

# Disparition de la singularité de convection thermique mixte sur une plaque horizontale refroidie

**Pierre-Yves LAGRÉE**

Laboratoire de Modélisation en Mécanique  
U.M.R. 7607  
Université PARIS VI, Boîte 162  
4, Place Jussieu, F-75252 Paris  
mel: pyl@ccr.jussieu.fr

**Résumé** - La solution du problème de convection thermique mixte sur une plaque plane est présentée, la singularité qui apparaissait dans les résolutions précédentes est levée. En fait les équations ne sont pas paraboliques et doivent être résolues par une procédure globale. Suivant la condition de sortie une solution différente est calculée, certaines présentant une zone de recirculation, la structure mise en évidence est une sorte de ressaut hydrodynamique.

## 1. Introduction

Il s'agit de décrire l'écoulement stationnaire, bidimensionnel, laminaire sur une plaque plane refroidie (convection forcée) en tenant compte de la poussée d'Archimède (convection naturelle) qui agit ici transversalement à l'écoulement (figure 1). Si il est bien connu que la couche limite de convection naturelle a une solution de similitude, qui se développe en  $x^{1/2}$  et que la couche limite thermique de convection naturelle a, elle aussi, une solution de similitude, qui se développe en  $x^{2/5}$  ([1] et [2]), en revanche, la couche limite de convection "thermique mixte", qui superpose les deux effets, n'a plus de solution autosemblable. Une interprétation simple consiste à dire que le refroidissement par la paroi du fluide produit un gradient de pression adverse qui freine le fluide fortement.

Il a été montré par de nombreux auteurs ([3] et [4]) que la résolution du système d'équations de couche limite thermique mixte produisait une singularité (caractérisée par un frottement pariétal ayant une pente infinie) lorsque l'on résolvait les équations en partant du bord d'attaque et en suivant le flot. Curieusement la position de cette singularité dépend du mode de résolution choisi: une première approche est présentée par Steinrück [4] (voir figure 2). En fait il existe une famille de solution "propres", la solution n'est donc pas unique. Nous allons voir que la singularité est artificielle, elle est en fait due à une mauvaise résolution du système car des conditions aux limites ont été oubliées en aval et qu'à chacune de ces solutions propres correspond une condition avale différente.

## 2. Équations

### 2.1. Mise en oeuvre

On adimensionne les équations de Navier Stokes avec la longueur  $L$  position à laquelle on se place comme échelle longitudinale, l'échelle de vitesse longitudinale est  $U_\infty$ . Le nombre de Reynolds est alors  $Re = U_\infty L / \nu$ , il est supposé très grand. Pour garder le maximum de termes dans les équations (principe de moindre dégénérescence [5], dans le cadre de la méthode des développements asymptotiques raccordés) et notamment garder les effets inertiels et les effets visqueux transverses, il faut choisir  $L Re^{-1/2}$  comme échelle transversale. L'échelle de la

température est choisie en prenant l'écart entre la température de la paroi supposée fixée et la température de l'écoulement libre supposé uniforme au loin. Il apparaît finalement dans le système sans dimensions un terme que l'on note  $J$ , avec  $J = g \alpha (T_0 - T_\infty) \delta / U_0^2$ , il provient de l'effet de la gravité (dirigée suivant l'axe des  $-y$ ) et de la légère dilatabilité  $\alpha$  du fluide (on se place dans le cadre de l'approximation de Boussinesq). Ce terme est le rapport entre les effets de la force d'Archimède et de l'inertie du jet. L'influence de l'échauffement visqueux mesurée par le nombre d'Eckert  $E$  est négligée,  $E=0$ .

## 2.2. Système

Écrites en variables de couche limite:

$x = L \bar{x}$ ,  $y = \delta Re^{-1/2} \tilde{y}$ ,  $u = U_0 \tilde{u}$ ,  $v = U_0 Re^{-1/2} \tilde{v}$ ,  $p = p_0 + \rho U_0^2 \tilde{p}$ ,  $T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \tilde{T}$   
après adimensionalisation et après avoir fait tendre le nombre de Reynolds vers l'infini) les équations se lisent ( $Pr=O(1)$  et  $J=O(1)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \\ 0 &= - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + J \tilde{T}, \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} &= Pr^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont *a priori*:

- les conditions d'entrée:  $\tilde{u}(\bar{x}=0, \tilde{y})=1$  et  $\tilde{T}(\bar{x}=0, \tilde{y})=0$
- les conditions d'adhérence à la paroi:  $\tilde{u}(\bar{x}, 0)=\tilde{v}(\bar{x}, 0)=0$  et  $\tilde{T}(\bar{x}, 0)=1$
- les conditions de raccord:  $\tilde{u}(\bar{x}, \infty)=0$  et  $\tilde{T}(\bar{x}, \infty)=0$ .

