

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences Lettres –
PSL Research University

Préparée à l'École Normale Supérieure

Parois et ondes de surface :

Dissipation, effet Doppler et interactions non linéaires

Solid boundaries and surface waves: dissipation, Doppler effect and nonlinear interactions

École doctorale n°564 Physique en Île-de-France

Spécialité : Physique

Composition du Jury :

M. Couder Yves
Université Paris Diderot
Examineur - Président du jury

M. Dauxois Thierry
École Normale Supérieure (Lyon)
Examineur

M. Fauve Stephan
École Normale Supérieure (Paris)
Co-directeur de thèse

M. Pétrélis François
École Normale Supérieure (Paris)
Directeur de thèse

M. Rabaud Marc
Université Paris-sud
Rapporteur

Mme Tuckerman Laurette
ESPCI
Examinatrice

M. Wunenburger Régis
Université Pierre et Marie Curie
Rapporteur

Soutenu par **Guillaume Michel**
le 6 Septembre 2017

Dirigée par **François Pétrélis**
et **Stephan Fauve**

Table des matières

Avant-propos	1
1 Quelques effets connus des parois	5
1.1 Théorie potentielle des ondes de surface	5
1.1.1 Ondes en milieu infini	5
1.1.2 Ondes dans un réservoir cylindrique	8
1.1.3 Ondes de surface localisées	9
1.2 Dissipation et couche limite	9
1.2.1 Dissipation en volume	10
1.2.2 Dissipation au fond	10
1.2.3 Dissipation liée à la contamination de surface	11
1.2.4 Estimer l'amortissement en ordre de grandeur	12
1.2.5 Dissipation liée à la ligne triple	12
1.2.6 Comparaison avec les expériences	13
1.3 Réflexion d'onde par une structure fixe	14
1.3.1 Effet d'un saut de profondeur	14
1.3.2 Effet d'une paroi mince immergée	16
1.3.3 Effet d'une paroi émergée	18
1.4 Interaction avec une structure mobile	19
1.5 Récapitulatif	20
2 Caractérisation acoustique d'une interface	21
2.1 Motivations	21
2.1.1 Méthodes de mesure usuelles	21
2.1.2 Pourquoi chercher à réaliser des mesures acoustiques ?	22
2.2 Réflexion normale sur une surface d'eau en mouvement	23
2.2.1 Paroi en translation uniforme	24
2.2.2 Paroi oscillante	24
2.2.3 Paroi en mouvement harmonique	25
2.2.4 Effet de la non-linéarité du milieu	26
2.2.5 Première approche du problème réel	26
2.2.6 Présentation du dispositif expérimental	27
2.2.7 Comparaison des capteurs	29
2.2.8 Réponse fréquentielle	30
2.2.9 Conclusion	30
2.3 Réflexion oblique sur une surface d'eau en mouvement	31
2.3.1 Historique des travaux sur la diffraction d'ondes acoustiques	31
2.3.2 Résultats obtenus	32

3	Non-linéarités dissipatives	41
3.1	Dispositif expérimental	42
3.1.1	Propriétés principales d'un fluide diphasique proche du point critique	42
3.1.2	Montage expérimental	44
3.2	Capillarité proche du point critique	47
3.2.1	Ménisque et comportement critique	47
3.2.2	Dispositif expérimental et résultats	48
3.3	Résultats obtenus	49
4	L'effet Doppler généralisé	55
4.1	Un exemple d'interaction entre ondes et paroi	56
4.1.1	Pression de radiation	56
4.1.2	Dynamique du champ d'ondes	57
4.1.3	Couplage avec la dynamique de la paroi	58
4.2	Résultats obtenus	60
5	Interactions résonantes et parois	69
5.1	Croissance d'une onde fille par interaction triadique	70
5.1.1	Approche de Longuet-Higgins	70
5.1.2	Application en géométrie cylindrique	73
5.2	Étude expérimentale	74
5.2.1	Présentation du dispositif	74
5.2.2	Effet de la rotation sur les ondes de surface	74
5.2.3	Choix de l'interaction résonante	76
5.2.4	Mise en évidence des interactions triadiques	76
5.3	Interactions à quatre ondes en grand bassin	79
6	Turbulence d'ondes et thermodynamique	91
6.1	Turbulence hydrodynamique	91
6.1.1	Approche de Kolmogorov	92
6.1.2	Contribution de Kraichnan	95
6.1.3	Autres résultats accessibles par analyse dimensionnelle	99
6.2	Turbulence d'ondes de surface	100
6.2.1	Approche naïve de la turbulence d'ondes	100
6.2.2	Nombre d'ondes et grandeurs conservées en turbulence faible	102
6.2.3	Description de la gamme inertielle capillaire	106
6.2.4	Description des gammes inertielles gravitaires	107
6.2.5	Au-delà de la turbulence faible : spectres stationnaires non locaux	109
6.3	Résultats expérimentaux en turbulence d'ondes de surface	111
6.3.1	Régime capillaire	111
6.3.2	Régime gravitaire	112
6.4	Grandes échelles en régime capillaire	113
	Conclusion	121
A	Quelques résultats sur les fonctions de Bessel	125
B	Détail des étapes calculatoires	127
C	Électronique du capteur capacitif	135
D	Formulaire de turbulence d'ondes	139

Avant-propos

Celui qui n'a pas vu [l'océan] ne s'en fait aucune idée. Vainement il en cherche la ressemblance dans les tableaux les mieux peints, dans les grands fleuves, dans les grands lacs, dans la vaste étendue des champs, des landes ou des prairies. Rien ne saurait peindre l'immensité liquide. [1]

Arthur Mangin (1824 - 1887)

La vue d'une surface d'eau en mouvement, qu'il s'agisse des légères ondulations d'un lac de montagne, des reflets sur la Seine à la tombée du jour ou encore des remous plus violents de l'océan, fait partie des spectacles les plus fascinants que la nature nous offre au quotidien. C'est le contraste entre le calme des alentours et la dynamique incessante des déformations qui est remarquable : très peu d'autres champs d'ondes sont aussi aisément observables. Comme pour tous les phénomènes ordinaires, l'opinion largement partagée est que « cela doit être bien compris ». Les mouvements atmosphériques, les frottements solides, les fractures ou encore les phénomènes électrostatiques constituent pourtant autant d'exemples réfutant le lien entre compréhension et banalité d'un effet. Cette confusion n'a rien de nouveau. À partir du milieu du XVIII^e siècle se développent en Europe les voyages d'exploration maritime, offrant des observations précieuses pour les scientifiques de l'époque. L'académie des sciences est alors régulièrement mandatée pour fournir des consignes aux membres d'équipage et l'on retrouve dans le premier de ses *Comptes rendus hebdomadaires*, en 1835, les *Instructions concernant la physique du globe* rédigées par François Arago et relatives au voyage de *La Bonite*. Elles abordent des points de géophysique allant du réchauffement climatique au champ magnétique terrestre, l'un d'entre eux portant sur l'océan [2] :

"Les jeunes officiers dont se compose l'état-major de la Bonite seront probablement bien surpris si nous les avertissons qu'aucun de leurs devanciers n'a résolu d'une manière complète les questions suivantes : quelle est la plus grande hauteur des vagues pendant les tempêtes ? Quelle est leur plus grande dimension transversale ? quelle est leur vitesse de propagation ?"

Arago était confiant sur la proche résolution de ces questions, le début du XIX^e siècle marquant le premier tournant dans l'étude des ondes de surface [3, 4] : après un traitement par Laplace en formalisme lagrangien, l'approche eulérienne est développée par Cauchy et Poisson à l'occasion de leurs réponses au prix de l'Académie des Sciences de 1813 intitulé *problème des ondes à la surface d'un liquide de profondeur indéfinie*. S'y trouvent entre autres la relation de dispersion des ondes de gravité ainsi que la trajectoire des particules de fluide. Les aspects faiblement non linéaires, abordés par Stokes et indispensables pour une description correcte de la houle, suivent rapidement, tout comme la prise en compte de la tension superficielle [5]. De nombreux phénomènes sont expliqués : la diffraction des vagues à l'entrée d'une baie, leur réfraction à l'approche d'une plage, les solitons observés dans les canaux ou encore l'agencement spatial des ondes suite à la chute d'un caillou dans l'eau. Les officiers de *La Bonite* auraient-ils du regretter de ne pas être partis un siècle plus tard ? Manifestement non, les questions portant sur l'état de l'océan étant seulement formulées de manière plus précise. Ainsi, la présentation introductive d'une fameuse conférence d'océanographie de 1963, intitulée *Known and unknown properties of the frequency spectrum of a wind-generated sea*, se conclut de la manière suivante [6] :

"In many ways the problem under investigation is complex. The mechanisms that cause the waves on the open ocean are decidedly nonlinear, and they are not well understood. The fully developed sea for a given wind speed and for a long enough fetch and duration is limited by nonlinear effects, as is evidenced by the presence of whitecaps and spindrift on the open ocean."

Little agreement exists in the literature at the present time about the form of the spectrum of a fully arisen sea or about the successive stages of growth of the spectrum of a wind-generated sea. The only areas of agreement may be that the spectrum has essentially a vertical forward face and that it behaves like k/ω^n , with n somewhere between 4 and 8 at the high frequencies. The effects of fetch, duration, wind speed, and air-sea temperature difference are not settled."

L'optimisme est toujours de mise. De fait, la seconde révolution dans l'étude des ondes de surface se situe autour des années 1950 et consiste en la prise en compte des interactions non linéaires entre paquets d'ondes. Il s'agit d'un mécanisme fondamental dans la dynamique de l'océan, décrivant les échanges d'énergie entre échelles spatiales et temporelles différentes. Cela a mené à l'établissement d'une théorie très similaire à celle de Kolmogorov en turbulence, la *turbulence d'ondes*. Les principaux noms associés, Phillips, Hasselmann ou encore Longuet-Higgins, sont devenus des références en océanographie, et plus généralement en mécanique des fluides. Un débat a lieu en guise de conclusion à la conférence mentionnée précédemment, au cours duquel O. M. Phillips discute l'avenir de cette discipline :

"What of the future? Let me just extrapolate on the basis of present trends. I believe that the dynamical theories will be able to predict quantities which will be observable. They may be wrong, so the theories will have to be modified. But with a continuous comparison between the predictions and the observations, such as has already taken place in the statistical description efforts, we will gain some confidence in them. We will see their limitations; we will see where modification is required. The sort of program that has been carried forward by the NIO [National Institute of Oceanography] is immensely valuable in this respect. In my more sanguine moments I hope that in perhaps ten years we will understand enough about what causes these waves to be able to feed back enough insight and knowledge to the chap who is trying to predict the waves to allow him to make a better estimate and prediction than is being made now."

Et de fait, peu de temps après se développent les premiers logiciels de prédiction de houle [7]. Comme espéré par Phillips, ils reposent sur une version simplifiée d'une équation bilan de turbulence d'ondes appelée *équation cinétique* puis sont ajustés empiriquement pour décrire les transferts d'énergie encore non compris de manière quantitative, par exemple ceux liés au vent ou aux déferlements. Grâce aux données satellite et aux puissances de calcul modernes, des prédictions précises sur plusieurs jours de l'état de la houle sont aujourd'hui disponibles en ligne (on pourra consulter le programme Wavewatch III pour une idée des résolutions et grandeurs accessibles). Le sujet est cependant loin d'être clos : pour reprendre la problématique d'Arago, on ne sait toujours pas estimer correctement la plus grande hauteur des vagues pendant les tempêtes ! La raison est que les événements rares et de grandes amplitudes, les *vagues scélérates*, découlent d'effets non pris en compte dans les modèles de prédictions de houle¹, et sont simplement impossibles à considérer avec le jeu de données disponibles. S'ajoute à cela de nouvelles difficultés découlant du couplage des ondes de surface avec la turbulence et les ondes internes.

Tous ces problèmes ont une origine très intuitive et, énoncés de façon crue, résultent du fait qu'« il se passe des choses lorsque deux vagues se rencontrent ». L'une des surprises de mes années de thèse fut de réaliser que la limite de nos connaissances se rencontre dans des situations bien plus triviales où les cambrures restent très modérées, autrement dit où ces échanges d'énergie entre paquets d'ondes sont totalement négligeables. En 2012 est paru dans *Physical Review E* un article intitulé *Walking with coffee : why does it spill?* [8]. Au même titre que l'effet de la mousse sur le renversement d'une bière [9] ou encore sa création lorsqu'on percute le goulot d'une bouteille [10], il fut comme prévu relayé par la presse et mis en avant sur le site de l'éditeur, « *spotlighting exceptional research* ». L'utilisation d'un effet quotidien pour susciter l'intérêt de la part du public (scientifique ou non) est évidemment appréciable, mais un passage heurte ici le sens commun :

"Also it is easy to demonstrate that damping is not important in the dynamics of the problem. Based on the formula [...], it is clear that surface tension should not play a substantial role in damping. For the conditions in our experiments, the logarithmic decrement coefficient δ , which relates the maximum amplitudes at a given and later cycles $A_{n+1} = A_n e^{-\delta}$, can be computed, $\delta \sim 0.02$ [...]. Thus, in order for the amplitudes to decay be e times, it takes about $N \sim \delta^{-1}$ oscillations, i.e., about $N \sim 50$ and therefore $t \sim NT \sim 12s$."

J'invite le lecteur à évaluer lors de son prochain café la durée nécessaire pour que le ballonnement dans sa tasse chute de 60% : 12 secondes sous-estime largement la dissipation réelle. Un titre plus judicieux aurait été *Walking with coffee : why doesn't it always spill?*, s'agissant toujours d'une question ouverte permettant d'introduire concrètement le mouillage en régime dynamique. Une discussion exhaustive des phénomènes capillaires n'a pas sa place ici, mais en restant approximatifs nous pouvons considérer le mouillage compris dans au moins deux

1. Il s'agit de la cohérence de phase, que nous verrons contraire à l'approximation de phases aléatoires de l'équation cinétique.

situations : à l'équilibre et dans un régime stationnaire associé à un mouvement à vitesse constante (plaque plongée ou extraite d'un fluide). Ces problèmes se trouvent être étonnamment complexes car nécessitent la prise en compte d'échelles spatiales séparées de nombreux ordres de grandeur, mais plusieurs décennies d'effort ont eu raison de ces difficultés. La dynamique d'un ménisque résultant d'un mouvement oscillant, causé par exemple par la rencontre entre une onde de surface et un obstacle, reste en revanche très peu considérée. Il s'agit pourtant d'une des sources de dissipation courantes pour ces ondes, probablement dominante dans le cas de récipients de diamètre inférieur à la dizaine de centimètres (réservoirs, verrerie, tuyaux, capillaires, etc.).

L'amortissement est loin d'être la seule propriété modifiée par la présence de bords. Faisons un bref détour en acoustique et en électromagnétisme, où ces résultats sont mieux connus. Dans ces domaines, il nous est familier d'observer des échanges de quantité de mouvement ou de moment angulaire avec une paroi, voire d'énergie si cette dernière n'est pas maintenue fixe (on pensera aux transducteurs piézoélectriques, capables de réaliser dans les deux sens une conversion d'énergie acoustique en énergie électrique). Non seulement l'amplitude de l'onde réfléchie mais aussi son profil spatial et sa fréquence peuvent être affectés, respectivement par diffraction et effet Doppler. La présence de bords donne également naissance à de nouveaux modes de propagation localisés au niveau de la surface : il s'agit des plasmons de surface et des ondes acoustiques de surface. Plus surprenant encore, elle rend dispersive la propagation d'ondes acoustiques ou électromagnétiques, comme le montre l'exemple canonique du guide d'onde. Tous les résultats de cette brève liste² sont connus en acoustique et en électromagnétisme, mais beaucoup moins en mécanique des fluides. Au cours de nos études, nous avons ainsi probablement tous été menés à calculer les propriétés des plasmons de surface en électromagnétisme, mais l'analogie hydrodynamique reste bien moins discutée. Et pourtant, alors qu'exciter des plasmons de surface nécessite un montage optique soigné, une simple oscillation d'une plaque dans de l'eau crée son strict équivalent hydrodynamique ! D'un point de vue pratique, comprendre finement l'effet des parois sur les ondes de surface permettrait d'aborder différemment des questions telles que les suivantes : quels mouillages, géométrie et matériau choisir pour réduire efficacement le ballonnement dans un réservoir ? Comment optimiser la récupération d'énergie d'un champ de vagues ? Quel déplacement imprimer à une paroi mobile pour annuler toute réflexion ? Les aspects plus théoriques sont tout aussi nombreux, ouvrant entre autres de nouvelles approches pour l'étude de la turbulence d'ondes ainsi que du mouillage.

C'est pour participer à la clarification de quelques-uns de ces effets liés aux parois que cette thèse, principalement expérimentale, a été menée. Nous avons commencé par mettre en évidence la dissipation d'énergie associée aux phénomènes capillaires en mesurant le coefficient de réflexion d'une onde gravito-capillaire en fonction de la taille d'un ménisque. Pour cela, une nouvelle méthode de mesure acoustique a été développée. Pour mieux comprendre l'effet du mouillage sur l'amortissement, nous avons quantifié les phénomènes dissipatifs dans un système liquide-gaz constitué d'un corps pur proche de son point critique. Un tel dispositif offre l'avantage de pouvoir faire varier de manière contrôlée un grand nombre de paramètres physiques, tout en maîtrisant la pollution de la surface ainsi que l'état de mouillage.

Nous nous sommes d'autre part intéressés aux transferts d'énergie ayant lieu lors de la réflexion d'une onde de surface sur une paroi oscillante, analogue à l'*effet Doppler généralisé* connu depuis près de cinquante ans en acoustique et électromagnétisme. Après une mise en évidence expérimentale, nous calculons les modifications au premier ordre de l'onde réfléchie et montrons que leurs effets cumulatifs (onde piégée dans une cavité oscillante) peuvent mener à des spectres entrant en compétition avec ceux de la turbulence d'ondes.

Dans un second temps, nous avons étudié la façon dont les contraintes géométriques affectent les interactions entre paquets d'ondes : tout comme elles mènent à une modification de la dispersion dans un guide d'onde, elles changent radicalement les conditions nécessaires à des échanges d'énergie résonants. Alors qu'en milieu infini, les paquets d'ondes gravitaires sont associés à des résonances dites « à quatre ondes », ces interactions sont bien plus efficaces en milieu confiné, impliquant uniquement trois ondes en géométrie cylindrique.

Nous concluons sur deux autres travaux de recherche effectués durant cette thèse, suite directe de ce dernier point mais ne faisant plus intervenir les parois. D'une part une étude expérimentale plus fine des interactions à quatre ondes en régime gravitaire, menée dans le bassin de l'École Centrale de Nantes lors de la collaboration Turbulon. D'autre part, une expérience où les interactions entre paquets d'ondes mènent un état hors équilibre à présenter sur toute une gamme d'échelles des caractéristiques propres aux systèmes à l'équilibre thermodynamique.

2. Non exhaustive ; nous aurions pu mentionner le retournement temporel (en plein essor en acoustique), le déplacement à vitesse supersonique (effet Cherenkov en électromagnétisme), l'émission d'ondes par un objet à l'équilibre thermique (rayonnement), les métamatériaux (transposables pour les ondes de surface par ajustement local de la profondeur), etc.

Le plan de ce manuscrit est le suivant. Je commencerai par présenter quelques résultats clefs sur les ondes de surface. Dans chaque chapitre, je détaillerai ensuite un aspect spécifique de la thématique considérée, les motivations à l'origine du travail effectué ainsi que les résultats obtenus. Ce choix de plan a le défaut de fragmenter la présentation des résultats connus sur les ondes de surface, notamment concernant les interactions entre paquets d'ondes qui ne seront abordées que tardivement, je l'espère au profit d'une lecture plus aisée. Faisant écho à cette préface, la conclusion comportera une liste de quelques questions ouvertes impliquant les ondes de surface, ainsi que des pistes envisageables pour leur résolution.

Je profite de ces pages pour remercier les nombreuses personnes ayant enrichi mes années de thèse. En premier plan figurent mes deux encadrants, François Pétrélis et Stephan Fauve, avec qui j'ai eu un réel plaisir à travailler. Si mon stage de Master m'a motivé à poursuivre dans ce groupe, c'est avant tout grâce aux rapports humains très agréables, l'aspect scientifique n'étant plus à discuter à leur niveau. Bien que mon arrivée soit mêlée à leurs départs en post-doc, j'ai été heureux de côtoyer Benjamin Miquel, à cause de qui je ne peux maintenant travailler correctement qu'avec deux écrans, et Johann Herault, à l'origine de ma plus longue collaboration scientifique sur un même projet. Mes souvenirs de ces quatre années impliquent l'ensemble des autres membres du groupe : Christophe Gissinger, dont j'espère toujours une visite des catacombes, Alexandros Alexakis, pour ses choix judicieux de stagiaires, Michael Peirera, sans qui D24 aurait décidément été moins animée, Benoît Semin, pour avoir étiqueté « le nécessaire » dans les salles de l'équipe, ainsi que Kannabiran Seshasayanan, un voisin d'expérience très facile à vivre au quotidien. Je me plais à croire qu'ils sont tous conscients d'avoir contribué au bon déroulement de ma thèse.

Parce que les circonstances font parfois plus progresser que des mois de réflexion, mes travaux doivent beaucoup à Amaury Poidatz, ingénieur de chez Dantec qui en présentant une vélocimétrie laser a mentionné le nom de « cellule de Bragg ». Il est très probable qu'un chapitre entier n'aurait pas existé sans cela. Je remercie aussi Basile Gallet pour sa motivation suite à l'une de mes présentations, la partie sur l'effet Doppler étant bien plus claire grâce à lui.

Il est toujours plaisant de rencontrer des étudiants ou post-doc étrangers et j'ai en écrivant ces lignes une pensée pour Santiago Benavides, Paola Rodriguez Imazio, Vishwanath Shukla, Sandeep Reddy, Gustavo Castillo et Erick Lopez. Sont aussi concernés nos voisins de D18, permettant de voir l'astrophysique d'un autre œil, et l'ensemble des membres du LPS, dont les secrétaires Annie Ribaudeau, Benoît Paulet, Nora Sadaoui et Fabienne Renia. L'atelier de mécanique du LPS, comprenant José da Silva Quintas et Carlos Goncalves-Domingues, a constitué un support technique à la fois sympathique, efficace et réactif. De même, j'ai été ravi de partager du temps avec mes collègues d'enseignement ainsi qu'avec tous les membres de la collaboration Turbulon.

Font nécessairement partie de cette liste mes amis, mes parents Evelyne et Jean-Louis ainsi que mes frères Christophe et Vincent. Enfin, je vous remercie vous, membre du jury ou simple lecteur, pour l'attention portée à mes travaux.

Guillaume Michel

Chapitre 1

Quelques effets connus des parois

It is well-known that there is zero reflection of waves of any frequency by a circular cylinder submerged in a single-layer fluid of infinite depth. [11]

Chris Linton

L'influence des parois sur les ondes de surface mène à de nombreux résultats invraisemblables. L'un des plus surprenants porte sur la propagation d'une onde plane gravitaire en eau profonde. Si nous cherchons à renvoyer cette onde d'où elle vient, une solution raisonnable semble être de disposer dans l'eau un obstacle fixe. En 1948, Dean montre la chose suivante : dans le cas d'un cylindre infini de section circulaire et orthogonale à la direction de propagation de l'onde, *aucune* onde réfléchie n'existe en régime linéaire, quelles que soient la taille et la position de cet obstacle ou encore la fréquence de l'onde incidente [12–15]. Ce résultat est généralisable et se trouve être toujours valide si le cylindre est immergé dans la couche inférieure d'un milieu diphasique [11] ou encore si, de même densité que le liquide, il est laissé libre de répondre aux forces pressantes associées aux ondes [16].

Ces calculs sont très techniques et nous présentons ici uniquement quelques outils utilisés pour leur démonstration (pour plus de détails, on pourra se référer à [17]). En particulier, nous allons introduire les modes localisés au niveau des surfaces solides, les calculs de dissipation associés aux couches limites, puis discuter quelques applications.

1.1 Théorie potentielle des ondes de surface

1.1.1 Ondes en milieu infini

La propagation d'ondes à la surface de l'eau est dispersive : on s'en convainc aisément en observant la perturbation causée par un caillou jeté dans un étang, séparant rapidement les différentes longueurs d'onde. Le calcul de la relation de dispersion en milieu non confiné constitue une application classique de la théorie des écoulements potentiels, nous le reportons ici dans le cas de l'eau contenue dans un bassin de hauteur uniforme. Considérons l'interface entre l'eau et l'air et notons, cf. Fig. 1.1,

- ρ et ρ_g les masses volumiques des phases liquide et gaz, en supposant $\rho \gg \rho_g$
- $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur
- σ la tension de surface eau-air
- H la hauteur de fluide le séparant du fond (plan horizontal en $z = 0$)
- $P(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ les champs de pression et de vitesse
- $\eta_k(x, t)$ la perturbation de surface étudiée, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$ et de pulsation ω_k

La relation de dispersion décrit comment les deux forces de rappel, la tension de surface et le poids, s'opposent à l'inertie. Cherchant des solutions se propageant indéfiniment en l'absence de forçage, nous considérons les fluides parfaits ; les phénomènes dissipatifs seront abordés ultérieurement comme perturbation dans une approche quasi statique, les temps caractéristiques associés étant le plus souvent très grands devant la période. De même, seule la condition aux limites de non-pénétration est à vérifier au niveau des surfaces solides.

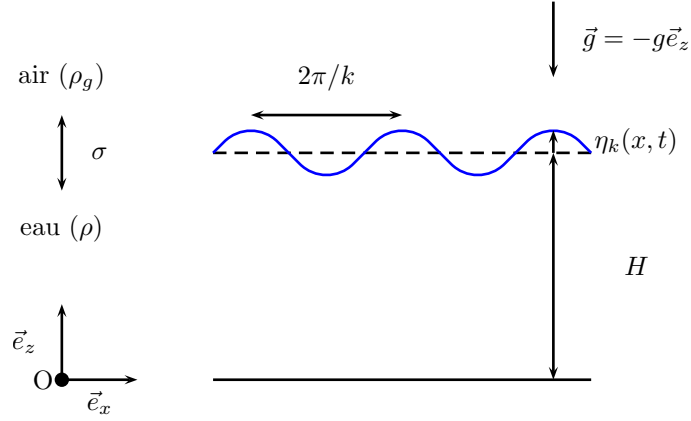


FIGURE 1.1 – Notations pour l'étude de la relation de dispersion

Une autre approximation est nécessaire : comme pour un pendule, la pulsation d'une onde est indépendante de son amplitude uniquement dans un régime de faibles oscillations. Cet isochronisme est propre aux systèmes linéaires, n'ayant aucune raison d'être vérifié lorsque les équations perdent leur invariance vis-à-vis de l'amplitude de la perturbation. Le nombre sans dimension quantifiant cet effet n'est pas le nombre de Reynolds, la viscosité étant déjà supposée nulle, mais la cambrure $\eta_k \times k$, *i.e.* la pente maximale engendrée par la perturbation. Nous faisons l'hypothèse de cambrures faibles, correspondant à la majorité des ondes rencontrées dans la vie courante (par exemple à la surface d'un lac) mais fréquemment mise en défaut dans l'océan.

Les vitesses mises en jeu restant faibles devant celle du son, l'écoulement est incompressible. En le supposant de plus potentiel ($\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi$), le potentiel scalaire φ vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1.1)$$

Nous cherchons des solutions décrivant des ondes planes progressives dans la direction x , de périodicité temporelle ω_k et spatiale k . φ est alors de la forme

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi(z)e^{i(\omega_k t - kx)}. \quad (1.2)$$

La fonction ψ est contrainte par l'équation de Laplace ainsi que la condition aux limites en $z = 0$ et devient

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cosh(kz)e^{i(\omega_k t - kx)}. \quad (1.3)$$

Nous déterminons la perturbation de surface $\eta_k(x, t)$ en raisonnant au premier ordre en η_k/H ,

$$\partial_t(\eta_k(x, t) + H) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\eta_k(x, t) + H) = v_z(x, z = \eta_k(x, t) + H, t) \implies \partial_t \eta_k(x, t) \simeq v_z(x, z = H, t). \quad (1.4)$$

L'expression du potentiel scalaire (1.3) et la relation (1.4) mènent à

$$\eta_k(x, t) = \frac{-ik}{\omega_k} \psi_0 \sinh(kH) e^{i(\omega_k t - kx)} = i\eta_0 e^{i(\omega_k t - kx)}, \quad (1.5)$$

où $\eta_0 = -k\psi_0 \sinh(kH)/\omega_k$ est l'amplitude de l'onde. Cette solution est contrainte par l'équation dynamique, à savoir l'équation d'Euler pour un fluide inviscide. Il se trouve que dans le régime de faibles cambrures, le terme non linéaire est négligeable :

$$\frac{|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}|}{|\partial_t \vec{v}|} \sim \frac{kv}{\omega_k} \sim \frac{k(k\psi_0 \sinh(kH))}{\omega_k} \sim \eta_0 k. \quad (1.6)$$

Tous les termes de l'équation d'Euler dérivent alors d'un potentiel scalaire

$$\rho \partial_t \vec{v} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} \implies \partial_t \varphi - \frac{P}{\rho} - gz = \alpha(t) = 0, \quad (1.7)$$

où $\alpha(t)$ est une constante d'intégration prise nulle par choix convenable de φ ($\varphi \rightarrow \varphi - \int \alpha(t)dt$). Au niveau de l'interface, les pressions dans l'air et dans le liquide, respectivement notées P_0 et P_ℓ , sont liées par la loi de Laplace. Au premier ordre en cambrure,

$$P_\ell - P_0 = \frac{-\sigma \partial_{xx} \eta_k}{(1 + (\partial_x \eta_k)^2)^{3/2}} \simeq -\sigma \partial_{xx} \eta_k. \quad (1.8)$$

Incorporé dans l'équation (1.7), ceci mène à

$$(\partial_t \varphi)(z = H + \eta(x, t)) = g(H + \eta(x, t)) - \frac{\sigma}{\rho} \partial_{xx} \eta(z = H + \eta(x, t)), \quad (1.9)$$

le terme en P_0/ρ étant annulé par choix de φ . Après dérivation partielle par rapport au temps et utilisation de (1.4), cette équation se simplifie dans la limite d'amplitude faible par rapport à la hauteur ($\eta_0 \ll H$),

$$(\partial_{tt} \varphi)(x, z = H, t) = -g(\partial_z \varphi)(x, z = H, t) - \frac{\sigma}{\rho} (\partial_{xxx} \varphi)(x, z = H, t). \quad (1.10)$$

Cette contrainte constitue la relation de dispersion,

$$\boxed{\omega_k^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kH)} \quad (1.11)$$

La pulsation étant non linéaire en nombre d'onde, la propagation est dispersive. Rappelons les trois hypothèses majeures à l'origine de ce résultat :

- Un gaz bien plus léger que le liquide ($\rho_g \ll \rho$)
- Des ondes d'amplitude faible devant la profondeur ($\eta_0 \ll H$)
- Des ondes d'amplitude faible devant leur longueur d'onde ($\eta_0 k \ll 1$)

Régimes gravitaire et capillaire

Les termes en k et k^3 montrent que les forces de rappel opèrent à des échelles différentes, grande pour la gravité et petite pour la capillarité. Nous distinguons deux régimes dans lesquels un unique mécanisme de rappel est efficace. Ils sont séparés par le nombre d'onde capillaire k_c défini par

$$gk_c = \frac{\sigma}{\rho} k_c^3 \implies k_c = \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}. \quad (1.12)$$

Au niveau des longueurs d'onde, ceci correspond à la longueur capillaire ℓ_c ,

$$\boxed{\ell_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}} \quad (1.13)$$

Pour l'eau pure, $\ell_c = 1.7$ cm. Cette échelle spatiale est associée aux phénomènes résultant de la compétition entre gravité et capillarité, comme la taille d'une goutte, d'un ménisque ou encore du premier mode déstabilisé dans de nombreuses instabilités (Kelvin-Helmoltz, Rayleigh-Taylor, Rosensweig, etc.).

1. **Régime gravitaire** ($k \ll k_c \iff \lambda \gg \ell_c$). La relation de dispersion s'approxime comme

$$\omega_k^2 = gk \tanh(kH). \quad (1.14)$$

La propagation devient non dispersive dans la limite d'eau peu profonde. Le régime gravitaire s'étudie en se restreignant aux grandes échelles (utilisation de grands bassins), ou en faisant tendre la longueur capillaire vers zéro, par exemple en s'approchant du point critique liquide-vapeur.

2. **Régime capillaire** ($k \gg k_c \iff \lambda \ll \ell_c$). La relation de dispersion devient

$$\omega_k^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3 \tanh(kH). \quad (1.15)$$

Toujours dispersive, cette branche capillaire s'obtient en considérant des longueurs d'onde faibles ou en augmentant la longueur capillaire (on supprime les effets gravitaires en superposant deux fluides de même densité ou en se plaçant en microgravité).

1.1.2 Ondes dans un réservoir cylindrique

Dans le cas d'un réservoir cylindrique de rayon R , une condition aux limites additionnelle est à considérer :

$$\partial_r \varphi(r = R, \theta, z, t) = 0. \quad (1.16)$$

Les modes propres s'obtiennent par séparation des variables et décomposition en série de Fourier suivant θ , $\varphi_m(r, \theta, z, t) = f(r) \cos(m\theta)g(z)e^{i\omega t}$ (et *idem* avec la fonction sinus). Les conditions aux limites et l'équation de Laplace contraignent ces expressions à

$$\varphi_{n,m}(r, \theta, z, t) = \psi J_m(k_{n,m}r) \cosh(k_{n,m}z) \cos(m\theta) e^{i\omega_k t}, \quad (1.17)$$

où J_m est la fonction de Bessel de première espère d'ordre m (l'annexe A présente les fonctions de Bessel), et

$$k_{n,m} = \frac{\xi_{n,m}}{R}, \quad (1.18)$$

$\xi_{n,m}$ étant la n -ième racine de $J'_m(x)$. La relation de dispersion (1.11) ainsi que l'élévation de surface associée se déduisent de manière similaire. L'indice m du mode traduit la symétrie azimutale et n représente la structure radiale, grossièrement le nombre de longueurs d'onde sur un diamètre. La figure 1.2 illustre la déformation associée à $m = 8$ et $n = 20$, les modes observés quotidiennement correspondent à $m = 1$ et aux faibles valeurs de n et sont représentés Fig. 1.3.

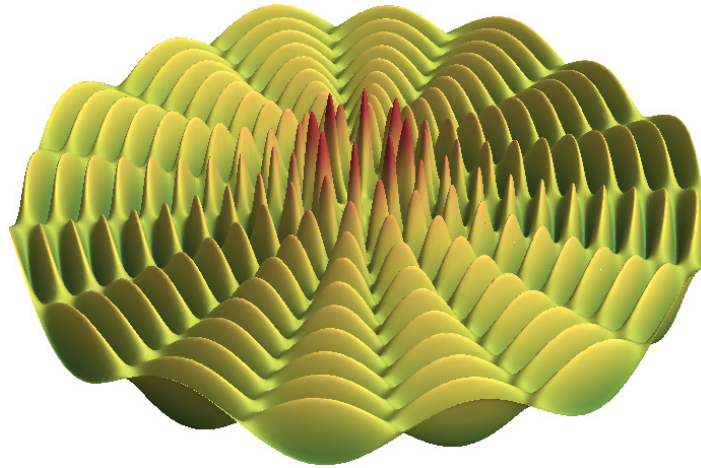


FIGURE 1.2 – Mode $m = 8$ et $n = 20$

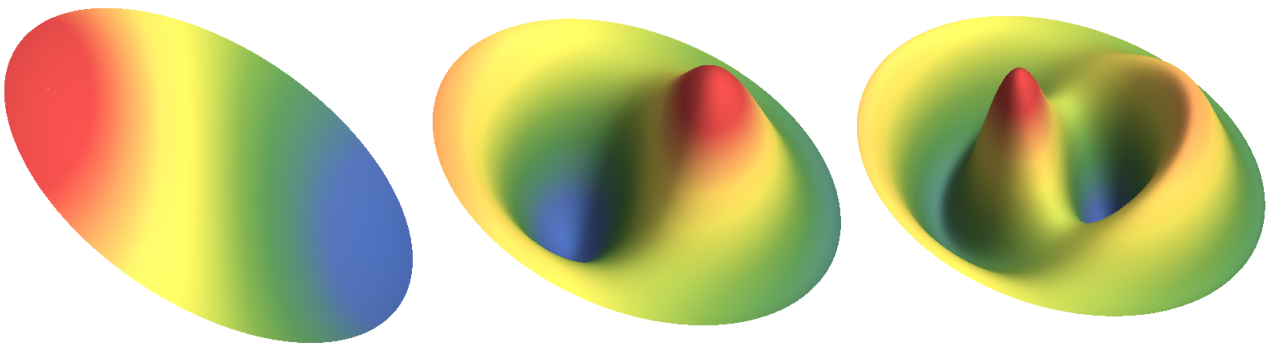


FIGURE 1.3 – Modes $m = 1$ et $n = \{1, 2, 3\}$

1.1.3 Ondes de surface localisées

Lorsque des parois sont prises en compte, un nouvel ensemble de solutions apparaît. Le champ d'ondes n'est alors plus restreint à un ensemble de modes étendus sur toute la surface mais inclut des modes localisés au niveau des bords. Revenons à une géométrie cartésienne. La solution obtenue §1.1.1 est

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cosh(kz) e^{i(\omega_k t - kx)} \implies \eta(x, t) = i\eta_0 e^{i(\omega_k t - kx)}, \quad (1.19)$$

couplée à la relation de dispersion (1.11). On considère généralement des nombres d'onde k réels, mais toutes les équations restent vérifiées si $k = i\tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, en se rappelant $\cosh(ix) = \cos(x)$,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cos(\tilde{k}z) e^{\tilde{k}x + i\omega_k t} \implies \eta(x, t) = i\eta_0 e^{\tilde{k}x + i\omega_k t}. \quad (1.20)$$

Dans un milieu infini, on ignore ces solutions à cause de leur divergence en $x \rightarrow \infty$. Ce problème disparaît si une surface solide limite le domaine, restreignant par exemple le fluide à des valeurs de x négatives. Il s'agit d'ondes évanescentes selon x , le champ de vitesse étant ici une onde stationnaire en z . L'amplitude η_0 ainsi que la relation de dispersion se déduisent de manière similaire (avec $\tanh(ix) = i \tan(x)$) :

$$\begin{cases} \eta_0 = -\frac{\tilde{k}\psi_0 \sin(\tilde{k}H)}{\omega_k} & (1.21) \\ \omega_k^2 = -\left(g\tilde{k} - \frac{\sigma}{\rho}\tilde{k}^3\right) \tan(\tilde{k}H) & (1.22) \end{cases}$$

Cette nouvelle relation de dispersion est fondamentalement différente de celle des modes étendus car une pulsation $\omega_k \in \mathbb{R}$ est associée à une infinité de solutions \tilde{k} réelles, cf. Fig. 1.4. Cela a une conséquence expérimentale immédiate : si de tels modes sont pertinents, contrôler la pulsation du forçage n'excite plus un unique nombre d'onde en régime linéaire. En ce qui concerne les aspects théoriques, cela nous mènera à réaliser des sommes sur l'ensemble de ces solutions.

