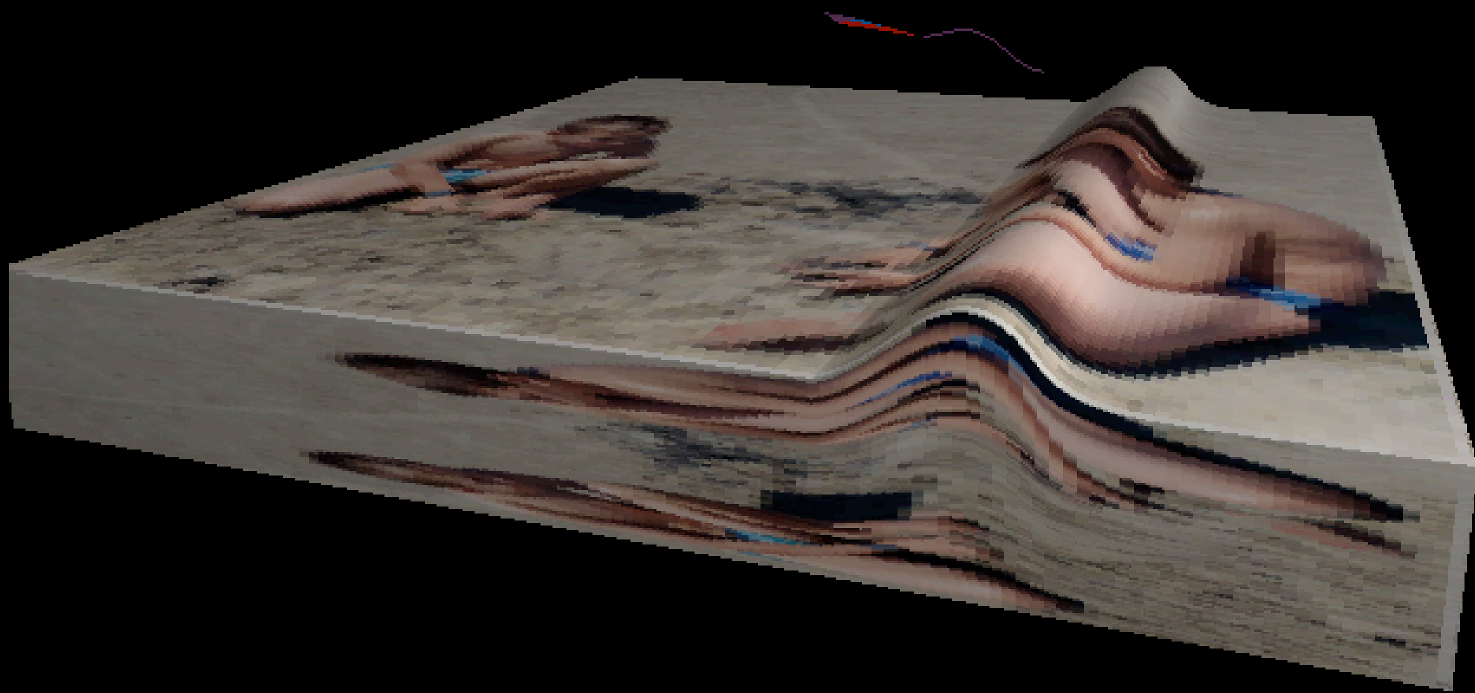


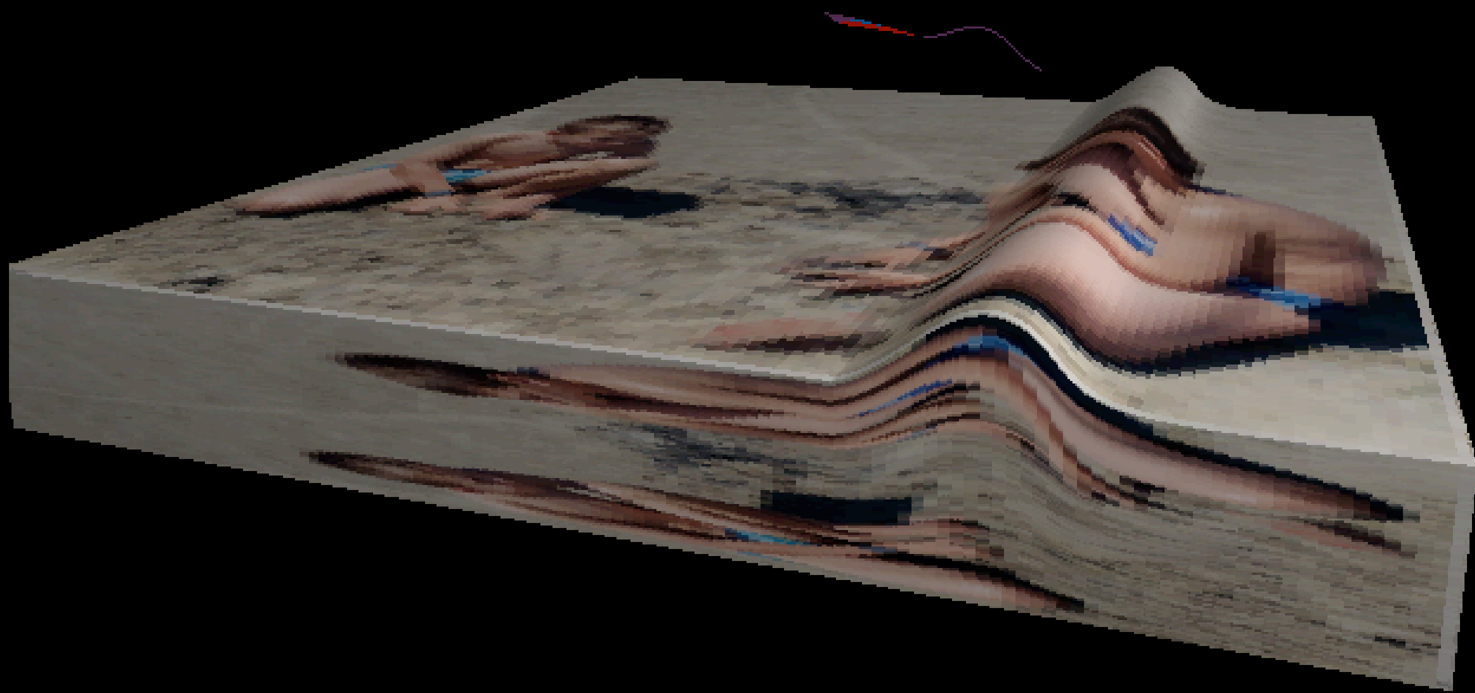


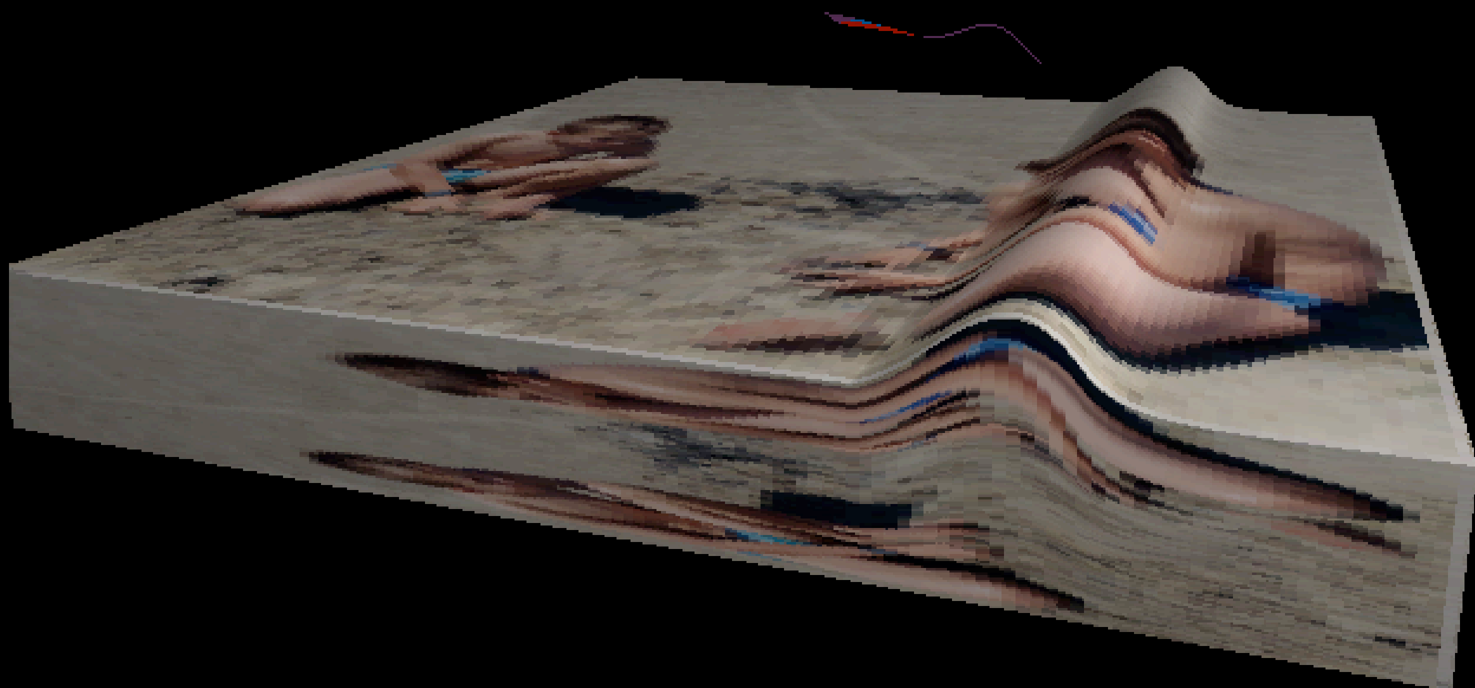


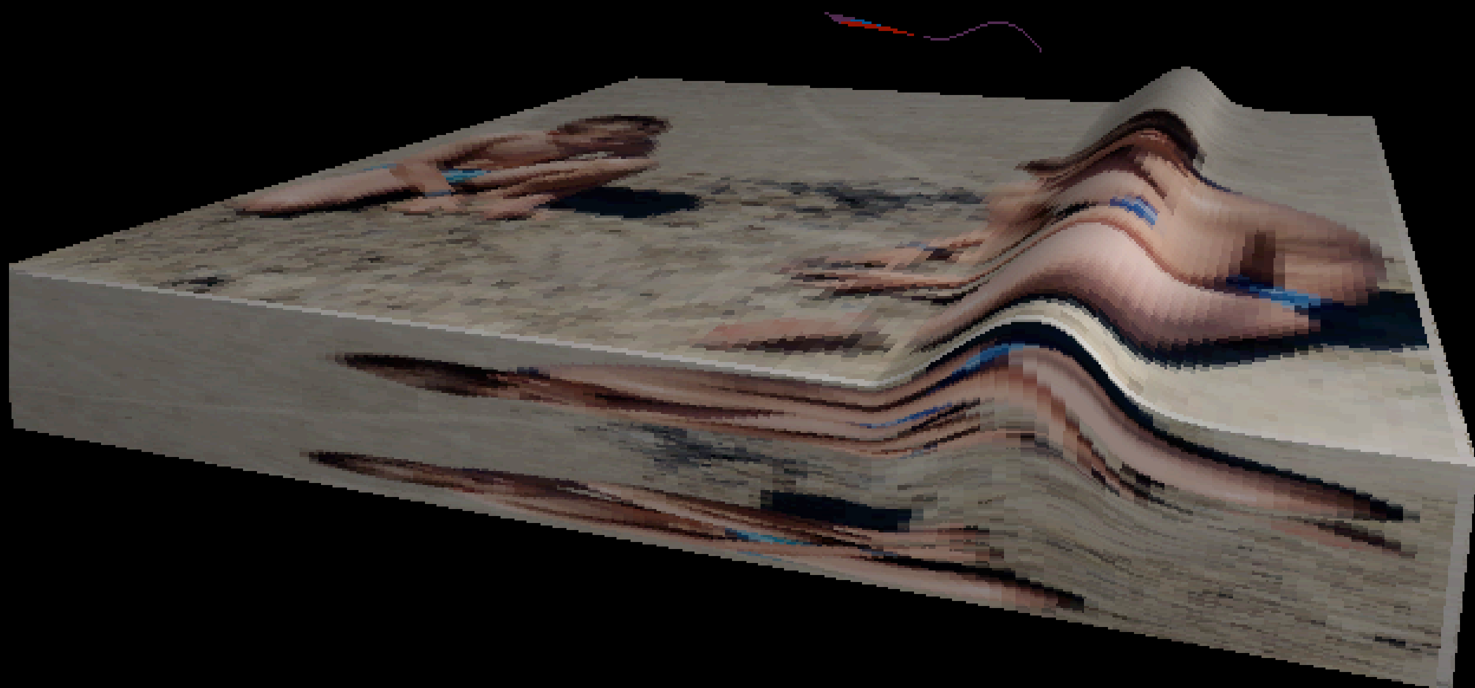


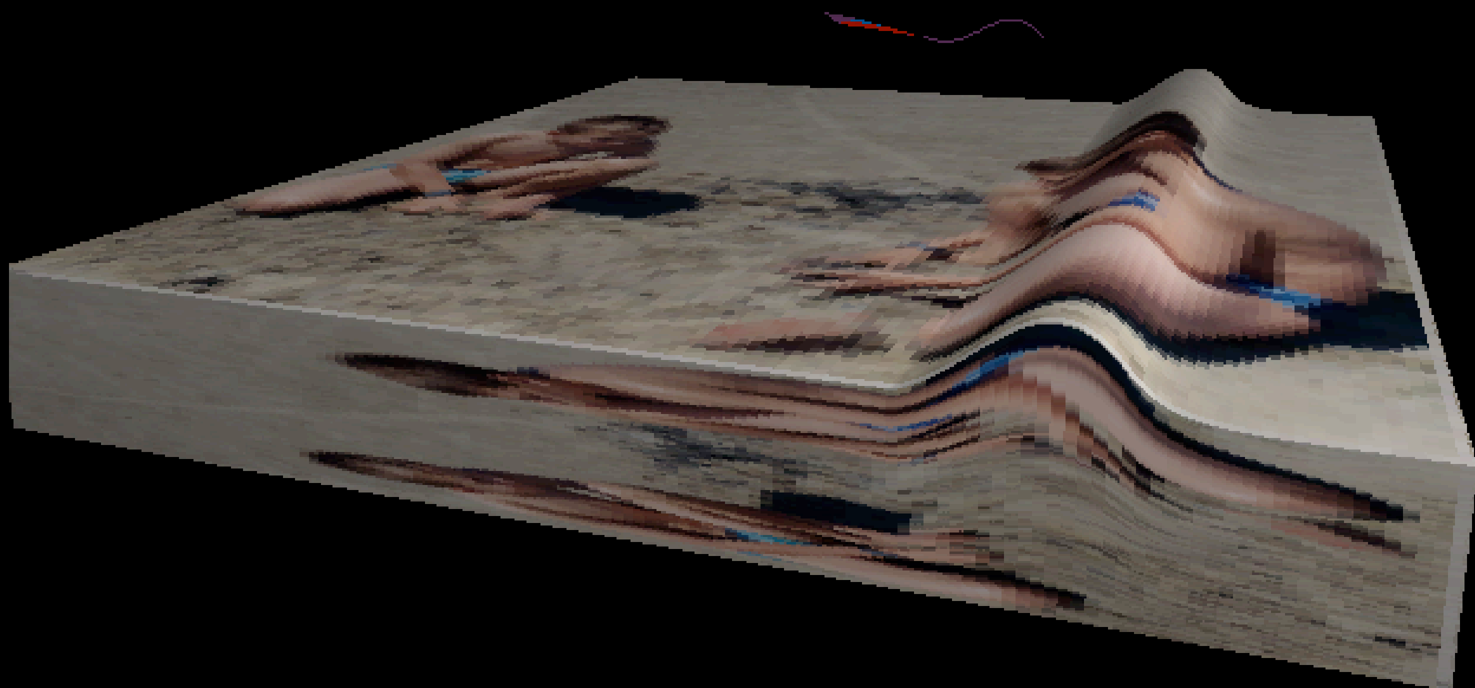


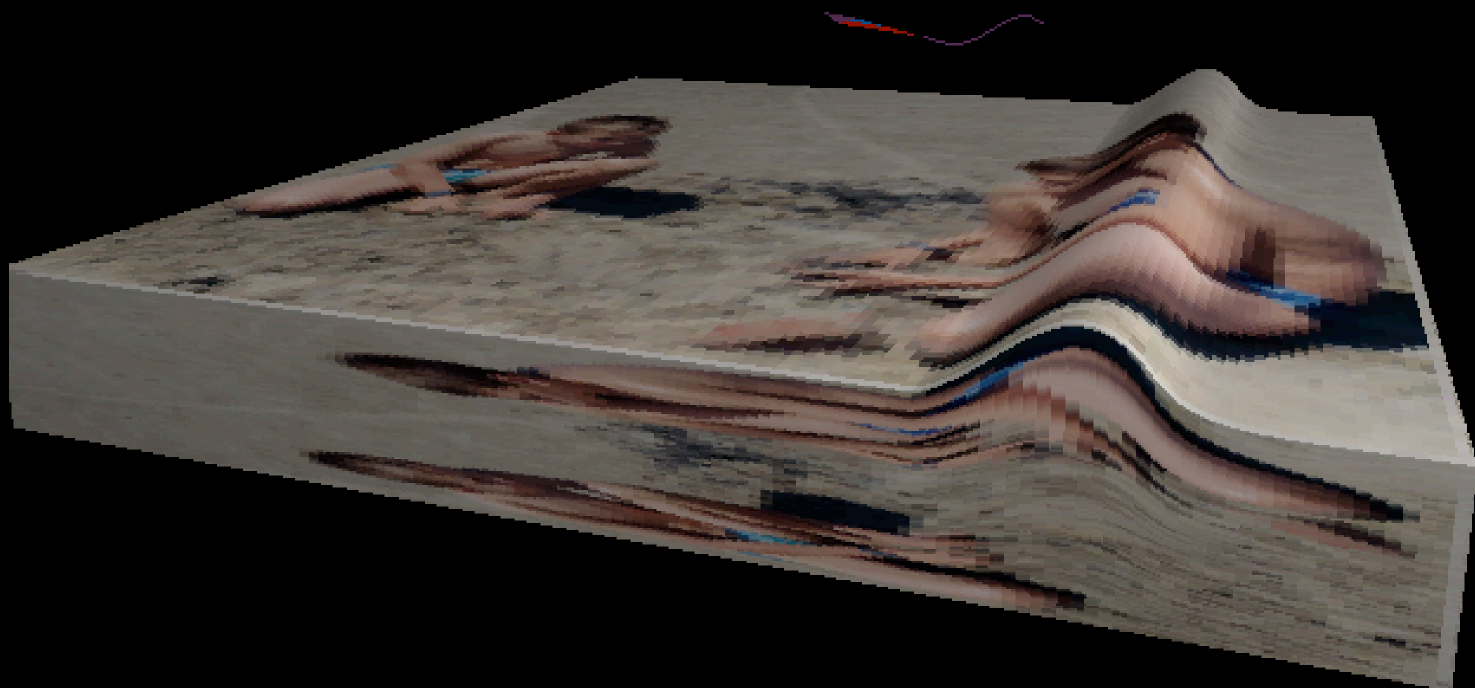


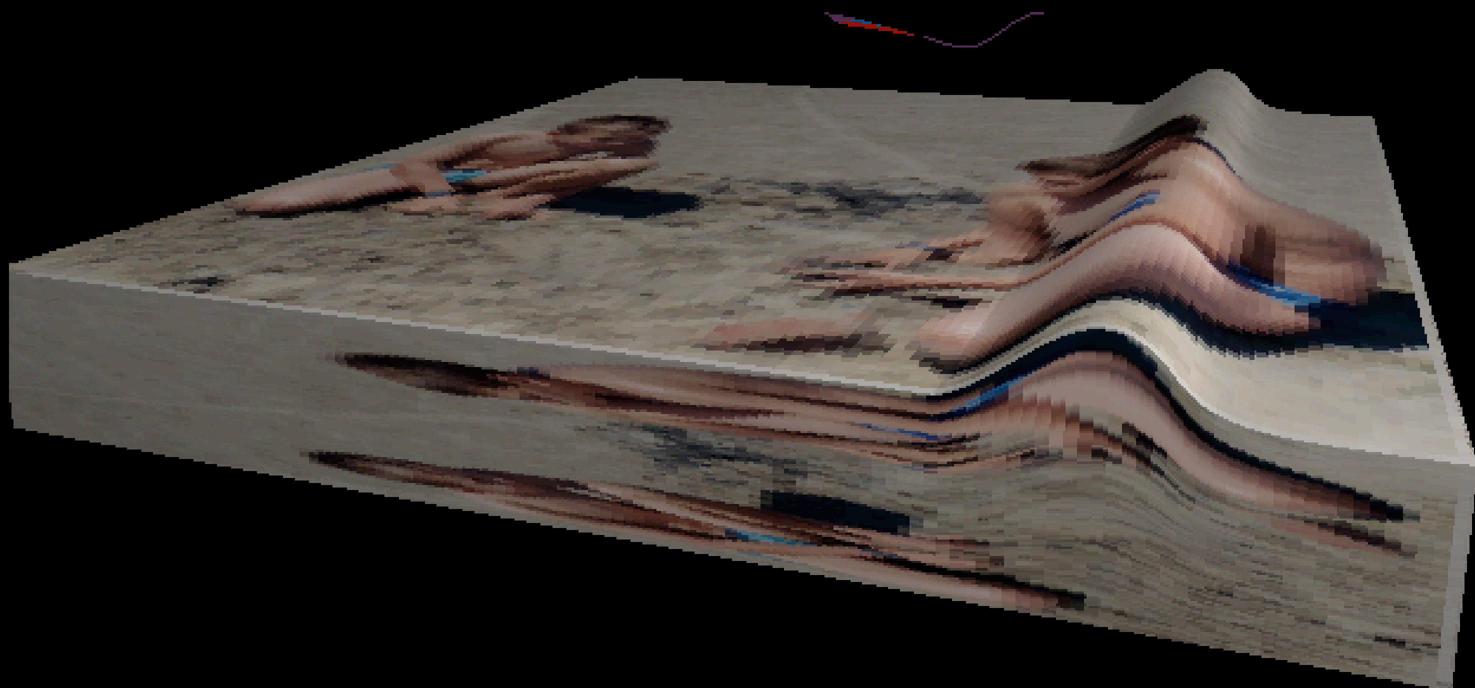


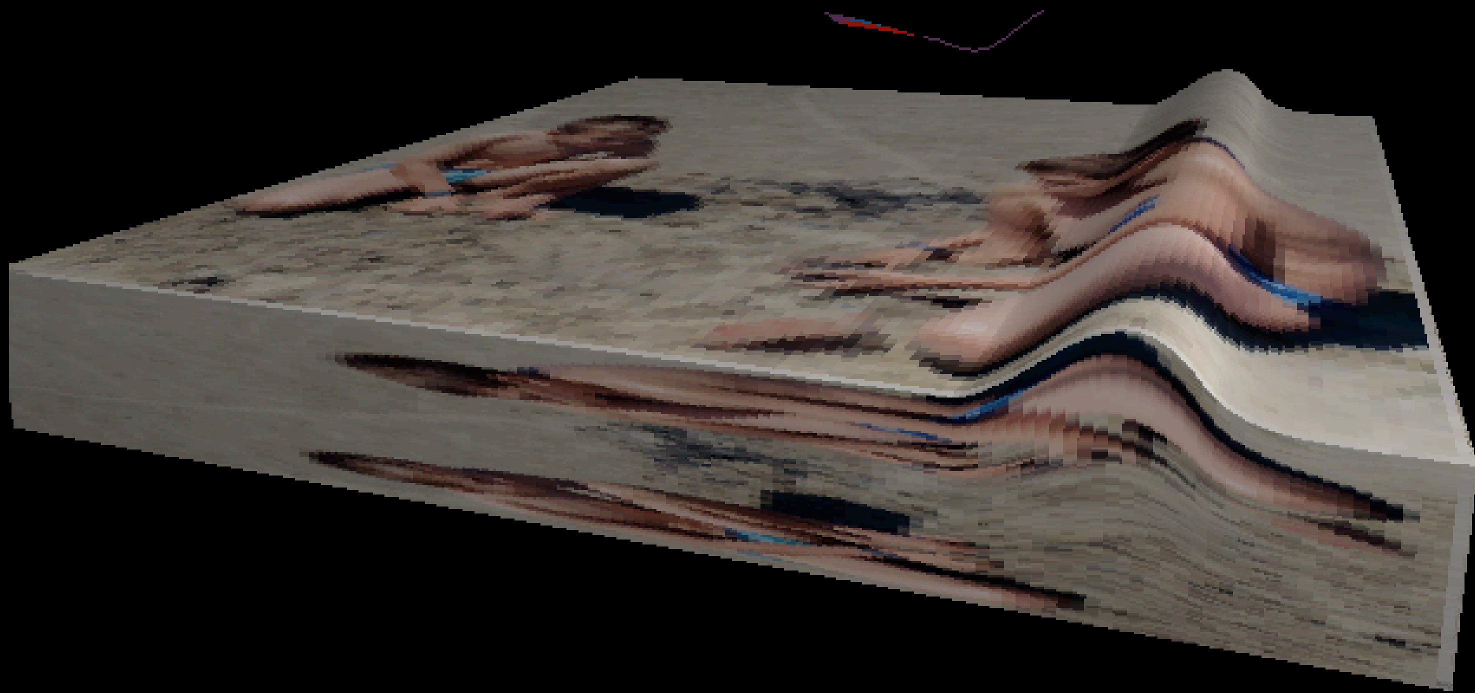


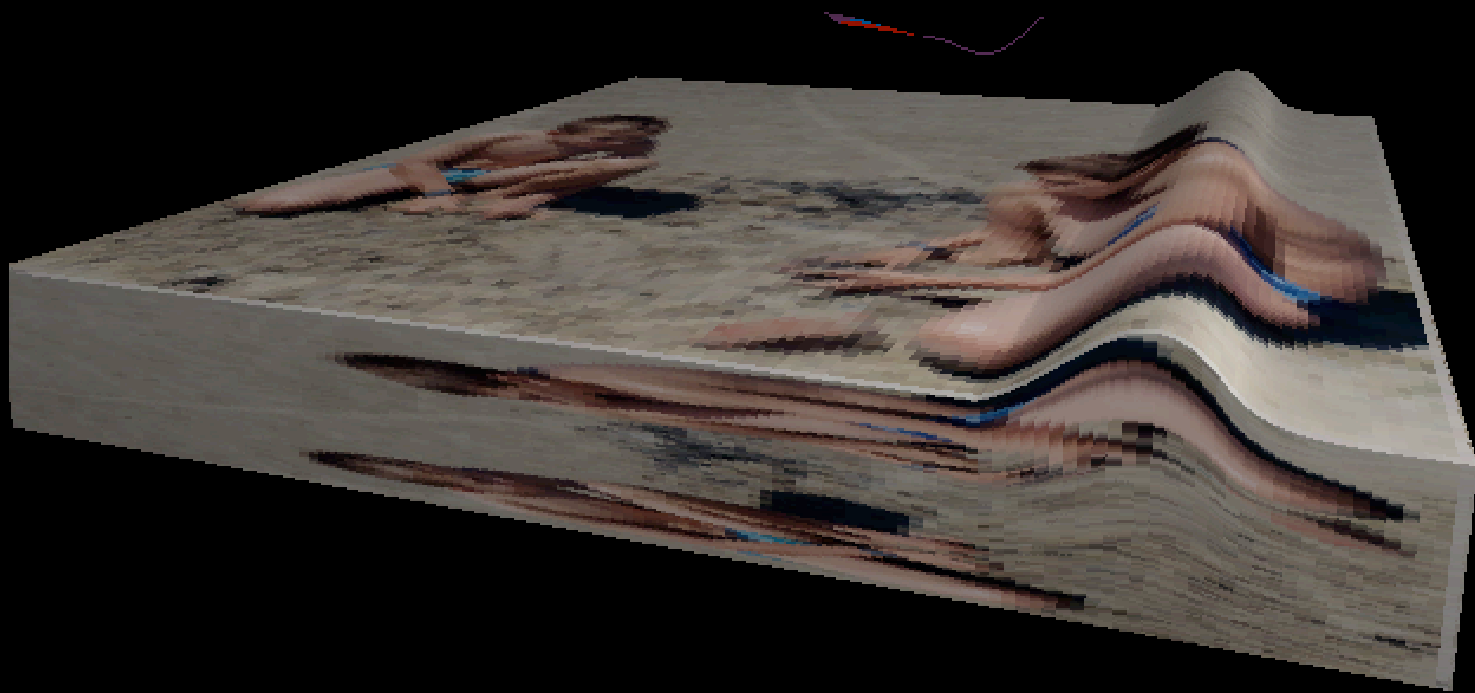


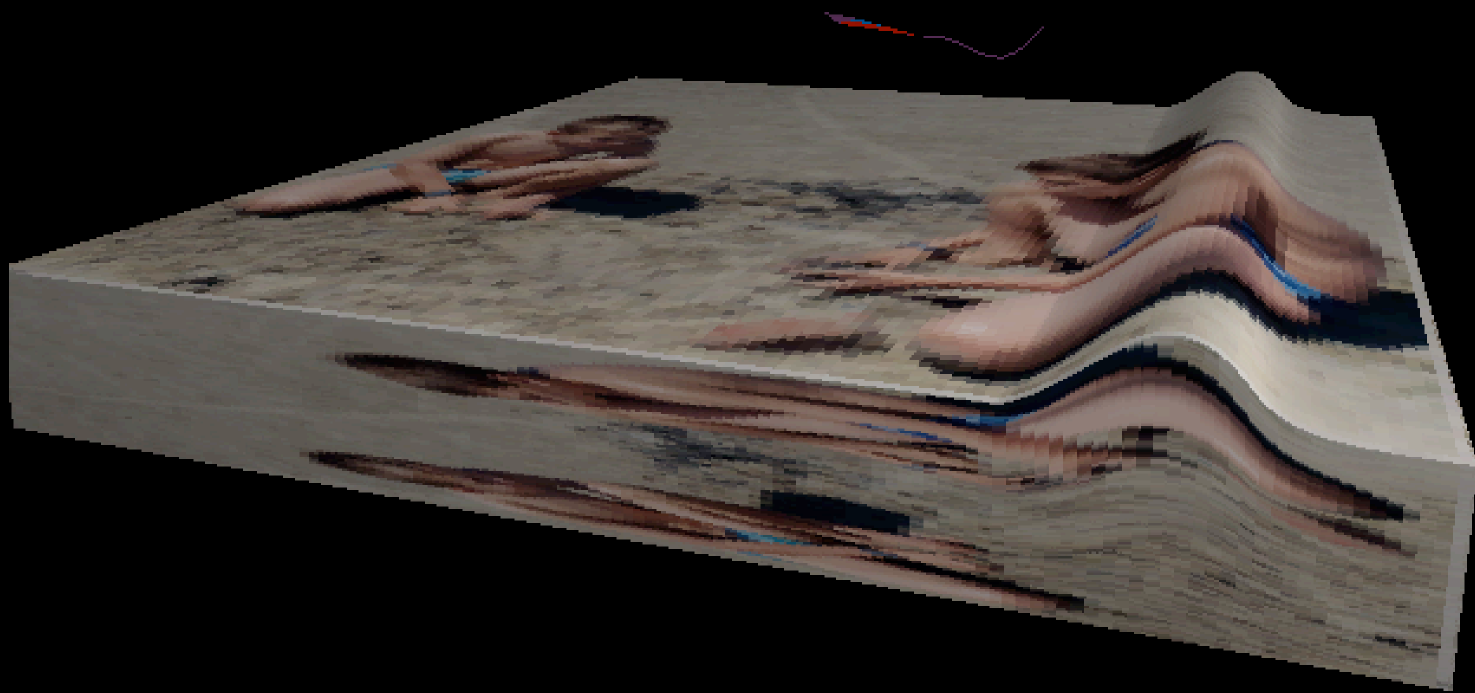


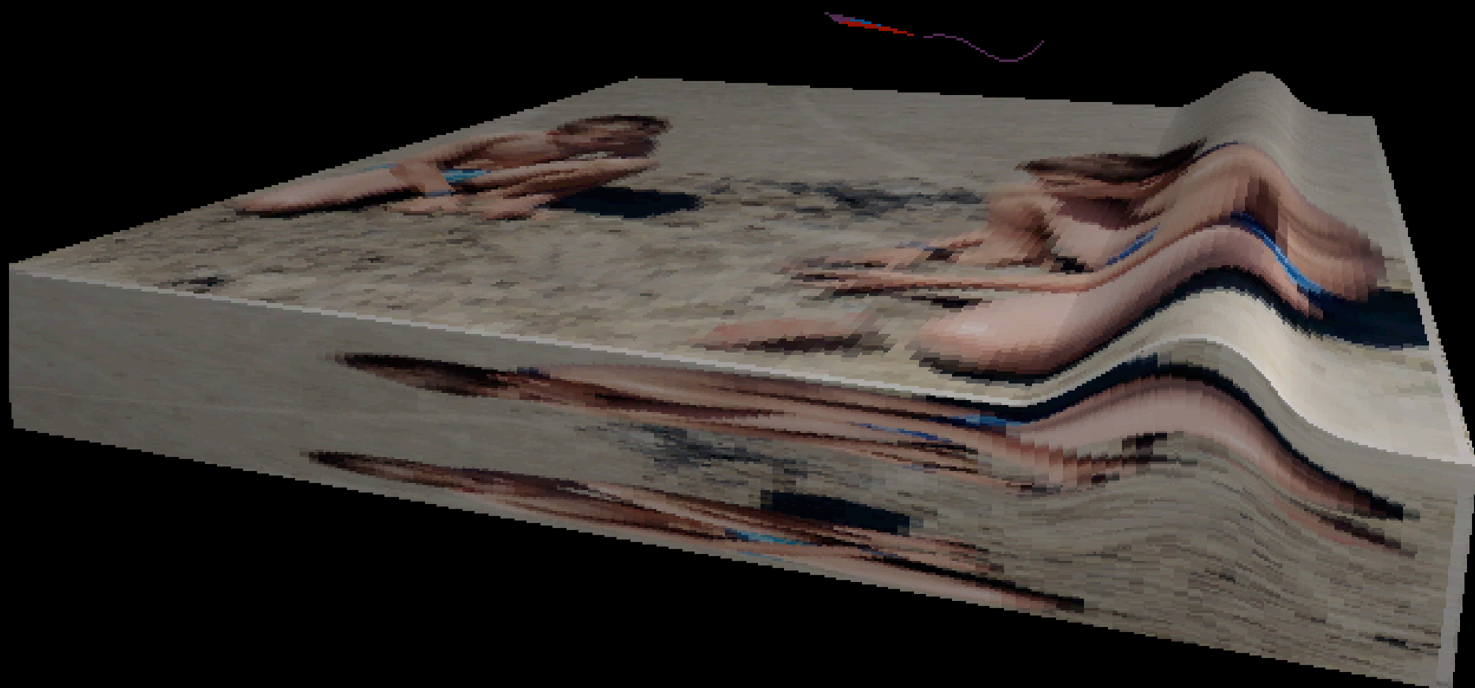


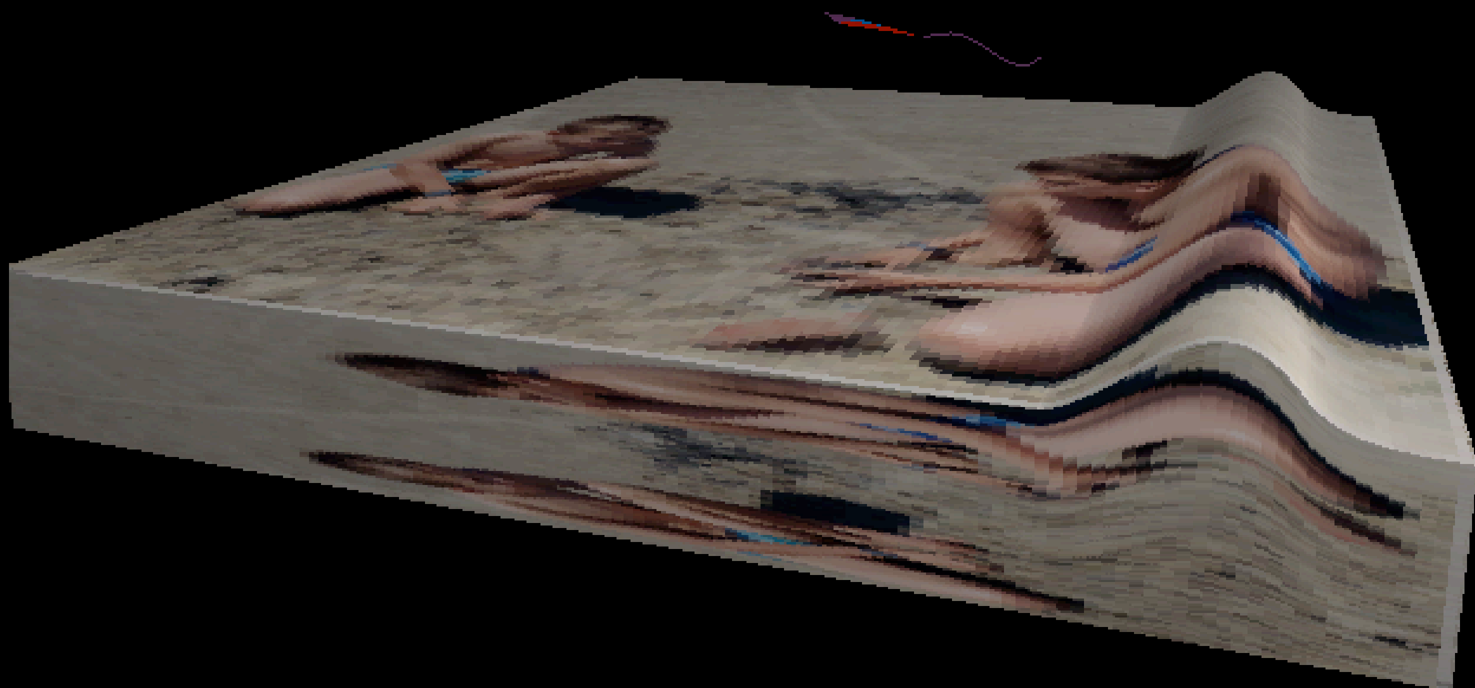


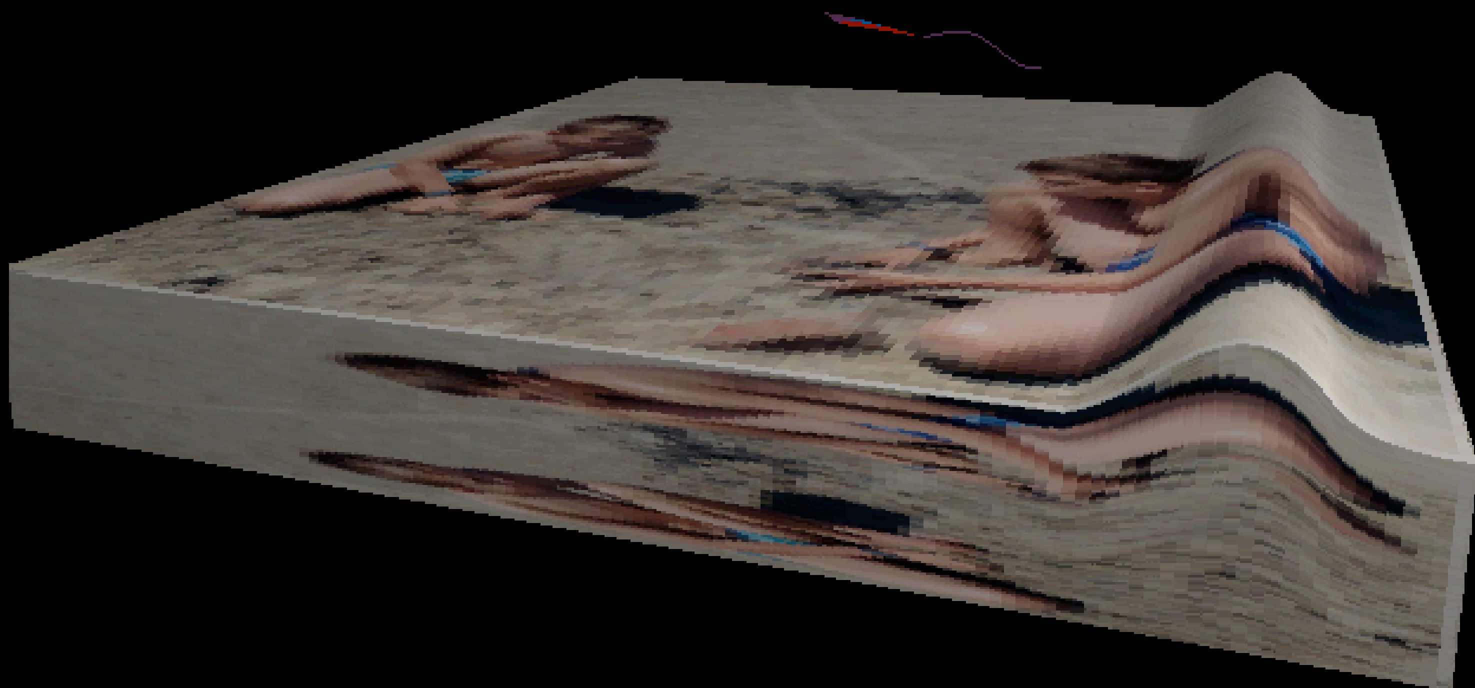












Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3} f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3} L^{1/3} TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3} TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