Le paramètre  $J$  jauge l'effet relatif de la convection naturelle par rapport à la convection forcée.

## 2.3. Remarques

Si ce système est résolu par une "marche en avant" en  $x$ , on constate que dans le cas de la paroi refroidie, ( $J < 0$ ), des solutions explosives apparaissent (appelées aussi solution de branchement, voir figure 2).

La singularité observée par les différents auteurs peut être ré interprétée dans le cadre de la triple couche [6]. Deux structures peuvent alors être mises en évidence, une en double couche si  $|J| \ll 1$ , et une autre en simple couche si  $|J| = O(1)$ . Ces résultats sont une ré interprétation des résultats de Steinrück [7].

Cela montre que la résolution en marchant, qui pré suppose que les équations sont paraboliques en  $x$  est fautive. La triple couche démontre clairement qu'il faut introduire une condition supplémentaire en aval.

## 2.3. Système instationnaire

Après imposition d'une nouvelle condition aux limites *ad hoc* en sortie:  $\partial_x f(x=x_{out}, y)=0$ , (avec  $f = \tilde{u}, \tilde{T}, \tilde{p}$ ), et d'une condition initiale  $\tilde{u}=1, \tilde{T}=0, \tilde{p}=0$  en  $\tilde{t}=0$ , une version instationnaire

du système est posée (on ajoute simplement  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}$  à l'équation de quantité de mouvement et  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}$  à celle de la température).

### 3. Résultats

Suivant la dimension du domaine qui est choisie (notée  $x_{out}$  figure 3), on observe, après stationnarisation, plusieurs courbes de frottement pariétal (la valeur choisie est  $J=-0.025$ ). La naissance exponentielle de chacune des courbes de la figure 2 s'interprète alors comme une solution locale de triple couche explosant exponentiellement, puis (figure 3) comme une solution associée à une longueur de domaine différent. Certaines des solutions sont mènent à une séparation de la couche limite (courant de retour), les auteurs [3], [4] ne pouvaient pas calculer la séparation. L'épaisseur de déplacement de couche limite croît alors fortement (figure 4).

On peut alors faire une analogie entre ce phénomène et celui du ressaut hydrodynamique: le fluide est ralenti par le gradient de pression adverse provenant de l'épaississement de la couche limite et du refroidissement par la plaque (le cas de la plaque chaude produit un gradient favorable). Les équations du ressaut hydrodynamique, quoique plus simples, sont très semblables [7] et [8] à celles proposées.

### 4. Références

- [1] K. Gersten, H. Hervig, Strömungsmechanik: Grundlagen der Impuls-Wärme-und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht, Vieweg, Wiesbaden, 1992.
- [2] H. Schlichting , Boundary layer theory, 7th ed Mc Graw Hill, 1987.
- [3] W. Schneider & M.G. Wasel, Breakdown of the boundary layer approximation for mixed convection above an horizontal plate", Int. J. Heat Mass Transfert , Vol. 28, No 12, pp. 2307-2313, 1985.
- [4] H. Steinrück, Mixed convection over a cooledhorizontal plate: non-uniqueness and numerical instabilities of the boundary layer equations', J. Fluid Mech., vol 278, pp. 251-265, 1994.
- [5] M. Van Dyke, Perturbation methods in fluid mechanics, The Parabolic press, Standford, 1962.
- [6] P.-Y. Lagrée, Upstream influence in mixed convection at small Richardson Number on triple, double and single deck scales, 1994.
- [7] P.-Y. Lagrée, Removing the marching breakdown of the boundary layer equations for mixed convection above a horizontal plate, accepté par International Journal of Heat and Mass Transfer.
- [8] F. J. Higuera, The hydraulic jump in a viscous laminar flow, J. Fluid Mech., vol 274, pp. 62-92, 1994.