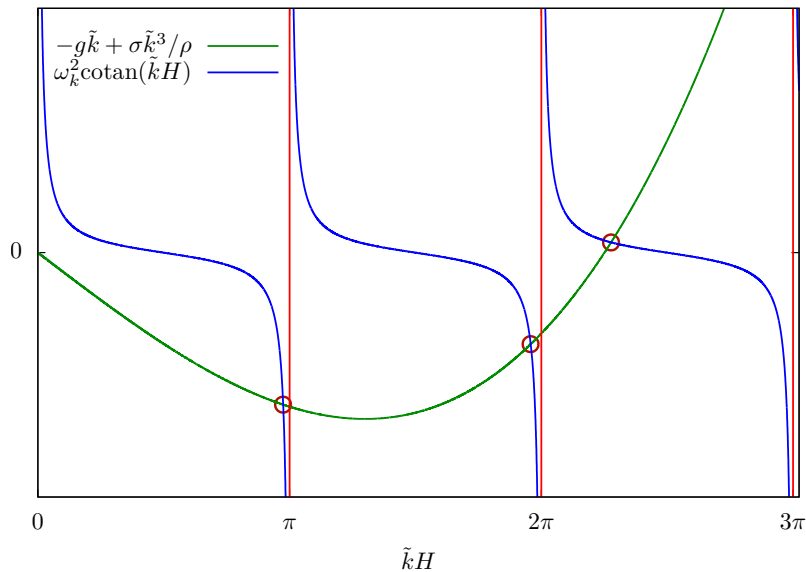


FIGURE 1.4 – Résolution graphique de la relation de dispersion (1.22)

1.2 Dissipation et couche limite

La première conséquence de la présence de parois concerne l'amortissement. Pour raccorder la solution potentielle à la contrainte réelle de non-glissement, des couches limites apparaissent et dissipent de l'énergie. Nous allons mener les calculs pour des parois planes, une géométrie circulaire les compliquant sans apporter d'effet physique nouveau. L'élévation de surface étant notée η , tous les résultats seront exprimés en fonction de la viscosité cinématique ν .

1.2.1 Dissipation en volume

Les taux d'amortissement sont simples à évaluer tant qu'ils restent petits devant la fréquence de l'onde, c'est-à-dire tant que l'énergie de l'onde décroît peu sur une période. Dans ce cas, l'élévation de surface s'écrit

$$\eta(x, t) = \eta_0 \sin(\omega t - kx)e^{-\alpha t}, \quad (1.23)$$

avec α le rapport entre la puissance moyenne dissipée par viscosité sur une période $\langle \mathcal{P}_d \rangle$ et deux fois l'énergie de l'onde \mathcal{E} ,

$$\alpha = \frac{\langle \mathcal{P}_d \rangle}{2\mathcal{E}}. \quad (1.24)$$

L'énergie s'obtient en additionnant les termes cinétique et potentiel. D'après le théorème du viriel, ces deux contributions sont en moyenne égales et ainsi

$$\mathcal{E} = \rho \int \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle d^3\tau. \quad (1.25)$$

La puissance des contraintes visqueuses, quant à elle, s'obtient en utilisant les conventions de sommation d'Einstein et en supposant le fluide newtonien *via*

$$\langle \mathcal{P}_d \rangle = \frac{\rho\nu}{2} \int \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle d^3\tau, \quad (1.26)$$

Pour un écoulement potentiel $\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi$ avec $\varphi(x, z, t)$ solution de l'équation de Laplace, il vient

$$\mathcal{E} = \rho \int \langle (\partial_x \varphi)^2 + (\partial_z \varphi)^2 \rangle d^3\tau, \quad \langle \mathcal{P}_d \rangle = 4\rho\nu \int \langle (\partial_{xz} \varphi)^2 + (\partial_{xx} \varphi)^2 \rangle d^3\tau. \quad (1.27)$$

Pour la géométrie §1.1.1 décrivant une couche de fluide de hauteur H , $\varphi = \psi_0 \cosh(kz) \cos(\omega t - kx)$ et finalement

$$\boxed{\alpha = 2\nu k^2} \quad (1.28)$$

On constate que ce taux d'amortissement ne dépend pas de la hauteur H . Ce résultat peut aussi s'obtenir en calculant le champ de vitesse vérifiant la condition au limite d'annulation de la contrainte tangentielle au niveau de la surface libre [18, 19].

1.2.2 Dissipation au fond

L'expression précédente suppose que le champ de vitesse potentiel est réaliste. Ce n'est le cas qu'en dehors des couches limites, au sein desquelles de forts gradients dissipent de l'énergie. Évaluons ces corrections dans le cas précédent, la couche limite en $z = 0$ raccordant le champ de vitesse potentiel à la condition aux limites réelle $\vec{v}(x, z = 0, t) = \vec{0}$. Pour cela, on note le champ de vitesse total

$$\vec{v}_{\text{tot}} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{v}_{\text{BL}}. \quad (1.29)$$

L'équation de Navier-Stokes mène à une équation sur la partie rotationnelle du champ de vitesse

$$\partial_t \vec{v}_{\text{BL}} = \nu \Delta \vec{v}_{\text{BL}}, \quad (1.30)$$

avec comme condition aux limites $\vec{v}_{\text{BL}}(x, z = 0, t) = \vec{\nabla}\varphi(x, z = 0, t)$. On obtient

$$\vec{v}_{\text{BL}}(x, z, t) = \vec{\nabla}\varphi \left(x, 0, t - \frac{z}{\omega\delta} \right) e^{-z/\delta}, \quad (1.31)$$

avec $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ l'épaisseur de la couche limite. Étant donné $\delta \ll \lambda$, la couche limite évolue spatialement très rapidement devant le champ de vitesse potentiel (sans quoi on ne parlerait plus de « couche limite ») et le champ de vitesse total reste inchangé dans la quasi-totalité du volume, mis à part très proche de $z = 0$ où il devient

$$-\psi_0 k \sin(\omega t - kx) \vec{e}_x \xrightarrow{z \approx 0} -\psi_0 k \sin \left(\omega t - kx - \frac{z}{\delta} \right) \left(1 - e^{-z/\delta} \right) \vec{e}_x. \quad (1.32)$$

La puissance des forces visqueuses dans la couche limite est

$$\langle \mathcal{P}_{\text{BL}} \rangle \simeq \rho\nu \int \left\langle \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right\rangle d^3\tau \simeq \rho\nu \int \psi_0^2 k^2 \left\langle \sin \left(\omega t - kx - \frac{z}{\delta} \right)^2 \right\rangle \left(\frac{1}{\delta} e^{-z/\delta} \right)^2 d^3\tau. \quad (1.33)$$

On évalue finalement le taux d'amortissement associé α_{fond} ,

$$\alpha_{\text{fond}} = \frac{\nu k}{\delta \sinh(2kH)} = \frac{k}{\sinh(2kH)} \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} \quad (1.34)$$

démonstré par F. Biesel en 1949 [20]. Ce taux de dissipation s'annule dans la limite eau profonde, l'onde n'étant plus affectée par le plan horizontal. L'amortissement associé à la présence de bords latéraux se traite de manière similaire et ne sera pas détaillée ici.

1.2.3 Dissipation liée à la contamination de surface

La dissipation due à la contamination de surface est encore un sujet actif de recherche, et nous nous restreignons à son traitement le plus simple¹, tel que présenté dans le livre de Lamb [23]. La présence d'une fine couche de polluant y est modélisée par un film inextensible² annulant la vitesse horizontale. La couche limite se situe à l'interface $z = H$, ce qui modifie le champ de vitesse proche :

$$-\psi_0 k \sin(\omega t - kx) \cosh(kH) \vec{e}_x \xrightarrow{z \simeq H} -\psi_0 k \sin \left(\omega t - kx - \frac{z}{\delta} \right) \cosh(kH) \left(1 - e^{(z-H)/\delta} \right) \vec{e}_x. \quad (1.35)$$

La puissance dissipée s'évalue de même,

$$\langle \mathcal{P}_{\text{BL}} \rangle \simeq \rho\nu \int \Psi_0^2 k^2 \cosh(kH)^2 \left\langle \sin \left(\omega t - kx - \frac{z}{\delta} \right)^2 \right\rangle \left(\frac{1}{\delta} e^{-z/\delta} \right)^2 d^3\tau, \quad (1.36)$$

et il vient un taux d'amortissement

$$\alpha_{\text{surf}} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} \coth(kH) \quad (1.37)$$

Ces différents taux d'amortissement sont évalués Fig. 1.5 pour une couche d'eau de 10 cm.

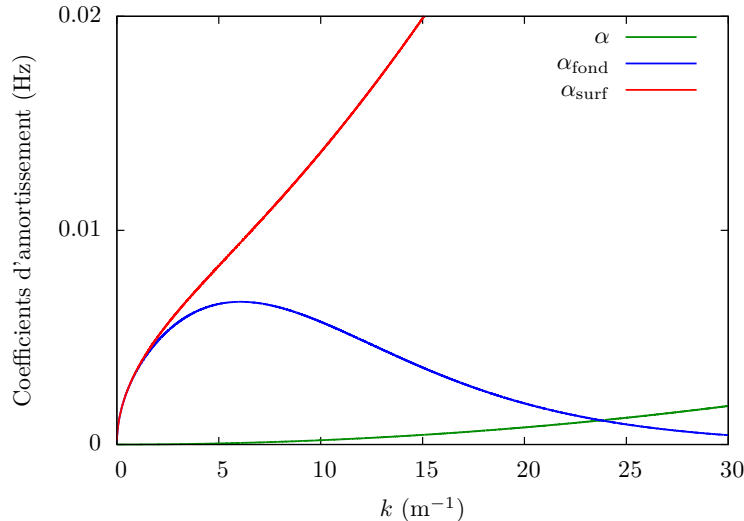


FIGURE 1.5 – Coefficient d'amortissement en volume (α), au fond (α_{fond}) et en surface (α_{surf}) pour 10 cm d'eau

1. On pourra se reporter à [21, 22] et références pour un modèle plus complet (avec aussi plus de paramètres ajustables).
2. Une extension du film modifie la concentration du tensioactif à l'interface, et donc la tension de surface locale (par définition, un tensioactif abaisse la tension de surface), ce qui constitue un mécanisme de rappel supposé dominant devant les autres.

1.2.4 Estimer l'amortissement en ordre de grandeur

Les expressions précédentes peuvent s'obtenir rapidement en ordre de grandeur en évaluant séparément l'énergie de l'onde et la puissance dissipée. Pour chacune de ces deux quantités, il faut prendre soin à estimer correctement le volume sur lequel porte l'intégrale et, pour la contrainte visqueuse, l'échelle spatiale des gradients de vitesse. Certains exemples sont reportés Table 1.1 en utilisant une surface de contrôle S .

Type de dissipation	En volume	En volume	En surface	En surface
Régime	Eau profonde	Eau peu profonde	Eau profonde	Eau peu profonde
Énergie de l'onde \mathcal{E}	$\rho v^2(S/k)$	$\rho v^2(SH)$	$\rho v^2(S/k)$	$\rho v^2(SH)$
Puissance dissipée $\langle \mathcal{P}_d \rangle$	$\rho \nu (vk)^2(S/k)$	$\rho \nu (vk)^2(SH)$	$\rho \nu (v/\delta)^2(S\delta)$	$\rho \nu (v/\delta)^2(SH)$
Taux d'amortissement $\langle \mathcal{P}_d \rangle / (2\mathcal{E})$	νk^2	νk^2	$\nu k/\delta$	$\nu H/\delta$

TABLE 1.1 – Ordres de grandeur des taux de dissipation

1.2.5 Dissipation liée à la ligne triple

Jusqu'à présent, l'unique effet des parois était l'ajout d'une condition aux limites de non-pénétration en théorie potentielle ou de non-glissement pour les couches limites. Le mouillage est donc négligé et l'interface liquide-gaz se raccorde perpendiculairement à un mur vertical. S'il s'agit d'un modèle correct pour les grandes échelles, par exemple pour traiter de l'interaction entre la houle et la coque d'un navire, cela traduit mal les oscillations d'un fluide dans un récipient de taille « raisonnable » (carburant dans un réservoir, café dans une tasse, eau dans un capillaire, etc.). Il faut alors prendre en compte les forces mésoscopiques entre fluide et solide. La méthode actuelle, initiée par Miles en 1967 [24] puis reprise plus en détails par la suite (*e.g.* [25]) évalue l'amortissement supplémentaire en considérant le travail d'une force effective de friction.

Commençons par décrire une plaque de largeur L et masse m plongée dans un fluide et soutenue par une force F , cf. Fig. 1.6.

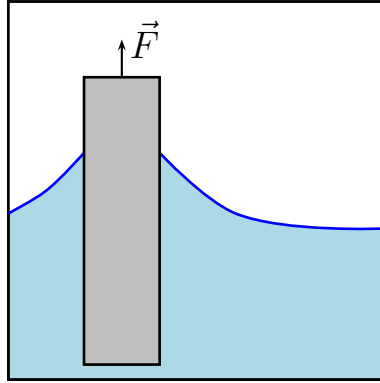


FIGURE 1.6 – Plaque au repos dans un fluide

Au repos, l'équilibre mécanique suivant la direction verticale donne

$$F = 2\sigma L \cos(\theta_{\text{eq}}) + (m - m_{\text{eau}})g, \quad (1.38)$$

et la force F compense donc les forces capillaires, le poids et la poussée d'Archimède (m_{eau} est la masse de fluide déplacée). Un tel bilan est mis en œuvre dans les tensiomètres commerciaux. Ajoutons une force $F_{\text{sup}}(t)$ dans le même sens que F , mettant la plaque en mouvement rectiligne uniforme à vitesse v . L'expérience montre que l'angle de contact évolue de θ_{eq} à $\theta(v)$. L'équilibre des forces sur la plaque devient

$$F + F_{\text{sup}}(t) = 2\sigma L \cos(\theta(v)) + (m - m_{\text{eau}}(t))g + F_{\text{visc}}(t), \quad (1.39)$$

où $F_{\text{visc}}(t)$ est la contrainte visqueuse. Tirer cette plaque hors de l'eau à vitesse v nécessite donc une puissance

$$\mathcal{P}(F_{\text{sup}}) = v \times \{2\sigma L (\cos(\theta(v)) - \cos(\theta_{\text{eq}})) + F_{\text{visc}}(t)\}. \quad (1.40)$$

Outre le terme visqueux, on constate l'apparition d'une puissance capillaire. Le calcul de Miles exploite ce résultat : le déplacement d'une ligne triple de longueur L à vitesse v sur une paroi nécessite une puissance

$$\boxed{\mathcal{P} = \sigma L v |\cos(\theta(v)) - \cos(\theta_{\text{eq}})|} \quad (1.41)$$

Pour aller plus loin, il faut détailler la dépendance de $\theta(v)$, qui a fait (et continue de faire) l'objet de très nombreuses études. Nous adoptons, suivant l'approche de Miles, un modèle simple :

$$\theta(v) = \begin{cases} \theta_{\text{av}} & \text{si } v > v_c \\ \theta_{\text{rec}} & \text{si } v < -v_c \end{cases} \quad (1.42)$$

où v_c est une vitesse critique. De plus, nous supposons d'une part que

$$\cos(\theta_{\text{av}}) - \cos(\theta_{\text{eq}}) \simeq \cos(\theta_{\text{eq}}) - \cos(\theta_{\text{rec}}) = \mathcal{K}, \quad (1.43)$$

et d'autre part que la majorité du temps, la vitesse du ménisque est suffisante pour que l'angle de contact atteigne θ_{av} ou θ_{rec} . La puissance des forces capillaires devient $\mathcal{P} = \sigma L \mathcal{K} |\dot{\eta}|$ et le coefficient d'amortissement

$$\boxed{\alpha_{\text{men}} = \frac{\int_{\text{ligne triple}} \langle |\dot{\eta}| \rangle \mathcal{K} \sigma d\ell}{2 \int \rho v^2 d^3\tau}} \quad (1.44)$$

Miles a évalué cette intégrale en géométrie circulaire. Faisons quelques remarques sur ce résultat :

- Cette dissipation est non linéaire et le taux d'amortissement chute aux grandes amplitudes ($\alpha_{\text{men}} \propto v^{-1}$).
- Cette dissipation s'annule dans les cas de mouillage total, où $\mathcal{K} = 0$.
- Ce calcul repose sur une hypothèse d'évolution quasi statique, le ménisque ayant à tout instant la valeur associée à un régime stationnaire de vitesse $\dot{\eta}$. Il s'agit d'une condition très restrictive, ce qui peut se constater en estimant le nombre de Reynolds sur la taille du ménisque,

$$Re = \frac{\ell_c(\omega\eta)}{\nu} = \frac{2\ell_c\eta}{\delta^2}, \quad (1.45)$$

où η est l'amplitude de l'onde de surface, ω sa pulsation et δ l'épaisseur de la couche limite. Pour l'eau, avec $\omega = 2\pi \times 10$ Hz, le nombre de Reynolds dépasse l'unité pour $\eta \geq 1 \mu\text{m}$. Dans ce régime inertiel, des comportements nouveaux apparaissent et modifient la dissipation (émission de vortex [26], etc.).

- Ce calcul néglige la puissance des forces visqueuses $F_{\text{visq}}(t)$.

1.2.6 Comparaison avec les expériences

L'étude du ballonnement, c'est-à-dire de la dynamique des ondes de surface dans un récipient secoué, a connu de nombreux échanges entre théorie et expériences. Pour les faciliter, il fut consenti de se focaliser sur le premier mode antisymétrique en géométrie cylindrique³ ($m = n = 1$). En 1957, Case et Parkinson calculent les expressions des coefficients d'amortissement en volume et des couches limites inférieures et latérales [27]. Ils modélisent ainsi leurs expériences menées avec de l'eau non traitée, une ligne triple libre et des sondes de mesure intrusives. Les résultats sont remarquablement conformes à la théorie.

Quelques années plus tard, Miles introduit la dissipation due à la ligne triple en géométrie cylindrique [24]. Contrairement à son modèle, les expériences montrent que l'amortissement maximal est atteint en mouillage total [28]. Pour s'affranchir de cette contribution, on fixe la ligne triple à un bord latéral. Malgré cette précaution, Henderson et Miles observent des écarts considérables avec les taux d'amortissement théoriques [29]. Des causes probables sont la dissipation en surface⁴ [30] ainsi qu'une estimation de la valeur attendue omettant de considérer

3. Il s'agit du mode observé en faisant osciller un verre d'eau d'avant en arrière.

4. Ces expériences utilisent de l'eau, extrêmement difficile à conserver pure.

la viscosité en volume et la ligne triple fixée [31, 32]. Les expériences ultérieures sont contradictoires, montrant tour à tour une dissipation linéaire [30] ou non linéaire [33], les amplitudes considérées étant rarement reportées. Les plus convaincantes sont celles de Cocciaro *et al.* [34, 35], où la dissipation est non linéaire à partir d'une amplitude seuil, quel que soit le mouillage.

À forte cambrure, des interactions entre modes se produisent. Une oscillation latérale du réservoir mène dans certaines gammes de paramètres à une onde *progressive circulaire*. Cette instabilité prédite par Miles [36, 37] est observée expérimentalement [38, 39], des régimes chaotiques pouvant aussi être atteints [40]. L'accord avec la théorie de Miles n'est pas quantitatif, probablement car elle se limite à un amortissement linéaire.

Ces travaux expérimentaux montrent que la dynamique du ménisque est à l'origine d'une dissipation pouvant être non linéaire, dont aucune théorie n'arrive pour l'instant à rendre compte quantitativement. Les principales questions étudiées au cours de cette thèse portent sur la configuration de mouillage total : l'amortissement prédit par Miles s'annule-t-il bien dans ce régime ? À quel paramètre physique correspond l'amplitude seuil menant à un comportement non linéaire ?

Les prochains chapitres traitent de la dissipation liée au mouillage, les résultats pouvant être résumés ainsi :

- Dans le chapitre 2, nous vérifions que l'existence d'un ménisque augmente l'amortissement des ondes de surface en mouillage partiel, pouvant diminuer par deux le coefficient de réflexion en énergie.
- Dans le chapitre 3, nous montrons que le ménisque reste à l'origine d'une dissipation notable en mouillage total, qui devient non linéaire dès que l'amplitude d'oscillation atteint l'épaisseur de la couche limite δ .

1.3 Réflexion d'onde par une structure fixe

L'étude du chapitre 2 porte sur les réflexion et transmission d'ondes par une surface. Il s'agit d'une des branches les plus développées du couplage fluide-structure : l'une des raisons est que l'interaction d'une onde avec un obstacle immergé est *relativement* simple à considérer, s'affranchissant du mouillage. De nombreux cas ont été traités dans la littérature et nous présentons ceux nécessaires à l'interprétation des expériences ultérieures et synthétisant les méthodes de calcul usuelles.

1.3.1 Effet d'un saut de profondeur

La rencontre sous incidence normale d'une onde avec un saut de profondeur illustre bien les spécificités des ondes de surface par rapport aux ondes acoustiques ou électromagnétiques. Considérons la situation schématisée Fig.1.7 où une onde progressive de pulsation ω , nombre d'onde k et amplitude η_i passe brutalement d'un milieu de profondeur h_0 à un autre de profondeur h_1 . Comme toujours lorsqu'une onde voit les propriétés du milieu brutalement modifiées, nous nous attendons à la transmission d'une onde d'amplitude η_t ainsi qu'à la réflexion d'une onde η_r . Nous cherchons à déterminer les coefficients de réflexion $|R|$ et de transmission $|T|$ définis par

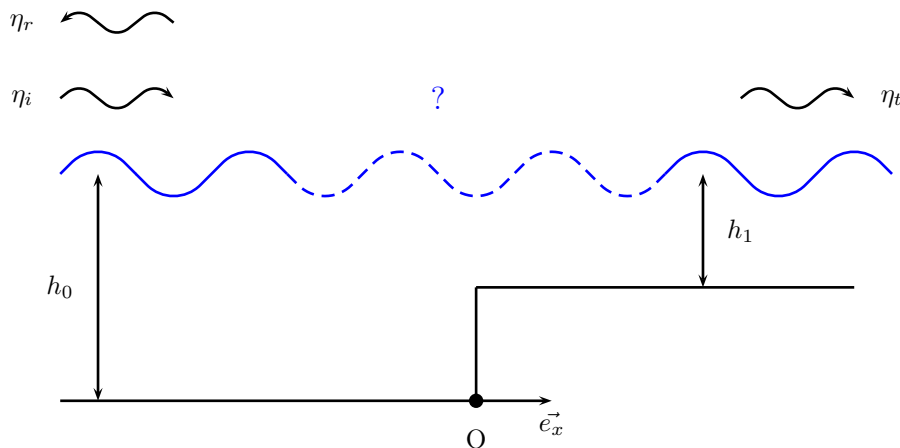


FIGURE 1.7 – Onde de surface incidente sur un saut de profondeur

$$|R| = \left| \frac{\eta_r}{\eta_i} \right|, \quad |T| = \left| \frac{\eta_t}{\eta_i} \right|. \quad (1.46)$$

On néglige ici les effets non linéaires, ils sont discutés par exemple dans [41, 42].

Approche de Lamb

On trouve dans l'ouvrage de Lamb [23] le premier traitement de ce problème dans la limite d'onde gravitaire en eau peu profonde⁵. Le champ de vitesse devient unidimensionnel et la propagation non dispersive, de vitesse $c = \sqrt{gh}$. L'amplitude du champ de vitesse v est reliée à l'élévation de surface η *via*

$$v = \frac{\eta g}{c}. \quad (1.47)$$

La solution proposée par Lamb pour déterminer $|R|$ et $|T|$ consiste à équilibrer les débits par unité de longueur vh ainsi que l'élévation de surface η au niveau du saut, menant au système suivant :

$$\begin{cases} (\eta_i - \eta_r) \sqrt{h_0} = \eta_t \sqrt{h_1} \\ \eta_i + \eta_r = \eta_t \end{cases} \quad (1.48)$$

$$(1.49)$$

dont la résolution donne les coefficients recherchés, tracés Fig. 1.8,

$$|R| = \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}{1 + \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}} \right|, \quad |T| = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}}. \quad (1.50)$$

Cette approche est similaire à celle réalisée en électromagnétisme (démonstration des coefficients de Fresnel) ainsi qu'en acoustique, les expressions de ces coefficients étant d'ailleurs rigoureusement identiques. Même si cette démarche semble raisonnable, le champ de vitesse résultant de la somme de ces ondes ne vérifie pas la condition de non-pénétration en $x = 0$ et n'est donc, en toute rigueur, pas une solution acceptable du problème. Il se trouve cependant que ces expressions de $|R|$ et $|T|$ sont valides dans la limite considérée⁶.

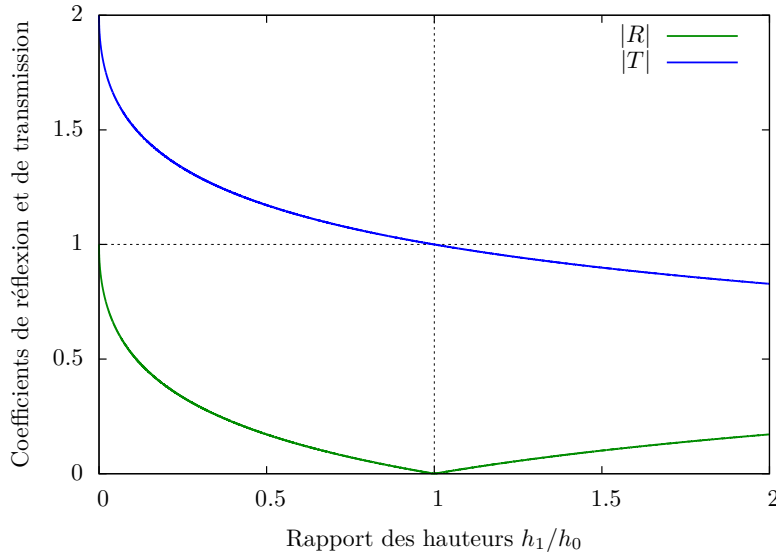


FIGURE 1.8 – Saut de profondeur pour une onde gravitaire en eau peu profonde

5. La relation de dispersion en eau peu profonde donne $kh = \omega\sqrt{h/g}$. La pulsation étant conservée lors du changement de milieu, l'hypothèse eau peu profonde signifie $\omega\sqrt{h_0/g} \ll 1$ et $\omega\sqrt{h_1/g} \ll 1$.

6. Un résultat qui a surpris lorsque le « vrai » champ de vitesse fut démontré [43]. Lamb justifie son approximation en une note de bas de page très allusive, mais que Miles trouve limpide et juste [44]. Elle reste pour moi assez obscure.

Traitement hydrodynamique complet

L'approche rigoureuse de ce problème fut menée bien plus tard par Bartholomeusz [43] en limite d'eau peu profonde, puis par Newmann [45] lorsque l'une des deux profondeurs est infinie (l'autre étant quelconque). Par la suite, Miles a obtenu une approximation de ces coefficients pour deux hauteurs quelconques [44]. La démarche de Newmann est la suivante :

1. Le champ de vitesse pour $x < 0$ est cherché comme la somme des ondes incidente et réfléchie mais aussi d'un ensemble⁷ de modes localisés évanescents.
2. Le champ de vitesse pour $x > 0$ est de même cherché comme la somme d'une onde transmise (de même pulsation que l'onde incidente) et d'un ensemble⁸ de modes localisés évanescents.
3. Les expressions des champs de vitesse étant connues pour $x < 0$ et $x > 0$, il « suffit » de les raccorder en $x = 0$ en imposant l'égalité des vitesses.

Nous présenterons cette méthode dans l'exemple du batteur §1.4, la résolution analytique étant ici impossible. Une résolution numérique permet de calculer les coefficients de réflexion et transmission. Ils sont reportés Fig. 1.9 et possèdent les limites suivantes :

- Si $h_0 = h_1 = \infty$, le coefficient de transmission vaut 1 et le coefficient de réflexion s'annule.
- Une onde incidente depuis $h_0 \rightarrow 0$ arrivant vers $h_1 = \infty$ est intégralement réfléchie ($|R| \rightarrow 1$ et $|T| \rightarrow 0$).
- Une onde incidente depuis $h_0 = \infty$ arrivant vers $h_1 \rightarrow 0$ mène⁹ à $|R| \rightarrow 1$ et $|T| \rightarrow 2$.

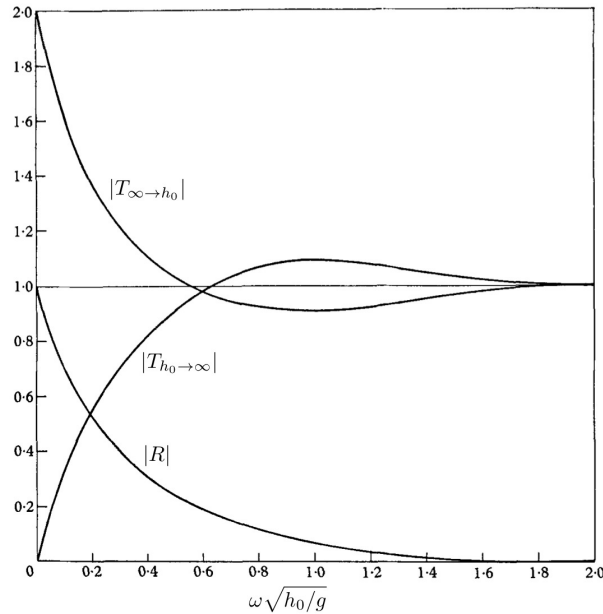


FIGURE 1.9 – Saut de profondeur entre h_0 et l'infini pour une onde gravitaire de pulsation ω (extrait de [45])

1.3.2 Effet d'une paroi mince immergée

La même approche permet de traiter le cas d'une barrière infiniment longue et fine immergée d'une hauteur h , cf. Fig. 1.10. Les résultats sont reportés ici car seront utilisés au chapitre 2.

Le calcul fut mené par Dean en 1945 en régime gravitaire en utilisant des relations intégrales [46], repris par Ursell quelques années plus tard avec la méthode de décomposition en ondes libres et localisées présentée ci-dessus [47] puis généralisé aux ondes gravito-capillaires [48]. Les expressions en régime gravito-capillaire ne sont pas explicites, mais les coefficients de réflexion et transmission en régime purement gravitaire ont des expressions concises, à savoir

7. Il s'agit de l'ensemble des modes localisés ayant la même pulsation que l'onde incidente. Cet ensemble est infini (mais dénombrable) comme on le constate graphiquement Fig. 1.4.

8. Ensemble différent du précédent étant donné que la relation de dispersion n'est plus la même ($h_0 \rightarrow h_1$).

9. Ce comportement singulier de $|T|$ reste associé à une énergie transmise qui, elle, tend bel et bien vers zéro.

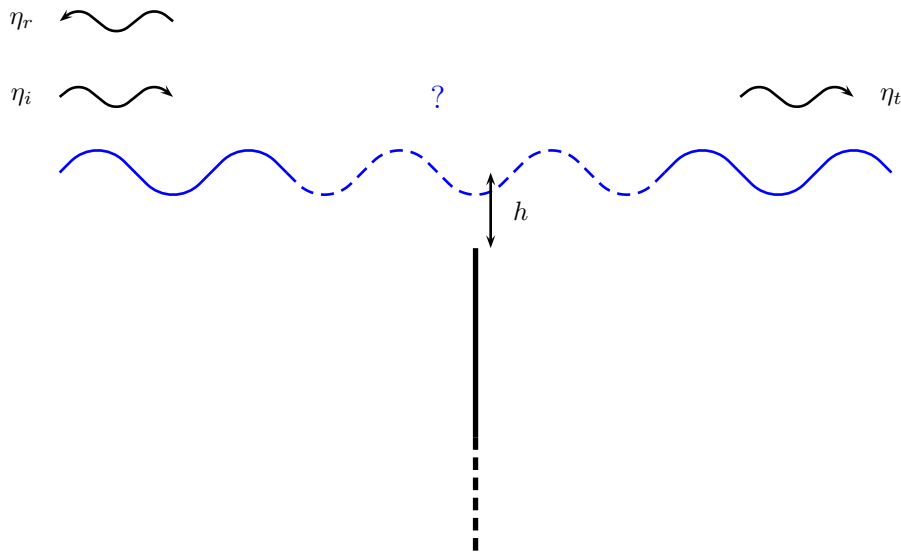


FIGURE 1.10 – Onde de surface incidente sur une barrière fine immergée

$$\boxed{|R| = \frac{K_0(kh)}{\sqrt{K_0^2(kh) + \pi^2 I_0^2(kh)}}, \quad |T| = \frac{\pi I_0(kh)}{\sqrt{K_0^2(kh) + \pi^2 I_0^2(kh)}}} \quad (1.51)$$

où I_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 de première et seconde espèce, $k = \omega^2/g$ le nombre d'onde de l'onde incidente, ω sa pulsation et g l'accélération de pesanteur.

Des évaluations numériques de ces expressions, reportées Fig. 1.11, montrent que le coefficient de réflexion reste quasi nul à moins que la profondeur d'immersion h soit très faible devant la longueur d'onde λ : par exemple, pour réfléchir 50% de l'énergie d'une onde gravitaire de longueur d'onde $\lambda = 10$ m, il faut placer la plaque à seulement $h = 8$ cm de la surface ! Cela montre à quel point l'énergie des ondes de surface est localisée proche de l'interface, la densité d'énergie moyenne chutant comme e^{-2kz} . On appréhende bien mieux les ondes de surface en considérant que leur extension verticale est $1/(2k) \simeq \lambda/13$ plutôt que λ .

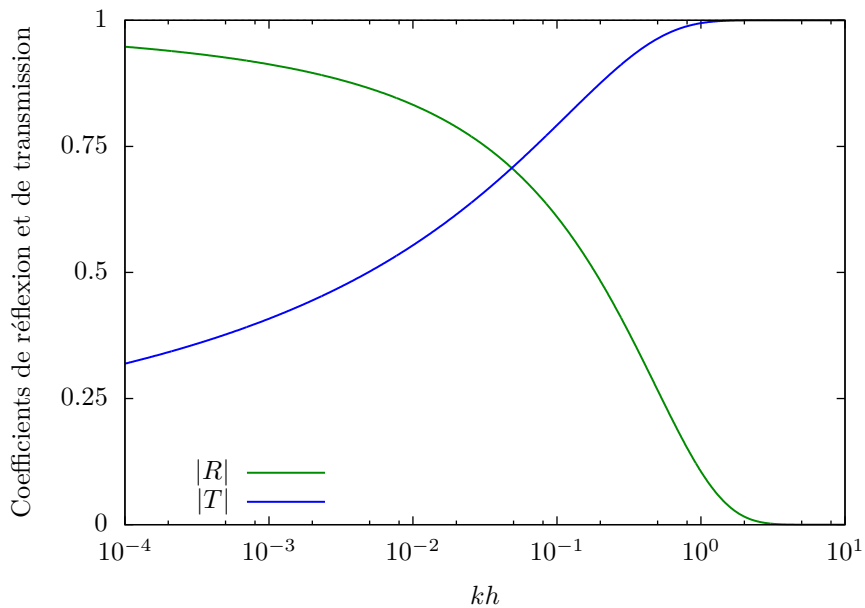


FIGURE 1.11 – Réflexion d'une onde de gravité de nombre d'onde k sur une paroi fine immergée à h

1.3.3 Effet d'une paroi émergée

Intéressons-nous à un dernier exemple de réflexion illustrant les difficultés liées au mouillage : celui d'une onde de surface sur un mur infini, cf. Fig. 1.12(a).

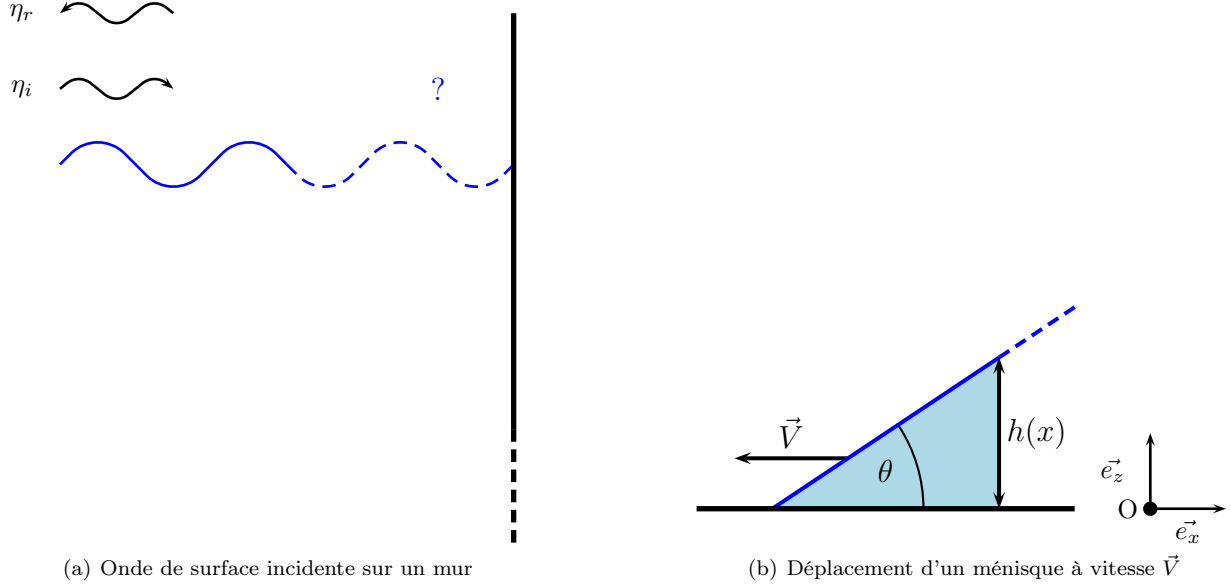


FIGURE 1.12 – Onde se réfléchissant sur une paroi émergée

Le calcul de la réflexion d'une onde gravitaire (en profondeur quelconque) sur un mur infini est trivial tant que le ménisque n'est pas pris en compte : le coefficient de réflexion est égal à 1, la superposition d'ondes incidente et réfléchie de mêmes amplitudes correspondant à une onde stationnaire satisfaisant la condition de non-glissement imposée par la paroi. Aucun mode localisé n'est nécessaire et les effets visqueux peuvent être évalués *via* la dissipation dans la couche limite, comme montré §1.2.2.

La prise en compte de l'angle de contact complique énormément la situation. Déterminer l'amplitude de l'onde réfléchie revient, par conservation de l'énergie, à évaluer la puissance visqueuse dissipée. Cependant, une approche naïve du ménisque représentée Fig. 1.12(b) mène à une divergence de cette puissance, celle-ci s'estimant (par unité de longueur de ligne triple L) comme

$$\frac{\mathcal{P}_d}{L} \sim \frac{\rho\nu}{2} \int \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dx dz \sim \rho\nu \int \left(\frac{V}{h(x)} \right)^2 h(x) dx \sim \frac{\rho\nu V^2}{\tan(\theta)} \int \frac{dx}{x}. \quad (1.52)$$

Il s'agit d'un problème bien connu, ayant mené aux nombreuses études expérimentales, théoriques et numériques sur la régularisation de la dissipation dans un ménisque en mouvement. Celles-ci ont cependant majoritairement considéré des situations où le mouvement est à vitesse constante (plaque plongée ou tirée d'un fluide visqueux) ou évoluant sur des échelles de temps longues devant les temps inertiels (*e.g.* dynamique de l'étalement d'une goutte). La bibliographie associée est trop riche pour être exposée ici, on pourra se reporter à [49] pour des références récentes. Pour résoudre cette divergence, il faut ajouter une longueur caractéristique limitant les valeurs inférieures de x , comme une longueur de glissement ou un *cut-off* microscopique [50].

Jusqu'à présent, les approches théoriques prenant en compte le déplacement d'un ménisque pour le calcul d'un coefficient de réflexion considèrent un fluide inviscide dans lequel une force fictive travaille et transfère la puissance obtenue §1.2.5 (eq. (1.41)) [51]. Les mêmes remarques qu'à ce niveau s'appliquent, mais grâce à cette simplification la puissance de ces forces capillaires est uniquement fonction de l'angle de contact instantané. Il reste à choisir un modèle fournissant la valeur de cet angle en fonction d'autres paramètres : on se restreint généralement à la seule vitesse de la ligne triple (cf. modèle de Miles), mais pour les régimes instationnaires considérés ici la situation est plus complexe [26].

1.4 Interaction avec une structure mobile

Pour conclure, reportons un calcul impliquant les modes localisés, adapté pour l'étude de l'effet Doppler au chapitre 4. Il s'agit de déterminer l'amplitude de l'onde émise par un plan oscillant de position $X(t) = \Delta X \sin(\omega t)$. Les difficultés liées à la présence d'un ménisque étant établies, nous mènerons cette étude en régime gravitaire, la profondeur h étant quant à elle quelconque. Toutes les notations sont reportées Fig. 1.13.

