

CONTRAINTE DE CISAILLEMENT PARIETALE MAXIMALE DANS UNE STENOSE ARTERIELLE

**Sylvie LORTHOIS¹, Pierre-Yves LAGREE²,
Francis CASSOT³, Jean-Pierre MARC-VERGNES³**

(1) Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR CNRS 5502

Allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse Cedex

(2) Laboratoire de Modélisation en Mécanique, UMR CNRS 7607, 75252 Paris Cedex 5

(3) INSERM U455, C.H.U. Purpan, 31059 Toulouse Cedex

RESUME

La contrainte de cisaillement pariétale maximale (CCPM) dans une sténose est calculée par une méthode de couche limite interactive, en fonction des paramètres géométriques caractéristiques (degré de sténose et longueur) et du nombre de Reynolds de l'écoulement. Une relation extrêmement simple liant la CCPM et ces paramètres est proposée, permettant une évaluation bien plus exacte de cette contrainte que la loi de Poiseuille.

ABSTRACT

The maximal wall shear stress (MWSS) in a stenosis is calculated as a function of characteristic geometrical parameters (stenosis degree and length) and of flow Reynolds number, by the means of the interactive boundary-layer theory. A simple relationship between MWSS and these parameters is proposed, allowing an easy and much more accurate evaluation of it than the classical Poiseuille law.

**MOTS-CLES : STENOSE, CONTRAINTE DE CISAILLEMENT PARIETALE,
COUCHE LIMITE**

I. INTRODUCTION

Malgré une abondante littérature concernant l'intensité et les effets des contraintes de cisaillement pariétales dans les premiers stades du développement de l'athérosclérose et de la thrombose, peu d'auteurs se sont intéressés à l'évaluation des contraintes de cisaillement élevées rencontrées dans les lésions obstructives sévères. A notre connaissance, il n'existe pas de méthode simple qui permette le calcul de la contrainte de cisaillement pariétale maximale (CCPM), à partir des paramètres mesurables en pratique clinique. Les résultats des études numériques sont difficiles à exploiter, car ils sont valables pour des valeurs particulières des paramètres géométriques de la sténose (degré de sténose et longueur), la plupart du temps pour des degrés de sténose inférieurs à 70% en diamètre.

Dans cette étude, l'écoulement est calculé par une méthode de couche limite interactive, permettant de mettre en évidence la dépendance simple de la CCPM aux paramètres géométriques (degré de sténose et longueur) et au nombre de Reynolds.

II. METHODOLOGIES

1. Géométrie de la sténose

Le convergent de la sténose est considérée comme axisymétrique, la position radiale R de la paroi (adimensionnée par le rayon initial r_0^*) étant donnée par :

$$R(x) = -\delta \left(\frac{x}{\theta} \right)^4 + 2\delta \left(\frac{x}{\theta} \right)^2 + 1 - \delta, \quad (1)$$

où x et θ sont respectivement la coordonnée axiale et la longueur du convergent, adimensionnées par r_0^* , et δ est le degré de sténose (*i.e.* réduction relative du rayon au col).

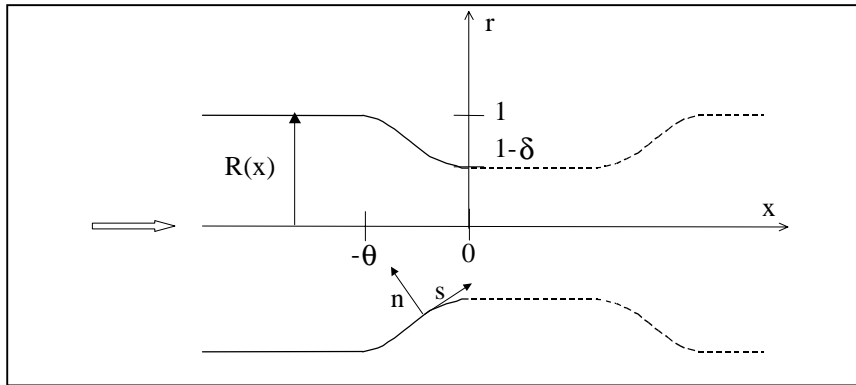


Figure 1 :

Géométrie et paramètres adimensionnels de la sténose.

