SOCIÉTÉ FRANCAISE DES THERMICIENS

JOURNEE D'ETUDE DU 16 MARS 1994

SUR

LES PHENOMENES CHAOTIQUES ET LA TRANSITION EN CONVECTION THERMIQUE

INFLUENCE AMONT DANS UN ÉCOULEMENT DE CONVECTION THERMIQUE MIXTE À FAIBLE NOMBRE DE RICHARDSON DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DE LA TRIPLE COUCHE.

Par Pierre- Yves LAGRÉE
Laboratoire de Modélisation en Mécanique
URA CNRS 229 Université Paris 6
B 162
4 Place Jussieu
75252 PARIS CEDEX 5

Résumé
Les écoulements de convection thermique mixte sur une plaque plane présentent une singularité lorsque la plaque est plus froide que le fluide, aussi nous nous proposons d'examiner la naissance de cette singularité en mettant en oeuvre la technique de la "triple couche". Un terme supplémentaire traduisant le nivellement barométrique et caractérisant l'interaction apparaît alors dans la classique relation pression- déviation. La solution linéarisée du "problème canonique" mis en évidence est effectuée, elle montre l'influence de l'amont de l'écoulement sur l'aval par l'intermédiaire de fonctions propres. L'influence de la température sur les ondes de Tollmien Schlichting est ensuite examinée.

introduction

Est appellée convection mixte, l'interaction, par la force d'Archimède modélisée par le terme de Boussinesq, entre un écoulement et une paroi portée à une température différente de celle du fluide. Il a été montré (SCHNEIDER & WASEL 85, DANIELS 92) que ce problème, traîté avec la description de couche limite se terminait, lorsque l'on suit le flot, par une singularité en une certaine abscisse. Nous proposons, lorsque le nombre de Richardson (qui jauge le couplage entre les aspects thermiques et dynamiques) est très petit, une interaction de "triple couche" (NEILAND 69, BROWN, STEWARTSON & WILLIAMS 75). Cette interaction provoque des solutions autoinduites et de l'influence amont dans le cas d'une paroi plus froide que le fluide. Mais auparavant, nous proposons les solutions linéarisées, déduites du modèle dégagé, de l'écoulement perturbé par une tache thermique (et/ou une bosse) sur la plaque, maintenue par ailleurs à température constante. La même approche linéarisée , mais instationnaire (SMITH 79), permet de mettre en évidence les ondes de Tollmien Schlichting et la nouvelle courbe de stabilité marginale .

1 Écoulement de base

L'écoulement de base est celui d'une couche limite de Blasius (avec les notations classiques: la vitesse de l'écoulement amont U_∞ sert de jauge de vitesse longitudinale, soit L l'échelle de longueur, la couche limite est jaugée par δL avec $\delta = Re^{-1/2}$ où Re est le nombre de Reynolds) générant une couche limite thermique de convection forcée puisqu'il y a un écart de température (noté ΔT_0) entre la paroi maintenue à T_0 et le fluide dont la température amont est T_∞ (la température de base s'écrit donc: $T_\infty + (T_0 - T_\infty)\theta_0$, et on pose $(T_0 - T_\infty) = \Delta T_0$. L'échelle de longueur L a en effet été choisie de manière à ce que le couplage thermique (dans le cadre de l'approximation de Boussinesq) par la variation transverse de la pression, soit très faible, on a:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = J\theta \text{ avec } J = \frac{g\alpha\Delta T_0}{U_\infty^2}\frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \text{ et } 1 >> J >> \mathrm{Re}^{-1} \qquad (1.1,\ 1.2)$$

où J est le nombre de Richardson. Celui ci est supposé très petit (mais plus grand que Re^{-1}). Cela signifie que nous nous donnons L (par exemple, c'est la position d'une tache thermique). En général, dans le problème de convection mixte strict, il n'y a pas de longueur caractéristique, et celle ci est justement choisie en prenant J égal à un. Or SCHNEIDER & WASEL 85 et DANIELS 92 montrent que la singularité se produit pour une valeur petite de leur abscisse adimensionnée (6.E-3 et 0.14, suivant les cas: paroi isotherme ou athermane), ce qui veut dire, qu'avec cette longeur comme échelle, le nombre de Richardson associé est petit (racine carrée de ces valeurs), il n'est donc pas déraisonnable d'étudier ce qui se passe aux faibles valeurs de J.