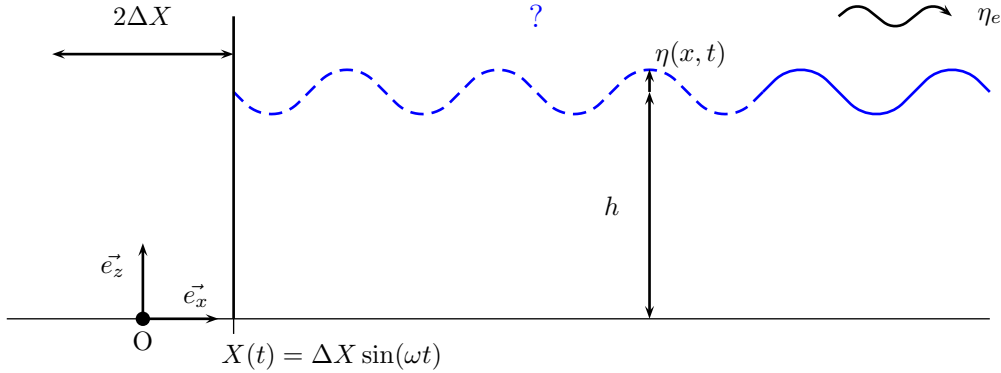


FIGURE 1.13 – Onde de surface créée par un batteur

Pour un fluide inviscide, des cambrures faibles et en l'absence de capillarité, le potentiel de vitesse φ est solution du système¹⁰

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{Équation de Laplace, cf. (1.1)} & (1.53) \\ (\partial_{tt}\varphi)(x, z = h, t) = -g(\partial_z\varphi)(x, z = h, t) & \text{Surface libre gravitaire, cf. (1.10)} & (1.54) \\ (\partial_z\varphi)(x, z = 0, t) = 0 & \text{C.L. au fond} & (1.55) \\ (\partial_x\varphi)(x = X(t), z, t) = -\dot{X} & \text{C.L. à la paroi mobile} & (1.56) \end{cases}$$

Le traitement historique de Havelock [52] suppose de plus des nombres de Mach $\mathcal{M} = \Delta X\omega/c_\varphi$ très faibles devant l'unité, c_φ étant la vitesse de phase de l'onde émise. Cette hypothèse permet de simplifier (1.56),

$$(\partial_x\varphi)(x = X(t), z, t) \simeq (\partial_x\varphi)(x = 0, z, t) + X(t)(\partial_{xx}\varphi)(x = 0, z, t), \quad (1.57)$$

et en notant k le nombre d'onde de l'onde libre émise (solution de $\omega^2 = gk \tanh(hk)$),

$$\left| \frac{X(t)(\partial_{xx}\varphi)(x = 0, z, t)}{(\partial_x\varphi)(x = 0, z, t)} \right| \sim kX(t) \sim \frac{\omega\Delta X}{c_\varphi} = \mathcal{M}. \quad (1.58)$$

Le système à résoudre devient finalement

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{Équation de Laplace, cf. (1.1)} & (1.59) \\ (\partial_{tt}\varphi)(x, z = h, t) = -g(\partial_z\varphi)(x, z = h, t) & \text{Surface libre gravitaire, cf. (1.10)} & (1.60) \\ (\partial_z\varphi)(x, z = 0, t) = 0 & \text{C.L. au fond} & (1.61) \\ (\partial_x\varphi)(x = 0, z, t) = -\Delta X\omega \cos(\omega t) & \text{C.L. à la paroi mobile avec } \mathcal{M} \ll 1 & (1.62) \end{cases}$$

Nous connaissons les solutions de (1.59 – 1.61) : il s'agit des modes libres étudiés §1.1.1 ainsi que des modes localisés (cf. §1.1.3). En toute généralité, nous allons chercher φ comme une somme de l'ensemble des solutions acceptables, contraignant¹¹ néanmoins la pulsation de ces modes à valoir ω :

$$\varphi(x, z, t) = A \cosh(kz) e^{i(\omega t - kx)} + \sum_n B_n \cos(\tilde{k}_n z) e^{-\tilde{k}_n x + i\omega t}, \quad (1.63)$$

10. En toute rigueur s'ajoute une condition dite *de radiation* imposant d'avoir une onde progressive lorsque $x \rightarrow \infty$.

11. Les équations (1.59 – 1.62) décrivent un système linéaire soumis à un forçage harmonique de pulsation ω .

ces expressions ayant déjà été obtenues séparément eq. (1.5) et (1.20). Les entiers \tilde{k}_n sont solutions de la relation de dispersion pour les modes localisés (1.22). La seule contrainte restante sur cette onde est (1.62), à savoir

$$ikA \cosh(kz) + \sum_n \tilde{k}_n B_n \cos(\tilde{k}_n z) = \Delta X \omega. \quad (1.64)$$

On peut montrer que le membre de gauche constitue une base pour les fonctions de $z \in [0, h]$, A pouvant alors être calculé en évaluant $\int_0^h (1.64) \times \cosh(kz) dz$. Il vient

$$A = \frac{-i\Delta X \omega}{k} \times \frac{\int_0^h \cosh(kz) dz}{\int_0^h \cosh(kz)^2 dz} = \frac{-i\Delta X \omega}{k} \times \frac{\sinh(kh)/k}{\left(\frac{h}{2} + \frac{\sinh(2kh)}{4k}\right)}. \quad (1.65)$$

Avec l'amplitude de l'onde émise $\eta_e = |A|k \sinh(kh)/\omega$, cette expression se simplifie en

$$\boxed{\frac{\eta_e}{\Delta X} = \frac{2(\cosh(2kh) - 1)}{2kh + \sinh(2kh)}} \quad (1.66)$$

Une représentation graphique est tracée Fig. 1.14. De la même manière, on peut évaluer la phase de l'onde progressive ainsi que les caractéristiques des modes localisés : ces derniers sont négligeables pour $x \gtrsim h$. Ce résultat de Havelock [52] fut vérifié expérimentalement quelques années plus tard [53], les études ultérieures portent principalement sur les régimes transitoires (cf. [54] et références).

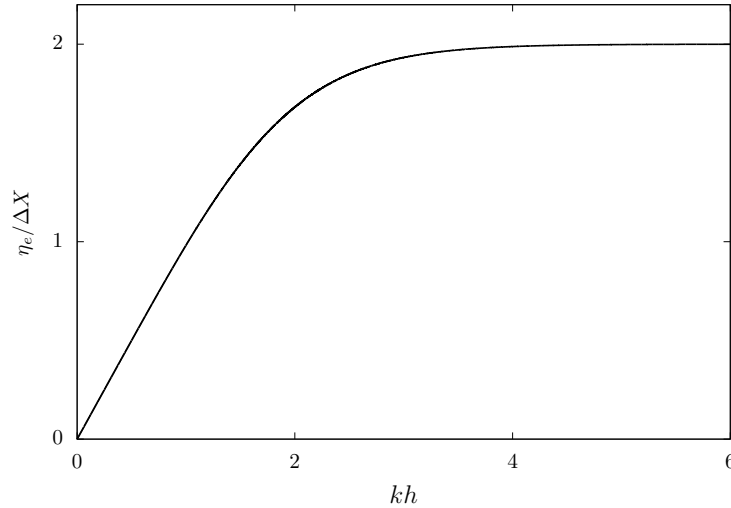


FIGURE 1.14 – Amplitude de l'onde créée par un batteur

1.5 Récapitulatif

Les modes propres des déformations de surface peuvent être calculés simplement en régime linéaire, que la géométrie soit infinie ou contrainte (cf. §1.1.1 et §1.1.2). Nous avons mis en évidence plusieurs effets des parois, principalement

1. L'existence de modes localisés au niveau des parois, §1.1.3.
2. La dissipation additionnelle causée par les couches limites (§1.2.2 - 1.2.3) ainsi que par le ménisque §1.2.5.

Nous avons ensuite traité quelques exemples classiques, dont certains serviront dans la suite de ce manuscrit :

- La réflexion d'une onde sur une paroi immergée §1.3.2 sera mesurée en régime gravito-capillaire Chap. 2.
- L'amortissement causée par le déplacement d'un ménisque §1.3.3 sera étudié plus en détail au chapitre 3.
- L'effet d'une paroi mobile et le calcul associé, présentés §1.4, seront adaptés au cas de l'effet Doppler généralisé au chapitre 4.

Chapitre 2

Caractérisation acoustique d'une interface

The student who will become familiar with all these various branches of physics will find that many facts can be carried over from one to another. He will cease to find it remarkable that [Rayleigh's Theory of Sound] can contain practically everything that has been found out since in the matter of the theory of waves and their interactions. [55]

John Clarke Slater (1900 - 1976)

Lors de l'élaboration d'une expérience sur les ondes de surface se pose la question de la mesure : comment acquérir un signal relié à la déformation d'une interface ? Ce point peut sembler trivial étant donné qu'une simple observation d'une surface d'eau offre par réflexion un aperçu de son champ de déformation. L'œil constitue même un capteur remarquable, n'ayant aucune difficulté à distinguer des vagues d'amplitude mille fois inférieure à leur longueur d'onde. Sans surprise, l'optique est utilisée dans la majorité des expériences, le traitement des images pouvant cependant s'avérer pénible et limité aux faibles pentes. Une alternative tire parti de la modification des propriétés électriques d'un fil suivant son immersion. Intrusive et n'offrant de mesure qu'en un point, elle a l'avantage d'être installée en quelques minutes et de couvrir une très grande gamme d'amplitudes.

Une option encore mal connue pour sonder de manière non intrusive l'état d'une interface repose sur les ondes acoustiques. Contrairement à son analogue optique se limitant pour l'essentiel à des effets géométriques, il s'agit d'exploiter le caractère ondulatoire des phénomènes de diffraction et d'effet Doppler. Notre travail a consisté à développer cette technique, ensuite mise en œuvre pour illustrer la dissipation associée à un ménisque.

2.1 Motivations

2.1.1 Méthodes de mesure usuelles

Pour apprécier les mesures acoustiques, commençons par présenter quelques techniques usuelles.

1. Suivre la position d'un faisceau laser partiellement réfléchi sur la surface (*e.g.* [56]). Cette méthode est ponctuelle mais précise : des pentes arbitrairement faibles peuvent être mesurées en éloignant le capteur de position. Le nombre de pixels du capteur limite la gamme de mesure à environ deux décades.
2. Faire interférer un rayon laser réfléchi sur l'interface avec une référence interne, dispositif connu sous le nom de vibromètre laser (LDV en anglais). Le déplacement instantané est extrait avec une précision de l'ordre du micron, mais nécessite l'ajout de particules diffusantes (*e.g.* [57]).
3. Ajouter des particules diffusantes ainsi qu'un éclairage venant d'en dessous puis photographier la surface, l'intensité reçue pouvant être convertie en information de hauteur avec une précision d'une dizaine de microns. Permettant d'acquérir le champ de déformation sur toute une surface, cette méthode nécessite néanmoins de traiter la solution (cf. [57–60]).

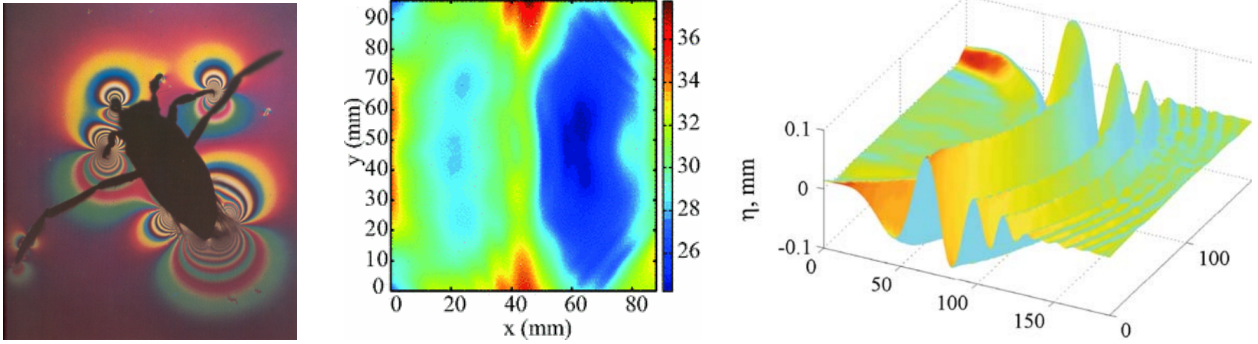


FIGURE 2.1 – Exemple d’images utilisant l’interférométrie différentielle [75], la diffusion de lumière [60] ou encore le traitement d’un agencement de points [61]

4. Filmer la surface du fluide après avoir imprimé au fond de la cuve un agencement aléatoire de points [61, 62], ou bien en projetant un ensemble de franges sur l’interface [63]. Cette deuxième méthode, applicable pour des surfaces solides (*e.g.* des plaques métalliques [64, 65]), nécessite lorsqu’elle est utilisée pour visualiser la surface d’un fluide l’ajout de particules [66]. Les mesures vidéo sont actuellement en plein essor, *via* l’étude des corrélations à deux caméras [67] ou le suivi de flotteurs en grand bassin [68].
5. Mesurer les variations de propriétés électriques d’un fil immergé, l’isolant séparant le cuivre de l’eau permettant d’assimiler l’ensemble à un condensateur de capacité proportionnelle à la hauteur d’immersion. Ces sondes capacitatives tendent à remplacer les anciennes sondes résistives. Intrusif et limité aux basses fréquences à cause d’effets capillaires, ce dispositif reste compétitif étant donné sa très large gamme de mesure (de quelques microns à quelques centimètres, voire plus) et sa facilité de mise en œuvre [69–71].

Des résultats typiques sont reportés Fig. 2.1. Cette liste ne se prétend pas exhaustive et d’autres méthodes existent dans des cas plus spécifiques, par exemple des capteurs inductifs pour des métaux liquides [72] ou l’analyse spectrale de la lumière diffusée près du point critique [73]. Mentionnons aussi les techniques d’interférométrie différentielle développées par M. Françon [74] et utilisées en mécanique des fluides pour visualiser des gradients d’indice optique (ondes internes ou courants de convection) ; méthode très élégante n’ayant pour l’instant jamais été considérée pour les ondes de surface.

2.1.2 Pourquoi chercher à réaliser des mesures acoustiques ?

Étant donné les nombreux dispositifs décrits précédemment, quel est l’intérêt d’en développer un nouveau ? L’une des motivations est liée aux mesures acoustiques en hydrodynamique, qui offrent un signal directement exploitable et contiennent des informations nouvelles sur le milieu sondé. Considérons par exemple le montage expérimental Fig. 2.2 gauche, où un écoulement de Von Kármán est traversé par des ondes acoustiques, un angle $\pi - \theta$ séparant les directions d’émission et de réception. On observe un fort effet de la rotation des disques sur le signal acoustique reçu, modifiant non seulement son amplitude mais aussi sa fréquence instantanée. Les ondes sonores ont donc, d’une manière ou d’une autre, interagi avec le champ de vitesse créé par les pales. On peut caractériser cette interaction en exploitant la conservation de la quantité de mouvement et de l’énergie, valant respectivement $\hbar\vec{k}$ et $\hbar\omega$ pour un phonon de nombre d’onde \vec{k} et de pulsation ω . En notant avec les indices *i* et *f* les ondes acoustiques initiale et diffusée selon θ et en supposant qu’elles interagissent avec une onde (de nature à déterminer) de pulsation $\hbar\vec{k}$ et énergie $\hbar\omega$ comme schématisé Fig. 2.2 droite, il vient

$$\begin{cases} \vec{k}_i = \vec{k}_f + \vec{q} \\ \omega_i = \omega_f + \omega \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(2.2)$$

Le décalage de fréquence restant faible ($|\omega_i - \omega_f| \ll \omega$) et avec la définition de θ , ce système mène à

$$\begin{cases} |\vec{q}| \simeq 2|\vec{k}_i| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \omega = \omega_i - \omega_f \end{cases} \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

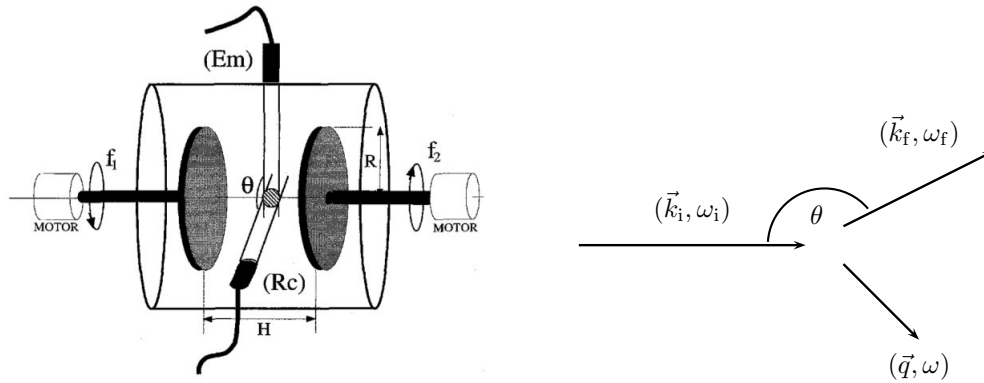


FIGURE 2.2 – Dispositif permettant l'étude de l'interaction entre son et vorticité [76] et interaction associée

Cette technique sonde l'écoulement sur des distances $2\pi/|\vec{q}|$ connues et contrôlables expérimentalement en modifiant l'angle θ ou la longueur d'onde acoustique $2\pi/|\vec{k}_i|$. Pour savoir quelle grandeur est ainsi mesurée, il faut détailler le processus d'interaction [77] : il s'agit du champ de vorticité. En effet, une composante de Fourier de vecteur d'onde \vec{q} de la vorticité représente un champ de vitesse transverse évoluant périodiquement sur des distances $2\pi/|\vec{q}|$, déphasant l'onde acoustique incidente et modifiant sa direction de propagation. Le décalage de fréquence ω mesuré à la réception du signal acoustique quantifie quant à lui l'effet Doppler associé à l'advection du champ de vorticité par un écoulement \vec{U} , l'expression exacte étant

$$\omega = \vec{q} \cdot \vec{U}. \quad (2.5)$$

Ces mesures donnent accès aux composantes du champ de vorticité ainsi qu'au champ de vitesse moyen. En remplaçant le champ de vorticité par des ondes de surface, on s'attend à un effet similaire mêlant diffraction et décalage Doppler, permettant d'effectuer des mesures directement dans l'espace de Fourier. Il s'agirait d'une nouveauté, de telles mesures nécessitant sinon l'acquisition du champ de déformation sur toute la surface en fonction du temps. Lorsqu'on pense à la manière d'adapter l'expérience Fig. 2.2 aux ondes de surface, deux dispositifs viennent à l'esprit, que nous allons étudier successivement :

1. Envoyer une onde acoustique sous incidence normale et mesurer l'onde rétrodiffusée
2. Envoyer une onde acoustique sous incidence normale et mesurer l'onde diffusée selon un angle θ

2.2 Réflexion normale sur une surface d'eau en mouvement

Dans un premier temps, considérons la rétrodiffusion d'une onde acoustique sur une interface. S'affranchissant de la diffraction, le seul effet restant est le mouvement d'ensemble de la zone insonifiée, *i.e.* l'effet Doppler. Le décalage Doppler associé à un déplacement à vitesse constante étant connu depuis 1842 [78], il est surprenant de constater que les premières expériences s'intéressant à une paroi en évolution harmonique datent d'une dizaine d'années [79, 80] et font suite à un débat animé durant la seconde moitié du XX^e siècle.

En guise de bref historique, ce sont les travaux de D. Censor sur l'étude spectrale d'une onde électromagnétique réfléchie sur une surface en mouvement dans des situations unidimensionnelles [81] puis tridimensionnelles [82] qui ont remis ce sujet d'actualité dans les années 1970. Une revue ultérieure du même auteur revient sur ces résultats et les présente de manière plus synthétique [83]. L'application aux ondes acoustiques a ensuite été débattue, ces corrections étant en compétition avec les non-linéarités en volume [84]. Suite à des échanges laborieux entre les différents protagonistes [83, 85–90], la conclusion est que les non-linéarités en volume sont ou non dominantes suivant le rapport entre la distance du récepteur à la surface oscillante et la longueur d'onde de l'onde acoustique émise par la surface oscillante seule. Un critère quantitatif séparant ces deux régimes a été déterminé [88, 91] puis vérifié expérimentalement [80]. Après avoir présenté ces résultats, nous verrons comment ils permettent de caractériser une interface mobile.

2.2.1 Paroi en translation uniforme

L'effet Doppler lié au déplacement rectiligne uniforme d'une surface fait partie des premiers sujets abordés en physique. Nous le traitons ici avec les temps de vol en considérant la propagation non dispersive. Une source fixe \mathcal{S} émet une onde de pulsation ω_0 se réfléchissant sur une paroi qui se déplace à vitesse v en direction de la source (aucune hypothèse sur le signe de v n'est faite). Nous allons déterminer la pulsation ω_1 mesurée par un observateur \mathcal{O}_1 situé sur la paroi, puis celle notée ω_2 reçue par \mathcal{O}_2 au niveau de la source à l'issue de la réflexion. Le schéma Fig. 2.3 résume ces notations.

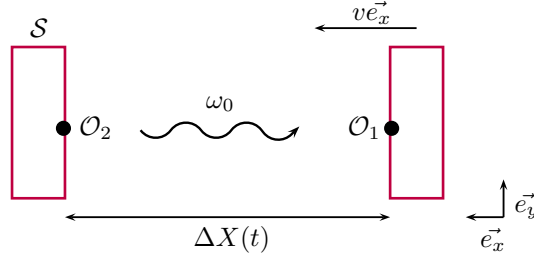


FIGURE 2.3 – Notations pour l'étude de l'effet Doppler simple

Notons c_φ la vitesse de phase de l'onde, $\Delta X(t)$ la distance séparant la source de la paroi et supposons qu'à $t = 0$ le signal issu de \mathcal{S} passe par un maximum. Ce maximum est reçu par \mathcal{O}_1 à l'instant t_1 puis par \mathcal{O}_2 en t_2 . Le maximum suivant, émis par \mathcal{S} à l'instant T_0 est respectivement reçu en $t'_1 = t_1 + T_1$ et $t'_2 = t_2 + T_2$. Il vient :

$$\begin{cases} t_1 - 0 = \frac{\Delta X(t_1)}{c_\varphi}, & t'_1 - T_0 = \frac{\Delta X(t'_1)}{c_\varphi} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} t_2 - 0 = 2 \frac{\Delta X(t_1)}{c_\varphi}, & t'_2 - T_0 = 2 \frac{\Delta X(t'_1)}{c_\varphi} \end{cases} \quad (2.7)$$

ce qui mène aux résultats bien connus,

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c_\varphi}\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \omega_1 \left(1 + \frac{v}{c_\varphi - v}\right) = \omega_0 \left(1 + \frac{2v}{c_\varphi - v}\right) \end{cases} \quad (2.9)$$

La relation liant ω_2 à ω_1 est différente de celle entre ω_1 et ω_0 : les situations « source fixe et récepteur en mouvement » et « source en mouvement et récepteur fixe » ne sont pas symétriques, la relation de dispersion n'étant pas invariante par changement de référentiel galiléen.

2.2.2 Paroi oscillante

Le même problème est abordé pour une surface en translation rectiligne mais non uniforme [79]. Comme reporté sur le schéma Fig. 2.4, on note L la distance moyenne séparant l'émetteur/récepteur de la paroi, et $\xi(t)$ son écart instantané à cette valeur.

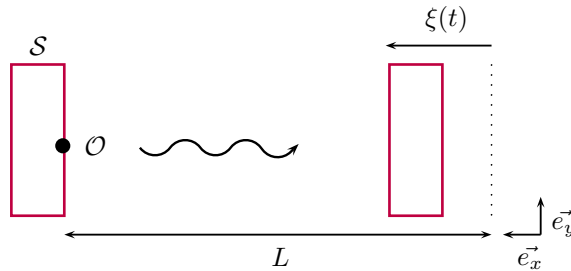


FIGURE 2.4 – Notation pour l'étude de l'effet Doppler avec surface oscillante

Les hypothèses sont les suivantes :

1. Le milieu est linéaire et non dispersif.
2. Le déplacement de la paroi est faible ($|\xi(t)| \ll L$) et lent par rapport au signal émis $s_e(t)$ ($|\dot{\xi}/\xi| \ll |\dot{s}_e/s_e|$).
3. Le nombre de Mach $\mathcal{M} = \dot{\xi}(t)/c_\varphi$ est faible.

Notons $s_e(t)$ et $s_r(t)$ les signaux émis par la source \mathcal{S} et reçu par \mathcal{O} après réflexion à l'instant t . Ces deux quantités sont reliées par un décalage temporel en régime quasi statique,

$$s_r(t) = s_e(t - \tau(t)), \quad (2.10)$$

où $\tau(t)$ est la durée mise par le signal reçu en t par \mathcal{O} pour arriver. Le milieu étant non dispersif, la réflexion sur la paroi mobile a lieu à l'instant $t - \tau(t)/2$, d'où

$$c_\varphi \frac{\tau(t)}{2} = L - \xi \left(t - \frac{\tau(t)}{2} \right). \quad (2.11)$$

Le déplacement de la paroi étant faible, nous avons $\tau(t) = 2L/c_\varphi + \delta\tau(t)$ où $\delta\tau \sim \xi/c_\varphi \ll 2L/c_\varphi$. Ceci permet un développement du membre de droite de (2.11),

$$\xi \left(t - \frac{\tau(t)}{2} \right) \simeq \xi \left(t - \frac{L}{c_\varphi} \right) - \frac{\delta\tau(t)}{2} \dot{\xi} \left(t - \frac{L}{c_\varphi} \right). \quad (2.12)$$

Le second terme, d'ordre \mathcal{M} , est négligeable et (2.11) fournit une expression pour le déphasage $\tau(t)$

$$\tau(t) = \frac{2}{c_\varphi} \left(L - \xi \left(t - \frac{L}{c_\varphi} \right) \right). \quad (2.13)$$

Ceci conclut le problème en liant les signaux émis et reçu. En pratique, $\tau(t)$ est mesurable avec une détection synchrone comparant s_r et s_e . Cela fournit une méthode expérimentale précise, non intrusive et ne nécessitant aucune calibration pour suivre le déplacement d'une surface. L'effet de la paroi sur l'onde incidente correspond en traitement du signal à une modulation de phase, la porteuse étant $s_e(t)$ et le signal modulant relié à $\xi(t)$.

2.2.3 Paroi en mouvement harmonique

Considérons le cas particulier d'un mouvement harmonique, $s_e(t) = s_0 \sin(\omega_0 t)$ et $\xi(t) = A \sin(\omega_p t)$. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, (2.10) devient

$$s_r(t) = s_1 \sin \left(\omega_0 \left(t - \frac{2L}{c_\varphi} + \frac{2}{c_\varphi} A \sin(\omega_p t) \right) \right). \quad (2.14)$$

Cette expression peut se réécrire en introduisant le nombre d'onde $k_0 = \omega_0/c_\varphi$,

$$s_r(t) = s_1 \sin(\omega_0 t + 2k_0 A \sin(\omega_p t)). \quad (2.15)$$

Nous décomposons cette fonction sur une base harmonique en utilisant l'équation (A.5), l'annexe A introduisant les fonctions de Bessel et représentant les premières d'entre elles,

$$\boxed{s_r(t) = s_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(2k_0 A) \sin((\omega_0 + n\omega_p)t)} \quad (2.16)$$

L'augmentation progressive du rapport entre l'amplitude d'oscillation et la longueur d'onde de l'onde incidente enrichit progressivement le spectre, d'abord avec les somme et différence $\omega_0 \pm \omega_p$, puis avec un grand nombre de combinaisons linéaires du type $\omega_0 \pm n\omega_p$. Cela se vérifie directement avec deux transducteurs piézoélectriques, un vibreur, un accéléromètre et un analyseur de spectre : l'expérience confirme avec une excellente précision la relation (2.16) [79, 80].

2.2.4 Effet de la non-linéarité du milieu

Pour la situation précédente §2.2.3, nous cherchons un critère autorisant à négliger les non-linéarités en volume lorsqu'il s'agit d'ondes acoustiques [79, 80, 88, 91]. Pour cela, nous estimons successivement l'amplitude de la modulation de phase liée à l'effet Doppler $\Delta\Phi_D$ et celle résultant des non-linéarités $\Delta\Phi_{NL}$. Cette partie reprend les arguments de [79].

- **Évaluation de $\Delta\Phi_D$** : $\Delta\Phi_D$ se déduit de (2.15),

$$\Delta\Phi_D \sim 2k_0 A \quad (2.17)$$

- **Évaluation de $\Delta\Phi_{NL}$** : plaçons nous dans le cas où $\omega_p \ll \omega_0$ et considérons l'évolution du système à l'issue de la réflexion en oubliant l'effet Doppler. Deux ondes fuient le vibreur : une de pulsation ω_0 réfléchie par la surface et la seconde à ω_p créée par l'oscillation de la paroi. L'onde à ω_p induit des mouvements d'ensemble du milieu à l'échelle de sa longueur d'onde, bien supérieure à celle de l'onde réfléchie ($\omega_p \ll \omega_0$). La vitesse de phase dépendant de ce mouvement d'ensemble, l'onde à ω_0 est soumise à un forçage paramétrique induisant des composantes à $\omega_0 \pm \omega_p$. En imposant une dépendance linéaire de $\Delta\Phi_{NL}$ avec l'amplitude de l'onde émise par la paroi $\dot{\xi} \sim A\omega_p$ ainsi qu'avec L , puis en complétant dimensionnellement avec des paramètres propres à l'onde, il vient

$$\Delta\Phi_{NL} \sim \frac{LA\omega_p\omega_0}{c_\varphi^2} \quad (2.18)$$

L'importance relative de ces deux effets est finalement décrite par le rapport

$$\boxed{\frac{\Delta\Phi_D}{\Delta\Phi_{NL}} \sim \frac{\lambda_p}{L}} \quad (2.19)$$

où λ_p est la longueur d'onde associée à l'onde de basse fréquence. Une étude expérimentale confirme la pertinence de ce paramètre [79], et nous retiendrons que les non-linéarités en volume sont négligeables si $\lambda_p/L > 2$.

2.2.5 Première approche du problème réel

Retournons au problème nous intéressant ici, à savoir la rétrodiffusion d'une onde acoustique sur une surface en mouvement. Nous analysons le dispositif expérimental Fig. 2.5 : un transducteur piézoélectrique de rayon R excité par un signal $s_0(t) = s_0 \cos(\omega_0 t)$ envoie sous une incidence normale une onde acoustique sur une surface d'eau. Celle-ci, située à une distance L , est parcourue par une onde gravito-capillaire $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \cos(\omega_v t - k_v x)$. Un récepteur juxtaposé à l'émetteur reçoit ensuite le signal réfléchi $s_1(t)$ et compare sa phase avec celle de $s_0(t)$.

Nous prenons les mêmes hypothèses que §2.2.2 et supposons que :

1. La propagation des ondes acoustiques est linéaire et non dispersive.
2. Le déplacement relatif de la paroi est faible ($|\xi(t)| \ll L$) et lent ($\omega_v \ll \omega_0$).
3. Le nombre de Mach $\mathcal{M} = \dot{\xi}(t)/c_\varphi$ est faible.
4. Des ondes planes peuvent être considérées, $L \geq 2R^2/\lambda_{ac}$ où λ_{ac} est la longueur d'onde acoustique¹.
5. La hauteur du déplacement est faible devant la longueur d'onde acoustique : $|\xi(t)| \ll \lambda_{ac}$.

Nous allons dans un premier temps négliger le phénomène de diffraction, puis nous le prendrons qualitativement en compte. Ce cadre de travail permet d'utiliser les résultats de la partie précédente pour déterminer une expression approximative du signal réfléchi au niveau du récepteur, que l'on supposera superposé à l'émetteur :

$$s_1(\vec{r}, t) \propto \cos(\omega_0 t - 2k_0 \xi(\vec{r}, t) - \varphi_0), \quad (2.20)$$

où φ_0 est un déphasage constant relatif à la durée moyenne de vol et $2k_0 \xi(\vec{r}, t)$ celui associé à la différence de marche $2\xi(\vec{r}, t)$. Le récepteur émet une tension $s_1(t)$ proportionnelle à la moyenne spatiale du signal acoustique sur sa section ; en notant $\langle \dots \rangle_\Sigma$ la moyenne spatiale pour $|\vec{r}| \leq R$,

$$s_1(t) \propto \langle \cos(\omega_0 t - 2k_0 \xi(\vec{r}, t) - \varphi_0) \rangle_\Sigma. \quad (2.21)$$

1. Il s'agit de la zone de champ lointain.

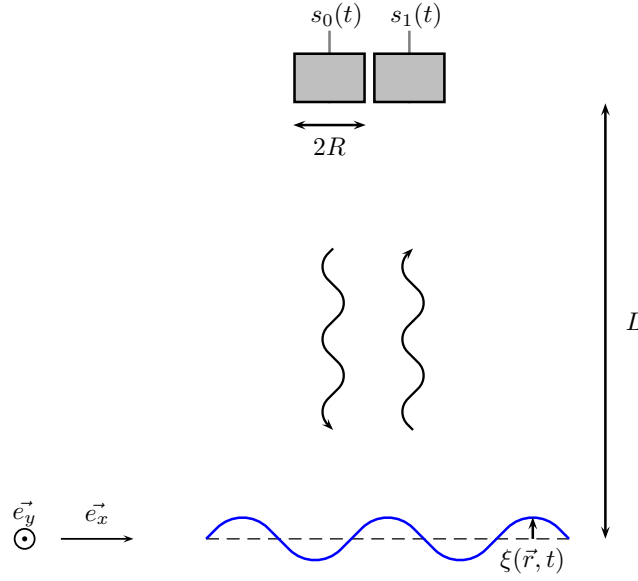


FIGURE 2.5 – Réflexion d'une onde acoustique sur une surface ondulée

Cette expression se simplifie avec $|\xi(t)| \ll \lambda_{ac}$:

$$s_1(t) \propto \langle \cos(\omega_0 t - 2k_0 \xi(\vec{r}, t) - \varphi_0) \rangle_{\Sigma} \quad (2.22)$$

$$\propto \langle \cos(\omega_0 t - \varphi_0) + 2k_0 \xi(\vec{r}, t) \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \rangle_{\Sigma} \quad (2.23)$$

$$\propto \cos(\omega_0 t - \varphi_0) + 2k_0 \langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_{\Sigma} \sin(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (2.24)$$

$$\propto \cos(\omega_0 t - 2k_0 \langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_{\Sigma} - \varphi_0) \quad (2.25)$$

Une mesure du déphasage $\varphi_{ac}(t)$ entre les signaux reçu et émis donne donc accès à la quantité

$$\varphi_{ac}(t) = \varphi_0 + 2k_0 \langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_{\Sigma}. \quad (2.26)$$

Nous obtenons une expression linéaire en $\xi(\vec{r}, t)$, ce qui justifie de limiter à une composante de Fourier de la forme $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \cos(\omega_v t - k_v x)$. Cela permet d'explicitier la moyenne spatiale mise en jeu :

$$\pi R^2 \langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_{\Sigma} = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \xi(x, t) = \frac{2\xi_0 J_1(k_v R)}{k_v R} \cos(\omega_v t), \quad (2.27)$$

les étapes de calcul étant présentées dans l'annexe B. En définissant un terme correctif $\alpha(k_v)$ décrivant l'effet de la non-planéité de la surface,

$$\varphi_{ac}(t) = \varphi_0 + 2k_0 \alpha(k_v) \xi_0 \cos(\omega_v t), \quad \text{avec} \quad \alpha(k_v) = \frac{2J_1(Rk_v)}{Rk_v} \quad (2.28)$$

Ce résultat néglige totalement le phénomène de diffraction en supposant que l'onde acoustique se propage suivant un faisceau cylindrique. En pratique, la diffraction augmente la taille de la moyenne spatiale $\langle \dots \rangle_{\Sigma}$ et les calculs exacts ne peuvent plus être menés : une première approximation peut néanmoins être obtenue en modifiant la taille de la surface Σ , que l'on prend circulaire de rayon $R' = 0.66L\lambda_{ac}/R$, ce qui revient à remplacer R par R' dans l'expression de α . En conclusion, nous nous attendons à une baisse de sensibilité lorsque la zone de mesure devient supérieure à la longueur d'onde de l'onde de surface, *i.e.* que le système voit une onde et non plus un simple plan vibrant.

2.2.6 Présentation du dispositif expérimental

Pour vérifier les prédictions précédentes on considère le montage expérimental schématisé Fig.2.6. Une cuve de dimensions $648 \times 846 \times 160$ mm est remplie de dix centimètres d'eau, ce qui assure la condition eau profonde

2. Il s'agit de la moitié du premier rayon d'annulation de la tâche d'Airy, soit un rayon typique d'extension du faisceau diffracté.

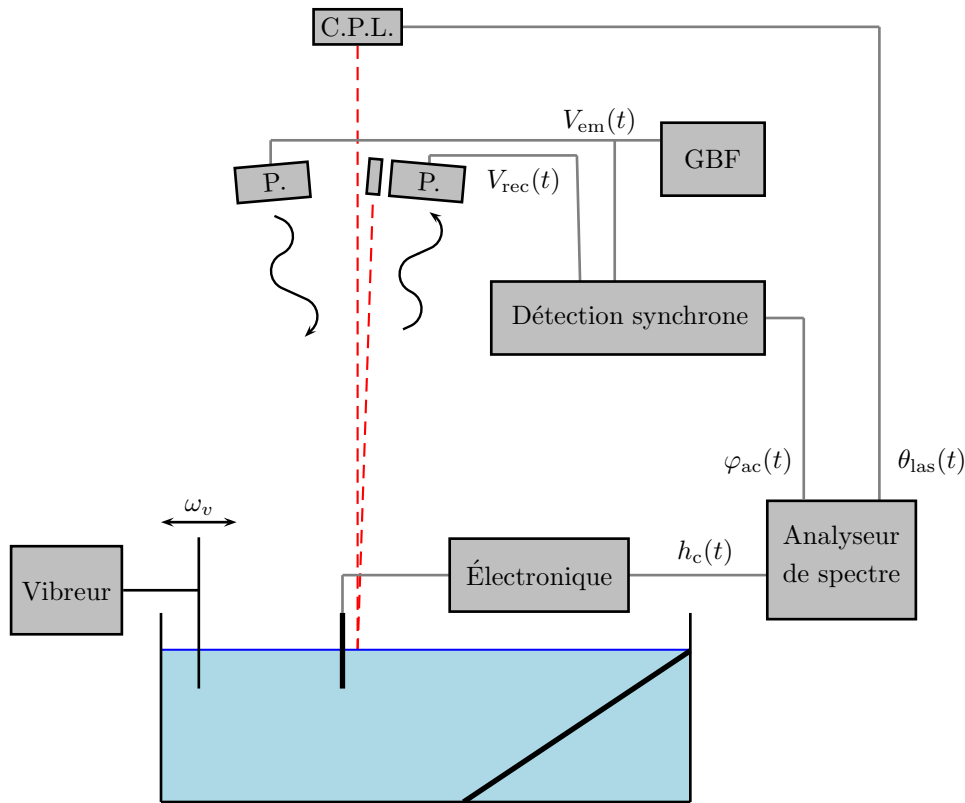


FIGURE 2.6 – Montage : P. est le transducteur piézoélectrique et C.P.L. le capteur de position laser

pour toutes les ondes de surface de fréquence de plus de deux hertz ($\tanh(kh) \geq 0.95$). Une plaque de Plexiglas de largeur 20 cm est mise en mouvement à des fréquences allant jusqu'à 40 Hz à une extrémité du récipient par un vibreur Brüel & Kjær 4810. Les ondes de surfaces ainsi créées sont dissipées à l'autre extrémité par un plan incliné. Les trois dispositifs de mesure suivant sont focalisés à 20 cm du vibreur.

- Deux transducteurs piézoélectriques résonants à 146 kHz sont fixés (1.440 ± 0.005) m au-dessus de la surface d'eau, distants de 10 cm et orientés pour sonder un même point. L'émetteur est excité à sa fréquence de résonance par une tension $V_{em}(t)$, une tension $V_{rec}(t)$ étant mesurée aux bornes du récepteur. Ce signal est traité par une détection synchrone SRS 844 verrouillée sur $V_{em}(t)$ et fournissant en sortie une tension proportionnelle au déphasage entre les deux signaux $\varphi_{ac}(t)$.
- Une diode laser est accolée à l'un des transducteurs piézoélectriques. Le rayon émis est partiellement réfléchi à la surface puis, après avoir parcouru une distance de (2.02 ± 0.01) m, est reçu par un détecteur de position CONEX PSD9. Ce dernier, de surface active 9×9 mm, fournit un signal relié à la position du faisceau laser suivant les deux directions. On obtient ainsi une mesure locale de la pente de l'interface.
- Un capteur capacitif (fil vertical de 5 cm) est partiellement inséré dans l'eau puis étalonné. L'ensemble constitue un condensateur dont les armatures sont le cuivre et l'eau, séparées par un diélectrique, en l'occurrence le revêtement isolant. Un dispositif électronique décrit dans l'annexe C fournit une tension proportionnelle à la capacité, variant de plusieurs dizaines de picofarads suite à une immersion totale.