2. Contrainte de cisaillement pariétale dans le convergent : méthode intégrale de couche limite interactive.

L'utilisation de la théorie de la couche limite interactive est basée sur l'hypothèse que la couche limite qui se développe sur la paroi interagit avec un noyau potentiel de fluide parfait, par la conservation totale du débit (voir Le Balleur 1978, par exemple). Si la courbure de la paroi est faible, la version adimensionnelle des équations de couche limite (Schlichting 1979) et de la conservation du débit, écrites en coordonnées de Mangler (Schlichting 1979) sont respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= U_e \frac{dU_e}{dX} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

et

$$U_e \left(R - \frac{\sqrt{2}\Delta_1}{R\sqrt{Re_0}} \right)^2 = 1, \quad (3)$$

où U et V sont les composantes de la vitesse suivant les directions X et Y (coordonnées de Mangler), U_e est la vitesse à l'extérieur de la couche limite (et dans tout le noyau de fluide parfait), Re_0 est le nombre de Reynolds basé sur le diamètre initial et la vitesse moyenne à l'entrée de la sténose, et Δ_1 est l'épaisseur de déplacement définie par :

$$\Delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dY \quad (4)$$

Ce système est simplifié en écrivant la forme intégrale de l'équation de quantité de mouvement (obtenue par son intégration suivant Y entre 0 et l'infini) :

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{\Delta_1}{H} \right) + \left(1 + \frac{2}{H} \right) \Delta_1 \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dX} = \frac{f_2 H}{\Delta_1 U_e}, \quad (5)$$

où H est le facteur de forme et f_2 le coefficient de frottement.

Le système d'équations différentielles ordinaires (3) et (5) d'inconnues Δ_1 et U_e , est fermé en supposant que localement, le profil de vitesse peut être approximé par un des profils de la famille de Falkner-Skan (Gersten and Hervig 1992). Le rôle du gradient de pression dans l'écoulement potentiel (représenté par Λ_1 , voir Eq. (6)) et de la condition de non-glissement à la paroi sont par conséquent pris en compte. Les lois de fermeture approximatives, déduites par intégration numérique (Runge-Kutta 4) de l'équation d'autosimilarité, sont les suivantes

$$\Lambda_1 = \Delta_1^2 \frac{dU_e}{dX}, \quad H = \begin{cases} 2,5905e^{-0,37098\Lambda_1} & \Lambda_1 < 0,6 \\ 2,0735 & \Lambda_1 \geq 0,6 \end{cases}, \quad f_2 = 0,9396 \left(\frac{4}{H^2} - \frac{1}{H} \right). \quad (6)$$

La géométrie de la sténose (*i.e.* θ and δ), l'épaisseur de déplacement à l'entrée Δ_{1_0} et le nombre de Reynolds Re_0 étant donnés, le système [(3); (5)] fermé par (6) est résolu numériquement par une méthode prédicteur / correcteur. La contrainte de cisaillement pariétale τ_w (adimensionnée par la valeur de la contrainte de Poiseuille à l'entrée), s'écrit :

$$\tau_p = \frac{1}{4\sqrt{2}} f_2 H \frac{U_e R}{\Delta_1} \sqrt{Re_0} \quad (7)$$

La valeur de la CCPM est alors calculée. La relation entre la CCPM et θ , δ , Δ_{1_0} et Re_0 est étudiée par une analyse de régression par la méthode des moindres carrés.