$\int f dx = m$ d'où $L^{4/3} = m$ avec $\int f^* dx^* = 1$

$$(\frac{l_s}{L})\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s)$$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3}f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3}L^{1/3}TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3}TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

$\int f dx = m$ d'où $L^{4/3} = m$ avec $\int f^* dx^* = 1$

$$(\frac{l_s}{L})\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*}$$

$t = L^{4/3}t^*$ and $c = L^{-1/3}c^*$ d'où $c = m^{-1/4}c^*$

Problème Auto Semblable

rescalons $x = Lx^*$, on doit avoir $f = L^{1/3} f^*$ pour que τ soit invariant

$$\tau = L^{-1/3} L^{1/3} TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3} TF[f^*]] = \tau^*$$

$$q = q^*$$

$\int f dx = m$ d'où $L^{4/3} = m$ avec $\int f^* dx^* = 1$

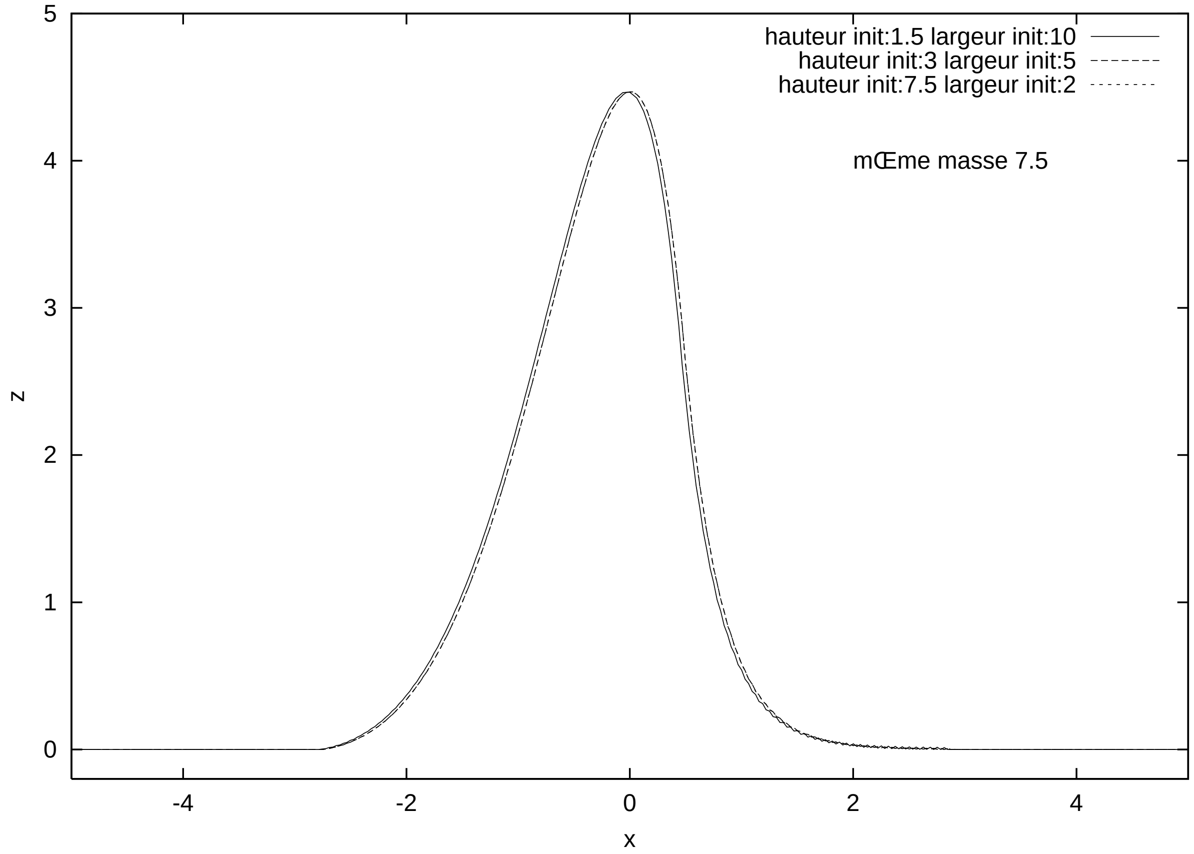
$$\left(\frac{l_s}{L}\right)\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*}$$

$t = L^{4/3} t^*$ and $c = L^{-1/3} c^*$ d'où $c = m^{-1/4} c^*$

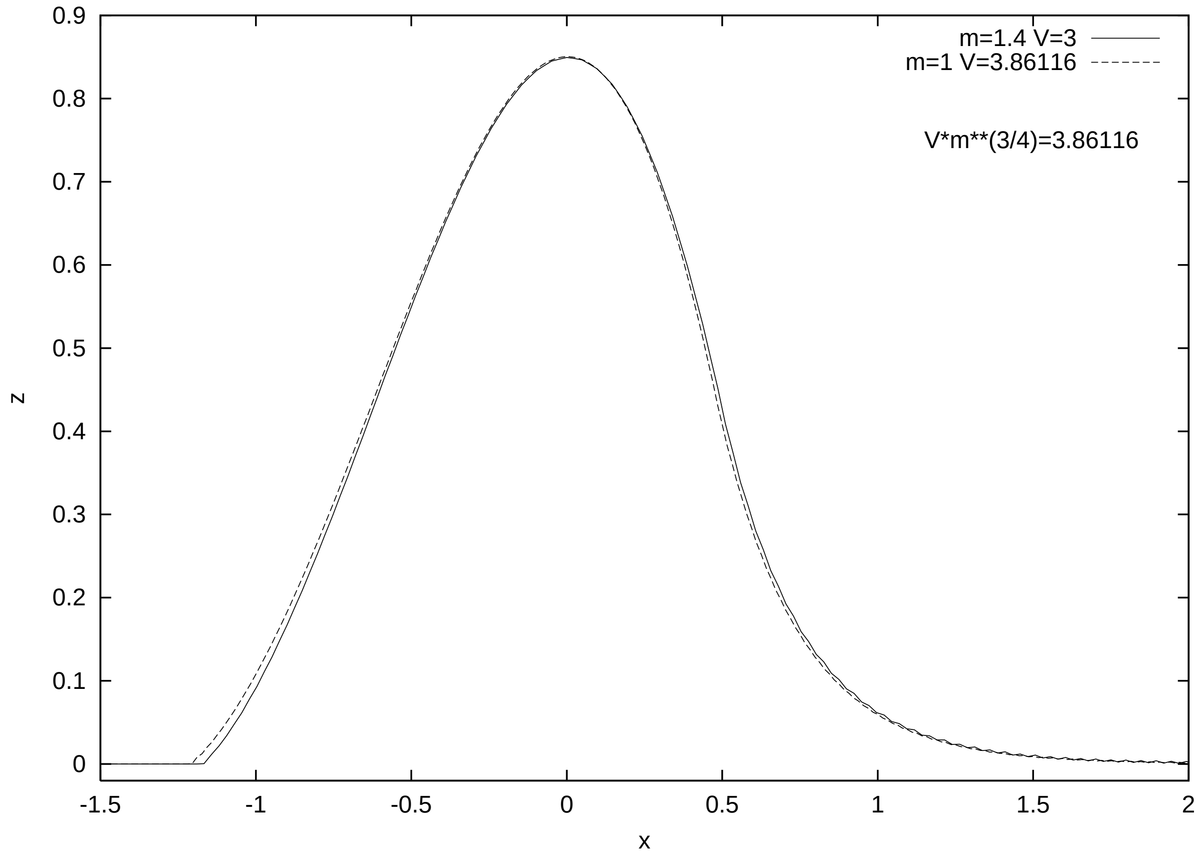
$1/c$ proportionnel à $m^{1/4}$ et fonction de $l_s^{-1} m^{3/4}$

Problème Auto Semblable



Deux différentes bosses de même masse donnent le même état final

Problème Auto Semblable



Deux cas de même $l_s^{-1} m^{3/4}$.