Les trois signaux de mesure sont ensuite traités par un analyseur de spectre 4 voies HP 35670A. On vérifie que ces conditions expérimentales respectent les approximations §2.2.5 :

1. La propagation des ondes acoustiques est linéaire ($\lambda_{ac}/L > 6$) et non dispersive.
2. Le déplacement de l'eau est faible ($|\xi(t)| < 0.1$ mm, $L = 1.44$ m) et lent (des hertz face à des ultrasons).
3. Le nombre de Mach est faible : $\dot{\xi} < 0.02$ m \cdot s $^{-1}$ et $c_\varphi = 340$ m \cdot s $^{-1}$.
4. Des ondes planes peuvent être considérées : avec $R = 0.9$ cm, $\lambda_{ac} = 2.3$ mm et $L = 1.44$ m, $L \geq 2R^2/\lambda_{ac}$.
5. Le déplacement de l'eau est faible devant la longueur d'onde acoustique : $|\xi(t)| < 0.1$ mm et $\lambda_{ac} = 2.3$ mm.

2.2.7 Comparaison des capteurs

Étudions la réponse en amplitude de ces différents capteurs, en fixant la fréquence du vibreur (ici à $f_v = 5$ Hz) et variant la tension appliquée V_{vib} . Le capteur capacitif étant préalablement étalonné, sa réponse fournit une mesure absolue de la hauteur d'eau en un point. Il en est de même pour la méthode optique, où suivant une direction x le déplacement $\Delta X(t)$ du faisceau laser sur le capteur par rapport à l'état au repos est directement lié à la distance eau-capteur L et à la pente locale $\partial_x \xi$ via :

$$\Delta X(t) = 2L\partial_x \xi. \quad (2.29)$$

L'onde de surface étant progressive et de fréquence connue (donc de nombre d'onde k_v connu), on déduit de la mesure optique son amplitude ξ_0 , coïncidant avec celle donnée par la méthode capacitive. La linéarité de la réponse du vibreur est vérifiée : l'amplitude de l'onde de surface mesurée est directement proportionnelle à la tension appliquée V_{vib} . Le signal acoustique mesuré est de la forme prédite (2.28),

$$\varphi_{\text{ac}}(t) = 2k_0\alpha(k_v)\xi_0 \cos(\omega_v t), \quad (2.30)$$

où k_0 est le nombre d'onde acoustique et $\alpha(k_v) = 0.133 \pm 0.005$ un facteur correctif déterminé expérimentalement pour faire coïncider les mesures acoustiques avec celles des deux autres capteurs (sa comparaison avec le modèle précédent sera menée ultérieurement). Un exemple des différents spectres de puissance obtenus, normalisés par leurs valeurs à 5 Hz et correspondant à une onde de surface de $5 \mu\text{m}$, est représenté Fig. 2.7.

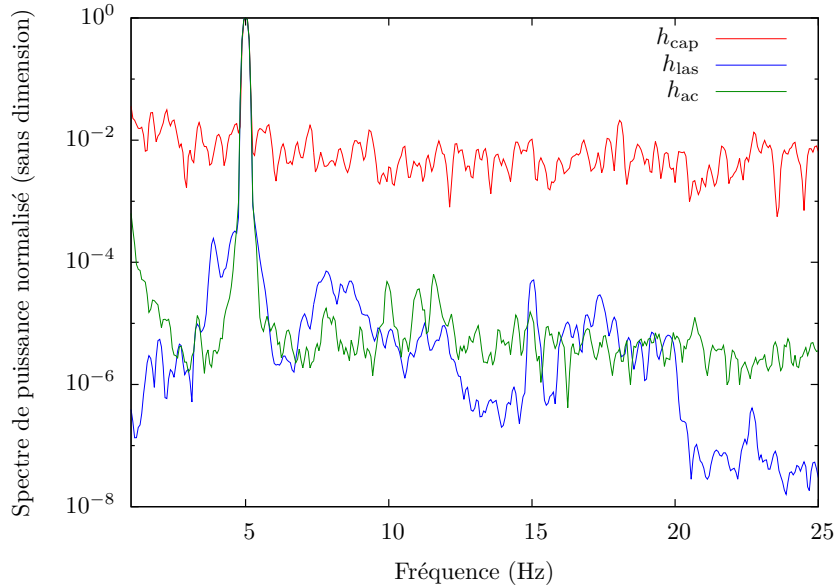


FIGURE 2.7 – Spectres de puissance normalisés pour des ondes de surface d'amplitude $5 \mu\text{m}$ et fréquence 5 Hz

La comparaison quantitative de l'amplitude des ondes de surface mesurée par les différents capteurs en fonction de la tension V_{vib} est reportée Fig. 2.8. On observe une saturation à basse amplitude correspondant au niveau de bruit et associée à la résolution de la mesure. Les données sont ajustées par la fonction $f(x)$ obtenue par hypothèse de non-corrélation du bruit et du signal pour les spectres de puissance :

$$f(x) = a\sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_c}\right)^2}. \quad (2.31)$$

Ce traitement fournit les résolutions des capteurs, définies par $h_c = f(x_c) = 1.4a$ et reportées Tab. 2.1.

Précisons que ces résolutions dépendent du traitement électronique, du modèle exact des composants utilisés ainsi que, pour les mesures acoustique et optique, de la fréquence des ondes de surface (plus précisément du nombre d'onde). Les valeurs obtenues peuvent cependant être considérées comme typiques. Notons que les mesures acoustique et optique ont des résolutions comparables bien que les longueurs d'onde soient séparées de quatre ordres de grandeur, ce qui illustre l'intérêt de considérer la phase et non seulement l'intensité reçue.

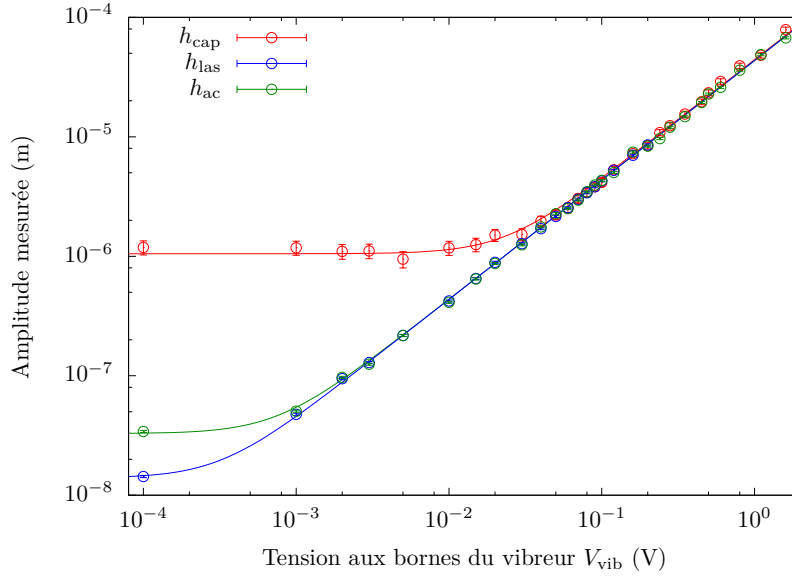


FIGURE 2.8 – Réponses des différents capteurs et ajustements par la fonction (2.31)

Type de capteur	Capacitif	Acoustique	Laser
Résolution (en μm)	3.0	0.1	0.04

TABLE 2.1 – Résolution des différents capteurs à 5 Hz

2.2.8 Réponse fréquentielle

Nous étudions finalement l'évolution du paramètre correctif α avec la longueur d'onde des ondes de surface. Pour cela, l'expérience précédente a été reproduite à différentes fréquences f_v , associées à des nombres d'onde k_v déduits de la relation de dispersion et évoluant entre 10 m^{-1} et 1000 m^{-1} . Le cas $k_v = 0 \text{ m}^{-1}$ a aussi été réalisé en remplaçant la surface d'eau par une plaque horizontale de Plexiglas de dimension $300 \times 400 \text{ mm}$ mise en mouvement par vibreur Brüel & Kjær 4808 et dont le déplacement est suivi grâce à un accéléromètre ainsi que son amplificateur de charge.

On obtient la courbe Fig. 2.9, où le point d'abscisse $k_v = 0 \text{ m}^{-1}$ est décalé à $k_v = 0.022 \text{ m}^{-1}$ pour les besoins de l'échelle logarithmique. Deux modèles sont reportés, correspondant à l'expression déterminée §2.2.5,

$$\alpha(k_v) = \frac{2J_1(R'k_v)}{R'k_v}, \quad (2.32)$$

avec $R' = R$ (diffraction négligée) ou $R' = 0.66L\lambda_{ac}/R$ (diffraction approximée). Ce second choix s'avère plus pertinent, même si une modélisation plus fine serait nécessaire aux grands nombres d'onde.

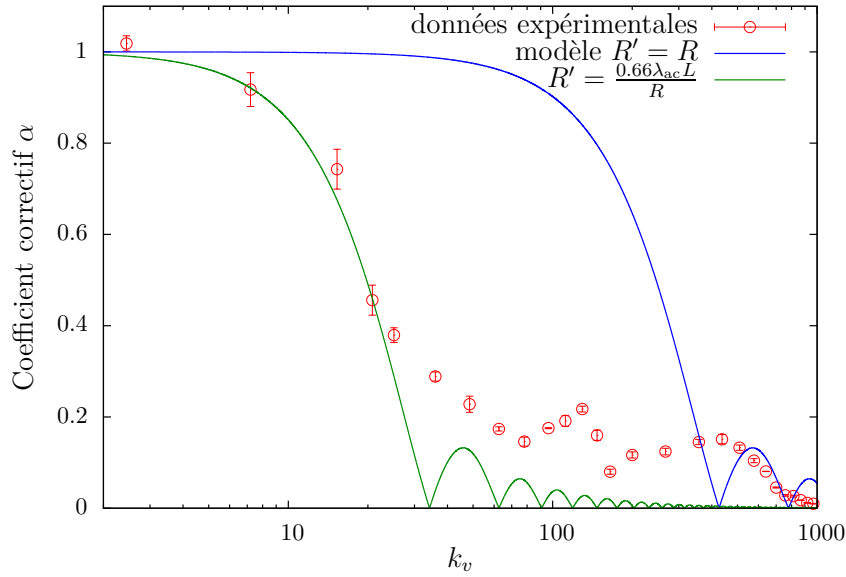
2.2.9 Conclusion

Ces résultats montrent que ce dispositif expérimental est à même de mesurer des ondes de surface de manière non intrusive. Pour s'affranchir d'un étalonnage, le coefficient α doit rester proche de l'unité, ce qui impose de se restreindre aux longueurs d'onde $\lambda_v \gtrsim 4\lambda_{ac}L/R$, c'est-à-dire de se ramener sur la zone d'étude au cas d'un plan oscillant. Dans cette limite, ce dispositif permet de mesurer $\xi(t)$ avec une résolution en amplitude de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres³ et une résolution temporelle de quelques dizaines de microsecondes.

Parmi les applications envisageables figurent la détection fine d'un seuil d'instabilité (comme l'instabilité de Faraday) ainsi que de la fréquence associée dans le cas d'une bifurcation de Hopf (*e.g.* instabilité de Kelvin-Helmoltz), la mesure quantitative des fréquence et amplitude d'ondes de Rayleigh⁴, l'analyse statistique de déformations de plaques métalliques ou encore l'étude dynamique de membranes souples.

3. cf. §2.2.7, la résolution étant augmentée par rapport à la valeur annoncée à 5 Hz, α gagnant un ordre de grandeur.

4. Sur des surfaces opaques, il semble d'ailleurs difficile d'imaginer d'autres méthodes de mesure non intrusives.

FIGURE 2.9 – Évolution du paramètre correctif α et comparaison avec deux modèles

2.3 Réflexion oblique sur une surface d'eau en mouvement

Dans la partie précédente, nous avons vu comment mesurer l'amplitude et la fréquence d'ondes de surface en juxtaposant les récepteur et l'émetteur acoustiques. Avec une configuration où le récepteur est cette fois-ci incliné par rapport à la normale, nous allons montrer qu'il est de plus possible d'acquérir des informations sur la direction de propagation de ces ondes, tout en s'affranchissant de la limite en longueur d'onde précédente.

2.3.1 Historique des travaux sur la diffraction d'ondes acoustiques

Deux éléments sont ici à prendre en compte : d'une part la diffraction des ondes acoustiques par les déformations de surface, d'autre part l'effet Doppler associé à la réflexion sur une surface mobile. Ces effets n'ont jamais été étudiés simultanément en acoustique, mais de nombreux résultats concernant la diffraction d'une onde acoustique sur une surface fixe ont été établis durant la première moitié du XX^e siècle. La motivation était essentiellement militaire et cherchait à caractériser la réflexion par le fond de l'océan, ou la transmission dans l'atmosphère, d'ondes acoustiques émises par exemple par un sous-marin.

Rayleigh inaugure ce domaine à la fin du XIX^e siècle en calculant les amplitudes des composantes diffractées par une surface sinusoïdale de déformation $\xi(\vec{r}) = \xi_0 \cos(k_v x)$ [92]. Suite à une controverse résumée dans [93], il se trouve que ses résultats sont valides uniquement dans la limite $\xi_0 k_v \ll 1$. C'est à LaCasce et Tamarkin que l'on doit l'une des rares expériences sur le sujet⁵ [94], concluant que la condition $\xi_0 k_v \ll 1$ est en pratique peu restrictive, des données avec $\xi_0 k_v = 0.46$ s'ajustant bien avec le modèle de Rayleigh⁶.

L'extension aux surfaces quelconques est associée aux travaux de Marsh et d'Eckart, et nous allons présenter ceux d'Eckart [95]. En se plaçant dans un cadre de travail précisé par la suite, ce problème devient similaire à la diffraction en optique et l'amplitude diffractée s'exprime sous forme d'une intégrale portant sur des sources secondaires judicieusement placées à la surface $\xi(\vec{r})$: il s'agit du principe de Huygens-Fresnel. Observée à l'infini dans le cas d'une réflexion totale (fonction de transmission $\underline{t}(\vec{r}) = e^{i\varphi(\vec{r})}$) avec de faibles déphasages⁷, l'intensité diffractée dans la direction (θ_x, θ_y) est trouvée égale à

$$I(\theta_x, \theta_y) \propto \left| \iint dx dy \xi(x, y) e^{ik_{ac}(x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))} \right|^2. \quad (2.33)$$

5. À comparer au nombre de théories différentes existant à l'époque, approchant la dizaine.

6. Ou plutôt, citant [93] : « the method produces results that do not disagree more with experimental data than do other, more rigorous, solutions ».

7. Contrairement aux situations habituelles en optique, c'est non pas l'amplitude mais la phase de la fonction de transmission qui évolue, l'élevation $\xi(\vec{r})$ représentant un déphasage de la source secondaire.

Cette expression⁸ rappelle les résultats d'optique ondulatoire, la fonction de transmission étant ici simplifiée grâce à l'hypothèse de faibles déphasages. Le membre de droite est la transformée de Fourier spatiale de l'élévation $\xi(\vec{r})$. Ainsi, en étudiant le signal réfléchi dans la direction (θ_x, θ_y) , il est *a priori* possible de mesurer l'évolution instantanée d'une composante $(k_{ac} \sin(\theta_x), k_{ac} \sin(\theta_y))$ du spectre de puissance de $\xi(x, y)$, c'est-à-dire que le récepteur n'est sensible qu'à des ondes de surface d'un unique vecteur d'onde. En pratique, il existe une certaine bande passante sur les angles (θ_x, θ_y) sélectionnés liée à la taille du récepteur, à sa distance à la surface ainsi qu'à la taille de l'interface insonifiée [96].

2.3.2 Résultats obtenus

Pour généraliser les résultats précédents aux surfaces en mouvement, il « suffit » d'ajouter une dépendance temporelle dans l'équation (2.33) en remplaçant $\xi(x, y)$ par $\xi(x, y, t)$. Les calculs associés se compliquent assez rapidement, mais ont déjà été menés en optique dans un contexte tout à fait différent, relatif à l'étude de l'effet acousto-optique. Prenons quelques lignes pour préciser de quoi il s'agit.

Les premières figures de diffraction de rayons X datent du début du siècle dernier et étaient pour la plupart celles de solides amorphes, ne montrant pas de direction privilégiée de déviation. Une théorie les expliquant fut proposée par Léon Brillouin [97], ayant en tête ses travaux portant sur les vibrations cristallines (on parle encore aujourd'hui des *zones de Brillouin*) : les ondes de compression parcourant sans cesse un solide à l'équilibre thermique diffractent les ondes électromagnétiques, d'où la déviation des rayons X. Bien qu'élégante, cette idée est fautive, les rayons X étant principalement diffusés par les nuages électroniques.

Cela mène néanmoins Brillouin à calculer la diffraction d'une onde électromagnétique par une onde acoustique, et à proposer un dispositif expérimental aujourd'hui connu sous le nom de modulateur acousto-optique, ou *cellule de Bragg*. Exploitant les transducteurs piézoélectriques mis au point par Paul Langevin durant la première guerre mondiale, ce montage fut réalisé quelques années plus tard par (entre autres) Debye [98–100] puis mis en équation par Raman [101–105]. Les cellules de Bragg comptent aujourd'hui parmi les expériences d'enseignement classiques [106] et servent dans des dispositifs optiques à décaler légèrement les fréquences des lasers.

Ce dispositif optique se trouve être équivalent à celui considéré dans cette section : la diffraction d'une onde électromagnétique par une onde acoustique et la diffraction d'une onde acoustique par une onde de surface sont deux effets similaires. Utilisant ce constat, nous déduisons comment exploiter ce dispositif acoustique pour caractériser l'interface, et il ressort que l'acoustique permet de mesurer non seulement l'amplitude des ondes de surface, mais aussi leur fréquence et leur direction. Alors qu'une mesure en un point ne permet pas de séparer des ondes contra-propagatives, cela est immédiat avec ce dispositif.

Notre travail a consisté à vérifier que tous les résultats attendus de l'analogie précédente sont bien observés. Pour illustrer l'intérêt de cette méthode de mesure, nous l'avons ensuite appliquée au problème de la réflexion d'une onde de surface sur une paroi. Le principal résultat est qu'un ménisque augmente la dissipation lors de la réflexion d'ondes gravito-capillaires sur un bord, l'énergie réfléchie pouvant varier d'un facteur deux suivant la condition de mouillage retenue. Un extrait des *Comptes-rendus des Rencontres du Non-Linéaires 2016* développant ces résultats est reproduit dans les pages suivantes. Ils sont aussi publiés de manière plus concise dans un article de *Physical Review Letters* non reporté ici [107].

8. Précisons les hypothèses associées à ce résultat :

- L'onde incidente est plane, *i.e.* $L \gg R^2 \lambda_{ac}$, où R est le rayon du transducteur piézoélectrique, situé à une distance L de la surface et émettant une onde acoustique de longueur d'onde λ_{ac} .
- Les déphasages engendrés sont faibles : $|\xi| \ll \lambda_{ac}$.
- La surface sondée est de taille supérieure à la plus grande longueur d'onde du milieu.



FIGURE 2.10 – Réflexion d'une onde gravito-capillaire sur un ménisque

Caractérisation acoustique de la réflexion d'une onde de surface

Guillaume Michel, François Pétrélis & Stéphan Fauve

Laboratoire de Physique Statistique, École normale supérieure, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France
 guillaume.michel@ens.fr

Résumé. Par analogie avec un dispositif optique appelé « cellule de Bragg », nous montrons comment il est possible de caractériser des ondes de surface (amplitudes, fréquences et directions) à l'aide de l'acoustique. Ceci est ensuite exploité pour mesurer l'évolution du coefficient de réflexion d'ondes gravito-capillaires sur une paroi verticale suivant l'état du ménisque, dont dépend fortement la dissipation au niveau de la ligne triple.

Abstract. We investigate the reflection of gravity-capillary surface waves by a plane vertical barrier. The size of the meniscus is found to strongly affect reflection: the energy of the reflected wave with a pinned contact line is around twice the one corresponding to a fully developed meniscus. To perform these measurements, a new experimental setup similar to an acousto-optic modulator is developed and offers a simple way to measure the amplitude, frequency and direction of propagation of surface waves.

1 Introduction

L'acoustique offre dans de nombreux cas des méthodes de mesure quantitatives simples et efficaces. Pensons par exemple à l'effet Doppler, permettant outre les mesures usuelles de vélocimétrie de suivre à une résolution bien inférieure à la longueur d'onde les oscillations d'une paroi. Les surfaces fixes déformées peuvent aussi être étudiées en tirant parti du phénomène de diffraction, ce qui fut utilisé en océanographie pour sonder la houle et les fonds marins au début du XX^e siècle (cf. les travaux d'Eckart [1] ou la revue [2]). L'étude acoustique des ondes de surface, de quelque type que ce soit, combine ces deux aspects : les déformations spatiales périodiques agissent comme un réseau et les mouvements associés induisent un décalage Doppler égal à un multiple de la fréquence de l'onde. Mis en évidence il y a plus de 50 ans [3], cet effet est resté anecdotique en acoustique et n'a jamais mené à des applications concrètes, contrairement à son équivalent optique (les « cellules de Bragg ») couramment utilisé en laboratoire et dans des instruments de mesure. Nous présentons ici son intérêt sur l'exemple des ondes gravito-capillaires à la surface de l'eau : avec uniquement deux transducteurs piézoélectriques, il est possible de mesurer indépendamment les fréquences, directions de propagation et amplitudes associées avec, pour ces dernières, une sensibilité inférieure au micron.

Ce dispositif est ensuite utilisé pour mesurer précisément l'évolution du coefficient de réflexion d'une onde de surface gravito-capillaire sur une paroi verticale suivant la condition de mouillage. Le déplacement de la ligne triple tout comme l'oscillation de l'angle de contact d'un ménisque attaché sont en effet deux phénomènes dissipatifs [4–6] diminuant l'énergie réfléchie. Nous décrivons leurs effets respectifs sur le coefficient de réflexion d'une onde gravito-capillaire, pouvant être remarquables : l'énergie de l'onde réfléchie varie ainsi jusqu'à un facteur deux suivant la condition de mouillage retenue.

2 Un modulateur acousto-mécanique

2.1 Principe du modulateur acousto-optique

Le dispositif expérimental faisant l'objet de cette communication étant en tout point analogue à un modulateur acousto-optique, encore appelé « cellule de Bragg », nous commençons ici par en rappeler le principe (le lecteur connaissant déjà son fonctionnement pourra passer cette partie).

Le principe du modulateur acousto-optique a été proposé en 1922 par Léon Brillouin pour étudier la manière dont la lumière est affectée par une onde acoustique de longueur d'onde similaire [7]. Réalisée

peu de temps après par P. Debye et F. W. Sears d'une part [8], ainsi que R. Lucas et P. Biquard d'autre part [9], ce montage expérimental est représenté sur la figure 1 (a). La lumière issue d'une source S suffisamment fine est transformée en onde plane par une lentille L_1 , traverse une cuve contenant un liquide parcouru par une onde acoustique engendrée grâce à un transducteur piézoélectrique Q , puis est finalement observée sur un écran à l'aide d'une seconde lentille L_2 .

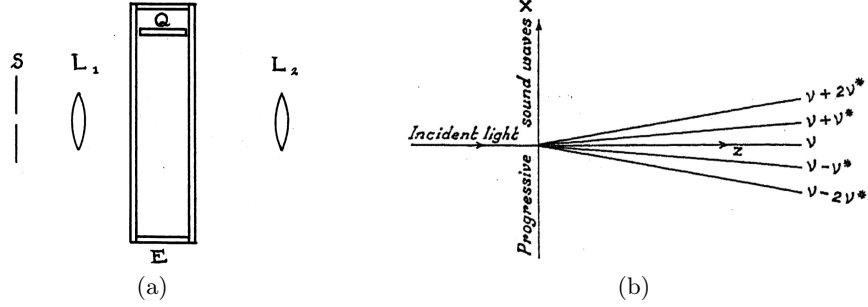


FIGURE 1. (a) Montage expérimental pour l'étude de l'effet acousto-optique (extrait de [8]). (b) Effet attendu pour onde acoustique progressive (extrait de [11]).

Les observations sont claires : la cuve agit comme un réseau de pas égal à la longueur d'onde acoustique et modifie de plus les fréquences des ondes diffusées d'un multiple de la fréquence acoustique [10]. L'interprétation quantitative de cette expérience fut donnée quelques années plus tard par Raman et Nath au cours d'une série de cinq articles (Réf. [11] et associées) précisant notamment les différents décalages Doppler ainsi que les amplitudes et orientations des pics de diffraction. Dans le cas d'une onde acoustique sinusoïdale progressive, ces calculs se basent sur la théorie de diffraction de Fraunhofer et reposent sur l'évaluation de l'intégrale portant sur la surface Σ éclairée

$$\int_{\Sigma} e^{ik\ell\delta n \sin(\omega^* t - k^* x)} \times e^{ikx \sin \theta_x} dx, \quad (1)$$

dont le module au carré quantifie l'intensité mesurée dans la direction θ_x à la sortie de la cuve ($\theta_x = 0$ en l'absence de déviation). Dans cette expression, l'onde acoustique de pulsation $\omega^* = 2\pi\nu^*$ et nombre d'onde k^* engendre une modulation d'indice optique d'amplitude δn sur la largeur ℓ de la cuve, affectant l'onde électromagnétique de nombre d'onde k et pulsation $\omega = 2\pi\nu$. Les décalages Doppler des premiers ordres de diffraction sont reportés sur la figure 1 (b).

Reportons ici l'un des résultats majeurs de cette étude : dans la limite d'une faible modulation de phase ($k\ell\delta n \ll 1$), l'effet de l'onde progressive acoustique se résume à la génération de deux ondes diffractées

- de même amplitude, proportionnelle à celle de l'onde acoustique ;
- l'une de pulsation $\omega + \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = \frac{k^*}{k}$;
- l'autre de pulsation $\omega - \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = -\frac{k^*}{k}$.

2.2 Modification du dispositif pour l'étude d'ondes de surface

Le dispositif précédent peut être directement transposé pour l'étude d'ondes de surface en modifiant la nature des ondes utilisées comme suit :

	Modulateur acousto-optique	Modulateur acousto-mécanique
Onde permettant de sonder le milieu :	Onde électromagnétique	Onde acoustique
Onde perturbant le milieu étudié :	Onde acoustique	Onde de surface

Le montage expérimental remplaçant la figure 1 est schématisé sur la figure 2 (a). L'intégrale de Fraunhofer à évaluer étant ici

$$\int_{\Sigma} e^{ik\xi(x,t)(1+\cos \theta_x)} \times e^{ikx \sin \theta_x} dx. \quad (2)$$

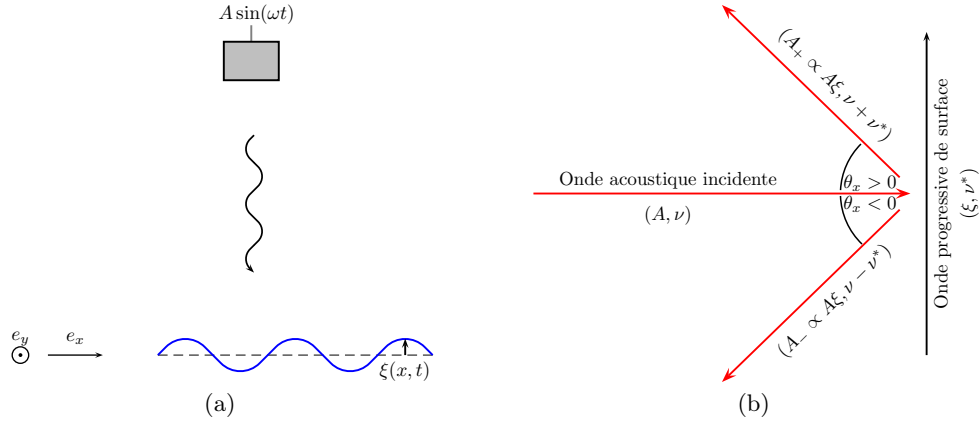


FIGURE 2. Principe d'un modulateur acousto-mécanique. (a) Une onde acoustique voit sa réflexion affectée par la présence d'une onde de surface. (b) Caractéristiques des composantes diffusées.

Dans cette expression la pulsation et le nombre d'onde de l'onde acoustique sont respectivement notés $\omega = 2\pi\nu$ et k , l'élévation de la surface $\xi(x, t)$ et l'angle par rapport à la normale θ_x . Le facteur $(1 + \cos \theta_x)$ est géométrique et ne modifie pas le résultat précédent que nous reportons ici par simple analogie. Dans la limite d'une faible modulation de phase ($k\xi \ll 1$), c'est-à-dire tant que l'élévation est petite devant la longueur d'onde acoustique, l'effet d'une onde de surface progressive suivant \mathbf{e}_x de pulsation ω^* se résume ainsi à la génération de deux ondes acoustiques diffractées schématisées sur la figure 2 (b)

- de même amplitude, proportionnelle à celle de l'onde acoustique ;
- l'une de pulsation $\omega + \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = \frac{k^*}{k}$;
- l'autre de pulsation $\omega - \omega^*$ émise selon un angle θ_x tel que $\sin \theta_x = -\frac{k^*}{k}$.

En mesurant la fréquence et l'amplitude des ondes diffractées, nous pouvons ainsi en déduire la fréquence, l'amplitude et la direction de propagation des ondes de surface.

2.3 Application expérimentale

Nous commençons par vérifier qu'un tel système est bien adapté à la mesure d'onde gravito-capillaire en réalisant le montage de la figure 3(a). Pour cela, une cuve de dimensions $648 \times 846 \times 160$ mm est remplie d'eau et délimitée à une extrémité par une plaque inclinée destinée à limiter la réflexion d'ondes de surface, à l'autre par un vibreur Brüel & Kjær 4810. Deux transducteurs piézoélectriques résonant à $\nu = 41\,500$ Hz ($\omega = 2\pi\nu$) émettent et reçoivent à $\theta_x = 45,2^\circ$ le signal acoustique, ensuite traité par un analyseur de spectre HP 35670A. Enfin, un capteur de position suit le déplacement d'un faisceau laser après réflexion sur la surface : cette partie du dispositif, non représentée en figure 3, sert à mesurer l'amplitude des ondes progressives en l'absence de réflexion.

Des ondes gravito-capillaires de fréquence $\nu^* = 15$ Hz sont engendrées, correspondant à un nombre d'onde $k^* \simeq 400 \text{ m}^{-1}$, aucune onde réfléchiée n'étant décelable. En notant k le nombre d'onde acoustique et ξ l'amplitude de l'élévation de surface, cette étude est menée dans la limite $k\xi \ll 1$ et $k^*\xi \ll 1$, pour rester dans le domaine de validité de la théorie présentée ci-dessus, ainsi que dans le domaine linéaire de propagation d'ondes de surface. Le spectre acoustique diffusé est représentée sur la figure 4 (a) et consiste en une composante à ν due aux réflexions spéculaires ainsi qu'une seconde à $\nu - \nu^*$ dont l'amplitude évolue linéairement vis-à-vis de ξ (cf. figure 4 (b)). Nous vérifions aussi (figures non reportées ici) qu'inverser le sens de propagation de l'onde de surface modifie le signe du décalage Doppler, ainsi que la linéarité de cette méthode de mesure (la coexistence de deux ondes de surface mène simplement à l'apparition de deux pics dans le spectre acoustique).

Ces résultats vérifient les propriétés présentées précédemment. Ici, un signal acoustique est capté bien que $\arcsin(k^*/k) \simeq 32^\circ \neq \theta_x$, mettant en évidence que la fenêtre de diffraction est angulairement étendue,

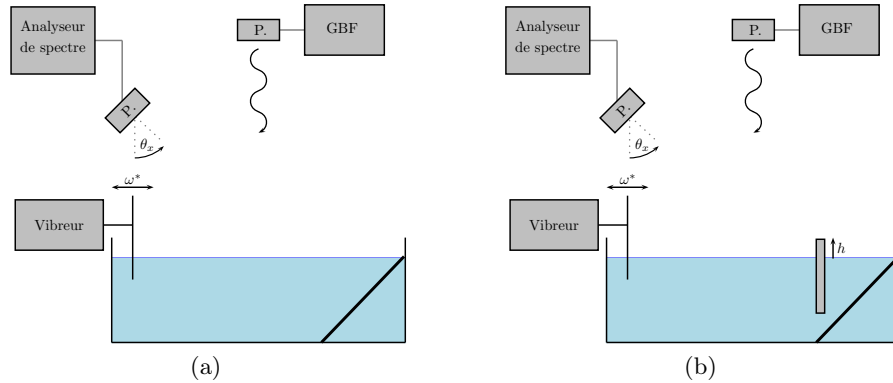


FIGURE 3. Dispositifs servant à (a) tester le système de mesure et (b) mesurer un coefficient de réflexion.

c'est-à-dire qu'un spectre étendu d'ondes de surface peut être mesuré sans déplacer le récepteur. Tout comme dans le cas d'un réseau optique, cette fenêtre doit devenir de plus en plus réduite à mesure que la taille de zone insonifiée augmente. Remarquons de plus que le décalage Doppler joue un rôle crucial dans l'expérience, permettant de distinguer le phénomène d'intérêt des nombreuses réflexions spéculaires. D'un point de vue pratique, le coefficient de proportionnalité $\alpha(\theta_x, k^*)$ liant l'amplitude acoustique reçue à $\nu - \nu^*$ et celle de l'onde de surface ξ , dépendant uniquement de l'inclinaison du capteur θ_x ainsi que du nombre d'onde k^* , doit être calibré grâce à une autre méthode pour une mesure absolue de l'amplitude. Par la suite, nous considérerons des mesures relatives et cela ne sera pas nécessaire.

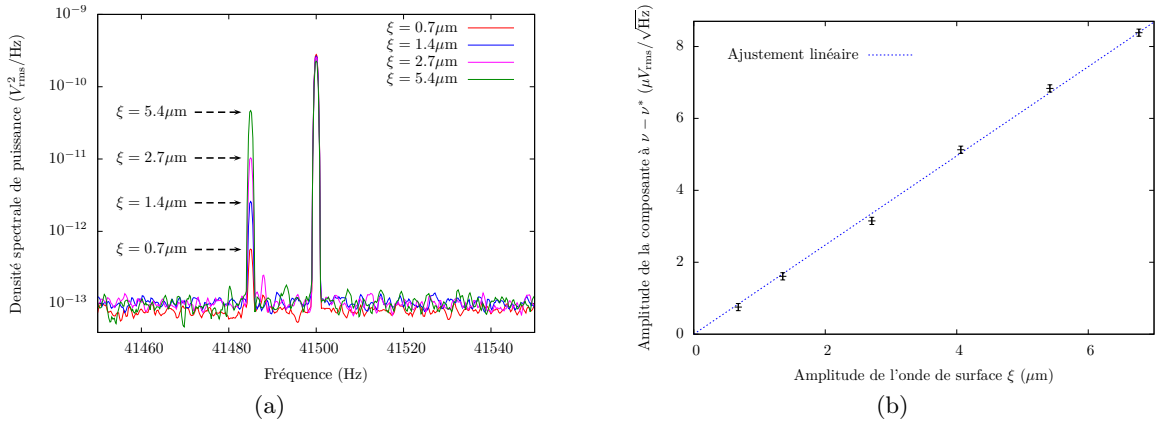


FIGURE 4. (a) Spectres acoustiques du signal diffusé et (b) amplitude de la composante décalée en fréquence pour différentes amplitudes d'ondes de surface ξ .

3 Réflexion d'une onde de surface

Le dispositif expérimental précédent est modifié pour mesurer des coefficients de réflexion : une paroi verticale en Dural d'épaisseur 2,9 mm et de hauteur 8 cm est fixée à 30 cm du vibreur. Sa hauteur h peut être fixée et mesurée avec une précision de 0,1 mm, le bord supérieur coïncidant avec le niveau de l'eau non perturbé si $h = 0$, cf. figure 3 (b). En régime permanent, deux ondes de surface contra-propagatives de fréquence ν^* traversent la zone insonifiée :

- une d'amplitude ξ se dirigeant vers la paroi verticale, induisant au niveau du récepteur piézoélectrique un signal de fréquence $\nu - \nu^*$ et d'amplitude $\alpha(\theta_x, k^*)\xi$;

- une autre d'amplitude $R_{\text{tot}}\xi$ s'éloignant de la paroi, R_{tot} étant le coefficient de réflexion global en amplitude. Le signal acoustique reçu est de fréquence $\nu + \nu^*$ et d'amplitude $\alpha(\theta_x, k^*)R_{\text{tot}}\xi$.

Le coefficient R_{tot}^2 peut ainsi être mesuré à l'aide d'un analyseur de spectre en divisant les densités spectrales de puissance reçue à $\nu + \nu^*$ par celle à $\nu - \nu^*$. Quelques spectres typiques sont reportés sur la figure 5 (a), montrant une forte dépendance de R_{tot} vis-à-vis de h . Étant donné que la longueur d'onde de l'onde de surface incidente ($2\pi/k^* \simeq 1,6$ cm) est petite par rapport à la taille de la paroi et de la hauteur d'eau, ce dispositif reflète la réflexion d'une onde gravito-capillaire sur une paroi infinie en régime d'eau profonde. Dans toutes ces expériences, ξ reste faible par rapport à la longueur d'onde acoustique ($k\xi \ll 1$) ainsi qu'à celle de l'onde de surface ($k^*\xi \ll 1$) : dans le domaine de cambrure exploré ($k^*\xi$ jusqu'à 0,05), R_{tot} est trouvé indépendant de la cambrure. Dans ce régime de propagation linéaire, le coefficient de réflexion global R_{tot} peut être divisé en deux termes :

$$R_{\text{tot}}(h)^2 = D^2 \times R(h)^2, \quad (3)$$

où D englobe l'amortissement linéaire durant la propagation et $R(h)^2$ représente le coefficient de réflexion en énergie sur la paroi. La valeur de D étant difficilement accessible théoriquement à cause de la probable contamination de l'interface par des tensioactifs, nous considérons la grandeur suivante,

$$\left(\frac{R_{\text{tot}}(h)}{R_{\text{tot}}(\infty)}\right)^2 = \left(\frac{R(h)}{R(\infty)}\right)^2, \quad (4)$$

comparant l'énergie réfléchie lorsque la paroi est émergée d'une hauteur h à celle d'un mur infini (ménisque pleinement développé). Son évolution est représentée sur la figure 5 (b), comportant les différents régimes suivant :

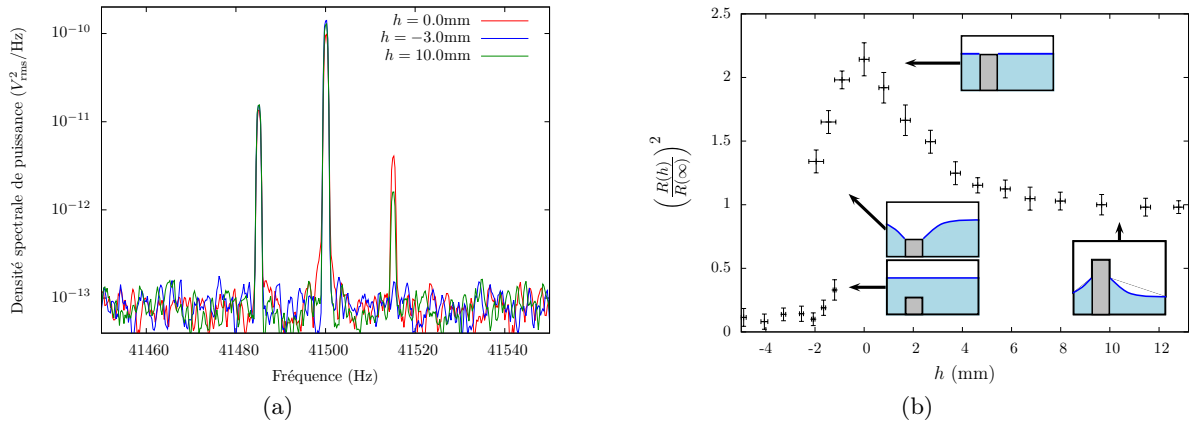


FIGURE 5. (a) Spectres acoustiques observés et (b) coefficient de réflexion en énergie pour différentes hauteurs h .