III . RESULTATS

1. Validation de la méthode IBL intégrale pour le calcul de la CCPM

a. Choix de la condition d'entrée : L'existence d'un noyau potentiel implique que l'épaisseur de déplacement (dimensionnelle) de la couche limite soit toujours inférieure au tiers du rayon de la sténose. L'hypothèse classique d'un profil de vitesse parabolique (Siegel et al. 1994, Huang et al. 1995) à l'entrée du convergent est donc incompatible avec la méthode de couche limite interactive. Certains auteurs ont fait l'hypothèse d'un profil plat (Back and Crawford 1992). En réalité, la couche limite croît depuis l'origine de l'artère, et son épaisseur est inconnue à l'entrée de la sténose. C'est pourquoi l'influence de l'épaisseur de déplacement en entrée sur les valeurs de la contrainte de cisaillement pariétale dans le convergent a été étudiée, pour Re_0 entre 400 et 2000, δ entre 0,3 et 0,9 et θ entre 3 et 12. Les résultats obtenus dans une sténose de 70% sont présentés Figure 2 : quelle que soit la valeur initiale de l'épaisseur de déplacement dimensionnelle (entre $0,01 r_0^*$ et $0,3 r_0^*$), les courbes de la contrainte de cisaillement pariétale sont superposées dans la partie avale du convergent, où Λ_1 est supérieur à 0,6 : l'accélération est telle que les profils imposés en entrée s'aplatissent. La CCPM est donc indépendante de l'épaisseur de déplacement à l'entrée, et donc du profil de vitesse choisi, ce qui justifie l'utilisation de la méthode IBL.

b. Comparaison avec les solutions obtenues par résolution des équations de Navier-Stokes : Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats de Siegel et al. (1994) et Huang et al. (1995) qui ont résolu numériquement les équations de Navier-Stokes pour des écoulements Newtoniens axisymétriques dans des sténoses modérées (Figure 3). L'écart

maximal entre les CCPM obtenues dans des sténoses de caractéristiques identiques est de 8,5%.

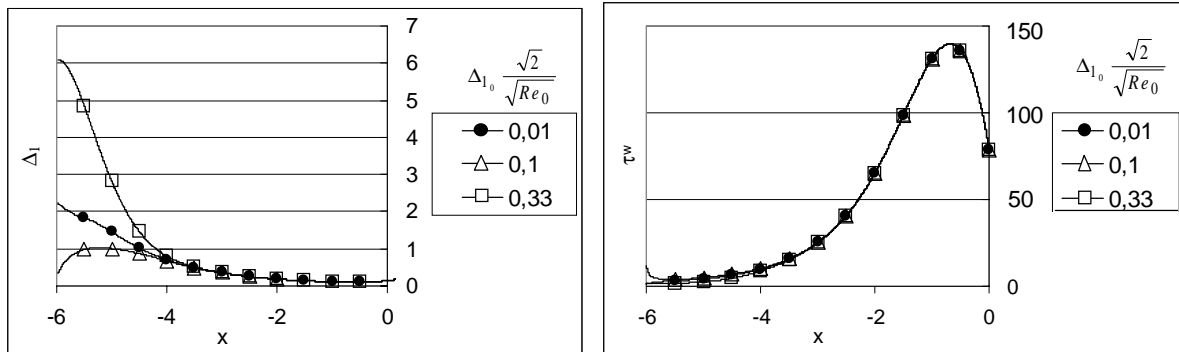


Figure 2 :

Δ_1 et τ_p en fonction de x dans une sténose ($\delta=0,7$ $\theta=6$) avec $Re_0=1000$ pour différentes valeurs de l'épaisseur de déplacement initiale.

2. Analyse de la dépendance de la CCPM aux paramètres

a. *Analyse heuristique* : La CCPM étant obtenue dans la partie avale du convergent, où le paramètre Λ_1 est supérieur à 0,6, les paramètres f_2 et H sont constants (voir Eq. (6)). Comme

$$\frac{\Delta_1}{R\sqrt{Re_0}} \ll R, \tag{8}$$

l'équation (3) donne, au premier ordre :

$$U_e \approx \frac{1}{R^2} \left(1 + 2\sqrt{2} \frac{\Delta_1}{R^2\sqrt{Re_0}} \right). \tag{9}$$