Self Similarity

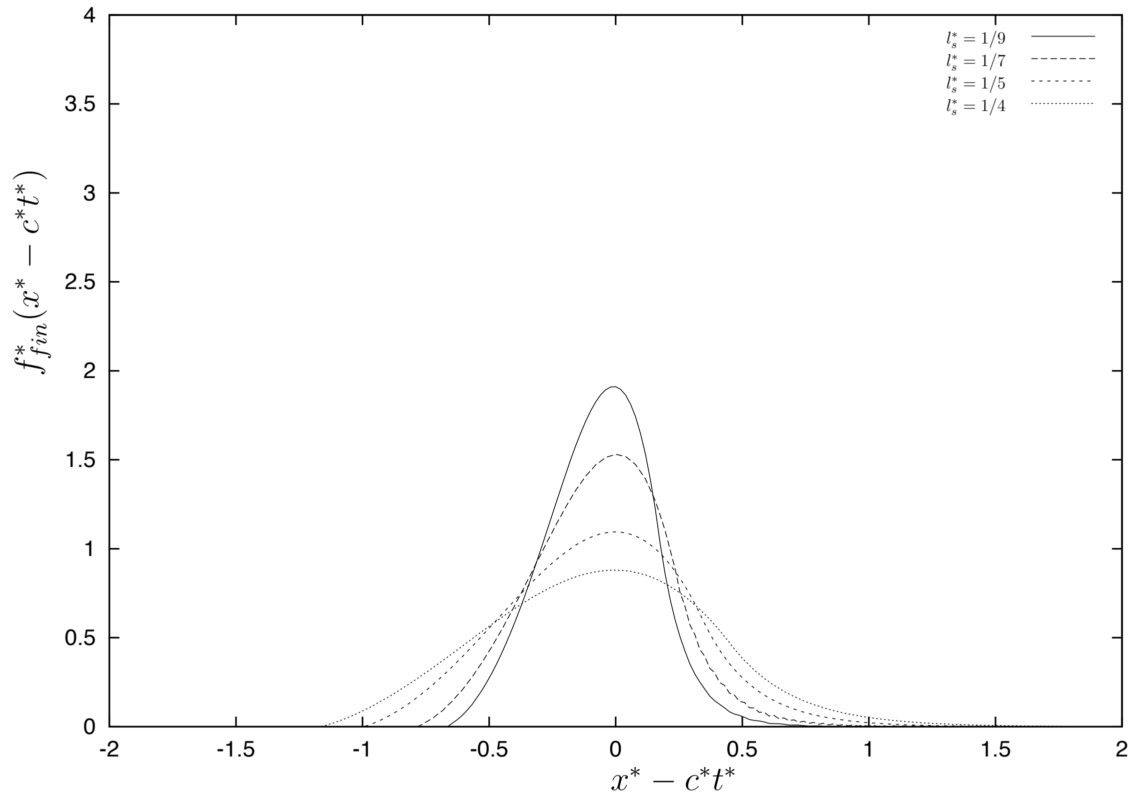


Fig. 8. "Dunes" of unit mass with $l_s^* = 1/4, 1/5, 1/7, 1/9$ ($\tau_s = 0.9$). The smaller l_s^* is, the thinner and higher the "dune" is.

selfsimilarity, unit mass $m = 1$, different $l_s^{-1} m^{3/4}$.

Problème Auto Semblable

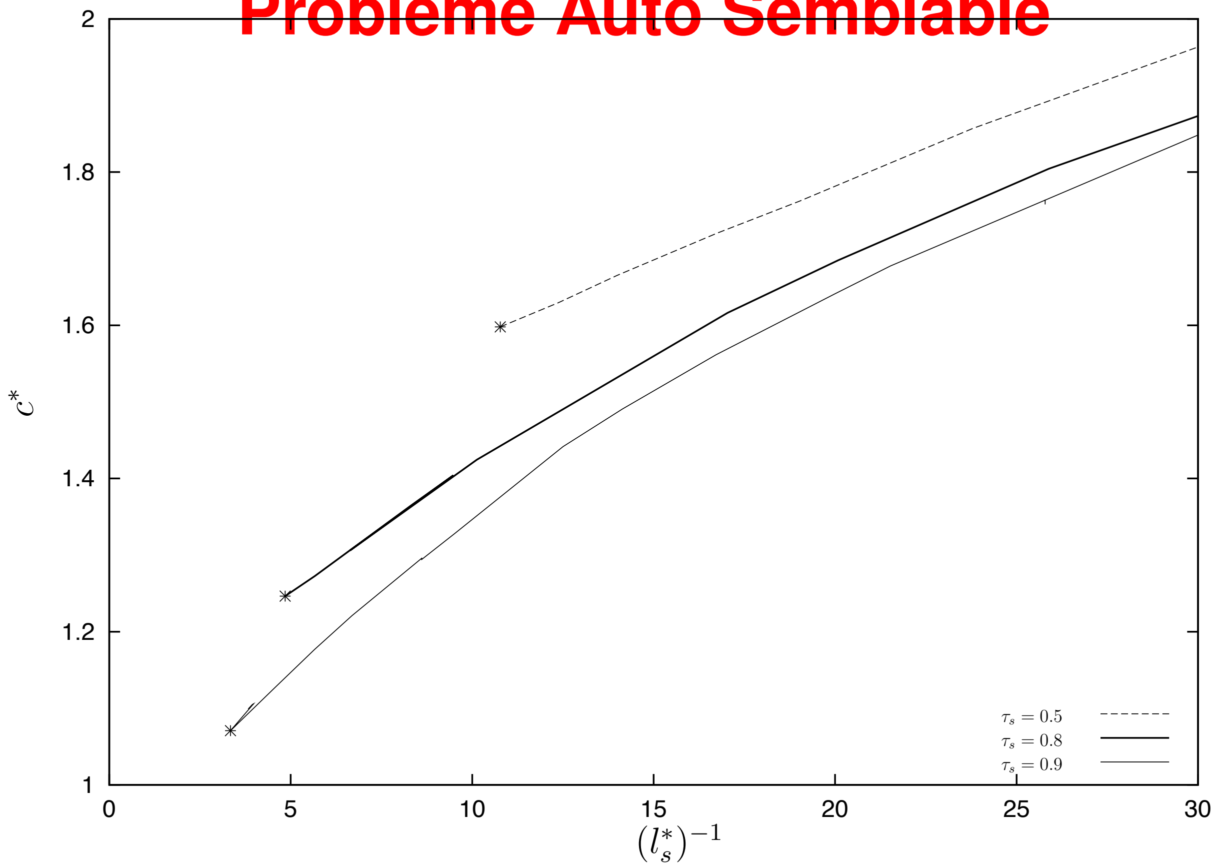


Fig. 7. The selfsimilar relation between the mass m, the inverse of the saturation length $l_s^* = l_s m^{-3/4}$, and the velocity $c^* = cm^{1/4}$ of the "dune" for three values of the threshold: $\tau_s = 0.9$, 0.8, and 0.5. For a fixed threshold, there is a maximal value of the saturation length l_s^* over which there is no solution.

$c\,m^{1/4}$ fonction de $l_s^{-1}m^{3/4}$.

Linéaire / Non linéaire : comparaison

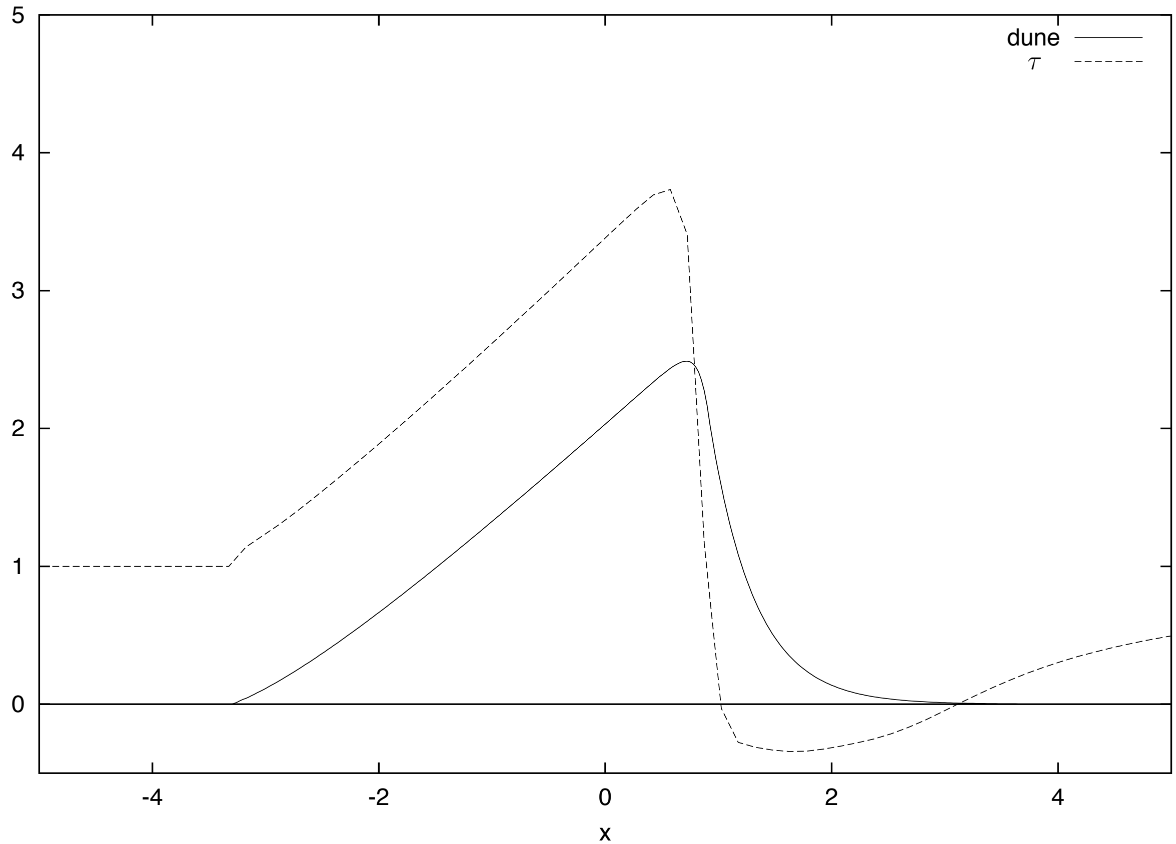


Fig. 6. An example of a non-linear final moving "dune" solution ($\tau_s = 0.9$, $1/l_s = 2.5$, $m = 6$). The weather side is nearly flat. The skin friction is represented; it is negative in the lee side: there is boundary layer separation.

formes finales lin/ non lin

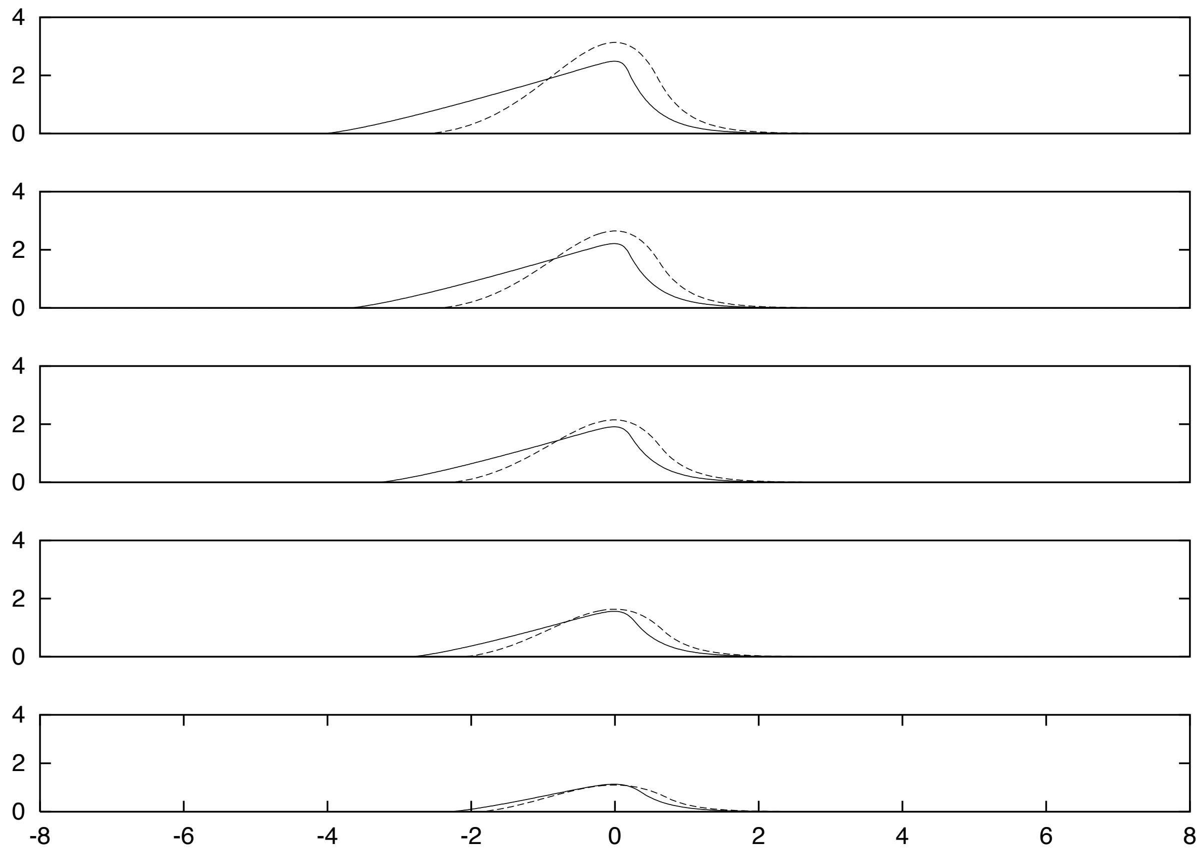
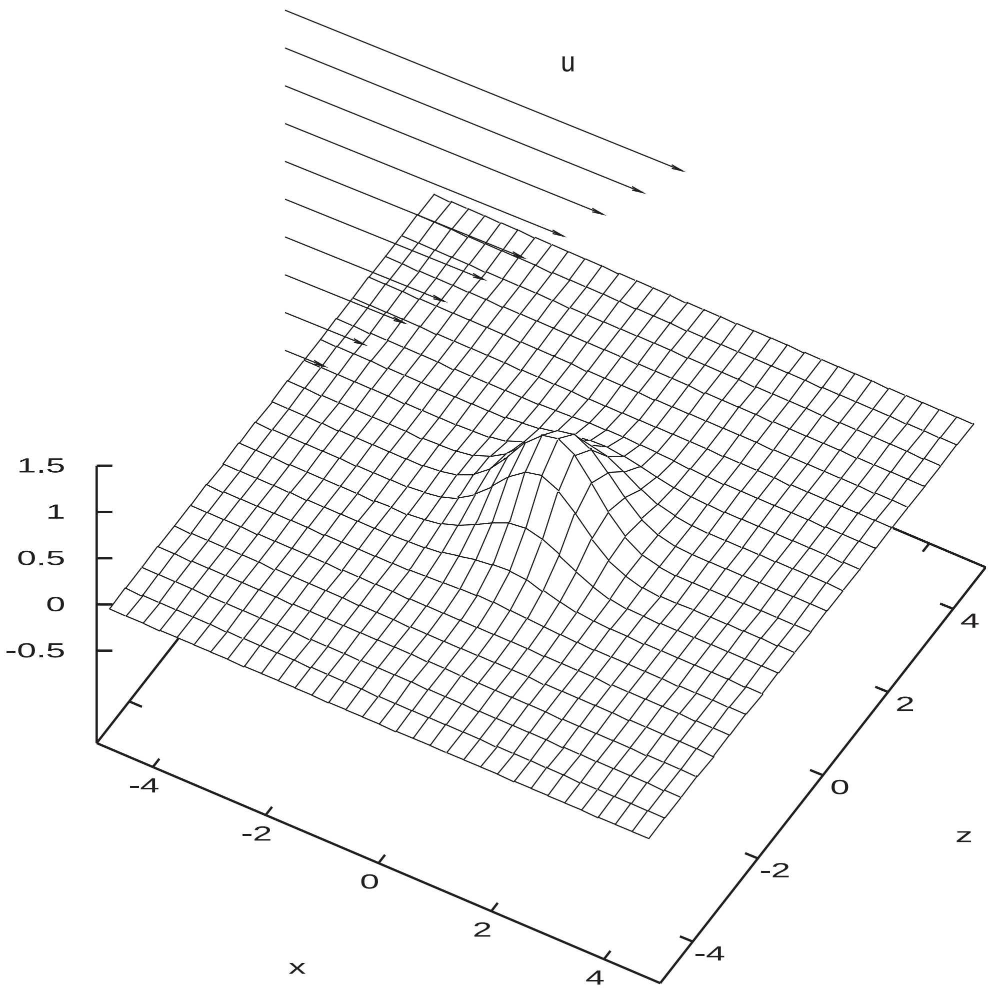


Fig. 5. The non-linear final moving "dune" solution $f_{fin}(x-ct)$ is represented with solid lines, the linear solution is represented with dashed lines, and $\tau_s = 0.9$, $1/l_s = 2.5$, $m = 2, 3, 4, 5$ (bottom curve to top curve).