- Une paroi totalement immergée est obtenue pour des valeurs de h inférieures à -1 mm, au-dessus de laquelle une transition de démouillage est toujours observée. Même si cette distance reste petite par rapport à la longueur d'onde de l'onde de surface ($2\pi/k^* \simeq 1,6$ cm), le coefficient de réflexion reste quasi-nul. Ce résultat surprenant a été prédit par Dean en 1945 pour des ondes de gravité [12] puis généralisé au cas des ondes gravito-capillaires par Evans [13]. Il résulte de la forte localisation de l'énergie des ondes de surface au niveau de l'interface. Les valeurs théoriques de R^2 obtenues à l'aide de [13] pour $h = -2$ mm et $h = -1$ mm valent respectivement 0,05 et 0,21.
- Pour des hauteurs $h > 5$ mm, le coefficient de réflexion est constant. Le ménisque est alors pleinement développé et la ligne de contact n'est plus accrochée au niveau du coin supérieur, son mouvement occasionnant une dissipation supplémentaire. L'étude théorique de ce régime est complexe car la condition

aux limites (CL) usuelle de non-glissement fait apparaître des divergences. D'autres CL doivent être considérées, apportant une nouvelle échelle de longueur telles qu'une longueur de glissement ou un *cut-off* microscopique [4]. Même si les premières observations remontent à près d'un siècle [14], la compréhension fine des phénomènes dissipatifs au niveau de la ligne de contact n'est aboutie que dans certaines limites [5, 6]. À l'aide d'une CL phénoménologique, le coefficient de réflexion dans la limite de faible amplitude et d'un fluide inviscide peut être calculé [15].

- Entre ces deux cas limites, la ligne de contact est accrochée au bord supérieur de la paroi, la hauteur du ménisque étant ainsi égale à h . La valeur de l'angle de contact en l'absence de perturbation n'est plus un paramètre libre mais peut être déduit de h . Le coefficient de réflexion maximal est obtenu lorsque le ménisque disparaît, c'est-à-dire lorsque $h = 0$.

Aucune discontinuité n'est observée lorsque la ligne de contact quitte le coin supérieur ($h \simeq 5$ mm), signe que la CL au bord évolue continûment de « accrochée » à « libre », ce qui peut être décrit à l'aide de la loi phénoménologique reportée dans [15] et couramment utilisée dans la littérature.

4 Conclusion

Nous avons ici montré que l'acoustique permet de caractériser des ondes de surface, donnant en particulier accès aux amplitudes individuelles dans le cas d'ondes contra-propagatives. Bien qu'utilisé uniquement pour des ondes gravito-capillaires, ce dispositif peut être adapté à tout autre type d'onde de surface. Pensons par exemple aux ondes de Rayleigh, de déformation de plaques métalliques, de films ou de membranes, pour lesquelles le champ de déformation entier peut souvent être acquis *via* l'optique mais au prix d'un dispositif plus cher et complexe.

Cette méthode a été mise en œuvre pour mesurer le coefficient de réflexion d'ondes gravito-capillaires suivant la taille du ménisque. Nous observons une forte influence de ce paramètre : entre une ligne de contact accrochée en l'absence de ménisque et un ménisque pleinement développé, l'énergie de l'onde réfléchie peut varier jusqu'à un facteur deux. Cette étude sur le mouillage pourrait être étendue à de nombreux autres aspects : l'étude des non-linéarités dans le cas d'ondes de surface de cambrures notables, de la dépendance vis-à-vis de la fréquence de ces mêmes ondes ou encore des propriétés de la paroi (inclinaison, caractère hydrophobe / hydrophile, porosité, inhomogénéité...).

Remerciements : Ce travail a été mené grâce au CNES et à l'ANR-12-BS04-0005-02.

Références

1. C. ECKART, *J. Acoust. Soc. Am.*, **25**, 566–570 (1953).
2. L. FORTUIN, *J. Acoust. Soc. Am.*, **47**, 1209–1228 (1970).
3. L. N. LIEBERMANN, *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**, 923 (1963).
4. P. G. DE GENNES, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 827–863 (1985).
5. C.-L. TING & M. PERLIN, *J. Fluid. Mech.*, **295**, 263–300 (1995).
6. S. GUO, H. LEE, P. SHENG & P. TONG, *Phys. Rev. E*, **91**, 012404 (2015).
7. L. BRILLOUIN, *Ann. Phys.*, **17**, 88–122 (1922).
8. P. DEBYE & F. W. SEARS, *Proc. Nat. Acad. Sc.* **6**, 409–414 (1932).
9. R. LUCAS & P. BIQUARD, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 2132 (1932).
10. P. DEBYE, H. SACK & F. COULON, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **198**, 922 (1934).
11. C. V. RAMAN & N. S. NAGENDRA NATH, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **3**, 75–84 (1936).
12. W. R. DEAN, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **41**, 231–236 (1945).
13. D. V. EVANS, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **64**, 795–810 (1968).
14. R. ABLETT, *Philos. Mag.*, **46**, 244–256 (1923).
15. P. F. RHODES-ROBINSON, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **92**, 369–373 (1982).

Chapitre 3

Non-linéarités dissipatives

A conclusion that a linear model is insufficient to describe a problem in fluid mechanics isn't exactly headline news.

Anonymous referee

Dans le chapitre précédent, nous avons mesuré la dissipation d'énergie par un ménisque. Nous allons montrer que cet effet existe aussi en régime de mouillage total et mène à une non-linéarité dissipative se produisant pour des amplitudes bien plus faibles que celles associées aux interactions entre paquets d'ondes. L'étude de la dissipation en milieu infini remonte à Stokes [108]. L'effet des couches limites fut considéré plus d'un demi-siècle plus tard [109], montrant notamment que le taux d'amortissement associé évolue comme $\sqrt{\nu}$ au lieu de ν , comme établi §1.2.2. Dans la vie courante, la dissipation en volume calculée par Stokes est négligeable, les deux sources de dissipation principale étant :

1. La contamination de surface. Très simple à observer mais bien plus difficile à éviter, elle résulte de la tendance des impuretés à se localiser au niveau de l'interface pour abaisser la tension superficielle¹. L'expérience historique de Benjamin Franklin [110], observant l'effet d'une cuillère d'huile versée à la surface d'un lac, la met en évidence de façon spectaculaire, cf. Fig 3.1. Pour de l'eau initialement pure, la dissipation augmente typiquement durant une heure avant de saturer [111], la seule solution étant alors de renouveler le fluide².
2. L'existence et le déplacement d'un ménisque. Mise en évidence dans la partie précédente, la dissipation provient des forts gradients de vitesse à ce niveau. L'étude théorique de ce problème étant très délicate, la majorité des résultats sont expérimentaux, montrant entre autres que ce type d'amortissement est rapidement non linéaire [34, 35].

Ce chapitre porte sur la non-linéarité associée au déplacement d'un ménisque. Plus précisément, on s'attend à ce qu'elle fasse intervenir un nombre sans dimension construit comme le rapport entre l'amplitude de l'onde de surface et une autre longueur caractéristique : quelle est-elle ?

Pour répondre à cette question, il faut se placer dans des conditions où toute autre source de dissipation est contrôlée, notamment celle associée à la pollution de surface. Ceci étant très délicat dans le cas de l'eau³, nous sommes amenés à chercher une interface de faible tension superficielle. De plus, il serait commode de connaître précisément l'état de mouillage, c'est-à-dire la valeur de l'angle de contact statique. Enfin une méthode expérimentale simple pour varier les paramètres du problème et déterminer sans ambiguïté cette longueur caractéristique est nécessaire. Toutes ces contraintes nous mènent naturellement vers le choix d'un fluide près du point critique, associant tension superficielle quasi nulle, mouillage total et dépendance forte des paramètres contrôlant la dynamique des ondes de surface avec la température.

1. Ceci est illustré en chimie par la notion de « concentration micellaire critique » (CMC) : lors de l'ajout de tensioactif dans une solution, ce dernier commence par se disperser à la surface puis en volume avant de former des agrégats. La limite entre ces deux derniers domaines est par définition la CMC.

2. Par exemple à l'aide d'une pompe, cf. [112] pour une étude expérimentale.

3. On trouvera une discussion pratique de ce problème dans [30].



(a) Étang de Clapham en temps normal

(b) Étang de Clapham après versement d'une cuillère d'huile

FIGURE 3.1 – Reproduction de l'expérience de Franklin [113]

3.1 Dispositif expérimental

3.1.1 Propriétés principales d'un fluide diphasique proche du point critique

S'agissant d'une transition de phase du second ordre, le passage d'un mélange liquide-gaz à un fluide critique en suivant la courbe de coexistence présente un comportement singulier, les changements d'état rencontrés dans la vie courante étant quant à eux du premier ordre. Les différences fondamentales sont l'absence de chaleur latente et les variations rapides des coefficients de réponse. En notant $\epsilon = (T_c - T)/T_c$ un paramètre sans dimension quantifiant l'écart au point critique, les comportements suivants sont observés :

1. La tension de surface σ vérifie

$$\sigma = \sigma_0 \epsilon^\mu \quad (3.1)$$

où $\mu \simeq 1.26$ est un « exposant critique » qui peut être estimé théoriquement (groupe de renormalisation) ou numériquement (par exemple *via* le modèle d'Ising 3D) et σ_0 un coefficient dépendant du fluide considéré.

2. Les masses volumiques des phases liquide et gaz valent respectivement

$$\rho_\ell = \rho_c (1 + B_0 \epsilon^\beta) \quad (3.2a)$$

$$\rho_g = \rho_c (1 - B_0 \epsilon^\beta) \quad (3.2b)$$

ρ_c et B_0 dépendent du fluide considéré (ρ_c est la masse volumique au point critique) et $\beta \simeq 0.325$ est un autre exposant critique.

3. La longueur capillaire ℓ_c s'en déduit,

$$\ell_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_\ell - \rho_g)}} = \ell_0 \epsilon^\phi \quad (3.3)$$

où $\phi = (\mu - \beta)/2 \simeq 0.47$ et $\ell_0 = 2\pi \sqrt{\sigma_0 / (2gB_0\rho_c)}$ en utilisant les résultats précédents. La longueur capillaire tend vers zéro au voisinage du point critique.

4. Les indices de réfraction des phases liquide et gaz sont donnés par

$$n_\ell = n_c (1 + A_0 \epsilon^\beta) \quad (3.4a)$$

$$n_g = n_c (1 - A_0 \epsilon^\beta) \quad (3.4b)$$

n_c est l'indice de réfraction au point critique, A_0 dépend du fluide et $\beta \simeq 0.325$ est l'exposant critique déjà rencontré pour les masses volumiques. En utilisant la formule de Lorentz-Lorenz (L-L), objet du prochain paragraphe, il est possible de démontrer la dépendance en ϵ^β ainsi qu'une relation entre A_0 , B_0 et n_c .

5. Le cas de la viscosité dynamique est différent. Les prédictions théoriques avancent [114]

$$\eta \propto \epsilon^{-0.05} \quad (3.5)$$

divergence bien trop faible pour être observable. Une hypothèse souvent utilisée par les expérimentateurs pour interpréter les résultats de diffusion inélastique de la lumière près du point critique [73, 115, 116] est de supposer les viscosités cinématiques des deux phases égales proche du point critique :

$$\boxed{\frac{\eta_\ell}{\rho_\ell} = \frac{\eta_g}{\rho_g}} \quad (3.6)$$

Aucune expérience n'a confirmé cette hypothèse.

Formule de Lorentz-Lorenz et comportement au point critique

La formule de Clausius-Mosotti, encore nommée de Lorentz-Lorenz d'après les deux physiciens l'ayant généralisée, établit un lien entre les comportements microscopique et macroscopique d'un diélectrique. Un tel milieu, supposé linéaire, isotrope, homogène et transparent se décrit par son vecteur polarisation \vec{P} , lié au champ électrique \vec{E} par l'égalité

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (3.7)$$

où χ est la susceptibilité diélectrique, donnant accès à l'indice de réfraction par $n^2 = 1 + \chi$. Microscopiquement, cet effet découle de l'acquisition par chaque molécule d'un moment dipolaire \vec{p} lui aussi proportionnel à \vec{E} ,

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad (3.8)$$

α étant la polarisabilité d'une molécule. En négligeant les interactions entre particules, cette grandeur s'exprime simplement en fonction de la susceptibilité diélectrique et de la densité numérique de molécules n_p :

$$\chi = n_p \alpha. \quad (3.9)$$

Bien que cette relation soit raisonnable pour un milieu dilué, elle doit être modifiée dans le cas d'un liquide ou d'un gaz dense. Il s'agit de l'objet de la formule de L-L, où le champ local induisant la polarisation d'une molécule est différencié du champ électrique macroscopique, menant à [117] :

$$\chi = \frac{n_p \alpha}{1 - n_p \alpha / 3}. \quad (3.10)$$

On retrouve bien la limite des milieux dilués lorsque $n_p \alpha \ll 1$. Cette relation équivaut avec $n^2 = 1 + \chi$ à la formule de Lorentz-Lorenz⁴

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{n_p \alpha}{3}. \quad (3.11)$$

L'expérience montre que cette relation n'est pas quantitativement vérifiée, des écarts de 10% à 20% étant observés à cause des interactions moléculaires⁵ [119]. Il est possible de chercher des corrections à cette loi de manière théorique (on se référera par exemple à [120]), mais une approche plus pragmatique consiste à introduire un coefficient correctif portant sur le membre de droite de (3.11) [121], que l'on notera alors

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = L \rho, \quad (3.12)$$

où ρ est la masse volumique du milieu et L un coefficient devant être tabulé. En ce qui nous concerne, cette relation suffit à quantifier le comportement de l'indice optique proche du point critique. En effet, notons L_ℓ , L_g et L_c les constantes *a priori* différentes respectivement relatives au liquide, au gaz et au fluide critique,

$$\frac{n_\ell^2 - 1}{n_\ell^2 + 2} = L_\ell \rho_\ell, \quad \frac{n_g^2 - 1}{n_g^2 + 2} = L_g \rho_g, \quad \frac{n_c^2 - 1}{n_c^2 + 2} = L_c \rho_c. \quad (3.13)$$

4. Dans la littérature, on retrouve souvent un facteur 4π issu des conventions CGS.

5. Bien qu'on pourrait s'attendre à d'autres problèmes proche du point critique, conséquences par exemple des fluctuations de densité, ce n'est heureusement pas le cas [118].

La limite de ces égalités pour $T \rightarrow T_c$ mène à $L_g = L_\ell = L_c$. Ensuite, l'application des relations (3.2a) et (3.2b) permet de retrouver les expressions des indices de réfraction et de déterminer

$$A_0 = B_0 \frac{(n_c^2 - 1)(n_c^2 + 2)}{6n_c^2} \quad (3.14)$$

3.1.2 Montage expérimental

L'étude d'un fluide proche du point critique doit se mener dans un système fermé, supportant de relativement hautes pressions et permettant une régulation de température ainsi que la réalisation de mesures quantitatives. La majorité du montage est visible figure 3.2 et nous présentons successivement :

1. Le réservoir permettant de contenir le fluide, réalisé par une entreprise spécialisée ⁶.
2. Le fluide retenu ainsi que ses principales caractéristiques.
3. Les dispositifs de mesure.
4. La fixation de l'ensemble et la méthode de forçage.

Réservoir cylindrique

Commençons par décrire le réservoir :

- Le fluide est contenu dans un cylindre de hauteur 25 mm et de diamètre 100 mm en acier inoxydable.
- Ce cylindre est lui-même inclus dans un second cylindre, de hauteur 86 mm et diamètre 136 mm. De l'eau dont la température est contrôlée par un bain thermostaté circule entre ces deux armatures.
- Deux hublots de diamètre 1 cm traversent la surface latérale en des positions opposées, permettant d'avoir un aperçu de l'état de l'interface, de la hauteur du liquide ainsi que du ménisque.
- Deux hublots de plus grand diamètre (4 cm) sont déployés sur les faces inférieure et supérieure le long de l'axe de révolution des cylindres. Ils permettront de suivre la dynamique de l'interface.

Choix du fluide : hexafluorure de soufre (SF₆)

Le critère de sélection du fluide est essentiellement sa température critique T_c , directement liée à l'intensité des interactions moléculaires ⁷. Pour avoir une large gamme de températures accessibles au-dessous du point critique tout en restant dans les limites d'un thermostat fonctionnant à l'eau, on cherche un fluide de température critique avoisinant 50°C : les plus utilisés sont le dioxyde de carbone ($T_{CO_2} = 31.3^\circ C$) et l'hexafluorure de soufre ($T_{SF_6} = 45.6^\circ C$). Le second étant chimiquement inerte, il est retenu et l'expérience se fera donc en utilisant de l'hexafluorure de soufre (SF₆) ⁸. Son comportement proche du point critique a été l'objet de nombreuses études et nous reproduisons les différentes valeurs tabulées ci-après.

- La température critique [73, 122, 122, 123] : $318.63 \text{ K} \leq T_c \leq 318.729 \text{ K}$
- La pression critique [122] : $P_c = 3.7545 \text{ MPa}$
- La masse volumique critique [122, 124] : $736 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \leq \rho_c \leq 742.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Pour la tension de surface :
 - $\sigma_0 = (55.13 \pm 2.6) \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ à partir de mesures optiques [73]
 - $54.88 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1} \leq \sigma_0 \leq 55.31 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ par mesure d'ascension capillaire [123, 125, 126]
- Pour l'évolution des masses volumiques [123, 125, 127, 128] : $1.62 \leq B_0 \leq 1.93$
- Pour la longueur capillaire [123, 125, 126] : $\ell_0 = (8.82 \pm 0.06) \text{ mm}$
- Pour la viscosité cinématique [73],

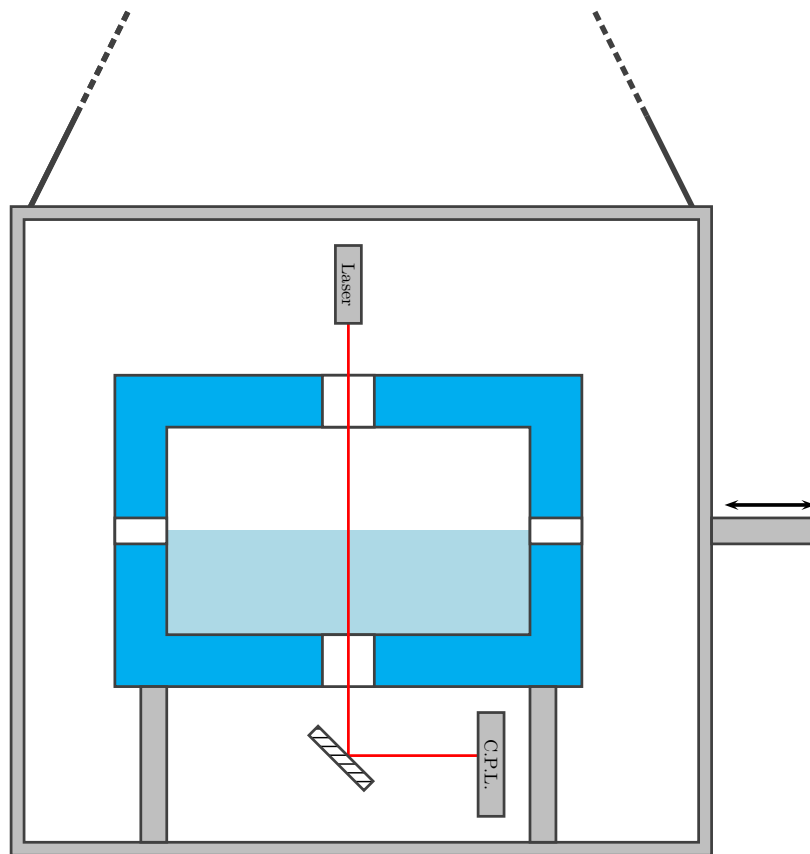
$$\bar{\eta} = \frac{\rho_c}{\rho_\ell} \eta_\ell = \frac{\rho_c}{\rho_g} \eta_g \implies \bar{\eta} = (425 + 14.5(T - T_c) \pm 15) \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.15)$$

- Pour les indices de réfraction [124, 127, 128] : $n_c = 1.093$ et $0.14 \leq A_0 \leq 0.156$

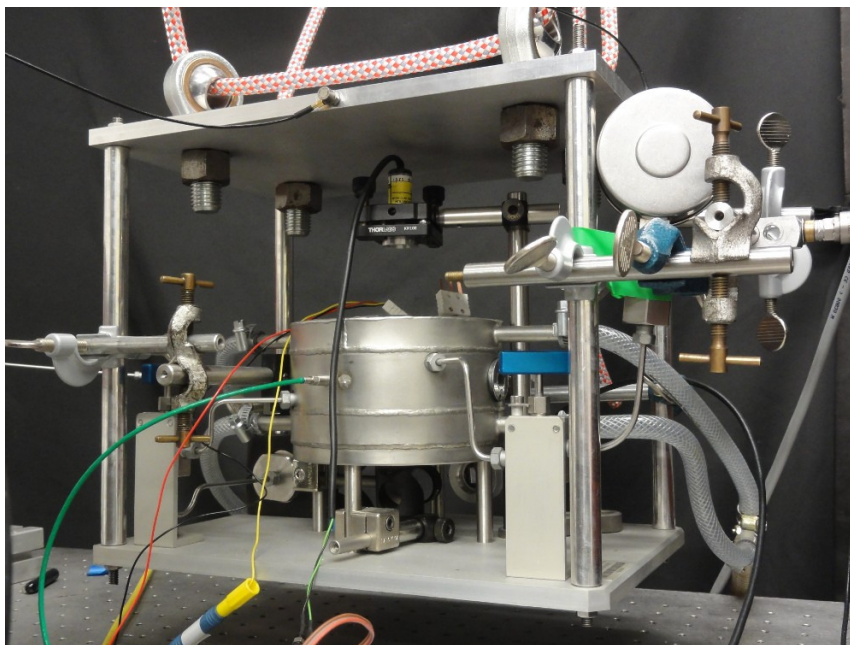
6. Top Industrie S.A.S.

7. Illustrons deux cas extrêmes : l'hélium, de température critique $-268^\circ C$ et l'eau, pour laquelle $T_c = 373^\circ C$.

8. En chimie, il s'agit d'un fluide modèle : les molécules sont approximativement sphériques, stables et inertes sur une large gamme de température et leurs interactions sont faibles (uniquement dues aux forces de London entre dipôles induits).



(a) Schéma de l'expérience, C.P.L. signifiant capteur de position laser



(b) Photographie du montage

FIGURE 3.2 – Expérience de ballottement près du point critique

Dispositifs de mesure et interfaçage

Une fois le dispositif préparé, les grandeurs suivantes sont mesurées :

1. La température :
Deux sondes Pt 100 traversent la cuve jusqu'au cylindre principal. Leurs résistances sont déterminées à l'aide d'un multimètre Keithley 2000 en montage trois fils.
2. La pression :
Un capteur piézoélectrique de pression absolue (Kistler 4005B-A100F) avec son dispositif amplificateur (Kistler 4618A2) est disposé comme les sondes Pt 100.
3. La pente de l'interface en un point proche de l'axe de symétrie :
Une diode laser envoie sur le hublot supérieur un faisceau sous incidence normale. Celui-ci est réfracté au niveau de l'interface puis lors de sa sortie de la cuve. Après réflexion sur un miroir, il atteint finalement un capteur de position UDT 301-DIV. Le mouvement du faisceau laser, proportionnel à la pente locale de l'interface, est mesuré suivant les axes X et Y .

Méthode de forçage retenue

Il n'est bien entendu pas question d'introduire un vibreur à l'intérieur du cylindre pour exciter des ondes de surface, et le forçage consiste en une oscillation d'ensemble de la cuve, équivalente dans le référentiel lié au fluide à une modulation de la gravité (modifiant le profil d'équilibre de l'interface). À l'aide de cordes l'attachant au plafond, la cellule est transformée en un pendule dont le mouvement est contrôlé par un vibreur BK 4809.

Note sur le remplissage de la cellule

Pour atteindre le point critique, il est nécessaire de remplir la cellule avec une densité rigoureusement égale à la densité critique. Une méthode possible, à défaut de mesurer précisément la masse du fluide, est de raisonner sur les volumes des phases liquide et gaz (V_ℓ et V_g). La fraction de liquide, susceptible d'évoluer avec la température T , est ainsi

$$x(T) = \frac{V_\ell}{V_\ell + V_g}. \quad (3.16)$$

Introduisant les masses volumiques des phases liquide et gaz (ρ_ℓ et ρ_g) ainsi que de l'ensemble du fluide $\rho = (m_\ell + m_g)/(V_\ell + V_g)$, il vient

$$x(T) = \frac{\rho - \rho_g}{\rho_\ell - \rho_g}. \quad (3.17)$$

Ce résultat est connu sous le nom de *théorème des moments* lors de l'étude des diagrammes de phase, son interprétation graphique dans le diagramme de Clapeyron (Pv) s'avérant très pratique. En posant $\rho = \rho_c$ et en utilisant les égalités (3.2a) et (3.2b), nous obtenons

$$x(T) = \frac{1}{2}. \quad (3.18)$$

Ainsi, si les relations sur l'évolution des masses volumiques proche du point critique sont encore valides à température ambiante (où s'effectue le remplissage), il suffit pour atteindre la densité critique de remplir la moitié de la cellule de liquide et l'autre de gaz. Cette méthode est appliquée grâce aux hublots latéraux. Une mesure de la masse volumique est ensuite réalisée. Pour cela, le couple (P, T) est mesuré en phase supercritique puis ajusté *via* régression linéaire. Un coefficient directeur de $a = 0.82 \text{ bar} \cdot \text{K}^{-1}$ est obtenu, cf. Fig. 3.3(a).

Cette donnée permet une comparaison avec les mesures des différents isochores dans la région critique de Biswal *et al.* [129]. En traitant leurs données nous obtenons différentes valeurs du coefficient directeur a en fonction de la masse volumique, qui peuvent s'ajuster par une droite, cf. Fig. 3.3(b). Cette dernière courbe permet, en l'inversant et en utilisant la valeur précédemment mesurée, de déterminer la masse volumique dans notre expérience :

$$\rho = 720 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (3.19)$$

Cette mesure diffère de moins de 3% de la masse volumique critique tabulée, ce qui sera suffisant pour notre étude. Cet écart signifie que tout le liquide s'évaporerait légèrement avant d'atteindre le point critique (pour des valeurs de ϵ non considérées ici), toutes les lois critiques mentionnées restant valides jusqu'à cette limite.

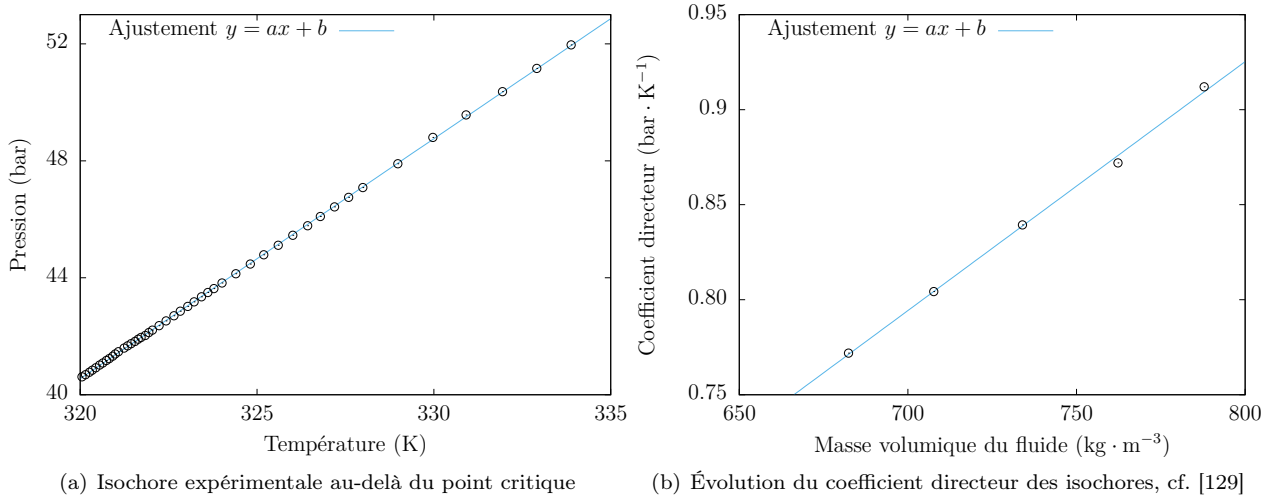


FIGURE 3.3 – Détermination de la masse volumique dans la cellule

3.2 Capillarité proche du point critique

La tension de surface est la grandeur nous concernant la mieux tabulée dans la littérature, les mesures de Wu et Webb par diffusion de la lumière atteignant une précision remarquable [73]. Il est ainsi établi que, dans toute la gamme de température étudiée, la loi suivante est vérifiée :

$$\sigma = \sigma_0 \epsilon^\mu, \quad (3.20)$$

où $\mu = 1.26$ et $\sigma_0 = (55.13 \pm 2.6) \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$. Nous détaillons les propriétés du ménisque proche du point critique, celui-ci étant directement impliqué dans les phénomènes dissipatifs.

3.2.1 Ménisque et comportement critique

Le profil du ménisque est le résultat de la compétition entre effets capillaire et gravitaire, le premier limitant les courbures fortes tandis que le second tend à l'annuler rapidement. La hauteur h_0 du ménisque se détermine en minimisant l'énergie libre de l'interface, menant à une équation différentielle similaire à celle d'Euler-Lagrange en mécanique analytique. En notant θ l'angle de contact comme défini Fig. 1.12(b), il vient [130] :

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\sigma}{(\rho_\ell - \rho_g)g} (1 - \sin(\theta))} = \ell_c \frac{\sqrt{2(1 - \sin(\theta))}}{2\pi} \quad (3.21)$$

On retrouve sans surprise la longueur capillaire ℓ_c , dont nous rappelons le comportement critique,

$$\ell_c = \ell_0 \epsilon^\phi, \quad (3.22)$$

où $\phi \simeq 0.47$ et $\ell_0 = 8.82 \text{ mm}$ d'après la littérature. Nous nous attendons donc à ce que le ménisque disparaisse progressivement au fur et à mesure que l'on s'approche du point critique. Cet argument est cependant incomplet, l'angle de contact étant aussi susceptible d'évoluer, en plus d'être soumis à une hystérésis assez forte. Pour notre système, il est donc *a priori* illusoire de déterminer à partir de la mesure du ménisque un quelconque paramètre physique n'impliquant pas les propriétés physico-chimiques du hublot ainsi que ses défauts. Un constat établi par J. W. Cahn dans un article fondamental pour le mouillage [131] sauve cependant la mise : « suffisamment proche » du point critique, on s'attend en effet à un mouillage total, c'est-à-dire à un angle de contact nul. Nous reportons l'argument présenté par Cahn en introduction de son article justifiant ce résultat. En notant σ_{sl} , σ_{sg} et σ_{lg} les énergies libres par unité de surface respectivement associées aux interfaces solide-liquide, solide-gaz et liquide-gaz, l'angle de contact suit la loi de Young-Dupré

$$\cos(\theta) = \frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}}. \quad (3.23)$$

Cette relation est valide tant que le membre de droite est inférieur à l'unité, les autres cas correspondant à un mouillage total. Le comportement de σ_{lg} , à savoir la tension de surface considérée pour les ondes de surface et déjà présentée, est connu et vérifie une loi critique d'exposant $\mu = 1.26$, cf. (3.1). D'autre part, les interactions au niveau microscopique entre les molécules d'hexafluorure de soufre et celles du hublot sont relativement similaires qu'il s'agisse de la phase liquide ou gaz de SF_6 : le facteur déterminant distinguant σ_{sg} de σ_{sl} est la différence de densité entre ces phases et un comportement $(\sigma_{sg} - \sigma_{sl}) \propto \epsilon^\beta$ est attendu ($\beta \simeq 0.325$ exposant critique associé à la différence de densité). Au final, le membre de droite de (3.23) vérifie

$$\frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}} \propto \epsilon^{-0.94}. \quad (3.24)$$

Cette divergence entraîne l'existence, proche du point critique, d'une transition vers un mouillage total.

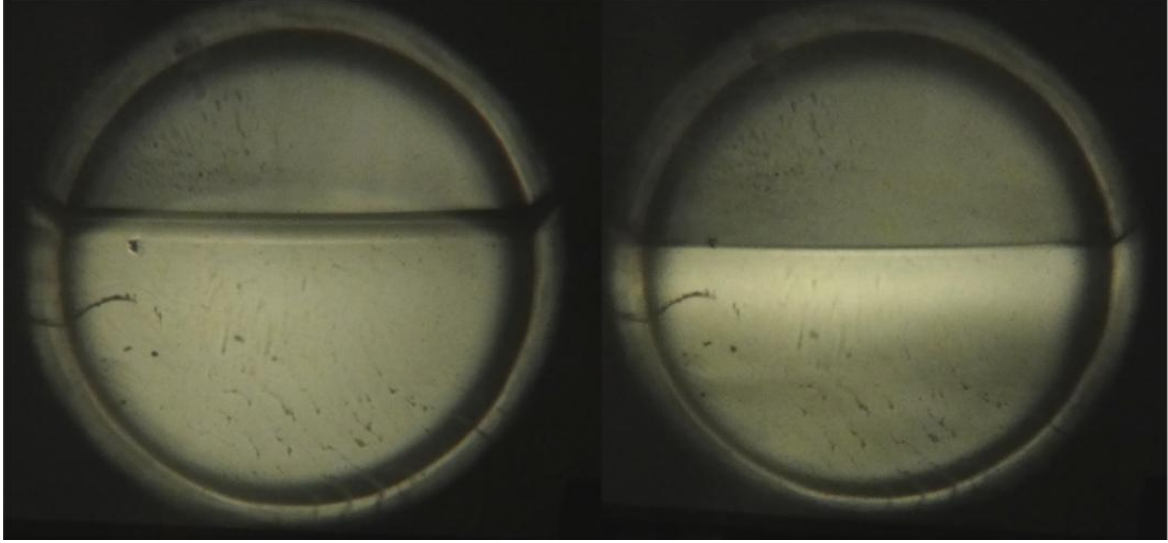


FIGURE 3.4 – Ménisque à 35K et 2K de T_c : noter son rétrécissement à l'approche du point critique

3.2.2 Dispositif expérimental et résultats

Nous cherchons à mesurer la taille du ménisque en fonction de la température. Rappelons que la cellule contenant le fluide proche du point critique est munie de deux hublots opposés par rapport à l'axe de révolution du cylindre et disposés à mi-hauteur. Pour observer le ménisque, une DEL blanche éclaire le fluide à une extrémité et une lentille de focale 20 mm réalise de l'autre côté l'image du ménisque sur un écran distant de 40 cm, le résultat étant reporté Fig. 3.4 à deux températures différentes (le liquide est la partie supérieure de l'image). Le contour du hublot, de diamètre 1 cm, joue le rôle de diaphragme d'ouverture assez restrictif menant à une profondeur de champ importante⁹ : le grandissement ne peut pas être déterminé de manière théorique, les image et objet ayant assez peu de chance d'être exactement conjugués par la lentille. Son estimation, primordiale pour l'expérience, suppose que l'objet imagé a le même diamètre que le hublot (on le trouve égal à 16.9 ± 0.1).

Les photographies montrent des défauts (fils et points) : ils ne sont pas impactés par l'écoulement du fluide et sont des impuretés à l'intérieur des hublots introduites lors de la fabrication de la cellule. Le comportement attendu est bien observé, la taille du ménisque étant différente entre les deux images. Pour quantifier ce phénomène, une camera linéaire monochrome Mightex TCE-1304-U acquiert le profil d'intensité suivant la direction verticale, celui à 35°C est reporté (après correction du grandissement) Fig. 3.5(a). On remarque un maximum d'intensité aux faibles abscisses (vers le gaz), dont l'origine n'est pas claire mais que nous considérons comme le haut du ménisque et qui est déterminé précisément par un ajustement parabolique. Le bas du ménisque et en revanche identifiable sans ambiguïté par une rupture de pente. Ces données sont ensuite reportées en fonction de la température puis ajustées par une loi critique, en fixant la température critique.

9. La profondeur de champ est la latitude de déplacement de l'écran sur laquelle l'image reste nette.

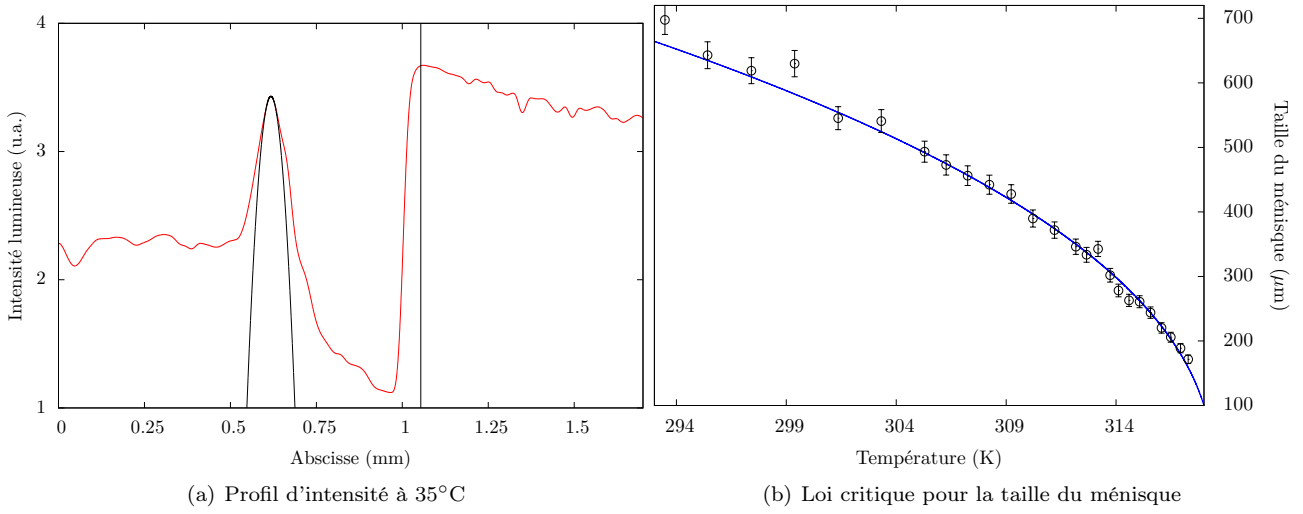


FIGURE 3.5 – Ménilque proche du point critique

On obtient, cf. Fig. 3.5(b) :

- $\ell_0 = (9.1 \pm 0.3)$ mm, en accord avec la valeur tabulée de $\ell_0 = (8.82 \pm 0.06)$ mm.
- $\phi = 0.45 \pm 0.01$, en accord avec la valeur de 0.465 attendue.

L'accord avec la valeur tabulée montre qu'il y a toujours mouillage total, sans quoi les mesures seraient à corriger de l'angle de contact, cf. (3.21). Nous supposons par la suite que cela est aussi valide lorsque le ménisque se développe sur le métal.

3.3 Résultats obtenus

Nous faisons maintenant osciller la cellule harmoniquement à des fréquences proches de celle du premier mode antisymétrique ($m = n = 1$). En se plaçant en régime permanent, nous observons des effets non linéaires pouvant tous être expliqués en supposant que l'équation régnant la dynamique du premier mode est

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{\omega}{Q}\right) \times (1 + C_{NL}\eta^2) \frac{d\eta}{dt} + \omega^2\eta = \mathcal{F}(t), \quad (3.25)$$

où ω est la pulsation propre, Q le facteur de qualité, $\mathcal{F}(t)$ est liée à la force d'inertie et C_{NL} un coefficient non linéaire que nous allons préciser. Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique avec une non-linéarité portant sur la dissipation. En annexe B, nous calculons quelques caractéristiques à résonance de cet oscillateur ainsi que de celui de Duffing (où la non-linéarité corrige la force de rappel).