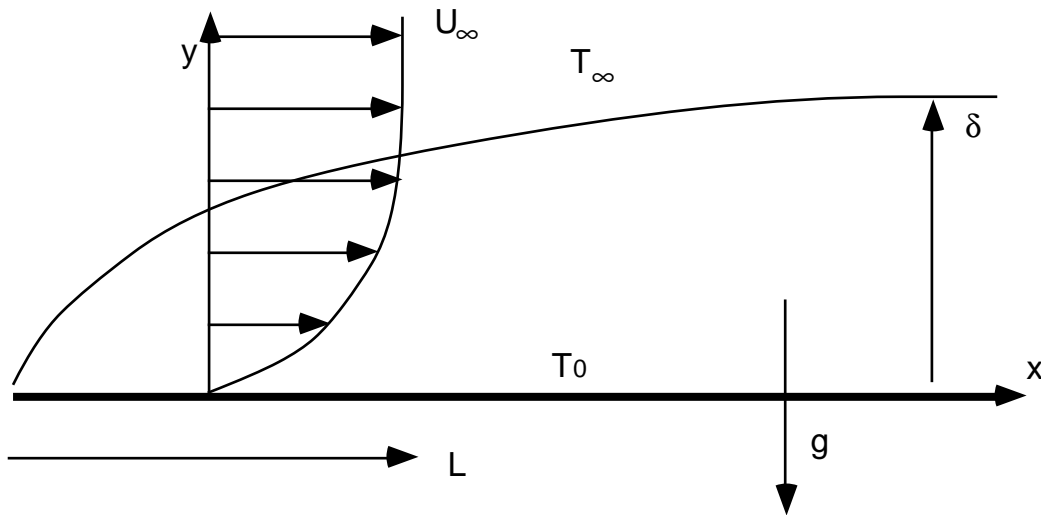


Figure 1: La plaque plane refroidie à la température  $T_0$  plongée dans un écoulement uniforme,  $\delta$  représente la couche limite qui se développe. Dans le cas de la convection thermique mixte, la résolution par une marche en avant produit une singularité.

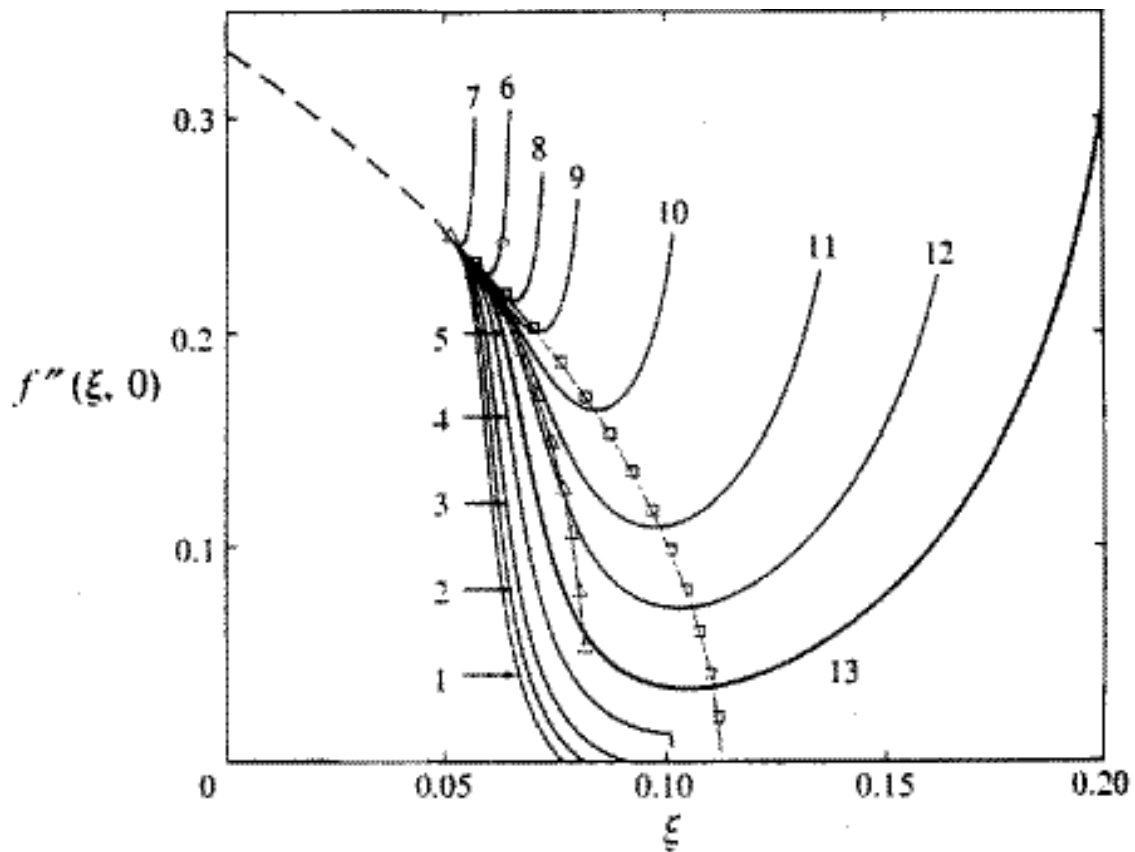


Figure 2: Le frottement pariétal réduit (pente de la vitesse à la paroi)  $f''(\xi, 0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(\bar{x}, 0) (\bar{x})^{1/2}$  fonction de  $\xi = |J| (\bar{x})^{1/2}$ . La résolution se fait par une marche en avant en  $(\bar{x})$  (Steinrück (1994))