Bosse 3D dans un écoulement cisaillé



On cherche une solution linéarisée :

$$u = y + au_1,\ v = av_1,\ w = aw_1,\ p = ap_1 \text{ with } a << 1.$$

Le système devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u_1 + \frac{\partial}{\partial y}v_1 + \frac{\partial}{\partial z}w_1 &= 0,\\
y\frac{\partial}{\partial x}u_1 + v_1 &= -\frac{\partial}{\partial x}p_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_1,\\
y\frac{\partial}{\partial x}w_1 &= -\frac{\partial}{\partial z}p_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}w_1,
\end{aligned}$$

conditions aux limites :

$u_1 = v_1 = w_1 = 0$ in $y = f(x,z)$,

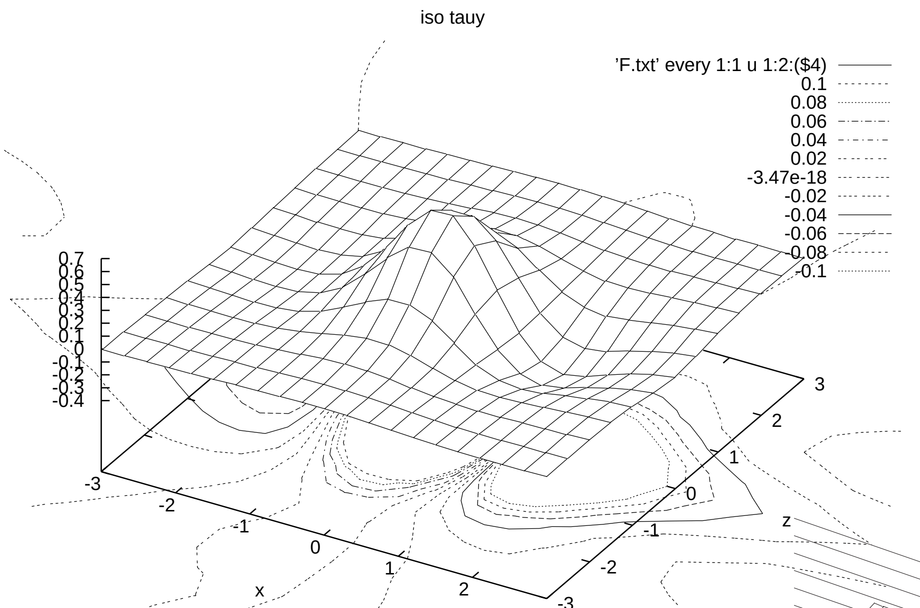
$y \rightarrow \infty$, $u_1 = +f(x,z)$, $w_1 = 0$

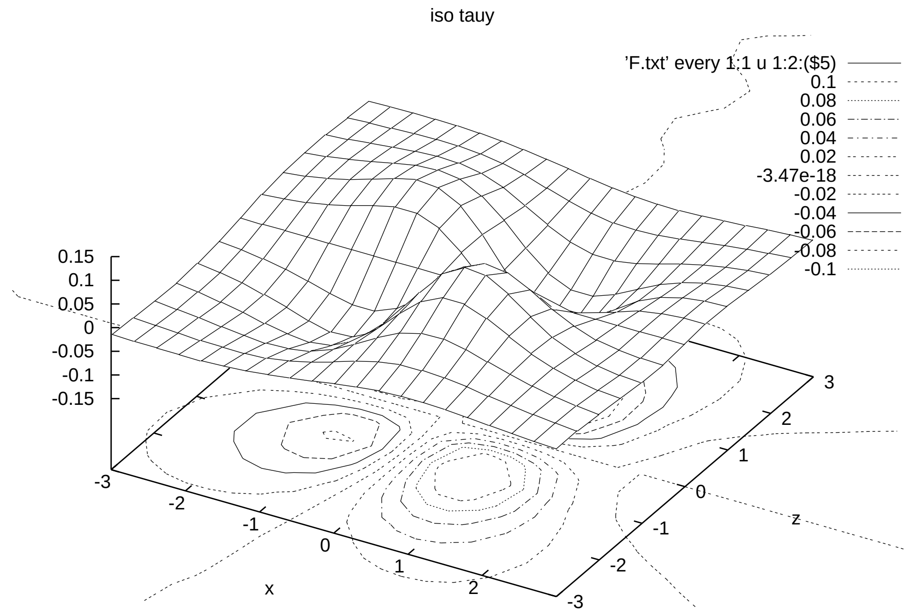
$x \rightarrow -\infty$, $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $w_1 = 0$.

En cherchant des solutions dans l'espace de Fourier...

Cela donne finalement la perturbation de frottement

$$\frac{d\hat{u}}{dy} = 3((-ik_x)^{1/3}Ai(0))k_x\left(1 - \frac{(-3Ai'(0))k_z^2}{9Ai(0)^2(k_x^2+k_z^2)}\right)\hat{f} \qquad \frac{d\hat{w}}{dy} = 3((-ik_x)^{1/3}Ai(0))\frac{k_x}{k_z}\frac{(-3Ai'(0))k_z^2}{9Ai(0)^2(k_x^2+k_z^2)}\hat{f}$$





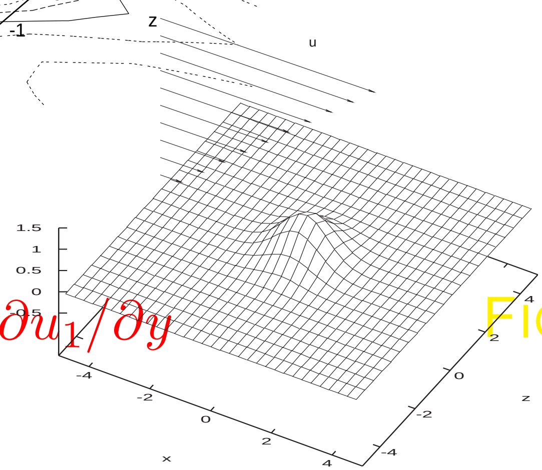
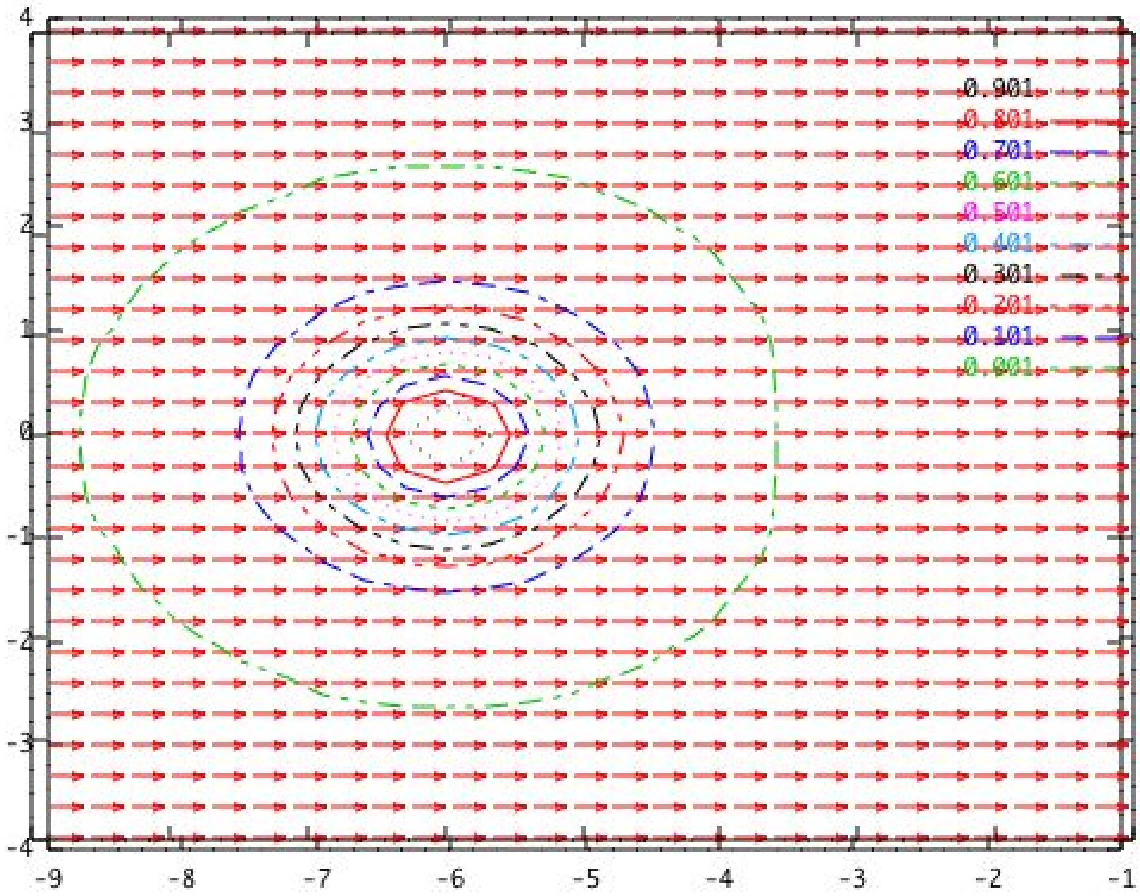


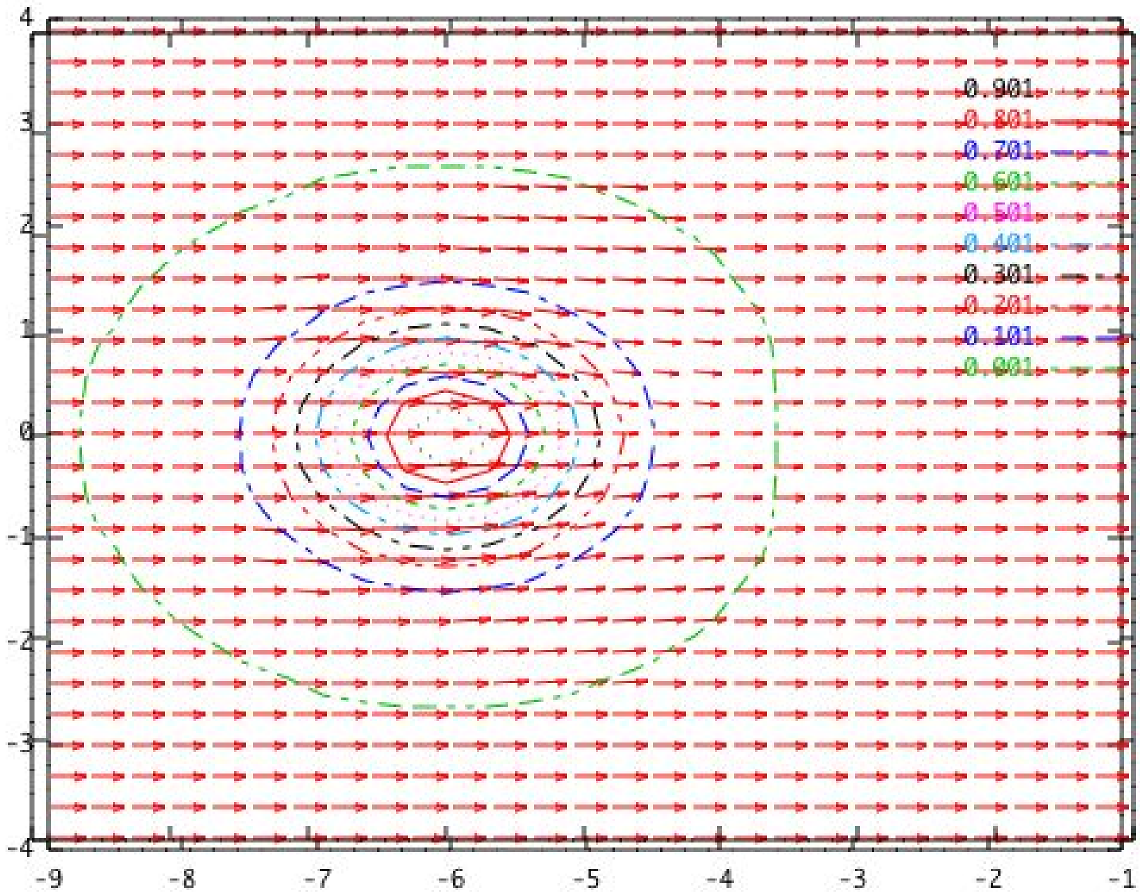
FIG. 1: frottement $\tau_x = \partial u_1/\partial y$

FIG. 2: frottement $\tau_y = \partial w_1/\partial y$

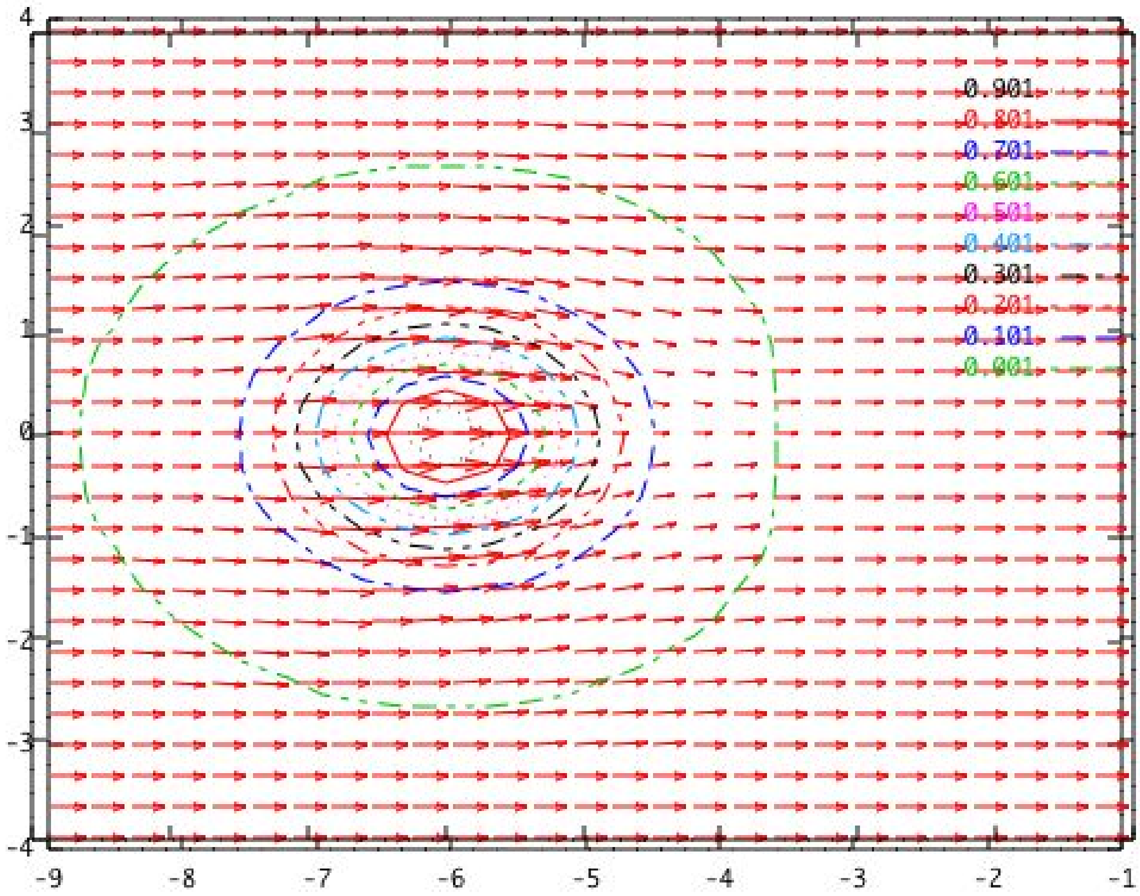
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.0$