En étudiant le diagramme de résonance, on mesure ω , Q ainsi que l'évolution de C_{NL} avec la température. La pulsation propre est très bien décrite par la théorie linéaire de ballonnement. L'amortissement linéaire lié aux couches limites, en revanche, sous-estime la dissipation observée : l'interface étant pure et le mouillage total, cet effet est attribué au déplacement du ménisque. Enfin, nous observons que le coefficient C_{NL}^{-1} évolue avec la température de la même manière que le carré de l'épaisseur de la couche limite $\delta^2 = \nu/\omega$. Cette dépendance étant différente pour toute autre combinaison de longueur caractéristique du problème, nous concluons que $C_{NL} \sim \delta^{-2}$, c'est-à-dire que l'équation dynamique du premier mode est

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{\omega}{Q}\right) \times \left(1 + C \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^2\right) \frac{d\eta}{dt} + \omega^2\eta = \mathcal{F}(t) \quad (3.26)$$

où C est un coefficient sans dimension indépendant de la température. Nous montrons ainsi qu'en mouillage total, l'amplitude caractéristique à partir de laquelle la dissipation devient non linéaire est l'épaisseur de la couche limite. Cette longueur est remarquablement faible dans les situations ordinaires (une fraction de millimètre).

Pour plus de détails, la version libre (disponible sur HAL) de la publication associée est reproduite dans les pages suivantes. Cet article a été publié dans *Physical Review Fluids* [132].

Observation of nonlinear sloshing induced by wetting dynamics

Guillaume Michel,* François Pétrélis, and Stéphan Fauve
*Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, CNRS,
Université P. et M. Curie, Université Paris Diderot, Paris, France*
(Dated: March 20, 2017)

Back-and-forth oscillations of a container filled with fluid often result in spilling as the gravest mode gets excited, a well-known phenomenon experienced in everyday life and of particular importance in industry. Our understanding of sloshing is largely restricted to linear response, and existing extensions mostly focus on nonlinear coupling between modes. Linear theory is expected to correctly model the dynamics of the system as long as the amplitude of the mode remains small compared to another length scale, so far unknown. Using a fluid in the vicinity of its critical point, we demonstrate that in perfect wetting this length scale is neither the wavelength nor the capillary length but a much shorter one, the thickness of the boundary layer. Above this crossover length scale, the resonance frequency remains roughly constant while dissipation significantly increases. We also show that dynamical wetting is involved in both linear and nonlinear dissipative processes.

PACS numbers: 47.35.Bb, 64.60.F-, 05.45.-a, 47.55.np

Introduction.— Although the study of sloshing in the simplest configuration of a cylindrical container can be traced back to Poisson at the beginning of the 19th century [1], a significant gap still exists between theory and experiments even for the linear response of the gravest mode. While effective devices have long been investigated to prevent excessive surface deformations, the most famous ones being antislosh baffles (see Ref. [2] for a review), sloshing control could be improved by understanding the precise dissipative processes resulting from back-and-forth displacements of a container. Moreover, the limit of linear theory is unknown: If we were asked if a linear damping correctly describes the oscillations taking place in a cup of coffee, many of us would hesitate before giving an opinion. The associated damping time scale computed from linear theory is more than 10 s [3], thus providing a strong hint that nonlinearities occur. In this Rapid Communication, we evidence that dynamical wetting processes contribute to linear damping and that such linear theory is restricted in perfect wetting to oscillations smaller than the thickness of the boundary layer (a fraction of a millimeter in the case of a cup of coffee).

The characteristics of the gravest mode for an inviscid, irrotational, and incompressible flow with a free surface can be found in many textbooks (*e.g.*, Refs. [2, 4]). Natural frequency computed in this framework differs from the experimental values from less than 1% [5, 6] up to around 10% [7–9]. In contrast, measurements of damping are associated with larger discrepancies: a theory based on dissipation localized in bottom and wall boundary layers underestimates experimental dissipation from a few percent [7] to as much as a few hundred percent [5, 8, 9]. These disparities have been ascribed to both surface contamination and capillary effects close to the contact line.

It is common knowledge that a free surface quickly gets polluted unless care is taken to avoid it: full contamination occurs within an hour for water and significantly increases the damping of surface waves [10]. This

correction to the natural frequency and to the damping has been first computed in circular geometry by Miles [11], with Marangoni elasticity having been later added in some limit by Nicolás and Vega [12]. Even though it is clearly an efficient damping mechanism, the exact values of these corrections strongly depend on chemical properties (*e.g.*, solubility of the contaminant or Marangoni elasticity of the film) whose measurements are difficult.

Dissipation caused by the motion of the meniscus has also been studied theoretically, by considering the work of capillary forces (those involved in the equilibrium Young contact angle). This has been first achieved by Miles for various wetting configurations [11, 13]. Experiments show that a meniscus strongly increases dissipation [14], the damping being maximal for zero contact angle [15]. However, dissipation considered in these theoretical studies vanishes for perfect wetting. In addition, we note that the computation of viscous energy loss in a meniscus undergoing an oscillating motion is still an open problem.

In the present experiment, we measure the natural frequency and damping of the first sloshing mode in a cylindrical container. Using a fluid in the vicinity of the liquid-vapor critical point allows a continuous modification of physical parameters involved in the sloshing dynamics and provides a better control of surface contamination and wetting properties. Standard linear theory is found to accurately describe the natural frequency, whereas it clearly underestimates the damping. Since the surface is clean and the wetting is perfect, this provides a measurement of viscous energy dissipation in the contact line. The nonlinear dynamics of this oscillator is also addressed by tuning the forcing amplitude: We report that the first nonlinearity to arise is a damping enhancement that we attribute to the wetting dynamics. We demonstrate that the crossover between linear and nonlinear dynamics occurs when the amplitude becomes of the order of the thickness of the boundary layer, a surprisingly small characteristic length.

Experimental setup.— The experimental setup is sketched in Fig. 1 and consists of a cylindrical container of radius $R = 50$ mm and height $2h = 25$ mm filled with SF_6 of purity $> 99.97\%$. The total density ρ has been set close to the critical density ρ_c so that in the vicinity of the critical point the liquid and gas phases have the same volume, the height of the liquid being therefore $h = 12.5$ mm. The pressure P and the temperature T inside the cell are measured with a Kistler 4500B pressure sensor and a Pt100 resistance thermometer: the relation $P(T)$ in the supercritical domain with the data from Ref. [16] leads to $\rho = 720 \text{ kg.m}^{-3}$. This container is surrounded by a Lauda Master thermostated bath, making temperature fluctuations less than 0.01 K. Four windows allow the observation of the surface motion: two lateral ones of radius 5 mm, and two on the upper and lower surfaces of radius 20 mm.

The entire device is subjected to a harmonic horizontal translation $\Delta X \cos(\omega t + \phi)$ imposed by a BK 4809 vibration exciter. The actual displacement is measured by a noncontact Electro Corp sensor and processed by a SR 830 lock-in amplifier that gives access to ΔX and ϕ . A laser aligned with and close to the cylinder axis is deflected at the liquid-vapor interface and the motion of the beam along the translational direction, $R_{\text{las}} \cos(\omega t + \theta_{\text{las}})$, is tracked by a UDT 301-DIV position sensing detector. This signal is handled by a similar lock-in amplifier: R_{las} , ΔX , θ_{las} and ϕ are finally recorded with a NI-acquisition card. For a given forcing amplitude ΔX , the sloshing dynamics is therefore characterized by the amplitude and phase responses, respectively R_{las} and $\theta_{\text{las}} - \phi$.

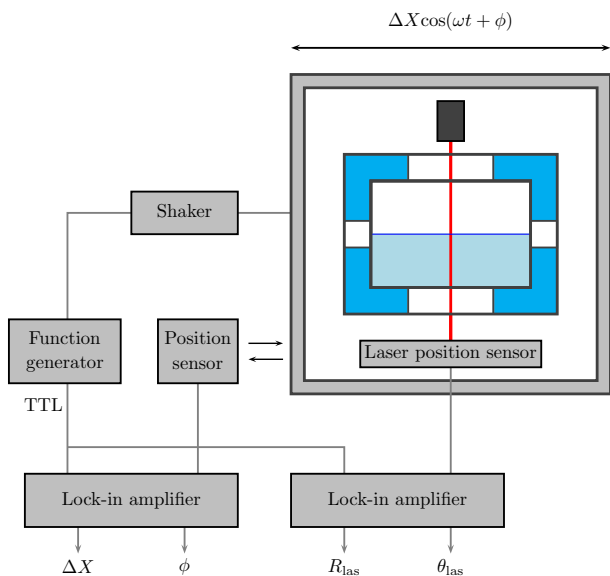


FIG. 1. Experimental setup

The liquid and vapor densities (resp. $\rho_{(\ell)}$ and $\rho_{(v)}$), the refractive indices (resp. $n_{(\ell)}$ and $n_{(v)}$) and the surface tension σ evolve close to the critical temperature T_c

according to

$$\begin{cases} \rho_{(\ell)} = \rho_c(1 + B_0\epsilon^\beta), & \rho_{(v)} = \rho_c(1 - B_0\epsilon^\beta) \\ n_{(\ell)} = n_c(1 + A_0\epsilon^\beta), & n_{(v)} = n_c(1 - A_0\epsilon^\beta) \\ \sigma = \sigma_0\epsilon^\mu \end{cases} \quad (1)$$

where $\epsilon = (T_c - T)/T_c$ is the dimensionless distance to the critical point, n_c is the refractive index of the supercritical phase and ($\beta \simeq 0.325$, $\mu \simeq 1.26$) are critical exponents. In our experiment $T_c = (318.782 \pm 0.004)\text{K}$ and ϵ has been tuned from 10^{-1} to 10^{-3} . Close to the critical point, the kinematic viscosities $\nu_{(\ell)}$ and $\nu_{(v)}$ verify $\nu_{(\ell)} \simeq \nu_{(v)} \simeq \nu \simeq 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ [17].

Dynamics of the first sloshing mode.— Gently increasing ω for a fixed displacement ΔX reveals a large number of resonances, and we thereafter focus on the first one. The amplitude of this mode $\bar{\eta}_{1,1}(t)$ is expected to be modeled for small forcing amplitudes by a damped harmonic oscillator equation, that is

$$\frac{d^2\bar{\eta}_{1,1}}{dt^2} + \left(\frac{\omega_{1,1}}{Q}\right) \frac{d\bar{\eta}_{1,1}}{dt} + \omega_{1,1}^2\bar{\eta}_{1,1} = \mathcal{F}(t), \quad (2)$$

where $\omega_{1,1}$ is the angular resonance frequency, $\omega_{1,1}/(2\pi Q)$ is the linear bandwidth and $\mathcal{F}(t)$ is the external driving force. For a lateral excitation $\Delta X \cos(\omega t + \phi)$, \mathcal{F} comes from the difference of inertial accelerations between the two phases and scales as

$$\mathcal{F} \propto \frac{\rho_{(\ell)} - \rho_{(v)}}{\rho_{(\ell)} + \rho_{(v)}} \Delta X \omega^2 \cos(\omega t + \phi). \quad (3)$$

The two characteristics of this oscillator that are $(\omega_{1,1}/Q)$ and $\omega_{1,1}$ are experimentally measured for a given displacement ΔX from a linear fit of the phase response close to the resonance, where [18]

$$\theta_{\text{las}} - \phi \simeq -\frac{\pi}{2} - 2\frac{Q}{\omega_{1,1}}(\omega - \omega_{1,1}). \quad (4)$$

Typical plots of $(\theta_{\text{las}} - \phi)$ for a fixed temperature ($\epsilon = 0.017$) as a function of the forcing frequency $f = \omega/(2\pi)$ are reported in Fig. 2. They exhibit a nonlinear behavior since data for different forcing amplitudes do not coincide.

The addition of a quadratic nonlinearity in the dissipation correctly models all experimental data and we consider instead of (2) an oscillator equation of the form

$$\frac{d^2\bar{\eta}_{1,1}}{dt^2} + \frac{\omega_{1,1}}{Q}(1 + C_{\text{NL}}\bar{\eta}_{1,1}^2) \frac{d\bar{\eta}_{1,1}}{dt} + \omega_{1,1}^2\bar{\eta}_{1,1} = \mathcal{F}(t). \quad (5)$$

A straightforward analysis reveals that for such an oscillator, the lowest order correction to (4) reduces to a modification of the slope as the forcing increases, such that

$$2\frac{Q}{\omega_{1,1}} \Rightarrow 2\frac{Q}{\omega_{1,1}} \left(1 - \frac{C_{\text{NL}}\mathcal{F}^2Q^2}{4\omega_{1,1}^2}\right). \quad (6)$$

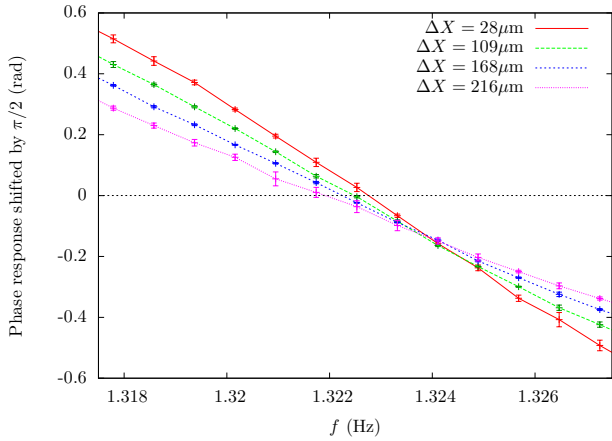


FIG. 2. Typical phase evolution close to resonance ($\epsilon = 0.017$)

For the temperature considered in Fig. 2, we extract from linear fits of the phase response the resonance frequency (when $\theta_{\text{las}} - \phi = -\pi/2$) and the slope of these lines, see Fig. 3. Whereas the resonance frequency can be reasonably considered as constant, the slope has a clear dependence on the square of the forcing amplitude: for all considered temperatures, the relative variation of the slope reaches 100% before the variation of the frequency gets to 1%.

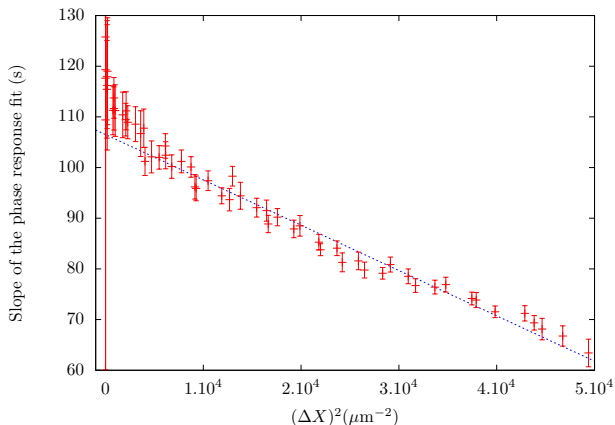


FIG. 3. Evolution of the phase close to resonance as a function of the displacement ΔX ($\epsilon = 0.017$)

For each temperature, we therefore have a direct measurement of the resonance frequency $\omega_{1,1}/(2\pi)$, the linear bandwidth $\omega_{1,1}/(2\pi Q)$ and the linear amplitude response at resonance G defined by $R_{\text{las}} = G\Delta X$ for small amplitudes (obtained by a direct fit of R_{las} , similar to the one in Fig. 3, not reported here for brevity). From the slope of the fit in Fig. 3, we also have access to the nonlinear coefficient $C_{\text{NL}}^{\Delta X}$, such that at the lowest order

$$1 + C_{\text{NL}}\bar{\eta}_{1,1}^2 = 1 + C_{\text{NL}}^{\Delta X}(\Delta X)^2. \quad (7)$$

Discussion.— In the linear potential theory of surface waves, the surface elevation $\eta(r, \theta, t)$ can be decomposed

into a sum of modes of the form [2, 4]

$$\bar{\eta}_{n,m}(t) \frac{J_m(k_{n,m}r)}{J_m(k_{n,m}R)} \cos(m\theta + \theta_{n,m}), \quad (8)$$

where J_m is the Bessel function of order m , $\theta_{n,m}$ is a constant that can be removed by considering independent sine and cosine functions of $m\theta$, $k_{n,m}$ is the wave-number (such that $k_{n,m}R$ is the n^{th} root of J'_m) and $\bar{\eta}_{n,m}(t)$ is a harmonic function of frequency

$$f_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho(\ell) - \rho(v)}{\rho(\ell) + \rho(v)}} g k_{n,m} \tanh(k_{n,m}h). \quad (9)$$

The derivation of (9) assumes that both phases have the same height h and that surface tension can be ignored. Since we restrict this study to the mode of lowest frequency, corresponding to $m = n = 1$, this last assumption is valid. Close to the critical point, using (1), (9) reduces to $f_{1,1} = C\epsilon^{\beta/2}$, where C is a constant that depends on g , h , $k_{1,1} = 1.8412/R$ and B_0 ($B_0 = 1.62$ for SF₆ [19]). This accurately describes our experimental data, cf. Fig. 4. Minor corrections to (9) resulting from the damping or the wetting conditions exist (see, *e.g.*, [13]) but they are less than the uncertainty on B_0 and can therefore not be determined here.

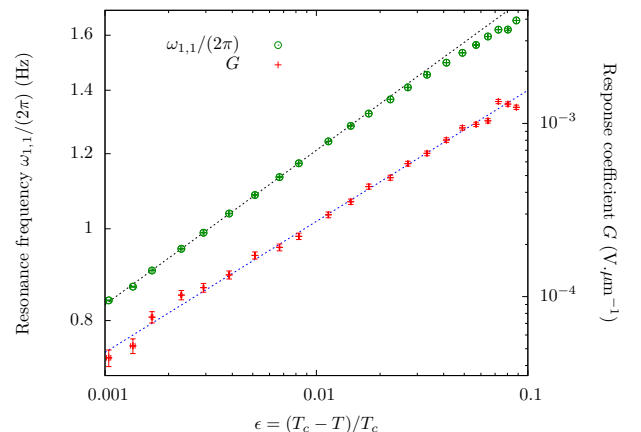


FIG. 4. Critical behavior of G and $\omega_{1,1}/(2\pi)$. One straight line is the theoretical prediction for $\omega_{1,1}/(2\pi)$ and the other one is a power-law fit of G of critical exponent 0.756.

We also checked that G has the correct scaling versus ϵ : stating that the displacement of the laser is related to the refraction indices and that at resonance the forcing term is fully balanced by dissipation, we get

$$R_{\text{las}} \propto \Delta n \bar{\eta}_{1,1} \propto \Delta n \frac{Q}{\omega_{1,1}} \omega_{1,1} \Delta \rho \Delta X. \quad (10)$$

Assuming that $\omega_{1,1}/Q \propto \epsilon^{\beta/4}$ (see below), G is directly related to ϵ via

$$G \propto \epsilon^{\beta - \beta/4 + \beta/2 + \beta} \propto \epsilon^{9\beta/4}. \quad (11)$$

Fitting our data with $G \propto \epsilon^{\text{exp}}$ (see Fig. 4) leads to a critical exponent 0.756 ± 0.009 , compatible with $9\beta/4 \simeq 0.731$.

We now consider the dissipative term, whose computation relies on an expansion on the small parameter $\delta k_{1,1}$, where $\delta = \overline{\nu/\omega_{1,1}}$ is the thickness of the viscous boundary layers. The very small kinematic viscosity of fluids close to the critical point (a few times $10^{-8} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) compared to the ones of more usual fluids (1.10^{-6} for water) makes this parameter small enough not to consider second order contributions (as bulk dissipation), that can be of importance otherwise [20]. If neither surface contamination nor capillary effects close to the meniscus are considered, damping thus reduces to the contributions of top, bottom and lateral boundary layers and [7]

$$\frac{\omega_{1,1}}{Q} = \frac{1}{R} \frac{\overline{\nu\omega_{1,1}}}{2} \left(1.84 + 3.68 \frac{1 - h/R}{\sinh(3.68h/R)} \right). \quad (12)$$

Note that although this expression has been derived in [7] in the absence of gas, it also describes the present experiment given that phases have almost the same height and kinematic viscosity. Equation (12) predicts $\omega_{1,1}/(2\pi Q) = 9.5\epsilon^{0.081}$ mHz, while a fit of our data leads to $\omega_{1,1}/(2\pi Q) = (24.3 \pm 0.2)\epsilon^{0.074 \pm 0.002}$ mHz, cf. Fig. 5. This indicates that other first order dissipative terms (all in $\epsilon^{0.081}$) have to be considered.

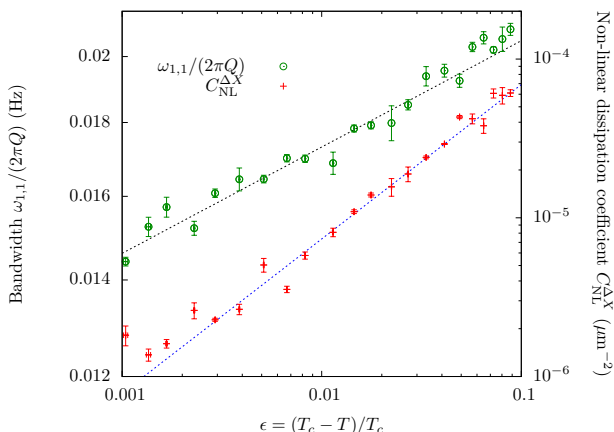


FIG. 5. Critical behavior of the linear and nonlinear damping. Straight lines are power-law fits with critical exponents 0.074 and 0.972.

Such terms could result from surface contamination, but we regard this possibility as unlikely. Indeed, the gathering of contaminants close to the interface results from a sizable surface tension σ , and σ vanishes at the critical point (for the range of temperature considered, $\sigma < 0.2 \text{mN} \cdot \text{m}^{-1}$ [17]). Dissipation caused by capillary forces at the meniscus could also be a guess, but we disregard this possibility as it vanishes for zero contact angle [13]. Indeed, there is strong evidence indicating that the wetting is perfect: first, perfect wetting always occurs in the vicinity of the critical point [21]. In addition, we

have measured the equilibrium meniscus height between SF_6 and the glass for a large range of temperature and it coincides with the expected value with zero contact angle. We therefore consider that the additional dissipation measured in this experiment results from viscous loss in (or close to) the meniscus and also scales as $\sqrt{\nu\omega}$.

A power law also describes the behavior of the nonlinear term: $C_{\text{NL}}^{\Delta X} = (647 \pm 17)\epsilon^{0.972 \pm 0.007} \text{mm}^{-2}$ (see Fig. 5). The critical law of C_{NL} follows from

$$C_{\text{NL}} \propto C_{\text{NL}}^{\Delta X} \left(\frac{\Delta X}{\bar{\eta}} \right)^2 \propto C_{\text{NL}}^{\Delta X} \left(\frac{\omega_{1,1}}{Q} \frac{1}{\omega_{1,1}\Delta\rho} \right)^2, \quad (13)$$

that gives $C_{\text{NL}} \propto \epsilon^{0.160 \pm 0.007}$. This exponent turns out to be very close to $\delta^{-2} \propto \epsilon^{\beta/2}$ ($\beta/2 \simeq 0.1625$), and the equation of this oscillator (5) can finally be cast in the form

$$\frac{d^2\bar{\eta}_{1,1}}{dt^2} + \frac{\omega_{1,1}}{Q}(1 + C(\frac{\bar{\eta}_{1,1}}{\delta})^2)\frac{d\bar{\eta}_{1,1}}{dt} + \omega_{1,1}^2\bar{\eta}_{1,1} = \mathcal{F}(t), \quad (14)$$

where C is a dimensionless constant that does not depend on ϵ . This proves that linear damping correctly describes sloshing as long as the oscillation amplitudes remain small compared to the thickness of the boundary layer. This result is quite surprising: one could have guessed this crossover length scale to be the size of the meniscus (the so-called capillary length) or the wavelength of the wave, the steepness ($k_{1,1}\bar{\eta}_{1,1}$) characterizing nonlinear coupling between modes [22, 23]. For a perfect wetting and using octane and air instead of SF_6 , Cocciaro *et al.* reported a *decrease* of the dissipation as the forcing increases [5]. This shows that the nonlinearity observed here does not result from the dynamics of the bottom, top and lateral boundary layers, identical in both experiments. In contrast, a specificity of the present experiment is that energy dissipation occurs both in the liquid and in the gas: since the fluid motions are similar in these two phases except in the vicinity of the contact line, we propose this nonlinear damping to also result from viscous dissipation in or close to the meniscus.

Conclusion. — Our experiment sheds light on two aspects of sloshing theory in perfect wetting. First, it shows that linear damping can reasonably be assumed as long as the oscillation amplitude remains small compared to the thickness of the boundary layer $\delta = \overline{\nu/\omega}$. This characteristic length is very small and is quickly exceeded in practice. For this reason, we emphasize the importance of measurements of decay up to very small displacements in experiments dealing with sloshing. Second, we found that damping is underestimated if only viscous boundary layers are considered: a substantial dissipation arises as a consequence of the contact line motion. The study of wetting in nonsteady states represents a substantial experimental and theoretical challenge and our results point out its relevance for sloshing.

This work is supported by CNES and ANR-12-BS04-0005-02.

* guillaume.michel@ens.fr

- [1] S. D. Poisson, Mémoire sur les petites oscillations de leau contenue dans un cylindre, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, **19**, 225 (1828).
- [2] R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics* (Cambridge University Press, New York, 2005).
- [3] H. C. Mayer and R. Krechetnikov, Walking with coffee: Why does it spill?, *Phys. Rev. E*, **85**, 046117 (2012).
- [4] H. Lamb, *Hydrodynamics* (Dover, New York, 1945).
- [5] B. Cocciaro, S. Faetti and M. Nobili, Capillarity effects on surface gravity waves in a cylindrical container: wetting boundary conditions, *J. Fluid Mech.*, **231**, 325 (1991).
- [6] B. Cocciaro, S. Faetti and C. Festa, Experimental investigation of capillarity effects on surface gravity waves : non-wetting boundary conditions, *J. Fluid Mech.*, **246**, 43 (1993).
- [7] K. M. Case and W. C. Parkinson, Damping of surface waves in an incompressible liquid, *J. Fluid Mech.*, **2**, 172 (1956).
- [8] D. M. Henderson and J. W. Miles, Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line, *J. Fluid Mech.*, **275**, 285 (1994).
- [9] D. R. Howell, B. Buhrow, T. Heath, C. McKenna, W. Hwang and M. F. Schatz, Measurements of surface-wave damping in a container, *Phys. Fluids*, **12**, 322 (2000).
- [10] W. G. Van Dorn, Boundary dissipation of oscillatory waves, *J. Fluid Mech.*, **24**, 769 (1966).
- [11] J. W. Miles, Surface-Wave Damping in Closed Basins, *Proc. R Soc. Lond. A*, **297**, 459 (1967).
- [12] J. A. Nicolás and J. M. Vega, A note on the effect of surface contamination in water wave damping, *J. Fluid Mech.*, **410**, 367 (2000).
- [13] J. W. Miles, On surface waves with zero contact angle, *J. Fluid Mech.*, **245**, 485 (1992).
- [14] G. Michel, F. Pétrélis, S. Fauve, Acoustic Measurement of Surface Wave Damping by a Meniscus, *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 174301 (2016).
- [15] D. Henderson, J. Hammack, P. Kumar and D. Shah, The effects of static contact angles on standing waves, *Phys. Fluids A*, **4**, 2320 (1992).
- [16] S. N. Biswas, N. Trappeniers and J. Hoogland, PVT Properties of sulfur-hexafluoride in the gaz-liquid critical region, *Physica A*, **126**, 384 (1984).
- [17] E. S. Wu and W. W. Webb, Critical liquid-vapor interface in SF6. II. Thermal excitations, surface tension, and viscosity, *Phys. Rev. A*, **8**, 2077 (1973).
- [18] Note that close to the resonance, $\Delta X \omega^2 \simeq \Delta X \omega_{1,1}^2$ since the quality factor Q is large compared to unity.
- [19] M. R. Moldover, Interfacial tension of fluids near critical points and two-scale-factor universality, *Phys. Rev. A*, **31**, 1022 (1985).
- [20] C. Martel, J. A. Nicolás, J. M. Vega, Surface-wave damping in a brimful circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **360**, 213 (1998).
- [21] J. W. Cahn, Critical point wetting, *J. Chem. Phys.*, **66**, 3667 (1977).
- [22] J. W. Miles, Internally resonant surface waves in a circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **149**, 1 (1984).
- [23] J. W. Miles, Resonantly forced surface waves in a circular cylinder, *J. Fluid Mech.*, **149**, 15 (1984).

Chapitre 4

L'effet Doppler généralisé

Petzval, in turn, rejected Doppler's principle. He also rejected popular views as providing no cognitive values for scientific understanding and claimed that to discover a principle of nature, one must start from differential equations. [78]

Kurt Toman (1921 - 2005)

La réflexion d'une onde acoustique ou électromagnétique sur une surface en translation rectiligne uniforme mène à un décalage de fréquence connu sous le nom d'effet Doppler et rappelé §2.2.1. Le strict analogue hydrodynamique de ce problème est rarement pertinent car le mouvement d'une paroi d'un récipient à vitesse constante modifie énormément, par conservation du volume, le profil de surface. Une situation plus courante concerne la réflexion d'une onde de surface sur une paroi oscillante, dispositif utilisé pour la génération d'ondes comme décrit §1.4. Ainsi, de nombreuses expériences de turbulence d'ondes s'intéressant aux résultats d'interactions aléatoires entre paquets d'ondes reposent sur le dispositif suivant : un ou plusieurs vibreurs excitent des ondes gravito-capillaires dans un milieu où la dissipation est faible (utilisation de mercure, surface propre, etc.). Un dispositif expérimental typique est reporté Fig. 4.1.

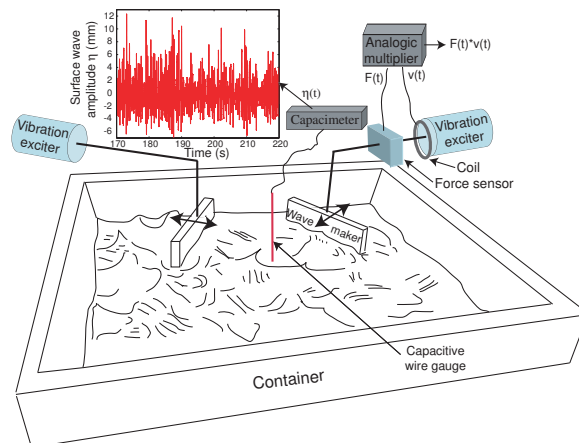


FIGURE 4.1 – Dispositif pour une expérience de turbulence d'ondes (extrait de [69])

Nous avons vu §2.2.2 que le mouvement oscillant d'une paroi autour d'une position moyenne affecte aussi l'onde réfléchie. Dans le cas d'un déplacement harmonique $X(t) = \Delta X \cos(\omega_v t)$, un ensemble d'ondes de pulsation $\omega \pm n\omega_v$ sont créées, ω se rapportant à l'onde incidente et n étant un entier quelconque. L'importance de ces satellites est, lorsque l'équation d'onde est valide, quantifiée par le nombre sans dimension $k\Delta X$, avec k le nombre d'onde de l'onde incidente. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux questions suivantes :

1. Dans le cas d'ondes de surface, comment l'oscillation d'une paroi affecte-t-elle l'onde réfléchie ?
2. À quel état stationnaire mènent les effets cumulatifs de ces réflexions ?

4.1 Un exemple d'interaction entre ondes et paroi

En guise d'introduction aux problématiques de couplage entre champ d'ondes et structure solide, nous décrivons l'évolution d'un paquet d'ondes dans une cavité unidimensionnelle où l'une des parois est libre de répondre à la pression de radiation. En ne conservant que ses aspects les plus fondamentaux, ce modèle illustre quelques conséquences du couplage onde-structure. La situation, schématisée Fig. 4.2, est la suivante :

- Le champ d'ondes $\eta(x, t)$ évolue en suivant une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

- Les conditions aux limites au niveau des parois mobile (en $\xi(t)$) et fixe (en $x = L$) sont données par¹

$$\eta(x = \xi(t), t) = \eta(x = L, t) = 0. \quad (4.2)$$

- La paroi est modélisée comme un oscillateur harmonique amorti soumis à la pression de radiation

$$\ddot{\xi} + \sigma \dot{\xi} + \omega_p^2 \xi = -\frac{SP_{\text{rad}}}{m}, \quad (4.3)$$

avec σ lié à une force de friction linéaire, ω_p la pulsation propre de l'oscillateur, P_{rad} la pression de radiation du champ d'ondes, m la masse de la paroi et S sa surface. On se placera en régime sur-amorti ($\sigma \gg \omega_p$).

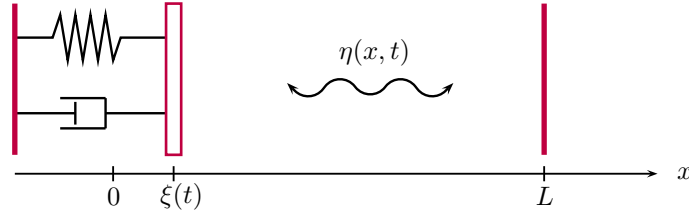


FIGURE 4.2 – Système modèle pour l'étude des interactions ondes-paroi

Dans un premier temps, nous allons expliciter la pression de radiation puis considérer uniquement (4.1–4.2) pour caractériser le champ d'ondes. Nous couplerons ensuite les résultats obtenus avec (4.3).

4.1.1 Pression de radiation

Pour déterminer comment la pression de radiation se relie à la perturbation η , nous définissons l'énergie du champ d'ondes (à une constante dimensionnelle près) comme

$$E_{\text{onde}}(t) = \frac{1}{2} \int_{\xi(t)}^L ((\partial_t \eta)^2 + c^2 (\partial_x \eta)^2) dx. \quad (4.4)$$

Un calcul direct² donne

$$\frac{dE_{\text{onde}}}{dt} = \dot{\xi} \left(\frac{c^2 - \dot{\xi}^2}{2} \right) (\partial_x \eta)^2(\xi(t), t). \quad (4.5)$$

Nous constatons que l'énergie se conserve si la paroi reste fixe ($\dot{\xi} = 0$), ce qui justifie cette définition de $E(t)$. Ici, l'énergie du champ d'ondes varie à cause de la puissance des forces pressantes SP_{rad} ,

$$\frac{dE_{\text{onde}}}{dt} = \dot{\xi} SP_{\text{rad}}, \quad (4.6)$$

1. Il s'agit par exemple de la condition aux limites pour le champ électrique sur un miroir parfait.
2. Utiliser $\frac{d}{dt}(\eta(x = \xi(t), t) = 0)$ pour simplifier les équations.

d'où en définissant le nombre de Mach $\mathcal{M}(t) = \dot{\xi}/c$,

$$\boxed{SP_{\text{rad}} = c^2 \left(\frac{1 - \mathcal{M}^2(t)}{2} \right) (\partial_x \eta)^2(\xi(t), t)} \quad (4.7)$$

On constate que cette force est affectée par le mouvement de la paroi, le terme en $1 - \mathcal{M}^2$ rappelant d'ailleurs fortement le facteur de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en relativité restreinte³. Pour décrire le couplage entre champ d'ondes et paroi mobile, il ne reste plus qu'à obtenir des informations sur $(\partial_x \eta)^2(\xi(t), t)$.

4.1.2 Dynamique du champ d'ondes

Solution générale de l'équation d'onde

La solution générale de l'équation de d'Alembert (4.1) est la somme d'ondes progressives contra-propagatives,

$$\eta(x, t) = \eta_+(x + ct) + \eta_-(x - ct), \quad (4.8)$$

et le terme $(\partial_x \eta)(\xi(t), t)$ devient donc

$$(\partial_x \eta)(\xi(t), t) = \dot{\eta}_+(\xi + ct) + \dot{\eta}_-(\xi - ct). \quad (4.9)$$

D'autre part, les conditions aux limites (4.2) s'écrivent

$$\begin{cases} \eta_+(L + ct) = -\eta_-(L - ct) \\ \eta_+(\xi + ct) = -\eta_-(\xi - ct) \end{cases} \quad (4.10)$$

$$(4.11)$$

et (d/dt)(4.11) mène à

$$\dot{\eta}_+(\xi + ct) = \left(\frac{1 - \mathcal{M}}{1 + \mathcal{M}} \right) \dot{\eta}_-(\xi - ct). \quad (4.12)$$

(4.9) et (4.12) donnent ainsi,

$$(\partial_x \eta)(\xi(t), t) = \left(\frac{2}{1 + \mathcal{M}} \right) \dot{\eta}_-(\xi - ct). \quad (4.13)$$

Relation de récurrence pour la pression de radiation

Les ondes faisant des allers-retours entre les deux extrémités de la cavité, on s'attend à une relation liant η_- à deux instants différents. Celle-ci s'obtient en posant $t \rightarrow t + (\xi - L)/c$ dans (4.10),

$$\eta_+(\xi + ct) = -\eta_-(2L - ct - \xi), \quad (4.14)$$

puis en remarquant que le membre de gauche est retrouvé tel quel dans (4.11) :

$$\eta_-(\xi - ct) = \eta_-(2L - ct - \xi). \quad (4.15)$$

Pour se rapprocher de (4.13), on dérive par rapport au temps cette dernière équation,

$$\dot{\eta}_-(\xi - ct) = \left(\frac{1 + \mathcal{M}}{1 - \mathcal{M}} \right) \dot{\eta}_-(2L - ct - \xi). \quad (4.16)$$

Pour obtenir des équations plus synthétiques, on définit le temps $t'(t)$ tel que

$$2L - ct - \xi(t) = \xi(t') - ct', \quad (4.17)$$

c'est-à-dire comme solution de

$$\boxed{t - t' = \frac{2L - (\xi(t) + \xi(t'))}{c}} \quad (4.18)$$

3. (4.1) découle des équations de Maxwell (relativistes) en posant η comme le champ électrique (ou magnétique).

La durée $t - t'$ représente donc le temps de vol mis par une onde rencontrant la paroi en t' pour faire un aller-retour de la cavité et être réfléchié à l'instant t . (4.13),(4.16) et (4.17) mènent à

$$(\partial_x \eta)(\xi(t), t) = \left(\frac{1 + \mathcal{M}(t')}{1 - \mathcal{M}(t)} \right) (\partial_x \eta)(\xi(t'), t'), \quad (4.19)$$

d'où d'après (4.7),

$$SP_{\text{rad}}(t) = \left(\frac{1 + \mathcal{M}(t)}{1 - \mathcal{M}(t)} \right) \times \left(\frac{1 + \mathcal{M}(t')}{1 - \mathcal{M}(t')} \right) \times SP_{\text{rad}}(t') \quad (4.20)$$

Ainsi, si on ne s'intéresse qu'à la dynamique de la paroi, déterminer $\eta(x, t)$ n'est pas nécessaire : la seule conséquence de la cavité et de produire une force $SP_{\text{rad}}(t)$ vérifiant la relation de récurrence (4.20) avec t' défini par (4.18). La condition initiale $\eta(x, 0)$ se traduit par le détail de $SP_{\text{rad}}(t)$ sur une durée $\sim 2L/c$: toute l'information sur le champ d'ondes est contenue dans l'évolution de la vitesse de la paroi et de la pression de radiation sur un intervalle $t - t'(t)$. En conséquence, il est possible d'exprimer l'énergie du champ d'ondes en fonction de la pression de radiation exercée sur cet intervalle (cf. annexe B pour le détail des calculs) :

$$E_{\text{onde}}(t) = \frac{c}{2} \int_{t'}^t SP_{\text{rad}}(s)(1 + \mathcal{M}(s)) ds \quad (4.21)$$

4.1.3 Couplage avec la dynamique de la paroi

Nous obtenons une dynamique à retard pour la paroi, devant dans le cas général être résolue numériquement. Cependant, lorsque les échelles de temps du problème sont très différentes, il est possible d'obtenir de bonnes approximations de la solution réelle. Nous décrivons ici l'évolution d'un paquet d'ondes de faible extension spatiale, amplitude et longueur d'onde. Plus précisément, les différentes échelles de temps du problème sont :

1. La période $2\pi/\omega_0$ des ondes composant le paquet d'ondes.
2. Le temps de réponse mécanique σ/ω_p^2 de la paroi (que l'on rappelle de faible facteur de qualité).
3. Le temps d'évolution de l'amplitude du paquet d'ondes en une position donnée ℓ/c (ℓ extension spatiale du paquet d'ondes).
4. La durée typique d'un aller-retour de cavité $2L/c$.