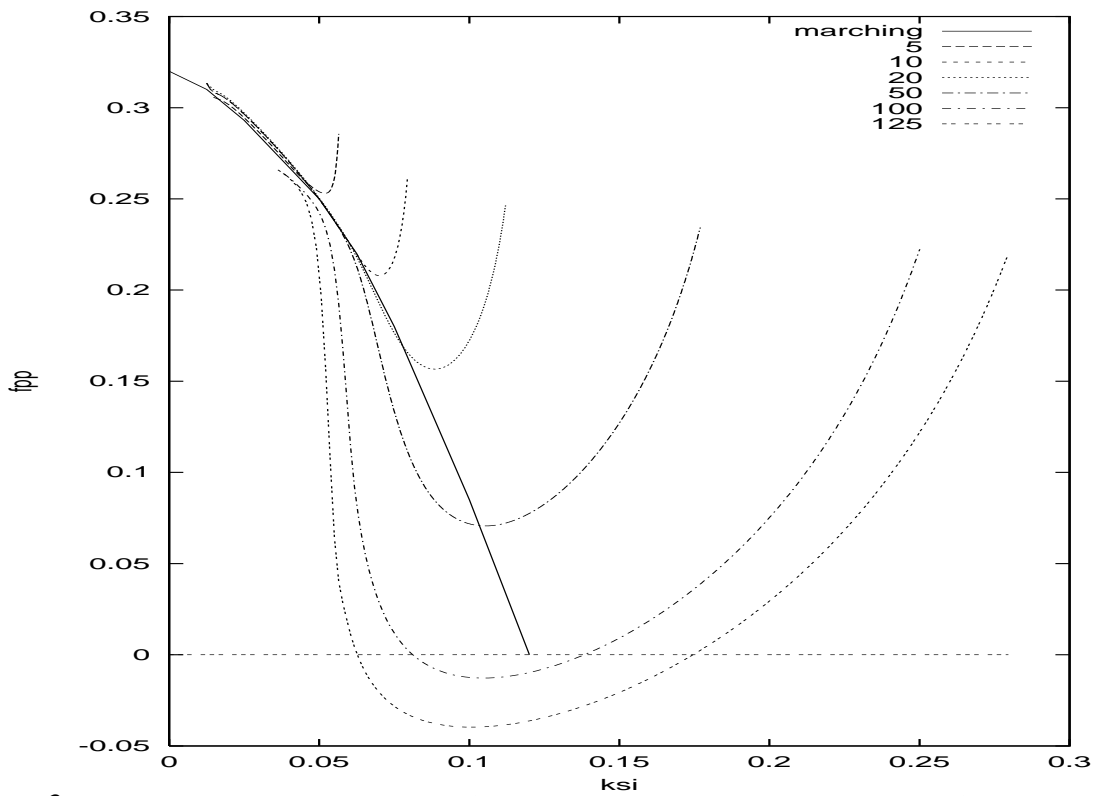


Figure 3: Résolution numérique par le schéma instationnaire avec résolution globale, solution au stationnarisée. On voit la séparation de la couche limite, chaque courbe est associée à une longueur de domaine différente  $x_{out}$ . Cette figure permet de comprendre la figure précédente.

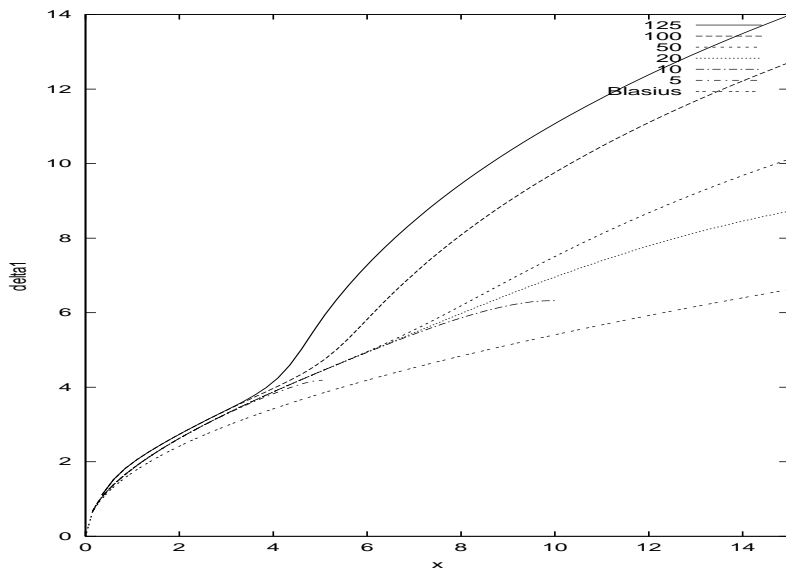


Figure 4: Résolution numérique par le schéma instationnaire avec résolution globale. Associé à la séparation de couche limite, l'épaississement de l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  suggère une analogie avec le ressaut hydrodynamique. Chaque courbe est associée à une longueur de domaine différente  $x_{out}$ .