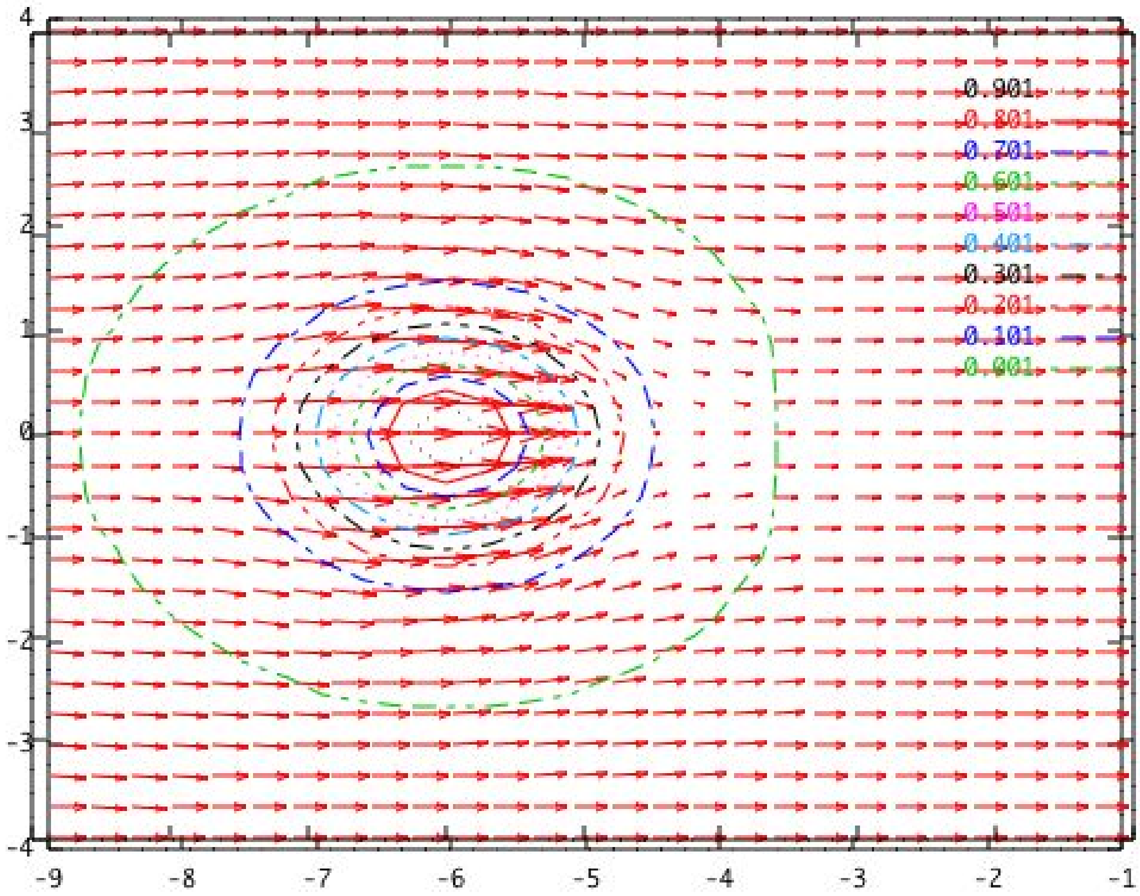
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.1$



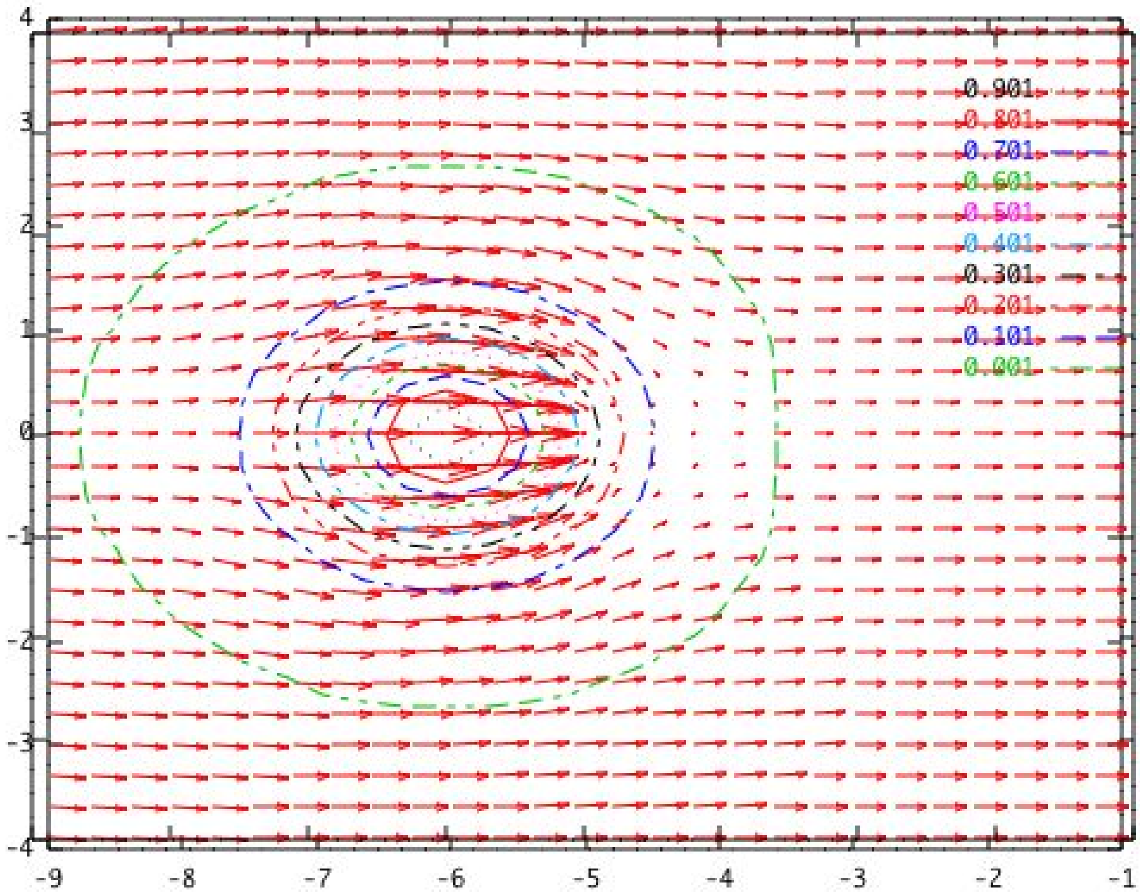
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.2$



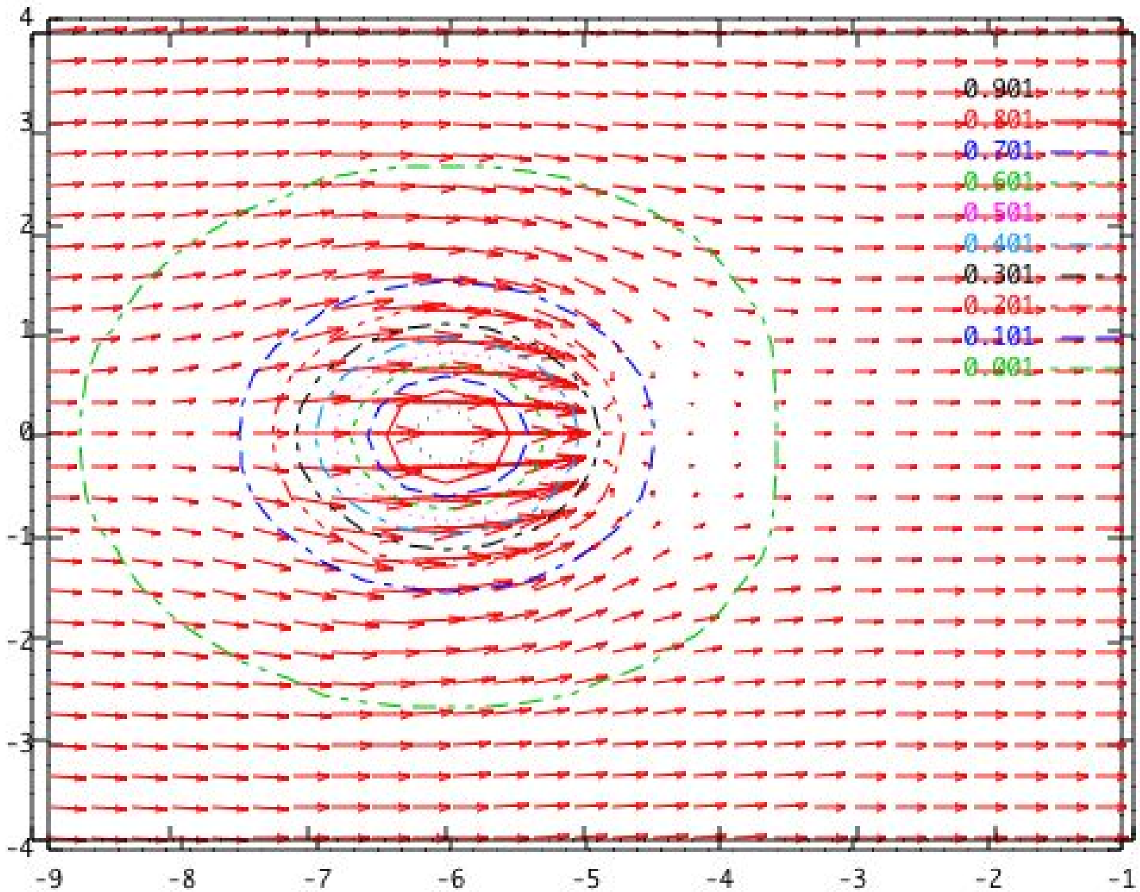
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.3$



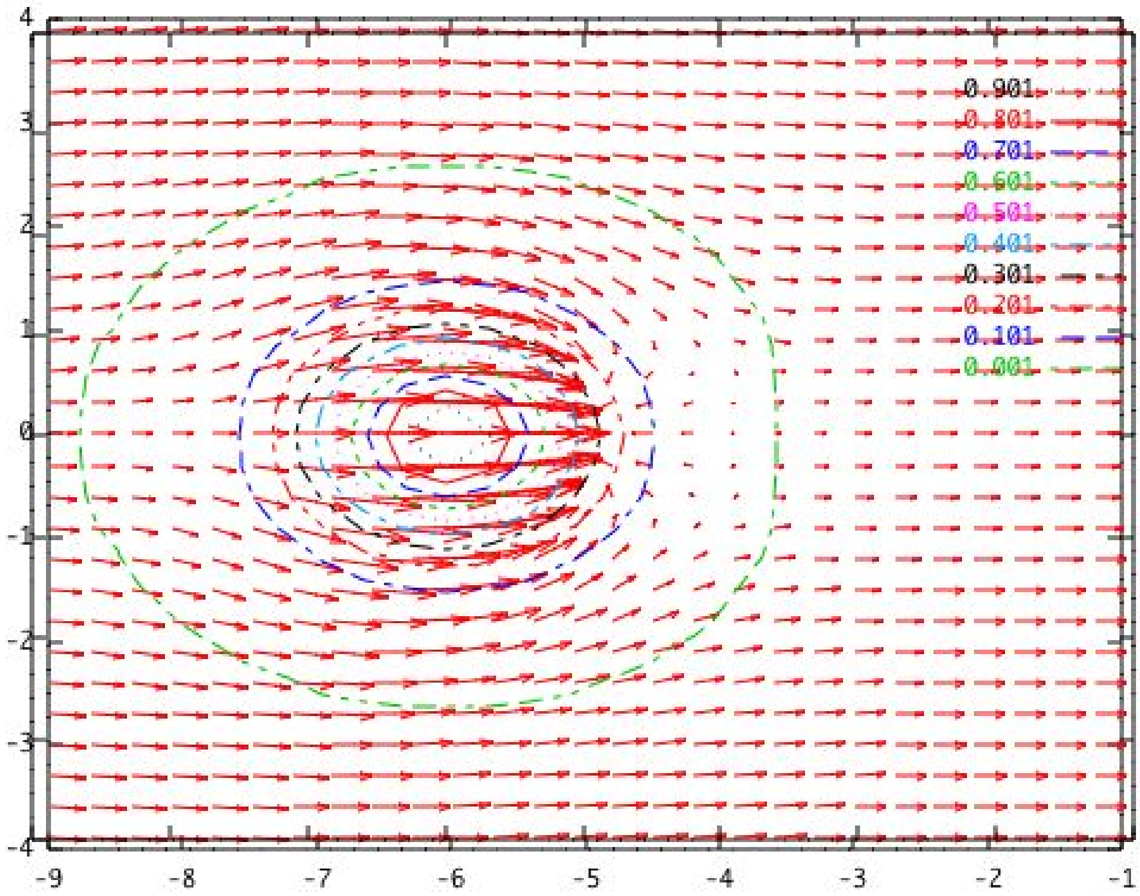
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.4$



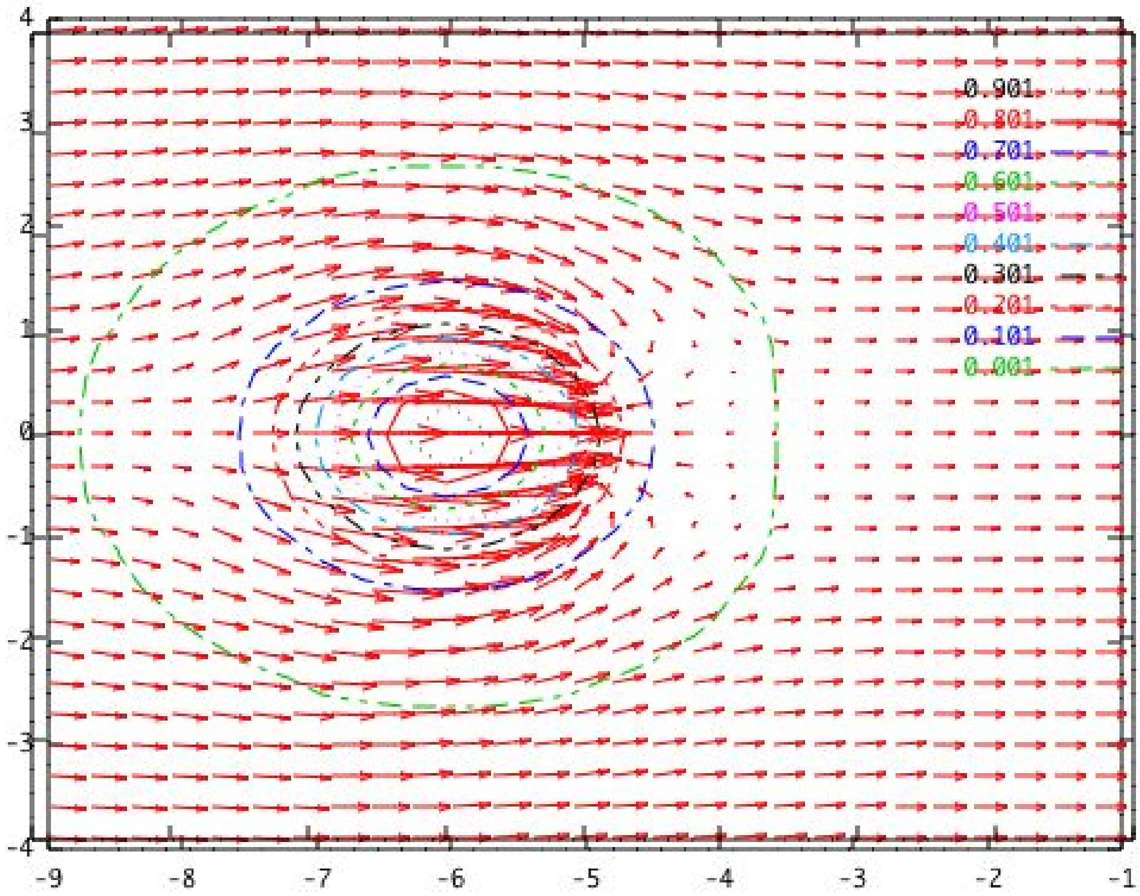
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.5$