2 Interaction de triple couche

2.1 Pont Principal

La démarche classique est adoptée: soit εU_∞ l'ordre de grandeur de la perturbation de vitesse longitudinale localisée en abscisse (soit $x_3 L$ la jauge de triple couche), ε est inconnu, dans la couche limite, où y est mesuré par δL l'épaisseur de couche limite. La conservation de la quantité de mouvement, et l'incompressibilité nous fournissent immédiatement la vitesse en faisant apparaître la fonction de déplacement, pour l'instant indéterminée, $-A(x)$, tandis que l'équation de l'énergie nous permet de déduire que la perturbation de température est résolue *explicitement* (θ_0 est le profil de base auto semblable) sa jauge étant celle de la perturbation de vitesse, d'où finalement:

$$U = U_0(y) + \varepsilon A(x)U_0'(y); \quad v = -\frac{\varepsilon\delta}{x_3}A'(x)U_0(y);, \quad \text{et } T = \theta_0(y) + \varepsilon A(x)\theta_0'(y)\ . \qquad (2.1,\ 2.2,\ 2.3)$$

Tout comme pour la vitesse, bien entendu, la valeur de cette température en $y=0$ va se raccorder dans le haut du pont inférieur. On reconnait là, la même expression que dans le cas de la fonction S de Stewartson (enthalpie totale, cas des écoulements hypersoniques, BROWN, STEWARTSON & WILLIAMS 75). C'est le déplacement des lignes de courant qui produit cette solution.

2.2 "traversée" du pont principal et pont supérieur:

Le couplage entre la couche limite thermique et la couche limite dynamique s'effectue par l'intermédiaire du gradient transverse de pression. En anticipant sur la suite, la pression dans le pont inférieur est d'ordre ε^2, et $x_3 = \varepsilon^3$, donc le développement de la pression dans le pont principal (en posant $J = \varepsilon\tilde{J}$, avec $\tilde{J} = O(1)$), s'écrit à l'ordre 2:

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon\tilde{J}(\theta_0(y) + \varepsilon A(x)\theta_0'(y)). \qquad (3)$$

Le premier gradient transverse est nul, c'est celui de la couche limite de départ. Le second montre qu'il existe un nivellement de pression associé au profil de température de base ($\tilde{J}\int_0^\infty \theta_0(y)dy$), cette variation ne dépend pas de x à l'échelle courte considérée, et donc n'intervient pas dans les équations du pont principal. Enfin, le troisième gradient transverse s'intègre:

$$p(y \to \infty) - p(y \to 0) = \tilde{J}A(x)(\theta_0(\infty) - \theta_0(0)) = -\tilde{J}A(x) \qquad (4)$$

où $p(y \to 0)$ et $p(y \to \infty)$ sont les valeurs de la pression qui se raccordent avec celle du pont inférieur, et respectivement du pont supérieur. Pour cette dernière il s'agit de l'intégrale de Hilbert de la fonction de déplacement (dans le cas subsonique):

$$\left(\frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon^3}\right)\frac{1}{\pi}\int \frac{-A'}{x-\xi}d\xi. \qquad (5)$$

Le couplage thermique introduit donc une variation de pression transverse absente de la triple couche classique.

2.3 nouvelle relation pression- déviation

Si le pont principal reste privilégié, alors $\varepsilon=\delta^{-1/4}=R^{-1/8}$, et:

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{-A'}{x-\xi}d\xi = p - \tilde{J}A, \qquad (6)$$

la relation liant le déplacement et la pression est donc affectée d'un terme qui peut être d'ordre un et qui représente le nivellement de la pression au travers du pont principal.