En écrivant l'hypothèse classique de couche limite (qui relie l'épaisseur de déplacement locale au nombre de Reynolds local $Re(x)$ dans le noyau potentiel (Schlichting 1979)), en variables adimensionnelles dans le repère de Mangler, on obtient :

$$\Delta_1(x) \approx Rx \frac{\sqrt{Re_0}}{\sqrt{2Re(x)}}. \tag{10}$$

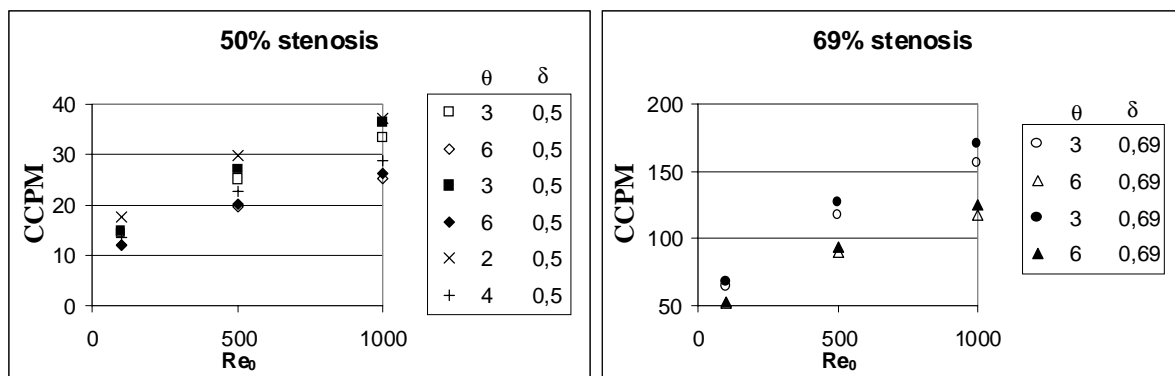


Figure 3 :

CCPM adimensionnelle.

Symboles ouverts : Méthode IBL intégrale ;

Symboles pleins : Siegel et al. (1994) ; Croix : Huang et al. (1995)

La position axiale de la MWSS est légèrement en amont du col de la sténose, donc $x \approx \theta$ et :

$$\Delta_1 \approx R^2 \sqrt{\theta}. \quad (11)$$

Par conséquent, en utilisant les équations (9) et (11), l'équation (7) conduit à :

$$CCPM \approx k \left(\frac{1}{R_{col}^3} \frac{\sqrt{Re_0}}{\sqrt{\theta}} + \frac{2\sqrt{2}}{R_{col}^3} \right), \quad (12)$$

où k est une constante et $R_{col} = (1 - \delta)$.

b. Analyse de régression : dans le but d'affiner la relation obtenue ci-dessus, les résultats numériques du calcul de la CCPM ont été exploités. La première étape a été l'étude de la relation entre la CCPM et $\sqrt{Re_0}$, pour δ entre 0,3 and 0,9 et θ entre 3 and 12. L'analyse de régression (méthode des moindres carrés) a montré que cette dépendance est linéaire :

$$CCPM = a(Re_0)^{0,5} + b. \quad (13)$$

Le coefficient de corrélation était dans tous les cas supérieur ou égal à 0,999. La dépendance entre les paramètres $a\sqrt{\theta}$ et b ainsi obtenus (qui peuvent être considérés comme indépendants de θ , puisque l'écart maximal à la moyenne est respectivement inférieur 1,1 et 2,9%) et les valeurs correspondantes de δ a ensuite été recherchée. La fonction d'interpolation choisie d'après l'équation (12) est de la forme suivante :

$$\frac{K\delta^p}{(1-\delta)^\xi} \quad (14)$$

où K et ξ sont des réels positifs et p est un entier. Les résultats obtenus par la méthode des moindres carrés sont présentés Table (1).

	K	p	ξ	χ^2 square	Coefficient de corrélation
$a(\theta)^{0,5}$	0,441	2	2,975	7,214	1,000
b	0,705	0	2,984	0,146	1,000

Table 1. :

Paramètres K , p and ξ (voir Eq. (14)) et coefficients de régression.