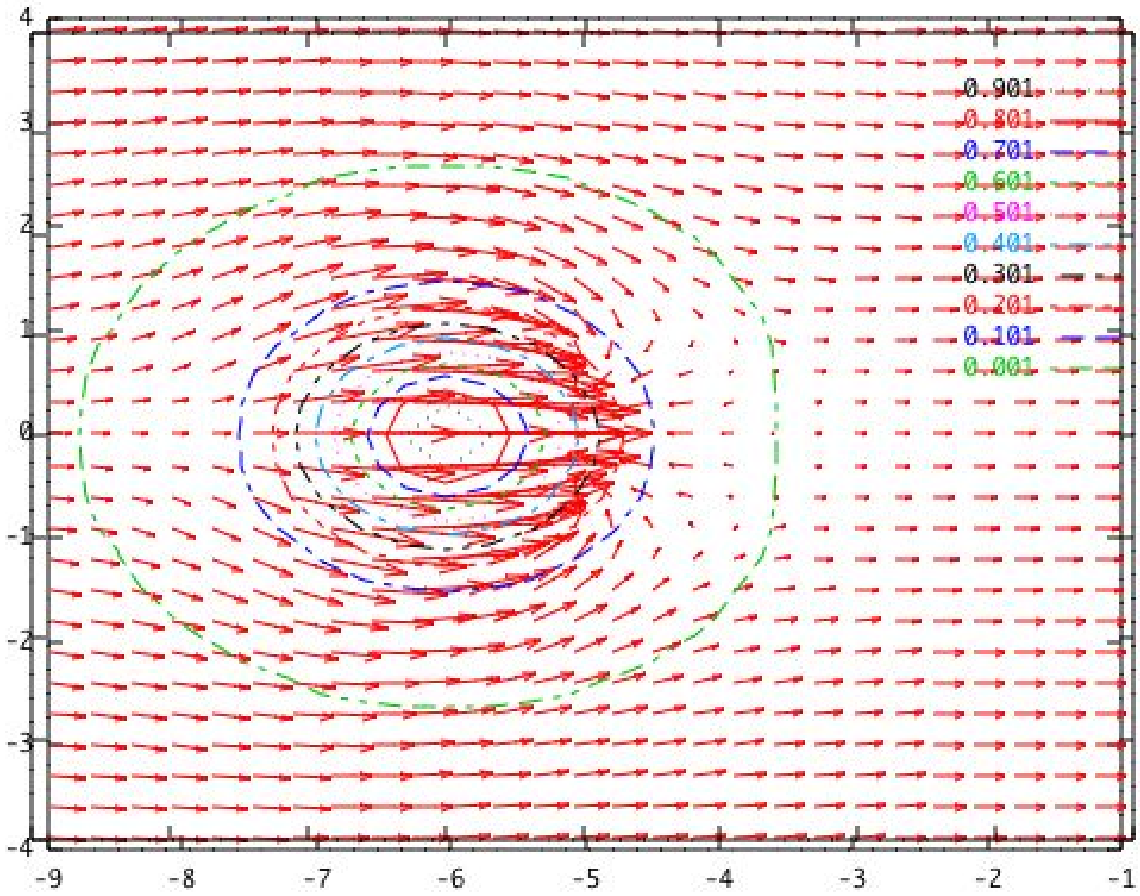
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.6$



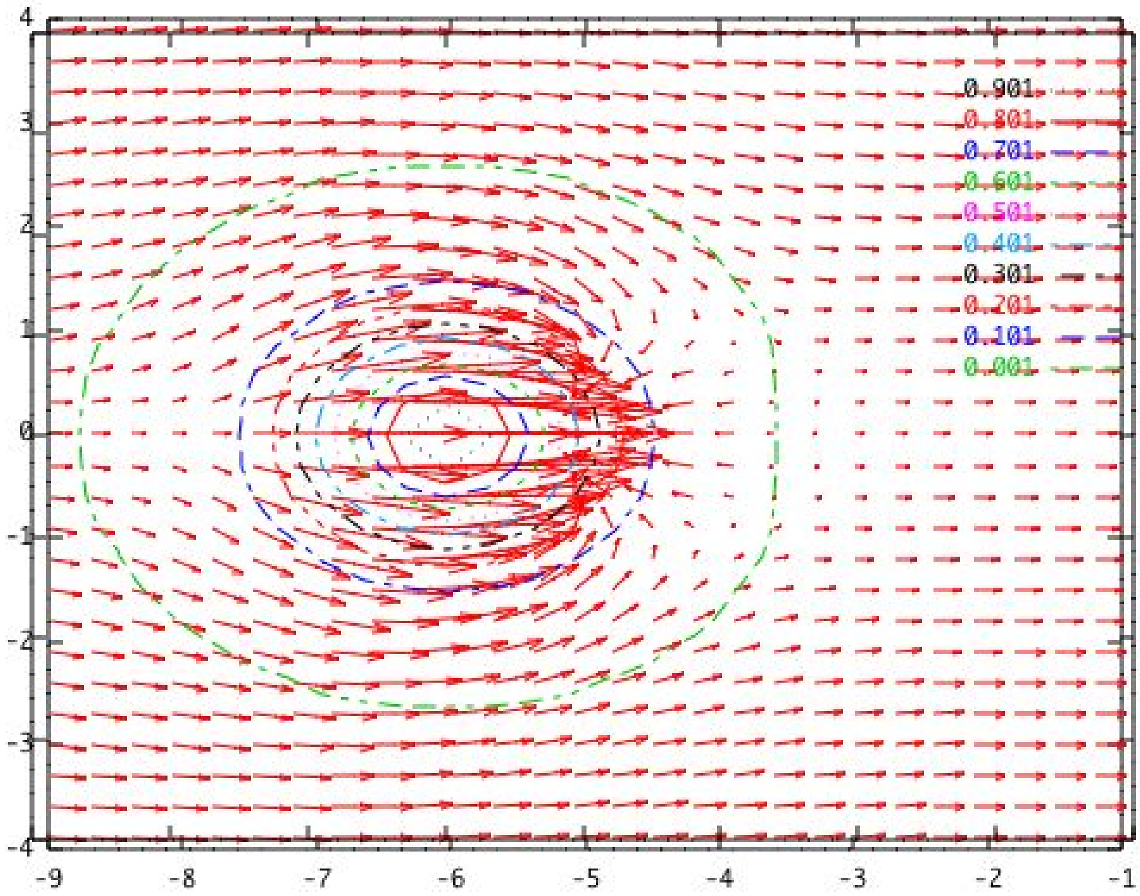
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.7$



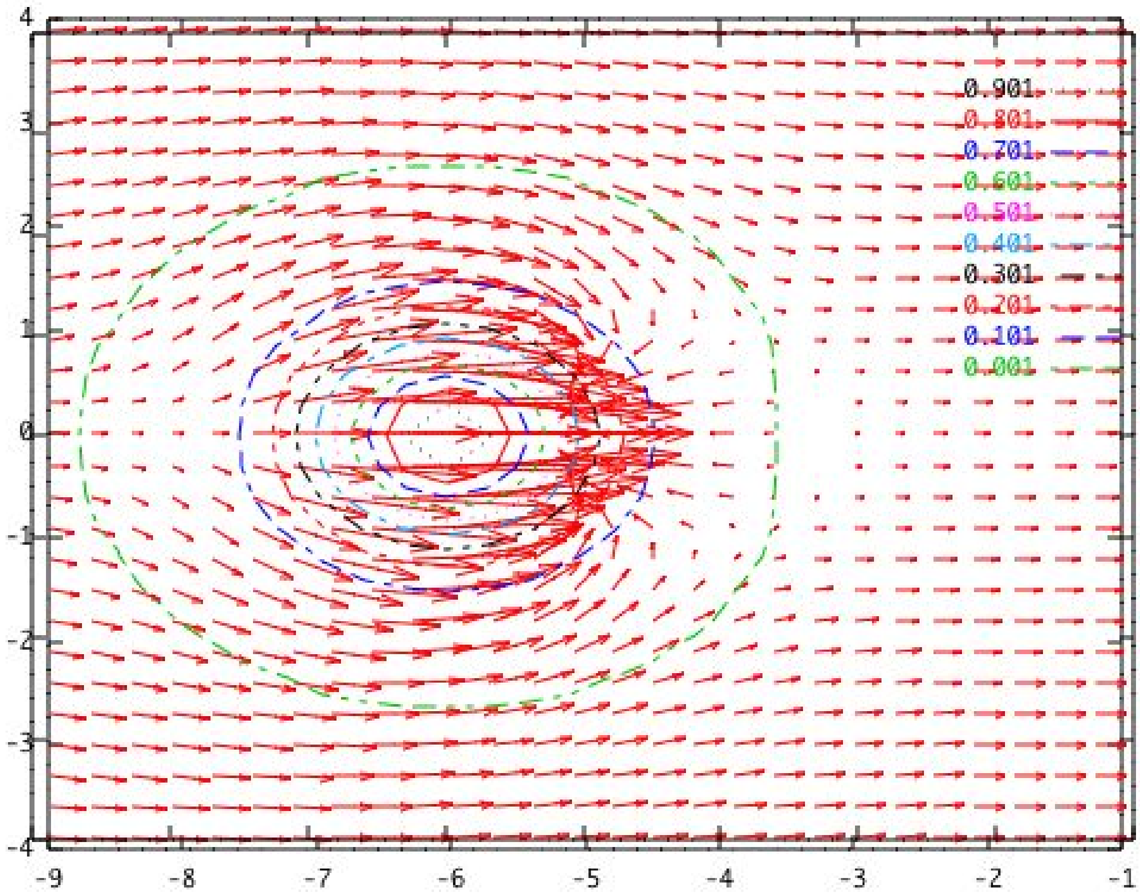
Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.8$



Skin friction on a 3D bump $\alpha = 0.9$



Skin friction on a 3D bump $\alpha = 1.0$



Exemple sur un sol érodable

Solution de

$$\hat{\tau}_x = 3((-ik_x)^{1/3}Ai(0))k_x(1 - \frac{(-3Ai'(0))k_z^2}{9Ai(0)^2(k_x^2+k_z^2))}\hat{f}$$

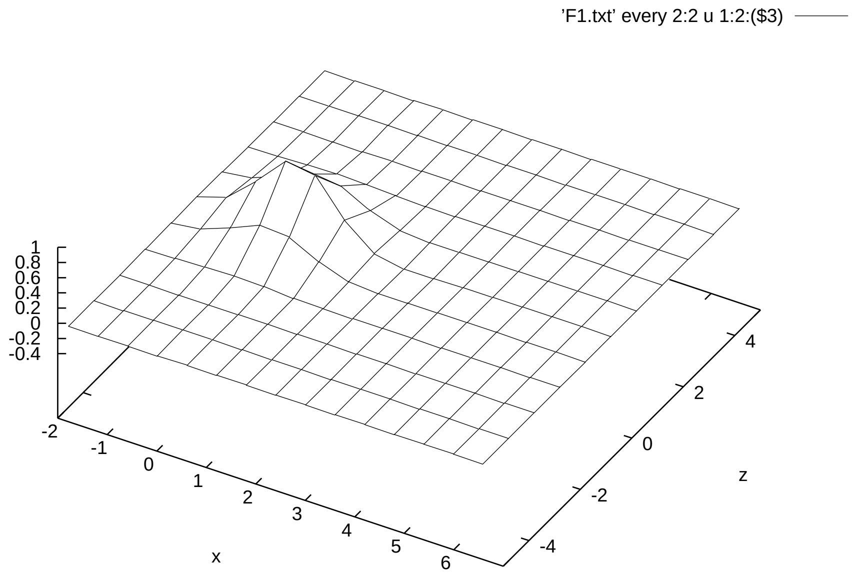
$$\hat{\tau}_y = 3((-ik_x)^{1/3}Ai(0))\frac{k_x(-3Ai'(0))k_z^2}{9Ai(0)^2k_z(k_x^2+k_z^2)}$$

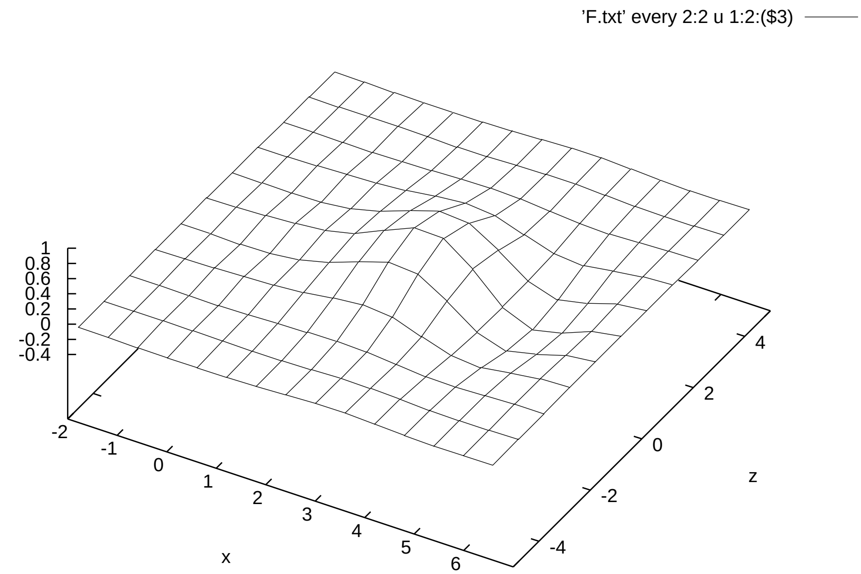
$$q_x = \tau_x - \Lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$q_y = \tau_y - \Lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

exemple de résolution





animation

FIG. 3: temps initial

FIG. 4: $t = 2.5$

Transport

On propose une extension 3D :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{s}} + V\mathbf{q} = V\varpi(\tau - \tau_S \mathbf{e})$$

avec $\mathbf{e} = \frac{\tau}{\tau}$ où s est dans la direction des lignes de courant près du sol : $\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{e} \cdot \nabla$

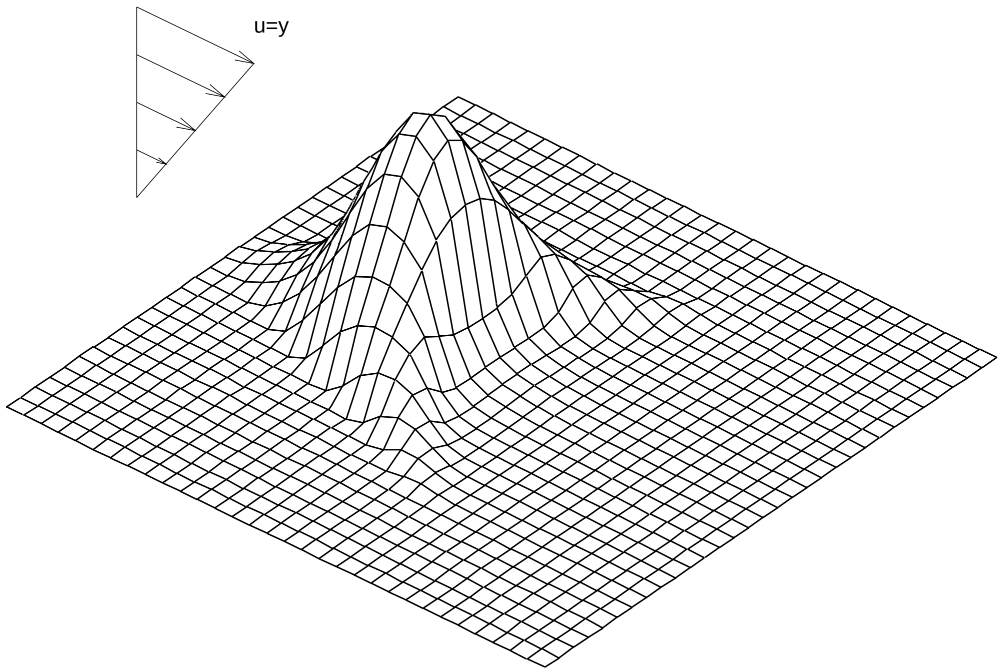
Petite perturbations ; l'écoulement reste dans la direction x ($\mathbf{s} = (x, 0)$) : le flux saturé $q_{sat} = \varpi(\tau - \tau_S \mathbf{e})$ est dans la direction du frottement.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + Vq_x = V\varpi(\tau_x - \tau_S)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial x} + Vq_z = V\tau_z(\varpi(\tau_x - \tau_S))$$