<u>Remarque</u>: Si le nombre de Richardson relatif augmente, il est judicieux de garder J (en effet le choix de $Re^{-1/8}$ privilégie l'interaction de fluide parfait, linéarisée, du pont supérieur; en hypersonique (BROWN, STEWARTSON & WILLIAMS 75) un phénomène similaire se produit), donc $\varepsilon = |J|$. Au travers du pont principal, la relation pression déviation devient alors:

$$\left(|J|^{-4}\,\mathrm{Re}^{-1/2}\right)\frac{1}{\pi}\int \frac{-A'}{x-\xi}d\xi = (p \pm A), \qquad (7)$$

donc, si J est assez grand, le pont supérieur n'intervient plus, l'interaction est plus étendue longitudinalement, en revanche elle l'est moins transversalement car elle reste confinée dans la couche limite dont l'épaisseur ne varie plus. Si la paroi est froide J est négatif: le profil statique est stable, (respectivement chaude, J positif), il vient tout simplement :

$$\mathrm{Re}^{-1/8} << |J| << 1, \qquad p=-A, \qquad \text{respectivement} \qquad p=A. \quad (8.1,\ 8.2,\ 8.3)$$

2.4 équations de pont inférieur

On rappelle que u est d'ordre ε, p d'ordre ε^2, la jauge x_3 est, elle, d'ordre ε^3. Le raccord de la perturbation de température laisse penser que celle ci est de même ordre que la vitesse u. La variable y, est maintenant εy (ε fois la précédente).

2.4.1 premier cas, pas de tache thermique,

on retrouve:

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v = 0. \qquad \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u = -\frac{d}{dx}p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u,\ \left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)T = \frac{\partial^2}{\partial y^2}T. \qquad (9.1, 9.2, 9.3)$$

avec l'adhérence à la paroi, et à l'infini en y: $u \to y + A,\ T \to y + A,\ A(-\infty) = 0.$

2.4.2 second cas tache thermique

Un accident thermique, pour rester cohérent avec les jauges précédentes doit être d'ordre ε dans le pont inférieur, le gradient transverse de pression reste négligeable puisque J est petit. Mais si la température est perturbée plus fortement, il en est tout autrement. Disons que localement, sur une échelle x_3, (qui est celle de la triple couche) la température varie et passe de T_0 à T_0+T_w, alors il est judicieux d'utiliser la valeur $((T_w/\Delta T_0)\Delta T_0) = T_w$, au lieu de $(\varepsilon(\Delta T_0))$comme nouvelle jauge de variation de température (et $T_w >> \varepsilon\Delta T_0$). L'équation de convection diffusion de la température reste inchangée, (car linéaire, on vérifie bien, dans cette équation, que le gradient initial de température est d'ordre ε), mais le gradient de pression peut ne plus être négligeable si $j = \tilde{J}T_w / \Delta T_0$ (c'est le deuxième nombre de Richardson, ce dernier est associé à l'accident, le premier est associé à l'écoulement de base) est d'ordre un, dans ce cas:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = j\theta \text{ , d'où } \quad -\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = -\frac{dp(x)}{dx} + j\int_y^\infty \frac{\partial \theta(x,y)}{\partial x} dy. \qquad (11)$$

Où *p(x)* est la pression en haut du pont inférieur (en bas du pont principal).
La température est jaugée par:

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty)(1 + \frac{T_w}{T_0 - T_\infty}\theta) = T_0 + T_w\theta \qquad (12)$$

Le raccord entre les pont inférieur et supérieur devient $1 + \frac{T_w}{T_0 - T_\infty}\theta(y \to \infty) = 1 + \varepsilon(y + A(x))\theta_0'$, et comme la température est très forte à la paroi (T_W,>>$\varepsilon\Delta T_0$), la température θ est donc nulle à l'infini. D'où il vient le problème de pont inférieur suivant (très similaire à ZEYTOUNIAN 91)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;\ (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})u = -\frac{d}{dx}p + j\int_y^\infty \frac{\partial \theta}{\partial x}dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u\ ,\ (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})\theta = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\theta; \quad (13)$$

avec comme conditions aux limites l'adhérence à la paroi, et la température imposée, et à l'infini en *y*, $u \to y + A$, mais, $\theta \to 0$, et $A(-\infty) = 0$.

3 problèmes "canoniques" dégagés

3.1 Premier problème:

Tant que la variation de la température de paroi reste faible, et que le nombre de Richardson reste d'ordre $\mathrm{Re}^{-1/8}$, on a le problème de triple couche classique (9) où $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/8}$,, avec un terme de correction d'ordre un dans la relation de pression déviation (6) (le détail de la température, scalaire passif, est sans importance dans le pont inférieur).