Notre étude se place dans la limite, représentée Fig. 4.3, où

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \frac{\sigma}{\omega_p^2} \ll \frac{\ell}{c} \ll \frac{2L}{c} \quad (4.22)$$

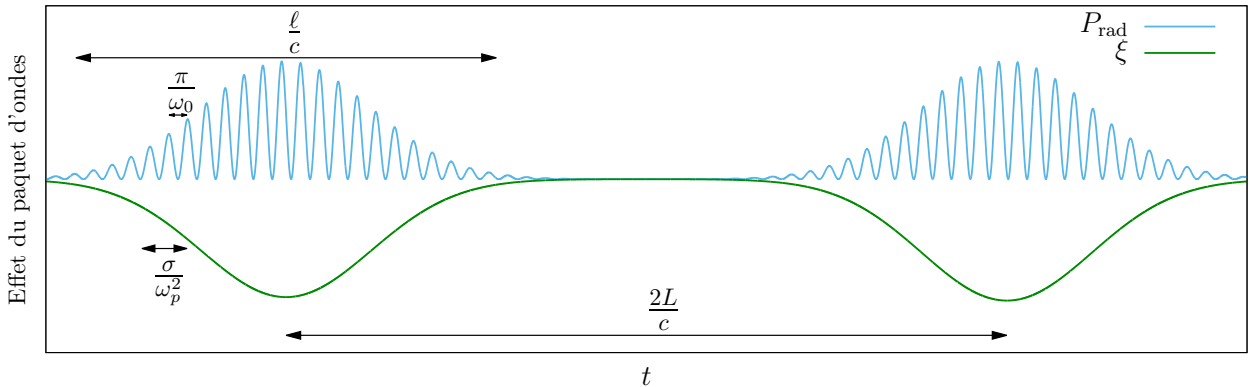


FIGURE 4.3 – Différentes échelles de temps du problème considéré §4.1.3

Le rapport entre deux temps successifs de (4.22) est considéré comme infiniment petit : l'approche « avec les mains » présentée ici peut être rendue plus rigoureuse à l'aide de la méthode des échelles multiples, décrite pour ce problème dans l'annexe B.

Notations pour la pression de radiation

Commençons par remarquer que la condition $2\pi/\omega_0 \ll \sigma/\omega_p^2$ signifie que la paroi n'est sensible qu'à l'enveloppe du paquet d'ondes, les oscillations internes étant trop rapides pour mener à une réponse mécanique. Nous cherchons à décrire comment cette enveloppe évolue au fur et à mesure qu'elle interagit avec la paroi.

D'autre part, la condition $\ell \ll L$ assure qu'il est possible de distinguer les différents allers-retours du paquet d'ondes : nous notons $2A_n(t)$ l'enveloppe de la pression de radiation lors de la n -ième interaction avec la paroi⁴. La variable n traduit l'évolution du paquet d'ondes à cause de l'effet Doppler ; si la paroi est maintenue fixe, on observe uniquement des allers-retours dans la cavité et $A_1(t) = A_2(t) = A_3(t) = \dots$.

En considérant des faibles amplitudes du champ d'ondes, la paroi se déplace peu et $A_i(t) \simeq A_{i+1}(t)$. Au lieu de considérer des nombres n discrets, nous pouvons prendre la limite continue,

$$A_n(t) \rightarrow A(n, t). \quad (4.23)$$

Au terme de cette étude, nous allons aboutir sur une équation différentielle reliant le profil temporel du paquet d'onde $\partial_t A$ à son évolution due à l'effet Doppler $\partial_n A$.

Réponse de la paroi

Abordons la dynamique de la paroi. La solution générale de (4.3) s'exprime sous forme intégrale en utilisant la fonction de Green de l'oscillateur amorti,

$$\xi(t) = -\frac{S}{m\tilde{\omega}_p} \int_0^\infty \sinh(\tilde{\omega}_p s) e^{-\sigma s/2} P_{\text{rad}}(t-s) ds \simeq -\frac{S}{m\tilde{\omega}_p} \int_0^\infty \sinh(\tilde{\omega}_p s) e^{-\sigma s/2} A(n, t-s) ds, \quad (4.24)$$

avec $\tilde{\omega}_p^2 = \sigma^2/4 - \omega_p^2 \simeq \sigma^2/4$. Le temps de mémoire de l'oscillateur étant petit devant le temps caractéristique d'évolution de $A(n, t)$, l'intégrale précédente se simplifie à l'aide d'un développement limité :

$$\xi(t) \simeq -\frac{S}{m\tilde{\omega}_p} \left(A(n, t) \int_0^\infty \sinh(\tilde{\omega}_p s) e^{-\sigma s/2} ds - \partial_t A(n, t) \int_0^\infty \sinh(\tilde{\omega}_p s) s e^{-\sigma s/2} ds \right). \quad (4.25)$$

Ces intégrales se calculent et mènent avec $\sigma \gg \omega_p$ à

$$\xi(t) \simeq -\frac{S}{m\omega_p^2} \left(A(n, t) - \frac{\sigma}{\omega_p^2} \partial_t A(n, t) \right). \quad (4.26)$$

On vérifie que le second terme est bien une correction du premier (résultat de $\sigma/\omega_p^2 \ll \ell/c$), et de même le terme en $\partial_{tt} A$ arriverait à l'ordre suivant. Connaissant $\xi(t)$, on en déduit le nombre de Mach instantané

$$\mathcal{M}(t) = \frac{\dot{\xi}}{c} = -\frac{S}{mc\omega_p^2} \left(\partial_t A(n, t) - \frac{\sigma}{\omega_p^2} \partial_{tt} A(n, t) \right). \quad (4.27)$$

Nous pouvons finalement quantifier l'hypothèse de faible amplitude du champ d'ondes que nous avons supposée :

$$\boxed{A \ll \frac{m\ell\omega_p^2}{S}} \quad (4.28)$$

Évolution de l'enveloppe de la pression de radiation

La modification de l'enveloppe entre deux réflexions successives étant très faible, (4.18) donne

$$t - t' \simeq \frac{2(L - \xi(t))}{c}. \quad (4.29)$$

À l'ordre auquel nous travaillons, (4.20) devient

$$P_{\text{rad}}(t) = (1 + 4\mathcal{M}(t')) \times P_{\text{rad}}(t') \implies A(n+1, t - \frac{2\xi(t)}{c}) = (1 + 4\mathcal{M}(t)) A(n, t) \quad (4.30)$$

4. La facteur 2 est ajouté de manière à compenser les oscillations rapides à ω_0 : $2A_n \sin(\omega_0 t)^2 \simeq A_n$.

puis finalement,

$$\boxed{\left(\frac{6S}{mc\omega_p^2}\right) A\partial_t A + \partial_n A = 0} \quad (4.31)$$

Nous obtenons au premier ordre l'équation de Burgers, connue pour former des chocs à partir de n'importe quel profil localisé⁵ [133]. Faisons quelques remarques sur ce résultat :

- Alors que l'équation de Burgers s'obtient en mécanique des fluides à partir du terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes, la non-linéarité résulte ici du couplage entre ondes et structure.
- La formation de choc diminue le temps d'évolution de l'enveloppe ℓ/c , et il arrivera donc un moment, avant que le profil ne devienne singulier, où l'hypothèse $\sigma\omega_p^2 \ll \ell/c$ ne sera plus valide.
- À cet ordre dominant E_{onde} se conserve, le raidissement du paquet d'ondes étant compensé par une diminution de l'amplitude. L'oscillateur étant amorti, on s'attend à ce qu'à l'ordre suivant la dissipation annule l'énergie après un grand nombre de réflexions.

4.2 Résultats obtenus

L'exemple précédent met en évidence la formation spontanée d'un choc lorsqu'un paquet d'ondes imprime un déplacement à une paroi. De nombreux effets similaires ont été décrits dans la littérature lorsque le mouvement de la paroi est prescrit. Ainsi, il est possible de montrer qu'en l'absence de dissipation, faire osciller une cavité à une fréquence proche du double de celle d'un mode propre entraîne une croissance infinie de l'énergie [134–136]. Cette résonance paramétrique amplifie aussi le « vide quantique » et permet de faire croître un champ électrique qui serait, en théorie classique, nul [137] : la recherche sur cet *effet Casimir dynamique* est depuis quelques années très active.

L'application de ces résultats en hydrodynamique nécessite quelques précautions, l'équation d'onde utilisée pour leur démonstration ne modélisant pas correctement les ondes de surface. Pour discuter ces différences, nous avons comparé la réflexion d'une onde sur une surface en mouvement harmonique en acoustique (traité §2.2.3) et en hydrodynamique. Les résultats obtenus sont les suivants :

1. En utilisant le dispositif de mesure acoustique décrit au chapitre précédent, nous avons montré que la réflexion d'une onde de surface de pulsation ω_0 sur une paroi oscillant faiblement à ω_w crée deux nouvelles ondes de surface de pulsations $\omega_0 \pm \omega_w$ et d'amplitudes linéaires en l'amplitude d'oscillation.
2. L'amplitude de ces satellites pour des ondes gravitaires a été calculée dans le cadre de la mécanique des fluides ; la démarche étant assez similaire à celle présentée §1.4. Sans surprise, nous constatons que celles-ci ne s'obtiennent pas simplement par analogie avec le calcul §2.2.3 reposant sur l'équation de d'Alembert.
3. Enfin, nous avons décrit théoriquement un modèle où les effets cumulatifs de ces décalages Doppler peuvent être évalués. Pour être en phase avec les expériences de turbulence d'ondes, celui-ci comporte une injection d'énergie à une fréquence donnée, l'oscillation d'une paroi ainsi que de la dissipation. Nous montrons que l'énergie des ondes de surface suit dans certains régimes des spectres en loi de puissance.

Le détail de ces points figure dans un article publié dans *EPL* [138] et dont la version libre, disponible sur HAL, est reproduite dans les pages suivantes.

5. Cet effet se démontre graphiquement avec la méthode des caractéristiques, celles-ci étant des droites dont les pentes dépendent de la condition initiale et le long desquelles A se conserve.

The generalized Doppler effect for surface waves

G. MICHEL

¹ *Laboratoire de Physique Statistique, Ecole Normale Supérieure, CNRS, Université P. et M. Curie, Université Paris Diderot, Paris, France*

PACS 42.25.Gy – Edge and boundary effects; reflection and refraction

PACS 47.35.Bb – Gravity waves (Hydrodynamic waves)

PACS 43.20.+g – General linear acoustics

Abstract – We investigate energy exchanges through scales occurring when a surface wave reflects on a harmonically oscillating wall. We first experimentally evidence the creation of Doppler-shifted waves and measure their height as a function of the oscillation amplitude. Then, we theoretically compute the amplitudes of these new waves in the gravity regime. Both results show that even without bulk non-linearities, oscillating paddles in a fluid container lead to a complex wave energy spectrum competing with the one predicted by wave turbulence. To exemplify this point, we characterize a simple one-dimensional model consisting of a linear wave equation in an oscillating cavity with distinct injection and dissipation mechanisms. It displays features usually associated with non-linearities, as self-similarity in a spectral domain (the so-called inertial range), appearance of energy at larger and/or lower scales than the forcing one and creation of shock waves.

Introduction. – The reflection of a wave on a moving obstacle can be investigated from the usual wave equation and leads for a constant velocity to the well-known Doppler effect, a frequency shift between the incident and reflected waves. This can be generalized to any motion of the boundary, as, for instance, a vibration around a fixed position. In the case of a harmonic oscillation at frequency f_w , Censor showed that the spectrum of the reflected wave is of the form $f_0 + n f_w$, f_0 being the frequency of the incident wave and n any integer [1]. Since this result is obtained from the wave equation, it holds both in electrodynamics and in mechanics. It has been discussed in detail in acoustics through a controversy about the comparative effect of the medium non-linearity (see [2] and references therein) and later confirmed by experiments [3]. Surface waves, on the other hand, cannot be described by a wave equation when interactions with boundaries are considered. This results from the fact that the normal velocity of the fluid has to be prescribed on the entire solid surface: thus, the motion of a vertical wall creates surface waves, whereas the one of a perfect mirror does not give rise to any electric field (in the classical theory and if no field is initially present).

The reflection of a surface wave on an oscillating wall is therefore a quite different problem from the one of electromagnetic/mechanical waves and it has so far never been

considered. We start this study by experimentally evidencing that the spectrum of a monochromatic surface wave is broadened by such an interaction. The first corrections are found to grow linearly with the oscillation amplitude of the wall. We then theoretically compute these corrections for gravity surface waves. This shed light on three characteristics of the generalized Doppler effect. (i) Surface waves undergo sizable energy exchanges between scales at the reflection on an oscillating boundary. (ii) This process is linear with respect to the surface elevation, *i.e.*, it does not involve the non-linear term of the Navier-Stokes equation. (iii) In some limits, the first-order correction is similar to the one obtained with the usual wave equation.

Given these results, consider a typical setup for the study of surface wave turbulence using wave-makers, that are oscillating paddles (see, *e.g.*, [4]). In the usual reading of such experiments, wave-makers inject energy in a given bandwidth and bulk non-linearities lead to energy exchanges between waves. The phenomenology, close to the one of hydrodynamic turbulence and involving direct and/or inverse cascades, is called *wave turbulence* [5]. According to the discussion above, it seems natural to wonder if such states could be notably altered by the continuous bouncing of surface waves on the wave-makers. This question turns out to be difficult to address since both bulk

non-linearities and oscillating boundaries would have to be considered simultaneously. We rather consider the following problem: what is the steady-state energy spectrum of linear waves trapped in an oscillating cavity?

In the absence of dissipation and if the motion of the wall is sinusoidal at a frequency close to twice an eigenfrequency of the cavity, it has been shown that the energy eventually diverges as a consequence of a parametric resonance [6–8]. This has received considerable attention in quantum electrodynamics as it occurs even if the initial state is the vacuum, hence creating photons from zero point fluctuations (see the review [9] and references therein). From a practical point of view, the motion of the mirror becomes more and more difficult to sustain, a phenomenon called *dynamical Casimir effect*.

To be in line with the phenomenology of wave turbulence, we differ from these studies and consider distinct injection and dissipation mechanisms. We report that: (i) Interactions with the moving boundary may inject energy at larger and/or lower scales than the forcing one. (ii) Self-similar energy spectra can be observed over a large frequency range. (iii) Shock waves can be formed. We emphasize that all these features, usually associated with non-linearities, result in this system from linear processes.

Experimental measurement. – We first experimentally characterize the spectrum of a harmonic surface wave that reflects on an oscillating wall, using a recent measurement technique able to disentangle between counterpropagating waves of identical frequencies [10]. The setup is sketched in fig. 1 and consists of a basin of dimension $648 \times 846 \times 160$ mm filled with water up to 130 mm, one wave-maker being fixed at the left extremity (denoted as WM1) and another one at the right extremity (WM2). Each of them (oscillating paddle of size $120 \times 80 \times 4$ mm plunged 60mm below the free surface) is driven harmonically by a Brüel & Kjær 4810 shaker and its motion is tracked with a Brüel & Kjær 4393 accelerometer. WM1 oscillates at $f_1 = 15$ Hz and WM2 at $f_2 = 3$ Hz.

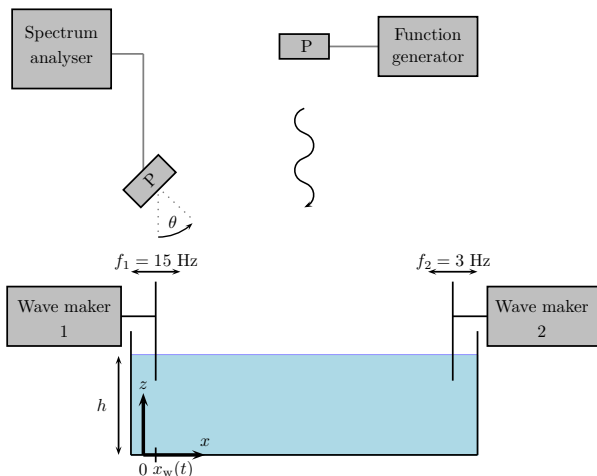


Fig. 1: Experimental setup for the measurement of surface waves. P stands for piezoelectric transducer.

Two piezoelectric transducers resonant at $f_0 = 41500$ Hz are used: one emits a harmonic wave of normal incidence and the other receives at $\theta = 45.2^\circ$ the acoustic signal, then processed by a HP 35670A spectrum analyzer. Surface waves can be fully characterized by this scattered signal, the entire setup being equivalent to an acousto-optic modulator [10]. For the upcoming discussion to be clear, we sum up the main features of this technique:

1. If the scattered signal includes a component of frequency $f_0 + f_w$ and amplitude A_w , then the insonified area is crossed by a monochromatic wave, heading *toward* the receiver (*i.e.*, in the direction of WM1), of frequency f_w and height $\eta_w = C(|f_w|)A_w$. C is a function that can be experimentally measured.
2. If the scattered signal includes a component of frequency $f_0 - f_w$ and amplitude A_w , then the insonified area is crossed by a monochromatic wave, heading *away from* the receiver (*i.e.*, in the direction of WM2), of frequency f_w and height $\eta_w = C(|f_w|)A_w$.

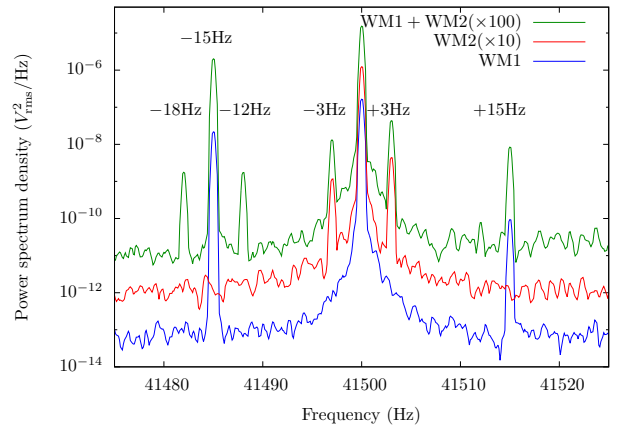


Fig. 2: Spectra obtained for one or two oscillating wave-makers. When active, the oscillation amplitude of WM1 is $56 \mu\text{m}$.

We then comment on the spectra shown in fig. 2 :

- If only WM1 is active (blue lower curve of fig. 2), the measurement area is dominated by progressive waves of frequency $f_1 = 15$ Hz heading away from WM1. A counterpropagating wave is distinguishable and comes from the reflection on WM2 (at rest).
- If only WM2 oscillates (middle red curve of fig. 2), the situation is reversed and waves of frequency $f_2 = 3$ Hz are observed. Note that unlike the previous ones, these waves are almost of similar amplitude, a consequence of the damping frequency dependence.
- If both WM2 and WM1 are in motion (upper green curve of fig. 2), the scattered acoustic spectrum does not reduce to the superposition of the last two spectra: two components of frequency $f_1 \pm f_2$, leaving WM1 are also observed. Waves at $f_2 \pm f_1$ that would also be expected are below the noise level.

This demonstrates that the reflection of a progressive wave of frequency $f_2 = 3$ Hz on a vertical wall oscillating at $f_1 = 15$ Hz creates two new components of frequency $f_2 \pm f_1$. Moreover, their amplitudes are directly proportional to the wall oscillation one, see fig. 3. This is reminiscent of the reflection of an electromagnetic/acoustic wave of wave number k on a scatterer of oscillation amplitude δ [11]: if $\delta k \ll 1$, the Doppler effect reduces to these two sidebands, whose amplitude linearly grows with δk . In the present experiment, $\delta k < 6.10^{-3}$ with $k = 36\text{m}^{-1}$ based on f_2 . Finally, note that the amplitudes of these Doppler-shifted waves have been measured up to the function $C(|f_w|)$, and that they have been reduced by another damping factor depending on their frequencies on their way from WM1 to the insonified area: the overlapping of the curves in fig. 3 is therefore fortuitous.

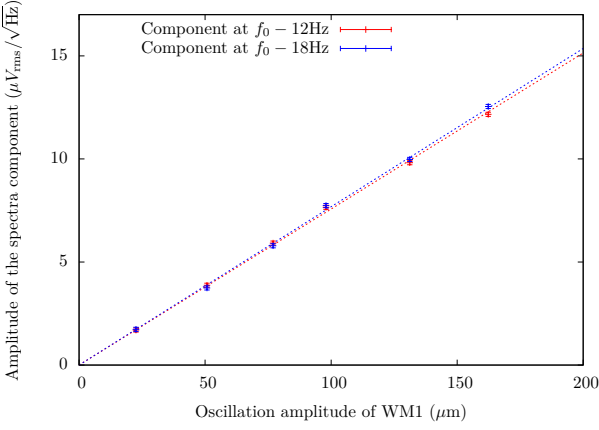


Fig. 3: Growth of the sidebands with the oscillation amplitude.

Generalized Doppler effect for gravity waves. –

To provide a theoretical support to these observations, we compute in this section the amplitudes of these sidebands. We restrict to gravity waves and thus disregard the complex meniscus dynamics. This only approximately models the previous experiment that involves gravity capillary waves. Moreover, we consider the limit of inviscid fluid, small wave steepness and small oscillation amplitude so that both viscosity and bulk non-linearities can be dropped from the Navier-Stokes equation.

Let $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$ be the total velocity field, $x_w(t) = \delta \sin(\omega_w t)$ the wall position and h the height of the fluid. Given that non-linearities are neglected, the potential ϕ is

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_w(x, z, t) + \phi_{\text{inc}}(x, z, t) + \phi_{\text{ref}}(x, z, t), \quad (1)$$

where ϕ_w describes the flow induced by the wall motion in the absence of any external wave, and ϕ_{inc} and ϕ_{ref} stand for these additional incident and reflected waves. x and z are the horizontal and vertical directions, such that at rest the fluid lies within ($x \geq 0, h \geq z \geq 0$). Within our

assumptions, ϕ verifies

$$\partial_{xx}\phi(x, z, t) + \partial_{zz}\phi(x, z, t) = 0 \quad (2)$$

$$\partial_z\phi(x, z = 0, t) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_{tt}\phi(x, z = h, t) = -g\partial_z\phi(x, z = h, t) \quad (4)$$

$$\partial_x\phi(x = x_w(t), z, t) = -\dot{x}_w(t) \quad (5)$$

We consider an incident progressive plane wave of angular frequency ω_0 and of velocity potential

$$\phi_{\text{inc}}(x, z, t) = \Psi_{\text{inc}} \cosh(k_0 z) e^{i(\omega_0 t + k_0 x)} \quad (6)$$

$$\omega_0^2 = gk_0 \tanh(k_0 h) \quad (7)$$

The computation of ϕ_w has been first carried out by Havelock in 1929 for gravity waves [12], and it provides an explicit expression for the amplitudes of free waves emitted by a wave-maker. Additional effects such as capillarity have been later considered, see [13] and references therein. This potential is such that

$$\partial_x\phi_w(x = x_w(t), z, t) = -\dot{x}_w(t), \quad (8)$$

and the boundary condition fulfilled by ϕ_{ref} thus reads

$$\partial_{xx}\phi_{\text{ref}}(x, z, t) + \partial_{zz}\phi_{\text{ref}}(x, z, t) = 0 \quad (9)$$

$$\partial_z\phi_{\text{ref}}(x, z = 0, t) = 0 \quad (10)$$

$$\partial_{tt}\phi_{\text{ref}}(x, z = h, t) = -g\partial_z\phi_{\text{ref}}(x, z = h, t) \quad (11)$$

$$\partial_x\phi_{\text{ref}}(x = x_w(t), z, t) = -\partial_x\phi_{\text{inc}}(x = x_w(t), z, t) \quad (12)$$

This last equation can be decomposed into a basis of harmonic functions using (6) and a first-order expansion in the small parameter ($k_0\delta$):

$$\begin{aligned} \partial_x\phi_{\text{ref}}(x = x_w(t), z, t) = \\ -ik_0\Psi_{\text{inc}}\cosh(k_0z)(e^{i\omega_0 t} + \frac{k_0\delta}{2}e^{i\omega_1 t} - \frac{k_0\delta}{2}e^{i\omega_{-1} t}) \end{aligned} \quad (13)$$

with $\omega_n = \omega_0 + n\omega_w$. The method for solving this problem turns out to be very similar to the one used by Havelock to compute ϕ_w . The velocity potential we are looking for, ϕ_{ref} , can not simply be expressed as a sum of free waves: even though (9 - 11) would be verified, (13) would not. In addition, evanescent waves have to be considered and the proper decomposition is

$$\phi_{\text{ref}}(x, z, t) = \sum_n \varphi_n(x, z, t) + \psi_n(x, z, t) \quad (14)$$

$$\varphi_n(x, z, t) = \varphi_n \cosh(k_n z) e^{i(\omega_n t - k_n x)} \quad (15)$$

$$\psi_n(x, z, t) = \sum_m \psi_{n,m} \cos(\tilde{k}_{n,m} z) e^{i\omega_n t - \tilde{k}_{n,m} x} \quad (16)$$

$$\omega_n^2 = gk_n \tanh(k_n h) = -g\tilde{k}_{n,m} \tan(\tilde{k}_{n,m} h) \quad (17)$$

With these expressions, (9 - 11) are directly fulfilled and (13) is the last remaining constraint. Note that for $\delta = 0$, $\varphi_0 = \Psi_{\text{inc}}$ while $\varphi_{n \neq 0}$ and $\psi_{n,m}$ vanish and are therefore of first order (or more) in ($k_0\delta$). $\partial_x\phi_{\text{ref}}(x = x_w(t), z, t)$ is then expressed from (14-16), expanded in the first order of

$(k_0\delta)$ and decomposed over the harmonic functions $e^{i\omega_n t}$ of (13). On $e^{i\omega_1 t}$, we get

$$\begin{aligned} -ik_0\Psi_{\text{inc}} \cosh(k_0 z) \left(\frac{k_0\delta}{2}\right) &= ik_0\varphi_0 \cosh(k_0 z) \left(\frac{k_0\delta}{2}\right) \\ &- ik_1\varphi_1 \cosh(k_1 z) \\ &+ i \sum_{n,m} i^n \tilde{k}_{n,m} \psi_{n,m} \cos(\tilde{k}_{n,m} z) I_{1-n}(-\tilde{k}_{n,m}\delta) \end{aligned} \quad (18)$$

where I_n are modified Bessel functions of the first kind. The integration $\int_0^h (18) \times \cosh(k_1 z) dz$ removes the contributions of evanescent waves at this order and leads to

$$\begin{aligned} k_0^2 \delta \Psi_{\text{inc}} \frac{\cosh(k_0 h) \cosh(k_1 h)}{g(k_1^2 - k_0^2)} (\omega_1^2 - \omega_0^2) &= \\ k_1 \varphi_1 \left(\frac{h}{2} + \frac{\sinh(2k_1 h)}{4k_1} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

A similar expression is obtained for φ_{-1} . We sum up these results using the wave height η (*e.g.*, $\eta_{\text{inc}} = -k_0\Psi_{\text{inc}} \sinh(k_0 h)/\omega_0$) instead of the velocity potential (*e.g.*, Ψ_{inc}): a surface gravity wave $\eta_{\text{inc}} \sin(\omega_0 t + k_0 x)$ reflecting on a vertical wall at $x_w(t) = \delta \sin(\omega_w t)$ gives rise at the first order in $k_0\delta$ to a reflected free wave of the form

$$\eta_{\text{inc}} \sin(\omega_0 t - k_0 x) + \eta_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + \eta_{-1} \sin(\omega_{-1} t - k_{-1} x) \quad (20)$$

where $\omega_{\pm 1} = \omega_0 \pm \omega_w$ and $k_{\pm 1}$ are related to $\omega_{\pm 1}$ via the dispersion relation. $\eta_{\pm 1}$ are given by

$$\frac{\eta_1}{\eta_{\text{inc}}} = (k_0\delta) \frac{k_0(\omega_1^2 - \omega_0^2)}{\omega_0\omega_1 h(k_1^2 - k_0^2)} \left(\frac{\sinh(2k_1 h)}{1 + \frac{\sinh(2k_1 h)}{2k_1 h}} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\eta_{-1}}{\eta_{\text{inc}}} = -(k_0\delta) \frac{k_0(\omega_0^2 - \omega_{-1}^2)}{\omega_0\omega_{-1} h(k_0^2 - k_{-1}^2)} \left(\frac{\sinh(2k_{-1} h)}{1 + \frac{\sinh(2k_{-1} h)}{2k_{-1} h}} \right) \quad (22)$$

The linear growth of the sidebands $\eta_{\pm 1} \propto \delta$ is consistent with the experimental observations of fig. 3. The shallow water and deep water limits of (21) are

$$\frac{\eta_1}{\eta_{\text{inc}}} \Big|_{h \rightarrow 0} = k_0\delta \quad (23)$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_{\text{inc}}} \Big|_{h \rightarrow \infty} = 2k_0\delta \frac{\omega_0\omega_1}{\omega_0^2 + \omega_1^2} \Big|_{\omega_w \ll \omega_0} = k_0\delta \quad (24)$$

In acoustics and electromagnetism, η obeys the wave equation and vanishes at the moving boundary. In the limit of small oscillations, Censor computed $\eta_{\pm 1}/\eta_{\text{inc}} = \pm k_0\delta$ [11], *i.e.*, exactly what is found both for deep water with small oscillation frequency and shallow water. Therefore, to describe the Doppler effect in these limits, surface waves can be modelled by the wave equation with a pinned contact line. This is natural for shallow water, since v_x becomes in this limit independent of z and directly proportional to the wave height η . However, we can think of no way to anticipate this result for deep water. In order to extend this calculation to gravito-capillary waves, one should take into

account the meniscus, whose specific dynamics when undergoing an oscillating motion is an active research area, see *e.g.*, [14]. Phenomenological boundary conditions may be used, as has been done for the wave-maker problem [13] or for the reflection of a gravity capillary surface wave on a steady wall [15]. We also point out that the additional work required to sustain the wall oscillation, crucial to discuss energy exchanges, could be derived by comparing the incident and reflected waves energies. The second-order correction at the incident wave frequency ω_0 would then have to be worked out.

Wave energy transfer in an oscillating cavity. –

So far, we have focused on the simplest configuration of a monochromatic wave reflecting on a harmonically oscillating wall. However, most experiments dealing with surface waves are conducted in closed basin without any specific care to damp reflected waves, as a beach would do. This is especially relevant in wave turbulence, where dissipation is sought as small as possible, hence the use of fluids with low kinematic viscosity or pinned contact line on the steady boundaries. Moreover, a typical way of creating surface waves is to use a wave-maker, which is an oscillating wall (other geometries exist, as flaps hinged below the free surface). In most experiments of wave turbulence, its motion is not harmonic but consists of a filtered noise. Therefore, waves emitted by the wave-maker reflect a large number of time on it until they are eventually damped. The steady state associated with these cumulative Doppler effects has so far never been investigated in this context and we propose a simple model expected to capture its main features.

As a first approach, we consider a one-dimensional dissipative and linear wave equation for a perturbation $\eta(x, t)$,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (25)$$

where c is the wave velocity and σ the dissipation coefficient. The use of a wave equation is reasonable since first-order corrections have been found similar in some limits. However, even if non-linear interactions between waves are more restricted in hydrodynamics than in acoustics (it respectively involves three or four waves processes even more in one dimension vs. two-waves processes), it should be kept in mind that sharp structures that shall arise would clearly lead to non-linear dynamics. Equation (25) also neglects dispersion of water waves, since c does not depend on the frequency. The boundary conditions are

$$\eta(0, t) = \eta_f \sin(n_f \omega t), \quad \left(\omega = \frac{\pi c}{L}, n_f \in \mathbb{N} \right) \quad (26)$$

$$\eta(L + \xi(t)) = 0, \quad (27)$$

eq. (26) corresponds to an energy injection by an external operator at a resonance frequency and eq. (27) is the reflection on the moving boundary, the cavity being of mean length L modulated by $\xi(t)$. The energy balance can be derived directly from these equations. Defining the energy by $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L+\xi(t)} dx ((\partial_t \eta)^2 + c^2 (\partial_x \eta)^2)$, we get

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\sigma \int_0^{L+\xi(t)} dx \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \\ & - c^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) (0, t) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) (0, t) \\ & - \xi'(t) \frac{(c^2 - \xi'(t)^2)}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 (L + \xi(t), t), \end{aligned} \quad (28)$$

where the terms are, respectively, dissipation, work done by the operator and interaction with the moving wall via radiative pressure. In a steady-state, the mean value of (28) vanishes and dissipation is balanced by injection of energy by the operator and by the motion of the wall. Thereafter periodic and stochastic oscillations of the cavity are considered successively.

The periodic motion. – We first consider a low-frequency periodic motion of the wall,

$$\xi(t) = \xi_w \sin(\omega t) \quad (29)$$

with $\omega = \frac{\pi c}{L}$ the first eigenfrequency of the cavity. The solution will be found at first order in the two dimensionless parameters $\mathcal{D} = \sigma L/c$ and $\epsilon = \pi \xi_w/L$. We define the ratio of these numbers as $\alpha = \mathcal{D}/\epsilon$, roughly the ratio of dissipation to the oscillation amplitude. Note that the Mach number Ma , representing the ratio of the wall velocity to the speed of the waves, remains smaller than one:

$$Ma = \frac{\xi_w \omega}{c} = \epsilon \ll 1. \quad (30)$$

We look for a periodic steady state of period $2L/c$. If $\epsilon = 0$, the wall is at rest and the solution is $\eta(x, t) = \eta_f \eta_+(x, t)$ with

$$\begin{aligned} \eta_+(x, t) = & \frac{2}{\mathcal{D}} \left(-\sin\left(\frac{n_f \omega x}{c}\right) \cos(n_f \omega t) \right. \\ & \left. + \frac{\mathcal{D}}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_f \omega x}{c}\right) \sin(n_f \omega t) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

If $\epsilon > 0$, the steady state is of the form $\eta(x, t) = \eta_f(\eta_+(x, t) + \sum_n A_n \eta_n(x, t))$, with $\eta_n(x, t)$ other eigenmodes of (25),

$$\begin{aligned} \eta_n(x, t) = & \frac{2}{\mathcal{D}} \left(\sin\left(\frac{n \omega x}{c}\right) \cos(n \omega t) \right. \\ & \left. + \frac{\mathcal{D} x}{2L} \cos\left(\frac{n \omega x}{c}\right) \sin(n \omega t) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

This solution verifies (25) and (26). Equation (27) fixes the constants $\{A_n\}$ via a recurrence relation. It has a simple form if only the first modes are considered ($n \ll \epsilon^{-1}$), that is with δ_i^j the Kronecker delta

$$-A_{n-1}(n-1) + \alpha A_n + A_{n+1}(n+1) = n_f (\delta_n^{n_f-1} - \delta_n^{n_f+1}). \quad (33)$$

In this range of parameters, we get local interactions, *i.e.*, mode coupling restricted to neighbors in the spectral domain. This is directly related to the work of Censor mentioned in the introduction [1] and to our previous

study: if a wave of frequency f_0 and wave number k_0 reflects on a moving boundary oscillating at a frequency f_w and amplitude $\xi_w \ll k_0^{-1}$, sidebands of frequency $f_0 \pm f_w$ appear. Conversely, if $\xi_w k_0 \gtrsim 1$, harmonics at $f_0 \pm n f_w$ ($n \geq 2$) are of similar amplitudes as the ones at $f_0 \pm f_w$. Modes at $n \gtrsim \epsilon^{-1}$ therefore lead to non-local interactions and are neglected in this study.

Equation (33) can be solved for any value of n_f , and we will detail low- and high-frequency forcing. It can be seen as the equilibrium state of a shell model with local linear coupling between modes (shell models are phenomenological equations used to describe systems with non-linear coupling between modes, *e.g.*, turbulent states [16]).

Low-frequency forcing: $n_f = 1$. We derive the following expressions for the constants $\{A_n\}$:

$$A_n \sim \frac{(n-1)!}{\alpha^{n-1}}, \quad (2 \leq n \ll \alpha) \quad (34)$$

$$A_n \sim n^{-1-\frac{\alpha}{2}}. \quad (\alpha \ll n \ll \epsilon^{-1}) \quad (35)$$

Given that the energy of the n -th mode is $E_n \sim (n A_n)^2$, it displays a self-similar range for $\alpha \ll n \ll \epsilon^{-1}$, where $E_n \sim n^{-\alpha}$. In the non-dissipative limit, the energy spectrum becomes independent of n . Figure 4 shows examples of such spectra obtained by solving (33) numerically for $\alpha = 20$ and $\alpha = 40$. Approximate expressions (34) and (35) are superimposed. Since eq. (33) is local in frequency, the dissipation can be made frequency dependant ($\alpha \rightarrow \alpha(n)$): a dissipation-free range is also displayed, obtained with $\alpha(n) = 0$ if $n \in [10, 100]$ and 10 otherwise.

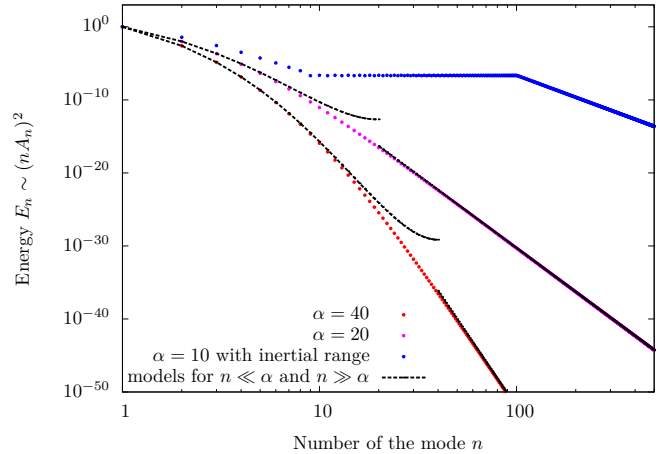


Fig. 4: Spectra for the low-frequency forcing. Several values of α are reported, with the approximate expressions (34-35). For $\alpha = 10$, dissipation is taken equal to zero in the range $n \in [10, 100]$.

As the dissipation vanishes or as the amplitude of the motion increases, *i.e.*, in the limit $\alpha \rightarrow 0$, a shock wave is formed. In this limit, the additional wave field reduces to (according to (35)),

$$\eta_f \sum_n A_n \eta_n(x, t) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{2 \eta_f}{\mathcal{D}} \sum_n \frac{\sin\left(\frac{n \omega x}{c}\right) \cos(n \omega t)}{n}. \quad (36)$$

The right-hand side (RHS) of (36) describes a sawtooth wave bouncing between the walls of the cavity at a celerity c . It is shown in fig. 5 for two values of t .

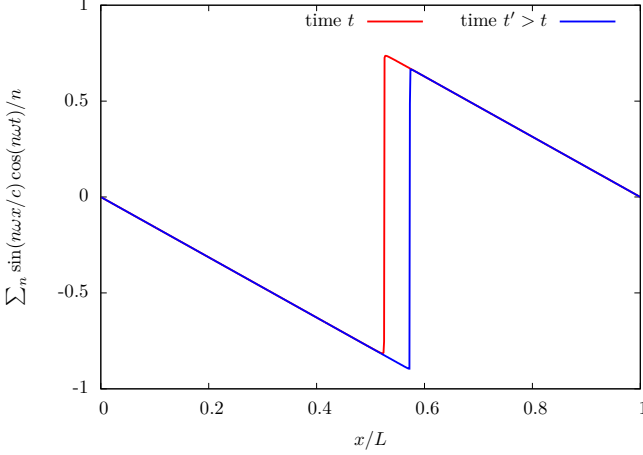


Fig. 5: Discontinuous wave field induced by the periodic motion of the boundary in the limit $\alpha \rightarrow 0$.

High-frequency forcing: $\alpha \ll n_f \ll \epsilon^{-1}$. The coefficients $\{A_n\}$ have these expressions,

$$A_n \sim \frac{(-1)^{n-1} \alpha^{n-1}}{n!}, \quad (2 \leq n \ll \alpha) \quad (37)$$

$$A_n \sim (-1)^{n-1} n^{-1+\frac{\alpha}{2}}, \quad (\alpha \ll n \leq n_f - 1) \quad (38)$$

$$A_n \sim n^{-1-\frac{\alpha}{2}}, \quad (n_f + 1 \leq n \ll \epsilon) \quad (39)$$

The scaling law for the energy at frequencies larger than the forcing one is the same as before. However, we note that energy can be injected to frequencies lower than the forcing one with the Doppler effect, where it gets eventually either dissipated or stored depending on the local value of α .