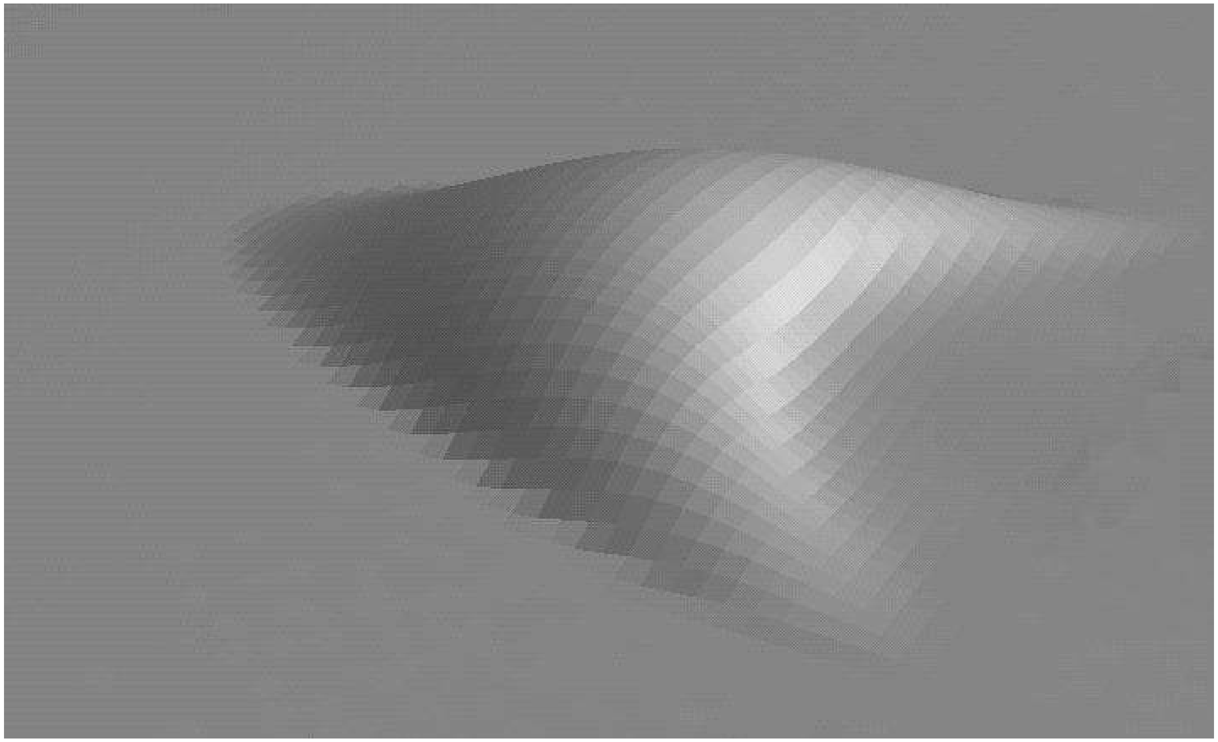
note on prend $\mathbf{q_{sat}} = 0$ si $f <= 0$
on ajoute un terme *ad hoc* de diffusion :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$



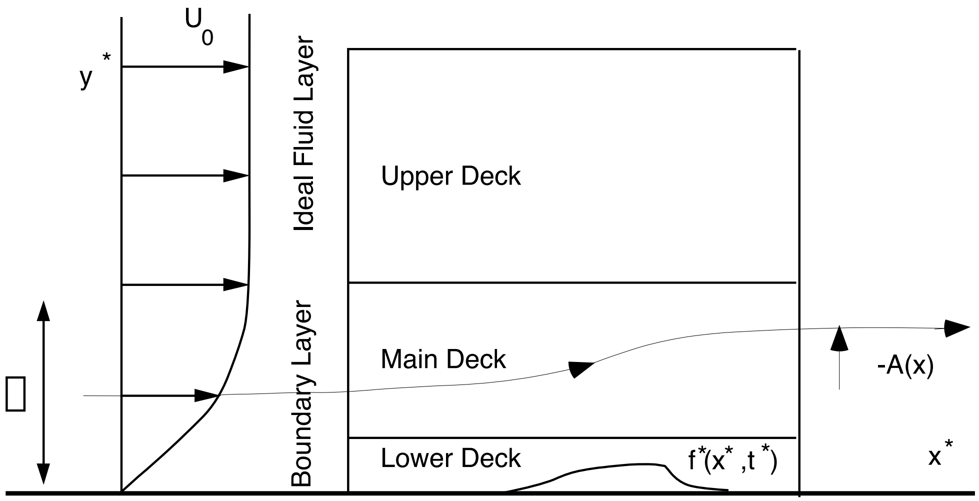
A ”dune” in a shear flow

animation



A ”dune” in a shear flow

Influence of the ideal fluid



$$FT[\tau] = \frac{(-ik)^{2/3}}{Ai'(0)} Ai(0) \frac{FT[f]}{\beta^* - 1/|k|}, \text{ with } \beta^* = (3Ai'(0))^{-1}(-ik)^{1/3}$$

Influence of the ideal fluid

$$FT[\tau] = \frac{(-ik)^{2/3}}{Ai'(0)} Ai(0) \frac{FT[f]}{\beta^* - 1/|k|},$$

with $\beta^* = (3Ai'(0))^{-1}(-ik)^{1/3}$

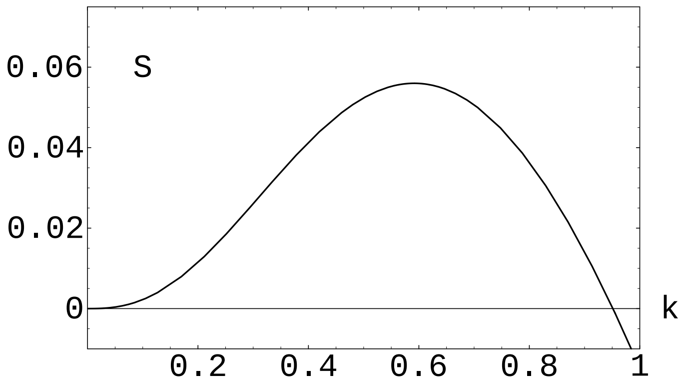
remember Hermann, Kroy, & Sauermann and Andreotti, Claudin & Doaudy :

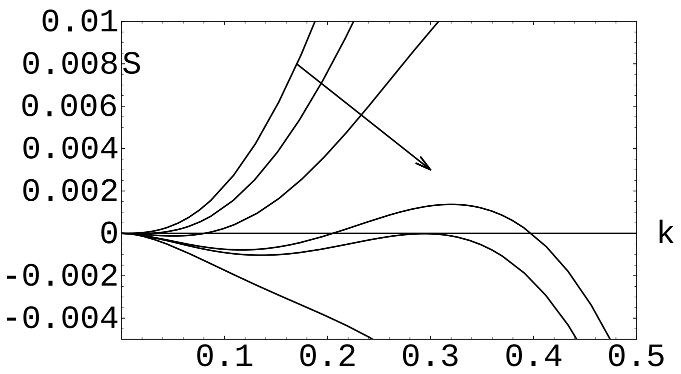
$$\tau = (\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'}{x - \xi} d\xi) + Bf'$$

$$FT[\tau] = \frac{FT[f]}{|k|} + (-ik)B\, FT[f]$$

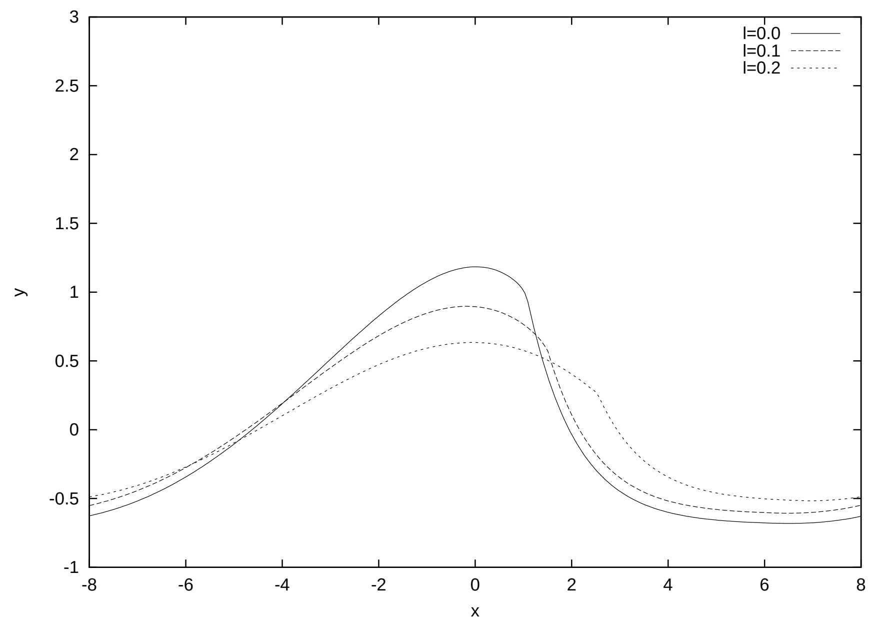
Stability analysis

– Infinite depth case (Hilbert case). The real part of σ for $\beta = l_s = \gamma = 1$ as function of the wave length k :
- on the left figure $\Lambda = 0$: there is no slope effect
- on the right figure, we focus on the small k which are amplified when $\Lambda = 0$, but are damped for $\Lambda > 0$ (following the arrow, from up to down $\Lambda = 0$, $\Lambda = 0.1$, $\Lambda = 0.2$, $\Lambda = 0.3$, $\Lambda = 0.316$ and $\Lambda = 0.4$).



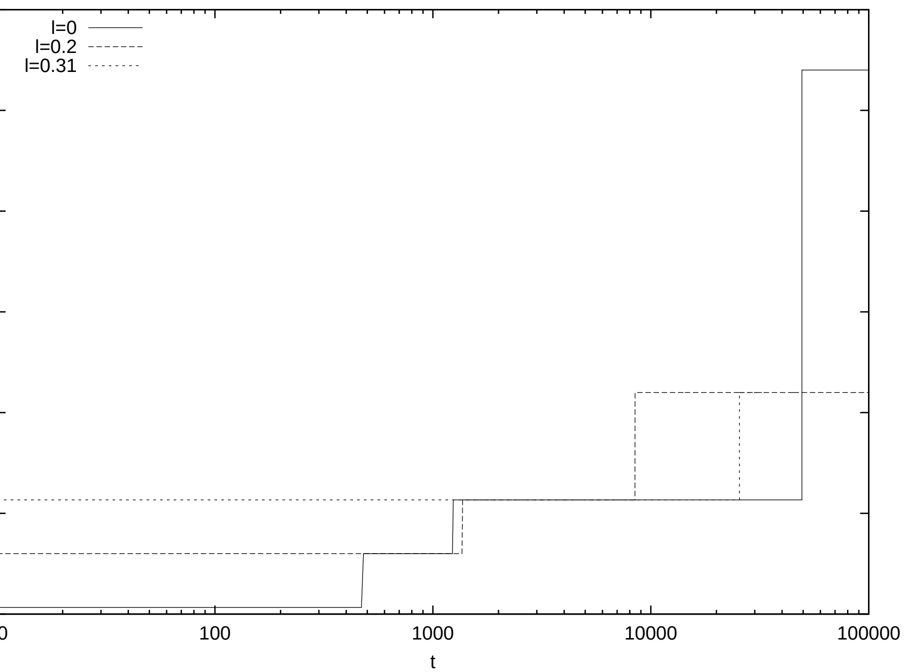


Slope effect : influence of Λ



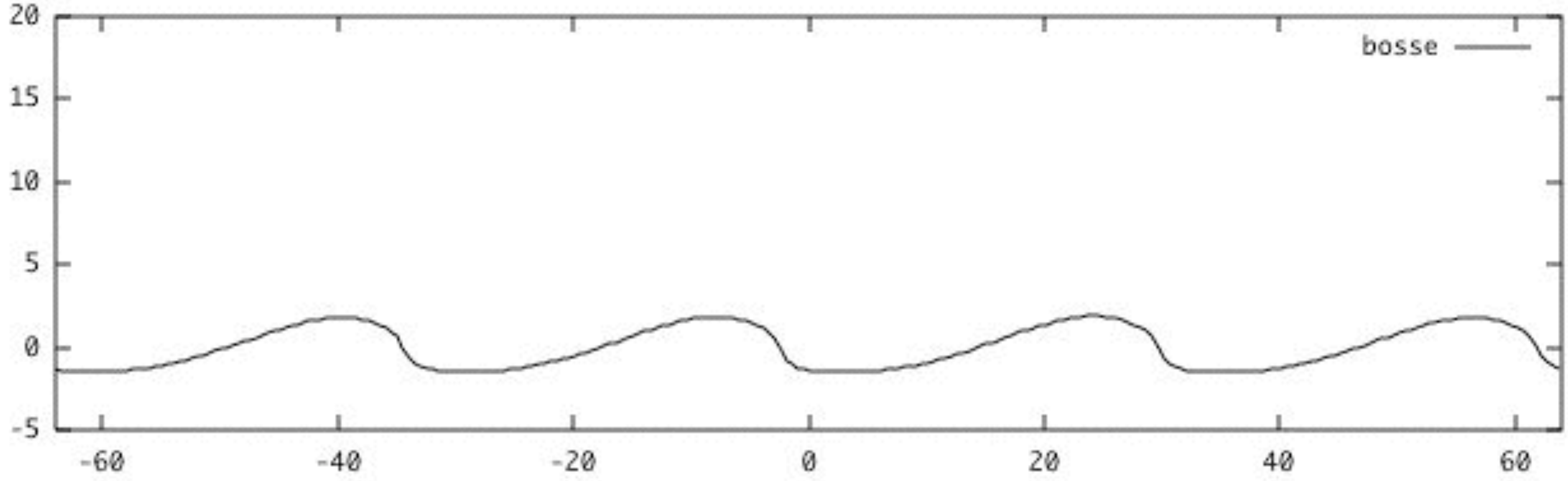
Bump shape $t = 500$, (4 bumps coexist with $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $l_s = 1$, $\tau_s = -0.05$), $\Lambda = 0$, $\Lambda = 0.1$ and $\Lambda = 0.2$ (the curves are shifted to place the maximum at the origin)

Coarsening process,Hilbert case



Examples of long time evolution of $2\pi/k$ the wave length value maximizing the bump spectrum (corresponding mostly to the number of bumps present in the domain). This is an infinite depth case for a domain of length $2L_x$. If $\Lambda = 0$, there is finally only one bump of size $2L_x$ (the largest possible). If $\Lambda < 0.316$, two bumps (of size L_x) are present, the larger are damped. If Λ is increased, there is no dune anymore as predicted by the linearized theory. Here $l_s = \beta = 1$, $L_x = 32$, $\tau_s = -0.25$. Notice that several bumps may live during a very long time : here in the case $\lambda = 0.31$, during a very long time $(10 < t < 25000)$ three bumps are present.

animation



20
15
10
5
0
-5
-60
-40
-20
0
20
40
60
bosse

Conclusion

– pas trop réaliste

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation

Conclusion

– pas trop réaliste
– mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
– ordres de grandeur corrects

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects
- temps de calcul assez court
- ”coarsening”

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects
- temps de calcul assez court
- ”coarsening”
- prédiction de la dépendance spéciale de la vitesse de la pseudo dune en $m^{-1/4}$

Conclusion

- pas trop réaliste
- mais justification du calcul du cisaillement (comparé à NS), qui autorise la séparation
- ordres de grandeur corrects
- temps de calcul assez court
- ”coarsening”
- prédiction de la dépendance spéciale de la vitesse de la pseudo dune en $m^{-1/4}$

Perspectives

– Application à un cas spécial : Hele Shaw
– Cas turbulent ”Interacting Boundary Layer”
– mieux comprendre le 3D
– application aux méandres

springen,

Zuruck zur vorher angezeigten Seite.