Finalement, la relation liant la CCPM, les paramètres géométriques et le nombre de Reynolds de l'écoulement est la suivante :

$$CCPM = \frac{0,44}{(1-\delta)^{2,97}} \frac{\delta^2}{\theta^{0,5}} Re_0^{0,5} + \frac{0,70}{(1-\delta)^{2,98}}. \quad (15)$$

IV . DISCUSSION ET CONCLUSION

La relation simple obtenue ci-dessus est basée sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, en comparaison de la complexité physiopathologique. Les principales simplifications sont de considérer le sang comme Newtonien, l'écoulement comme permanent, et la sténose comme axisymétrique avec une faible courbure et une paroi lisse et rigide. En réalité, le sang n'est pas newtonien, mais ses propriétés élastiques n'affectent pas la valeur des contraintes de cisaillement pariétales en conditions artérielles (Brookshier and Tarbell, 1991). L'importance relative de l'instantanéité de l'écoulement devant le

comportement quasi-statique peut être évaluée par une analyse dimensionnelle à partir des résultats de Pedley (1972). Par exemple, dans le cas des sténoses carotidiennes, en prenant les valeurs numériques obtenues par Zagzoule et Marc-Vergnes (1986) et Cassot et al (1995) cette importance relative vaut environ 15%, 10%, 7% et 5% pour une sténose de 30%, 50%, 70% et 85%. L'épaississement intimal des artères sténosées diminuant l'élasticité de la paroi, et avec les fluctuations de pressions rencontrées dans les carotides (Zagzoule and Marc-Vergnes 1986), les variations de rayon dans ce type de sténose sont inférieures à 1,5%. L'hypothèse de faible courbure est assez peu restrictive, puisque le rayon initial est généralement petit devant la longueur des sténoses. Les deux dernières hypothèses sont la géométrie axisymétrique et lisse. Cependant, elles étaient nécessaires pour permettre l'utilisation de la théorie de la couche limite interactive et pour conduire l'analyse heuristique qui a permis d'expliquer la dépendance simple de la CCPM aux paramètres géométriques et au nombre de Reynolds. Les résultats de Siegel et al. (1994) ont pu être expliqués et étendus à une gamme plus large de degrés de sténose (en particulier pour les sténoses sévères), grâce à une méthodologie beaucoup plus simple, et un gain important en temps de calcul.

L'intérêt principal de la relation (15) est que tous les paramètres nécessaires au calcul de la CCPM sont mesurables soit dans le cas d'expériences *in vitro*, soit en pratique clinique, permettant une évaluation simple et bien plus exacte de cette contrainte que la relation de Poiseuille souvent utilisée. Cette relation semble donc particulièrement intéressante pour l'étude du rôle des contraintes de cisaillement élevées rencontrées dans les lésions occlusives avancées, dans les processus d'ulcération et de rupture de plaque et les mécanismes thrombo-emboliques.

REFERENCES

- Back, L.H and Crawford, D.W. (1992) Wall shear stress estimates in coronary artery constrictions. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* **114**, 515-520.
- Brookshier, K. and Tarbell, J. (1991) Effect of hematocrit on wall shear rate in oscillatory flow : do the elastic properties of blood play a role ? *Biorheology* **28** : 569-587.
- Cassot, F. Vergeur, V. Bossuet, P. Hillen, B. Zagzoule M. and Marc-Vergnes, J.P. (1995) Effects of anterior communicating artery diameter on cerebral hemodynamics in internal carotid artery disease : a model study. *Circulation* **92**, 3122-3131.
- Gersten, K. and Hervig, H. (1992) *Strömungsmechanik : Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*. Vieweg, Wiesbaden.
- Huang, H. Modi, V.J. and Seymour, B.R. (1995) Fluid mechanics of stenosed arteries. *International Journal of Engineering Science* **33**, 815-828.
- Le Balleur, J.C. (1978) Couplage visqueux non-visqueux : Méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques et supersoniques. *La recherche Aérospatiale*. **1978-2**, 67-76, Eng Trans ESA TT-496.
- Pedley, T.J. (1972) Two-dimensional boundary layer in a free stream which oscillates without reversing. *Journal of Fluid Mechanics* **55**, 359-383.
- Schlichting, H. (1979) *Boundary-layer theory*. Seventh edition, McGraw-Hill, New-York.
- Siegel, J.M Markou, C.P. Ku, D.N. and Hanson, S.R (1994) A scaling law for wall shear stress through an arterial stenosis. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* **116**, 446-451.
- Zagzoule, M. and Marc-Vergnes, J.P. (1986) A global mathematical model of the cerebral circulation in man. *Journal of Biomechanics* **19**, 1015-1021.