3.2 Second problème:

La température de paroi varie brusquement d'une valeur d'ordre un, le second (il y a ici deux effets de température:) nombre de Richardson *j* (construit avec la température de l'accident thermique) est d'ordre un dans le pont inférieur, (dans le pont principal cette température n'a pas encore eu le loisir d'être diffusée), on a donc (13) et (6).
De plus, dans les deux cas, si *J* augmente, on prend $\varepsilon = J$, et $p = +/- A$ (au lieu de (6)).

4 résolution linéarisée, solutions auto induites,

Le système (13) admet la solution de Blasius $u = y$ comme solution triviale, partant de cette solution de base, la résolution linéarisée fournit après transformation de Fourier en *x*:

$$i\alpha\,\tilde{u} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \qquad i\alpha\,\tilde{u} + \tilde{v} = -i\alpha\,\tilde{p} + j\int_y^\infty i\alpha\,\tilde{T}dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{u}, \qquad i\alpha\,\tilde{T} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{T} \qquad (14)$$

La perturbation du frottement pariétal $\tilde{\tau} = \partial\tilde{u}/\partial y$ vérifie une équation différentielle d'Airy forcée par la température qui est elle même une fonction d'Airy:

$$\tilde{T} = Ai(y(i\alpha)^{1/3}) \qquad (15)$$

On en déduit d'une part l'expression du frottement pariétal :

$$\frac{\partial}{\partial y}u(0) = 1 + \frac{(i\alpha)^{2/3}\tilde{p}}{Ai'(0)} - j(i\alpha)^{1/3}(\frac{Ai(0)}{3Ai'(0)} - Ai'(0)) \qquad (16)$$

puis d'autre part, la fonction de déplacement (*F* est la transformée de Fourier de la paroi):

$$A+F=\frac{(i\alpha)^{1/3}\tilde{p}}{3Ai'(0)}-j(Ai(0)+\frac{1}{9Ai'(0)}). \qquad (17)$$

Dans cette relation pression- déviation, avec effet de température (écrit ensuite sous la forme $A+F=\beta^{*}p+j\beta_j)$, on constate qu'à un j négatif correspond donc une diminution de frottement, et un déplacement -A positif, donc un épaississement. La relation (6) s'écrit, après tranformée de Fourier:

$$p=(|\alpha|+\tilde{J})A. \qquad (18)$$

On en déduit la solution pour la pression (attention il s'agit de la pression à l'infini en haut du pont inférieur):

$$p=\frac{(|\alpha|+\tilde{J})}{1-(|\alpha|+\tilde{J})\beta^{*}}(j\beta_j-F). \qquad (19)$$

4.1 solution auto induites

Dans le cas de la paroi froide, la relation obtenue ($p=-A$) est la même qu'en hypersonique BROWN, STEWARTSON & WILLIAMS 75 et GAJJAR & SMITH 83, aussi des solutions auto induites, au comportement amont en exponentielle croissante, peuvent être générées: $p = a\, e^{kx}$, $k= (-3Ai'(0))^3$ leur interprétation est celle du phénomène de blocage (forte influence amont observée dans les écoulements stratifiés se traduisant par une déviation des lignes de courant sur une distance grande devant l'obstacle perturbateur). Il est dailleurs remarquable que l'interaction observée par DANIELS & GARGARO 93 est du type ($p=-A$), ils se placent eux, à nombre de Richardson d'ordre un, et la solution qu'il obtiennet est en puissance de x.

4.2 Stabilité

Le cas de la paroi chaude est quant à lui propice aux instabilités: il s'agit de chercher des solutions instationnaires modulées par $e^{i(\alpha x-\omega t)}$. On rajoute le terme en $\partial/\partial t$ dans le système (9.1, 9.2, 9.3) et la résolution linéarisée nous fournit (par analogie avec les ondes de Tollmien Schlichting, que l'on retrouve pour $\tilde{J}$ nul, mises en évidence par SMITH 79):

$$(|\alpha|+\tilde{J})=(i\alpha)^{-1/3}Ai'(\xi_0)/\int_{\xi_0}^{\infty}Ai(\xi)d\xi; \quad \xi_0=-i^{1/3}\omega\alpha^{-2/3}. \qquad (20)$$

La courbe de stabilité marginale est donc telle que $\omega = 2.3\ \alpha^{2/3}$, avec $\tilde{J}=1.001\,\alpha^{-1/3}-|\alpha|$, on a donc un mode non visqueux pour $\tilde{J}$ très négatif (mais on sort alors de la description que l'on s'est fixée), et un mode visqueux de grande longueur d'onde pour $\tilde{J}$ positif et grand (qui correspond à $p=A$), les variations de α et ω en fonction de $\tilde{J}$ sont présentées sur la figure 4.

5 Résolution numérique du problème stationnaire.

Une résolution linéarisée est proposée grâce à la relation (18). Pour fixer les idées les courbes de pression pour différents nombres de Richardson réduits $\tilde{J}$ sont proposées (figure 1) dans le cas de la bosse (de forme $(1-x^2)^2$) pour $\tilde{J}=-2,\ 0,\ 2$, puis (figure 2) dans le cas d'une tache froide (de même forme) pour $\tilde{J}=0,\ -1,\ -2$. En amont, pour la paroi froide, le phénomène de blocage peut être observé, il augmente avec $-\tilde{J}$. En aval des ondes sous le vent sont observées. figure 3, on a représenté l'interaction auto induite (résolution non linéaire), montrant la solution propre (p=-A) (cf GAJJAR & SMITH 83.

Conclusion

L'étude est à poursuivre notamment du point de vue de l'instabilité, l'école britannique est très active sur ce point, et caresse l'espoir d'étudier la transition en partant du comportement non linéaires des ondes TS (la relation (20) n'étant qu'une première étape linéaire), et du point de vue numérique dans le cas stationnaire de manière à effectivement calculer la séparation de la couche limite. L'interprétation physique du comportement de la couche limite n'est pas encore élucidée, s'agit il ici de la naissance d'un ressaut hydrolique interne comme le montrent certaines expériences numériques en convection naturelle (LE QUERE, ALZIARY DE ROQUEFORT 85), auquel cas la relation $p=-A$ est une bonne description de la naissance du ressaut (BOWLES & SMITH 92) mais cette relation ne permet pas de jauger son amplitude.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

R.I. BOWLES & F.T. SMITH "the standing hydraulic jump: theory, computations and comparisons with experiments" *J.F.M* v 242 pp 145-168 1992

S.N. BROWN, K. STEWARTSON & P.G. WILLIAMS "hypersonic self induced separation" *The Phys. of Fluids*, vol 18, No 6, June 1975.

P.G. DANIELS " Asingularity in thermal boundary- layer flow on a horizontal surface" *Fluid Mech* (1992) *vol* 242 *pp* 419- 440

PG DANIELS & R.J. GARGARO "Buoyancy effects in stably stratified horizontal boundary- layer flow"*J Fluid Mech* (1993) *vol* 250 *pp* 233- 251

J. GAJJAR & F.T. SMITH "On hypersonic self induced separation, hydraulic jumps and boundary layer with algebraic growth" Mathematika, 30, (1983) 77-93

P. LE QUERE, T. ALZIARY DE ROQUEFORT, "Computation of natural convection in Two dimensional cavities with chebyshev Polynomials" *J. of Comp. Physics* 57, 210- 228 (1985)

V. Ya NEILAND "Propagation of perturbation upstream with interaction between a hypersonic flow and a boundary layer. *Mekh. Zhid. Gaz.* Vol 4 pp 53-57 1969.

W. SCHNEIDER & M.G. WASEL "Breakdow of the boundary layer approximation for mixed convection above an horizontal plate" *Int J. Heat Mass Transfert.* Vol 28 No 12 pp 2307-2313, 1985

F.T. SMITH, "on the non parallel flow stability of the blasius boundary layer" *Proc Roy Soc Lond* A366 91- 109 (1979)

R. ZEYTOUNIAN "meteorogical fluid dynamics" lecture notes in physics m5, Springer Verlag 1991

7 Mars 1994