The situation in which dissipation vanishes at scales larger than the forcing one is of particular interest. In this case, energy is neither injected nor dissipated at these scales and the energy spectrum is found constant: this may correspond to a thermal equilibrium. It has for instance been numerically observed in hydrodynamic turbulence [17]. However, the present state turns out to be very different from an equilibrium one because of phase coupling between modes: strong gradients are formed that would result in a shock wave as the number of modes involved increases.

The stochastic motion. – In the previous section, we showed how the ground state (31) was affected by a periodic modulation of the cavity length. We now turn to a noisy motion of the boundary $\xi(t)$, whose one-sided power spectral density is denoted by $S_w(\tilde{w})$. We still consider the limit of low dissipation ($\mathcal{D} \ll 1$) and small motion of the wall ($\langle \xi(t)^2 \rangle \ll (n\omega/c)^{-2}$ for the modes considered). The wave field can be approximated as a sum of the motionless

solution and an induced perturbation:

$$\eta(x, t) = \eta_f \left(\eta_+(x, t) + \sum_n \bar{\eta}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (40)$$

Integrating the wave equation (25) times $\sin(\frac{n\pi x}{L})$ on the entire domain leads in the mentioned limits to an equation for $\bar{\eta}_n(t)$ ($n \neq n_f$):

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_n}{dt^2} + \sigma \frac{d \bar{\eta}_n}{dt} + (n\omega)^2 \bar{\eta}_n = \frac{2n\omega c}{L\eta_f} (\eta(0, t) - \eta(L, t)) \cos(n\pi) \quad (41)$$

Given that the quality factor of this damped harmonic oscillator $n\pi/\mathcal{D}$ is very large, out-of-resonance forcing is inefficient. The spectral component at angular frequency $n\omega$ of the left-hand side (LHS) of (41), governing the dynamics of $\bar{\eta}_n$, is found by expanding the boundary condition (27):

$$\eta(L, t) \simeq -\xi(t) \frac{\partial \eta}{\partial x}(L, t) \quad (42)$$

$$\simeq -\eta_f \xi(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_+(x, t) + \sum_m \bar{\eta}_m(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) (L, t). \quad (43)$$

Equation (43) provides two kinds of resonant terms. The first one results from interactions between the motion of the wall $\xi(t)$ and the induced perturbations $\{\bar{\eta}_m(t)\}$, hence generating a coupling between all oscillators. The second one is direct interaction with the forcing mode $\eta_+(x, t)$. Depending on the spectrum of $\xi(t)$, especially on the amplitudes of high frequencies, one of this forcing term will dominate the other. We restrict this study to coupling with $\eta_+(x, t)$, *i.e.*, to large-band stochastic motion $\xi(t)$, as would be a thermal motion (relevant for applications in electromagnetism discussed in the conclusion) or a poorly filtered bandwidth noise. The dynamics of $\bar{\eta}_n$ is then ruled by

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_n}{dt^2} + \sigma \frac{d \bar{\eta}_n}{dt} + (n\omega)^2 \bar{\eta}_n = \frac{4s(n\omega)(n_f\omega)\xi(t) \cos(n_f\omega t)}{LD}, \quad (44)$$

with $s = -\cos(n\pi) \cos(n_f\pi) = \pm 1$. As mentioned above, the high quality factor of the oscillator makes the dynamics insensitive to the components of the noise that would result in out-of-resonance forcing. The LHS of (44) can then be approximated by a white noise of identical spectral density at angular frequency $n\omega$, *i.e.*,

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_n}{dt^2} + \sigma \frac{d \bar{\eta}_n}{dt} + (n\omega)^2 \bar{\eta}_n = \zeta_n(t) \quad (45)$$

$$\langle \zeta_n(t) \zeta_n(t + \tau) \rangle = \frac{C(n)}{2} \left(\frac{2nn_f\omega^2}{LD} \right)^2 \delta(\tau) \quad (46)$$

$$C(n) = S_w(|n - n_f| \omega) + S_w((n + n_f) \omega) \quad (47)$$

We obtain a Langevin equation where the dissipation and injection processes are of distinct origin and are not linked

by a fluctuation-dissipation relation. This system can be fully characterized, in particular the mean energy at a scale n is found to be

$$\langle E_n \rangle = \frac{L(n\omega)^2 \eta_f^2 \langle \bar{\eta}_n^2 \rangle}{2} = \frac{L\pi}{4\sigma} \frac{C(n)}{2} \left(\frac{2nn_f\omega^2 \eta_f}{LD} \right)^2. \quad (48)$$

The statistics of the injected power fluctuation by radiative pressure can also be computed, see [18].

As an example, we detail the case of a low-frequency forcing ($n_f = 1$) and a low-frequency motion of the boundary,

$$S_w(\tilde{\omega}) = \frac{2\sqrt{2}\langle \xi(t)^2 \rangle}{\pi\omega \left((1 - (\frac{\tilde{\omega}}{\omega})^2)^2 + 2(\frac{\tilde{\omega}}{\omega})^2 \right)}. \quad (49)$$

Equation (49) stands for a second-order low-pass filter with a cut-off frequency equal to ω and a quality factor $1/\sqrt{2}$. This is a possible thermal equilibrium spectrum of the wall as long as it is not perturbed by the radiative pressure. $\langle \xi(t)^2 \rangle$ is then proportional to the temperature of the wall. According to (48), the energy spectrum of the waves at large frequencies compared to the cut-off one ($n \gg 1$) is

$$\langle E_n \rangle = \frac{2\sqrt{2}\langle \xi(t)^2 \rangle \omega^3 \eta_f^2}{n^2 \mathcal{D}^3 c}. \quad (50)$$

In particular, $\langle E_n \rangle \propto \eta_f^2$ results from the linearity of the initial equations and $\langle E_n \rangle \propto n^{-2}$ is a consequence of the second-order nature of the noise S_w . The proportionality $\langle E_n \rangle \propto \langle \xi(t)^2 \rangle$ differs from the periodic motion and is a sign of the loss of temporal coherence of the forcing. Finally, $\langle E_n \rangle \propto \mathcal{D}^{-3}$ shows that this effect will be of importance in high Q-factor cavities.

The validity of (44) can be checked afterwards by comparing the spectral power density of the considered forcing term with the neglected one. We get

$$\frac{S_w(n\omega)\omega^2 \langle \eta_+(L, t)^2 \rangle}{S_w(n)(n\omega)^2 \langle \bar{\eta}_n(L, t)^2 \rangle} \sim \frac{\mathcal{D}}{\left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 \langle \xi(t)^2 \rangle}, \quad (51)$$

and eq. (50) is then valid in the limit of small vibration of the boundary.

The stochastic and periodic regimes have therefore specific features, including the absence or presence of shock waves and the scaling of the energy spectra. This traces back to the temporal coherence of the forcing and to the nature of the energy transfers: the n -th mode is directly coupled with the forcing scale in the noisy case, whereas it is driven by the $(n \pm 1)$ -th mode if the motion is harmonic.

Conclusion. – We have described how the oscillation of a boundary affects the reflection of surface waves. We experimentally evidenced this *generalized Doppler effect*, then computed it for gravity waves and discussed a model in which the cumulative effects of such interactions can be studied in a simple manner. Since self-similar spectra have been found to arise as a consequence of the Doppler effect, the comparison of such energy transfers with the

non-linear ones would be an interesting follow-up in order to clarify experiments of surface wave turbulence. We finally detail possible applications of our study in two domains other than hydrodynamics.

First, in electrodynamics, where the motion of mirrors has been extensively discussed when it spontaneously generates photons from vacuum fluctuations. For this effect to be sizable, the mirror has to move at a velocity close to the speed of light, hence the resort to other devices in practice (*e.g.*, superconducting circuits, see [19]). Since the aim of our last model was not to investigate the quantum creation of photons but to describe how energy can be generated at frequencies different from the forcing one, an additional injection mechanism acting as a source of photons was set. This process no longer requires high velocities to be relevant, especially since the development of high Q-factor cavities (a striking example being the ones used to test quantum mechanics principles [20], where photons of frequency $f \sim 50$ GHz are trapped in cavities with Q up to 3.10^8). The present study can be used, for instance, to know how the electromagnetic field is affected by the thermal motion of a Fabry-Pérot interferometer with a high coefficient of finesse.

Secondly, in acoustics, where a system very similar to the model presented here is commonly used in laboratories under the name of acousto-optic modulator, or "Bragg cell". Proposed by Brillouin nearly a century ago [21], it consists of a cavity where acoustic waves are generated by a periodically oscillating surface (a piezoelectric transducer) and are reflected at the other extremity by a fixed wall. Contrary to the idealisation of linear acoustics presented here, bulk non-linearities may have to be taken into account and have been studied using devices in which reflection at one extremity is cancelled [22]. In the usual Bragg cell configuration, our model shows that a forcing at a resonant frequency leads to the apparition of strong pressure gradients and our results can be used to predict whether or not non-linearities have to be considered.

The author is thankful to S. FAUVE, F. PÉTRÉLIS and B. GALLET for fruitful discussions. This work is supported by CNES and ANR-12-BS04-0005-02.

REFERENCES

- [1] CENSOR D., *J. Franklin Inst.*, **295** (1973) 103.
- [2] CENSOR D., *J. Acoust. Soc. Am.*, **83** (1988) 1223.
- [3] MUJICA N., WUNENBURGER R. and FAUVE S., *Eur. Phys. J. B*, **33** (2003) 209.
- [4] FALCON E., LAROCHE C. and FAUVE S., *Phys. Rev. Lett.*, **98** (2007) 094503.
- [5] NAZARENKO S., *Wave Turbulence* (Springer, Heidelberg) 2011.
- [6] DITTRICH J., DUCLOS P. and ŠEBA P., *Phys. Rev. E*, **49** (1994) 3535.
- [7] LAW C. K., *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 1931.
- [8] MÉPLAN O. and GIGNOUX C., *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996) 408.
- [9] DODONOV V. V., *Phys. Scr.*, **82** (2010) 038105.

- [10] MICHEL G., PÉTRÉLIS F. and FAUVE S., *Phys. Rev. Lett.*, **116** (2016) 174301.
- [11] CENSOR D., *J. Acoust. Soc. Am.*, **76** (1984) 1527.
- [12] HAVELOCK T. H., *Philos. Mag.*, **8** (1929) 569.
- [13] JOO S. W., SCHYLTZ W. W. and MESSITER A. F., *J. Fluid Mech.*, **214** (1990) 161.
- [14] TING C-L and PERLIN M., *J. Fluid Mech.*, **295** (1995) 263.
- [15] RHODES-ROBINSON P. F., *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **92** (1982) 369.
- [16] BIFERALE L., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **35** (2002) 441.
- [17] DALLAS V., FAUVE S. and ALEXAKIS A., *Phys. Rev. Lett.*, **115** (2015) 204501.
- [18] FARAGO J., *J. Stat. Phys.*, **107** (2002) 781.
- [19] WILSON C. M. *et. al.*, *Nature*, **479** (2011) 367.
- [20] RAIMOND J. M., BRUNE M. and HAROCHE S., *Rev. Mod. Phys.*, **79** (2001) 565.
- [21] BRILLOUIN L., *Ann. Phys.*, **17** (1922) 88.
- [22] ADLER L. and HIEDERMANN E. A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **34** (1962) 410.

Chapitre 5

Interactions résonantes et parois

Norton suddenly recalled the myth of Oceanus, the sea which, the ancients believed, surrounded the Earth. Here, perhaps, was an even stranger sea — not circular, but cylindrical. Before it became frozen in the interstellar night, did it have waves and tides and currents — and fish ? [139]

Arthur Charles Clarke (1917 - 2008)

Jusqu'à présent, nous nous sommes restreints au régime de faible cambrure. Lorsque l'amplitude d'une onde de surface devient comparable à sa longueur d'onde, plus précisément à k^{-1} , on sort de cette limite et le terme en $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ de l'équation d'Euler entre en jeu. La conséquence la plus souvent discutée de ce terme non linéaire est la possibilité de soliton, l'anecdote de J. Russell, du cheval et du canal devenant même assez lassante. Il s'agit de structures localisées où la dispersion est intégralement compensée par la non-linéarité. Dans la limite d'eau peu profonde, leur forme peut être prédite grâce à une équation fermée sur $\eta(x, t)$, obtenue par Korteweg et de Vries [140] puis généralisée au cas gravito-capillaire. Elle s'écrit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{3c_s}{2h} \right) \times \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_s h^2}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sigma}{\rho g h^2} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (5.1)$$

avec h la profondeur et $c_s = \sqrt{gh}$. Outre expliquer les solitons¹, elle permet aussi d'obtenir des solutions gravitaires périodiques décrivant les très grandes longueurs d'onde dans l'océan (les *ondes cnoïdales*) [145].

Hors du régime d'eau peu profonde, il n'est plus possible d'éliminer le potentiel des vitesses à l'interface pour obtenir une équation sur $\eta(x, t)$ seul. L'étude des non-linéarités doit donc se mener différemment. En régime gravitaire d'eau profonde, Stokes calcula les premières corrections à la solution d'onde plane progressive et montra que le profil harmonique se voit corrigé d'une infinité d'harmoniques. En océanographie, on parle respectivement des ondes libre et liées de l'*onde de Stokes*. Plus précisément,

- Les crêtes sont raidies et les creux aplatis [146] (et inversement en régime capillaire eau profonde [147]).
- La relation de dispersion est modifiée [148].
- Des singularités apparaissent aux fortes cambrures.
- L'énergie peut *diminuer* lorsque l'amplitude de l'onde augmente [149, 150].

Ces résultats semblent prometteurs et le calcul a été étendu analytiquement au cinquième ordre [151], et même plus loin numériquement. Cette approche se trouve néanmoins aboutir à un échec : l'onde de Stokes est instable vis-à-vis de l'instabilité de modulation, aussi appelée *instabilité de Benjamin-Feir* [152].

Cette instabilité montre qu'il est capital de considérer plusieurs fréquences spatiales et temporelles, *i.e.* un paquet d'ondes évoluant sous l'effet de la dispersion et des non-linéarités. En notant l'élévation de surface $\eta(x, t) = \text{Re}(A(x, t) \exp(i(kx - \omega t)))$, l'évolution de l'enveloppe suit en régime gravitaire et eau profonde l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) focalisante [153],

1. Les propriétés des solitons varient suivant le régime gravitaire ou capillaire : il s'agit respectivement de la propagation d'une « bosse » ou d'un « creux » [141, 142]. Les premiers sont stables vis-à-vis de perturbations transverses [143], alors que les seconds se déstabilisent et forment des structures localisées suivant les deux directions (appelées *lump*) [143, 144].

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + c_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\omega k^2}{2} |A|^2 A = 0, \quad (5.2)$$

où $\omega = \sqrt{gk}$ et $c_g = \omega/(2k)$. Des expressions similaires mais plus complexes s'obtiennent en profondeur quelconque [154] ou en incluant les effets capillaires [155]. (5.2) permet de démontrer que les ondes de Stokes sont instables, menant à un ensemble de structures localisées [156, 157]. Les plus connues sont les solitons où l'enveloppe se propage sans se déformer. Le cas gravitaire eau peu profonde peut aussi être abordé de cette manière, le terme dispersif changeant cependant de signe (l'équation devient défocalisante) : les ondes planes sont alors stables, mais des solitons sombres peuvent être observés [158].

Toutes ces approches sont difficilement généralisables à une perturbation de surface 2D $\eta(x, y, t)$ [159]. Décrire un tel état est cependant l'objectif pour rendre compte de la dynamique de l'océan. Il faut alors abandonner la recherche d'une équation aux dérivées partielles et procéder autrement : la solution consiste à développer $\eta(x, y, t)$ en modes propres, puis à étudier les interactions existant entre un petit nombre de tels modes. Phillips fut le premier à raisonner de cette manière [160], montrant qu'en régime gravitaire, milieu infini et eau profonde, il est nécessaire de considérer les non-linéarités cubiques pour observer des échanges d'énergie (on parle d'*interaction à quatre ondes*). La croissance d'une onde par interaction résonante fut calculée par Longuet-Higgins lorsque deux des modes impliqués sont confondus [161] ; le cas général nécessitant des expressions plus complexes [153, 162]. Les ondes capillaires [163, 164] et les profondeurs finies [165] peuvent aussi être abordées de la sorte. Le calcul de ces interactions constitue le point de départ de la *théorie de la turbulence faible* détaillée ultérieurement dans ce manuscrit et décrivant les propriétés statistiques d'un ensemble d'ondes en interaction.

Nous nous intéressons ici à la manière dont ces résultats sont affectés par la présence de parois. La théorie de Longuet-Higgins démontrant l'impossibilité d'interactions à trois ondes planes gravitaires en eau profonde sera adaptée en géométrie cylindrique. Nous verrons que de telles résonances sont autorisées, calculerons leurs propriétés et présenterons une expérience capable d'isoler une unique triade résonante.

5.1 Croissance d'une onde fille par interaction triadique

5.1.1 Approche de Longuet-Higgins

L'étude de l'interaction entre paquets d'ondes peut être abordée de deux façons équivalentes [166] : ou bien en développant les équations d'Euler et de surface libre (Longuet-Higgins et Hasselmann [161, 167, 168]), ou bien par une approche hamiltonienne (Zakharov [153, 164]). Nous traitons ici la première méthode en régime gravitaire eau profonde.

Équations maîtresses

Rappelons les équations utilisées §1.1.1 avant linéarisation pour démontrer la relation de dispersion, en notant $\eta(x, y, t)$ l'élévation totale et en supposant la surface libre au repos en $z = 0$.

- L'équation de Laplace (1.1) sur le potentiel de vitesse φ :

$$\Delta \varphi = 0. \quad (5.3)$$

- L'équation de surface libre (1.4),

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \eta = v_z(x, z = \eta(x, t), t), \quad (5.4)$$

soit par définition du potentiel des vitesses ($\vec{v} = -\vec{\nabla} \varphi$),

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{z=\eta(x,y,t)} = 0. \quad (5.5)$$

- L'équation de Bernoulli (1.9) pour un écoulement irrotationnel en l'absence de tension de surface,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} - g\eta \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0. \quad (5.6)$$

Nous allons utiliser une combinaison de ces équations, à savoir $D(5.6)/Dt + g(5.5)$:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - \frac{1}{2} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{v} \cdot \vec{v}) \Big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0 \quad (5.7)$$

Tout calcul perturbatif nécessite de spécifier les facteurs d'échelles du développement. S'agissant de montrer si deux paquets d'ondes interagissant *via* les premières non-linéarités peuvent créer une onde fille, nous pouvons nous limiter au second ordre dans toutes les expressions et poser

$$\begin{cases} \varphi = (\alpha \varphi_{10} + \beta \varphi_{01}) + (\alpha^2 \varphi_{20} + \beta^2 \varphi_{02} + \alpha \beta \varphi_{11}) + \mathcal{O}(\alpha^3, \alpha^2 \beta, \alpha \beta^2, \beta^3) & (5.8) \\ \vec{v} = (\alpha \vec{v}_{10} + \beta \vec{v}_{01}) + (\alpha^2 \vec{v}_{20} + \beta^2 \vec{v}_{02} + \alpha \beta \vec{v}_{11}) + \mathcal{O}(\alpha^3, \alpha^2 \beta, \alpha \beta^2, \beta^3) & (5.9) \\ \eta = (\alpha \eta_{10} + \beta \eta_{01}) + (\alpha^2 \eta_{20} + \beta^2 \eta_{02} + \alpha \beta \eta_{11}) + \mathcal{O}(\alpha^3, \alpha^2 \beta, \alpha \beta^2, \beta^3) & (5.10) \end{cases}$$

où α et β sont indépendants et petits devant l'unité. Si $\beta = 0$, ce développement se réduit à l'onde harmonique (indice 10) et la première onde liée (indice 20), et *idem* pour $\alpha = 0$. Le terme d'interaction que nous cherchons à évaluer est repéré par l'indice 11. À l'ordre α , (5.5), (5.6) et (5.7) donnent

$$\partial_t \eta_{10} + \partial_z \varphi_{10} \Big|_{z=0} = 0, \quad \partial_t \varphi_{10} - g \eta_{10} \Big|_{z=0} = 0, \quad \partial_{tt} \varphi + g \partial_z \varphi_{10} \Big|_{z=0} = 0, \quad (5.11)$$

et de même pour l'ordre β . On développe ensuite (5.7) autour de $z = 0$ et calcule l'ordre $\alpha\beta$:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \right) + \eta_{10} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{01}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial z} \right) + \eta_{01} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_{01} \cdot \vec{v}_{10} \Big|_{z=0} = 0 \quad (5.12)$$

Le potentiel inconnu φ_{11} est solution de (5.12) et de l'équation de Laplace ($\Delta \varphi_{11} = 0$).

Résolution

La solution de (5.11) et son équivalent pour β est :

$$\begin{cases} \varphi_{01} = A_1 e^{k_1 z} \sin(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{x}), & (5.13) \\ \varphi_{10} = A_2 e^{k_2 z} \sin(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{x}), & (5.14) \end{cases}$$

où $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \omega_1 = \sqrt{gk_1}, \omega_2 = \sqrt{gk_2}$ sont les vecteurs d'onde et pulsations des ondes mères et $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$. En notant θ l'angle entre \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , (5.12) peut être explicitée,

$$\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2A_1 A_2 k_1 k_2 \left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \omega_+ \sin(\omega_+ t + \vec{k}_+ \cdot \vec{x}) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \omega_- \sin(\omega_- t - \vec{k}_- \cdot \vec{x}) \right), \quad (5.15)$$

où $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$ et $\vec{k}_{\pm} = \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2$. Le potentiel φ_{11} , solution de l'équation de Laplace, s'en déduit alors. Il faut distinguer trois cas, respectivement associés aux solutions pour $\omega_{\pm}^2 \neq gk_{\pm}$, $\omega_+^2 = gk_+$ ou $\omega_-^2 = gk_-$ et donnés par

$$\varphi_{11} = A_1 A_2 k_1 k_2 \begin{cases} \left(\frac{2\omega_+ \sin^2(\theta/2)}{gk_+ - \omega_+^2} \right) e^{k_+ z} \sin(\omega_+ t + \vec{k}_+ \cdot \vec{x}) - \left(\frac{2\omega_- \cos^2(\theta/2)}{gk_- - \omega_-^2} \right) e^{k_- z} \sin(\omega_- t - \vec{k}_- \cdot \vec{x}) \\ - \sin^2(\theta/2) e^{k_+ z} t \cos(\omega_+ t + \vec{k}_+ \cdot \vec{x}) - \left(\frac{2\omega_- \cos^2(\theta/2)}{gk_- - \omega_-^2} \right) e^{k_- z} \sin(\omega_- t - \vec{k}_- \cdot \vec{x}) \\ \left(\frac{2\omega_+ \sin^2(\theta/2)}{gk_+ - \omega_+^2} \right) e^{k_+ z} \sin(\omega_+ t + \vec{k}_+ \cdot \vec{x}) + \cos^2(\theta/2) e^{k_- z} t \cos(\omega_- t - \vec{k}_- \cdot \vec{x}) \end{cases}$$

Les transferts d'énergie aux temps longs, c'est-à-dire les interactions résonantes, correspondent aux solutions divergeant linéairement en temps.

Ordre des interactions

D'après l'étude précédente, l'interaction à trois ondes est résonante si la triade $\{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3\}$ vérifie :

$$\boxed{\omega_1(\vec{k}_1) \pm \omega_2(\vec{k}_2) \pm \omega_3(\vec{k}_3) = 0, \quad \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 = \vec{0},} \quad (5.16)$$

Les signes \pm étant les mêmes dans les deux égalités. Il se trouve que ce système n'admet de solution que pour des relations de dispersion $\omega(|\vec{k}|)$ convexes. Ce résultat se montre graphiquement, comme montré Fig. 5.1 où une triade résonante est associée au croisement des deux surfaces dessinées. Le cas gravitaire en eau profonde correspond à la situation Fig. 5.1(b) et il n'existe donc pas d'interaction résonante entre trois ondes. Dans [161], Longuet-Higgins évalue l'ordre suivant, montre que des résonances à quatre ondes existent et calcule le taux de croissance.

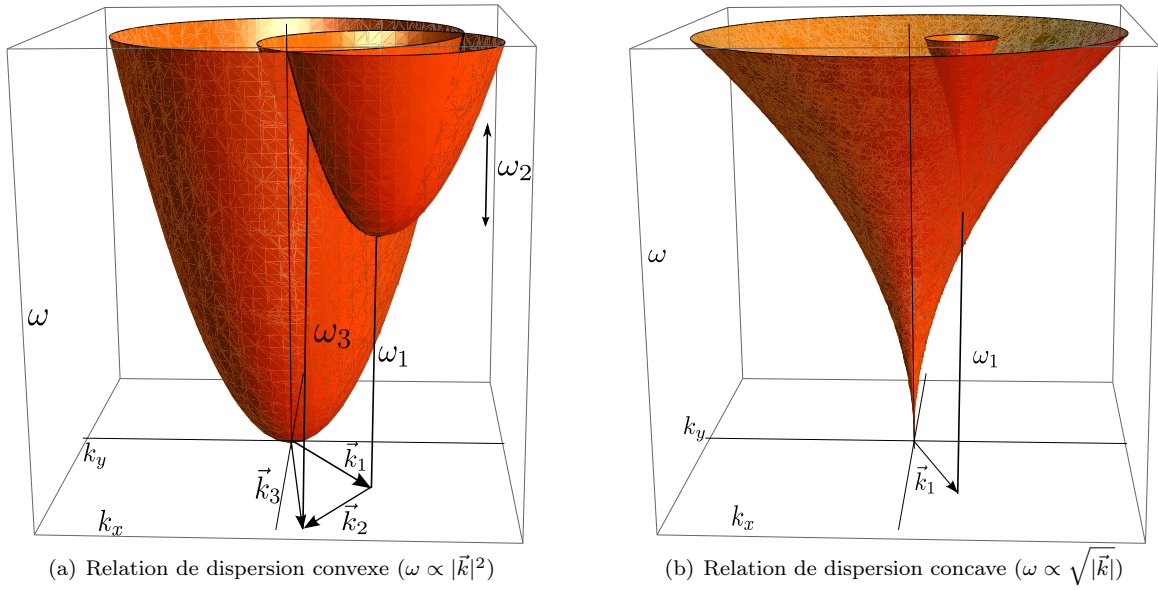


FIGURE 5.1 – Possibilité d'interaction à trois ondes

Ce résultat peut être généralisé, et une interaction est résonante si

$$\boxed{\omega_1(\vec{k}_1) \pm \omega_2(\vec{k}_2) \pm \omega_3(\vec{k}_3) \pm \dots = 0, \quad \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 \pm \dots = \vec{0},} \quad (5.17)$$

où les pulsations ω_i et les vecteurs d'onde \vec{k}_i sont liés par la relation de dispersion. Les signes \pm doivent être les mêmes pour ces deux égalités, qui traduisent la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

En profondeur quelconque, les interactions à trois ondes sont alors autorisées dans le régime capillaire et interdites dans le cas gravitaire par étude de la relation de dispersion. Cela a de fortes conséquences, d'une part en théorie de la turbulence faible (cf. chapitre 6), d'autre part sur la rapidité des échanges d'énergie non linéaires. En effet, si des interactions à trois ondes existent, la cambrure de l'onde fille $\epsilon_3(t)$ évolue en fonction de celles des ondes mères ϵ_1 et ϵ_2 comme

$$\epsilon_3(t) \sim \epsilon_1 \epsilon_2 \omega_3 t, \quad (5.18)$$

et un temps caractérisant les effets non linéaires, obtenu en posant $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ et résolvant $\epsilon_3(\tau_{NL}) = \epsilon$ est

$$\boxed{\tau_{NL}(\omega)_{3 \text{ ondes}} \sim \frac{1}{\epsilon \omega}} \quad (5.19)$$

Les interactions à quatre ondes nécessitent de pousser le développement à l'ordre supérieur, et on aboutit à

$$\epsilon_4(t) \sim \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \omega_4 t \implies \boxed{\tau_{NL}(\omega)_{4 \text{ ondes}} \sim \frac{1}{\epsilon^2 \omega} \gg \tau_{NL}(\omega)_{3 \text{ ondes}}} \quad (5.20)$$

Ainsi, il n'est pas anodin que des interactions non linéaires résonantes impliquent trois ou quatre ondes.

5.1.2 Application en géométrie cylindrique

L'étude précédente dépend de la nature des forces de rappel, gravitaire ou capillaire, ainsi que des parois. La présence d'un fond modifie par exemple la relation de dispersion et aurait pu avoir un effet sur la possibilité d'interactions à trois ondes : il se trouve que ce n'est pas le cas, la concavité de la relation de dispersion n'étant pas affectée. Qu'en est-il de la présence de parois latérales ?

Si un milieu infini et des ondes planes sont pertinents pour décrire la dynamique de l'océan, on ne saurait y recourir pour traiter du ballonnement d'un réservoir cylindrique et il faut considérer les modes décrits §1.1.2,

$$\varphi_{n,m}(r, \theta, z, t) = \psi J_m(k_{n,m}r) e^{k_{n,m}z} \cos(\omega t - m\theta), \quad (5.21)$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$, $k_{n,m} = \xi_{n,m}/R$ et $\xi_{n,m}$ la n -ième racine de $J'_m(x)$. Il s'agit d'ondes progressives suivant $\pm\theta$, la relation de dispersion $\omega(k)$ étant inchangée. Contrairement aux ondes planes, de tels modes sont caractérisés non pas par le couple (énergie + quantité de mouvement) mais par l'ensemble (énergie + moment cinétique²). Les calculs nécessitent juste quelques manipulations des fonctions de Bessel et sont reportés en annexe B. Pour deux ondes mères de cambrures

$$\begin{cases} k_A \eta_A(r, \theta, t) = \epsilon_A J_{m_A}(k_A r) \cos(\omega_A t - m_A \theta), \\ k_B \eta_B(r, \theta, t) = \epsilon_B J_{m_B}(k_B r) \cos(\omega_B t - m_B \theta), \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\quad (5.24)$$

nous montrons les résultats suivants.

1. Il est possible d'observer la croissance d'une onde fille de pulsation ω_C et indice m_C telle que

$$\boxed{\omega_C = \omega_A \pm \omega_B, \quad m_C = m_A \pm m_B} \quad (5.25)$$

sous réserve que $J'_{m_C}(\omega_C^2 R/g) = 0$. Les signes \pm doivent être les mêmes pour les deux équations, qui traduisent la conservation de l'énergie et du moment cinétique.

2. Dans ce cas, avec $\omega_C = \omega_A + \omega_B = \sqrt{gk_C}$ et $m_C = m_A + m_B$, la cambrure de l'onde fille croît comme

$$\boxed{k_C \eta_C(r, \theta, t) = -\kappa \frac{\omega_C^3}{4\omega_A \omega_B} \epsilon_A \epsilon_B t J_{m_C}(k_C r) \sin(\omega_C t - m_C \theta)} \quad (5.26)$$

avec κ un nombre sans dimension donné par

$$\kappa = \frac{\int_0^R r J_{m_C}(k_C r) (-2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B-1} + J_{m_A-1} J_{m_B+1}) dr}{\int_0^R r J_{m_C}^2(k_C r) dr}. \quad (5.27)$$

La situation $\omega_C = \omega_A - \omega_B$ s'obtient par la transformation $\omega_B \rightarrow -\omega_B$ et $m_B \rightarrow -m_B$.

3. D'après (5.26), la somme des phases instantanées des trois ondes présentes est verrouillée à $\pm\pi/2$.

La démarche présentée ici ne décrit que les premiers stades de l'interaction résonante : elle suppose notamment l'amplitude et la phase des ondes mères constantes. Un système d'équations portant sur l'évolution des phases et amplitudes des trois ondes considérées peut être établi de manière systématique à l'aide de la théorie de Zakharov, les calculs étant cependant plus techniques. Ce type de dynamique a été étudié en régime gravitaire, montrant dans certaines limites des phénomènes de récurrence [169, 170] analogues à ceux décrits par Fermi, Pasta et Ulam (« récurrence FPU ») au milieu du XX^e siècle [145, 171].

Retenons que la présence de paroi, contraignant la forme des modes propres, modifie l'ordre des interactions entre ondes gravitaires : les effets non linéaires sont plus importants qu'en milieu infini. L'origine de ce résultat est un changement des quantités conservées, le moment cinétique se substituant à la quantité de mouvement.

2. Le moment cinétique selon l'axe du cylindre du mode (5.21) s'évalue dans la limite de faible cambrure comme :

$$L_z = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\theta \int_{-\infty}^{\eta(r, \theta, t)} dz \rho r v_\theta \simeq \left(\frac{m}{\omega}\right) \times 2 \times \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\theta \left(\frac{\rho g \eta(r, \theta, t)^2}{2}\right) = \frac{mE}{\omega}, \quad (5.22)$$

où E est l'énergie de l'onde de surface. Avec $E = \hbar\omega$, on retrouve $L_z = m\hbar$, que l'on pourra voir d'un autre œil chapitre 6.

5.2 Étude expérimentale

5.2.1 Présentation du dispositif

Nous cherchons à mettre en évidence puis caractériser expérimentalement ces transferts d'énergie en géométrie cylindrique. Pour cela, il faut isoler une *unique* interaction à trois ondes. Le problème est que les conditions de résonance sont, dans les conditions usuelles, dégénérées : s'il existe une solution

$$\omega_C = \omega_A + \omega_B \quad \text{et} \quad m_C = m_A + m_B, \quad (5.28)$$

alors comme les pulsations ω ne dépendent pas du signe de m

$$\omega_C = \omega_A + \omega_B \quad \text{et} \quad (-m_C) = (-m_A) + (-m_B) \quad (5.29)$$

l'est aussi. Autrement dit, si des ondes circulaires interagissent entre elles, la même combinaison se propageant dans l'autre sens ($m \rightarrow -m$) est aussi résonante. Pour isoler une unique triade, il faut dissymétriser les sens de propagation gauche et droite, *i.e.* briser l'invariance par réflexion vis-à-vis d'un plan contenant l'axe du cylindre. Ceci est réalisé en mettant le cylindre en rotation à une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ et tirant parti de la force de Coriolis $\propto \vec{v} \wedge \vec{\Omega}$. Cela complique la dynamique du fluide et tend à rendre l'écoulement indépendant de z . Le dispositif expérimental étant schématisé Fig. 5.2.

Un cylindre de diamètre interne $2R = 18.9$ cm et hauteur 18.5 cm est rempli d'un volume d'eau $V = 950$ mL, *i.e.* d'une hauteur d'eau $h \simeq 3$ cm. Il est mis en rotation à une vitesse angulaire Ω par rapport à son axe de révolution (Δ) à l'aide un moteur Parvex RS420 asservi par une dynamo tachymétrique. L'excitation des ondes de surface s'effectue *via* un vibreur LDS 555 qui fait pivoter le cylindre suivant un second axe (Δ_v) fixe dans le référentiel du laboratoire. Un accéléromètre BK placé sur le bâti caractérise ce forçage. Enfin, des capteurs capacitifs situés à 2 cm de (Δ) et décalés de 90° mesurent la hauteur d'eau locale, les signaux $\eta_1(t)$ et $\eta_2(t)$ étant finalement traités par un analyseur de spectres HP 35670A ou acquis par une carte NI-USB 4431.

5.2.2 Effet de la rotation sur les ondes de surface

La rotation uniforme ajoute un nouveau nombre sans dimension au problème, appelé *nombre de Froude* et construit comme le rapport entre la période de rotation et celle des premiers modes en eau peu profonde,

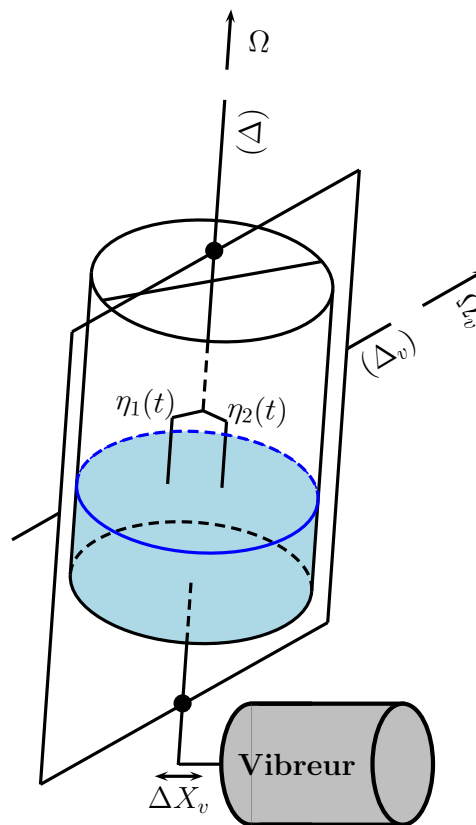
$$Fr = \frac{\Omega R}{\sqrt{gh}}. \quad (5.30)$$

Les conséquences de cette rotation sont nombreuses, citons entre autres [130] :

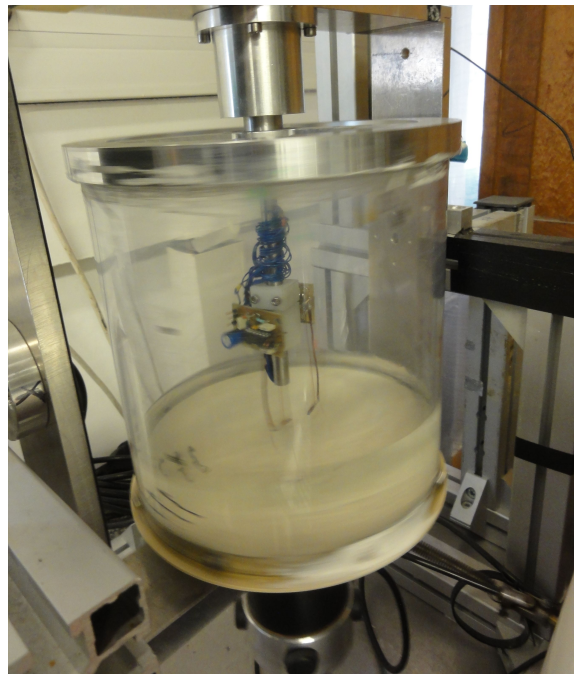
1. La courbure de la surface libre à l'équilibre par force centrifuge, parabolique à faible vitesse de rotation puis menant à une couche d'eau plaquée contre les bords dans la limite $Fr \rightarrow \infty$.
2. L'apparition de nouvelles classes d'ondes : onde inertielle avec la force de Coriolis comme mécanisme de rappel et onde de Rossby à cause de la non-planéité de l'interface.
3. La modification des champs de vitesse sous l'effet de la force de Coriolis ; le profil de la couche limite au fond du cylindre est perturbé (on parle de *couche d'Eckman* lorsque $\Omega \gg \omega$, ω étant la pulsation de l'onde), et en volume l'écoulement tend à ne plus dépendre de z (*théorème de Taylor-Proudman*).

Tous ces effets compliquent l'étude des ondes de surface : les potentiels de vitesse (5.21) n'étant plus solution du problème. Cependant, dans la limite des faibles nombres de Froude, il est possible de négliger la courbure de l'interface (en Fr^2 car causée par la force centrifuge $\propto \Omega^2$) et de calculer perturbativement la correction due à la force de Coriolis.

Cela fut réalisé par Kelvin et Rayleigh en régime gravitaire eau peu profonde [172, 173], puis généralisé par Miles [174] en profondeur arbitraire. L'effet recherché, à savoir une séparation des modes circulaires gauche et droite, est capturé à cet ordre ; les pulsations des modes propres étant données par [174]



(a) Schéma de l'expérience



(b) Photographie du montage

FIGURE 5.2 – Expérience de ballotement en rotation

$$\omega_{m,n}(\Omega) = \omega_{m,n}(0) + \frac{m\Omega}{\xi_{m,n}^2 - m^2} \left(1 + \frac{2\xi_{m,n}h}{R \sinh\left(\frac{2\xi_{m,n}h}{R}\right)} \right) + \mathcal{O}(Fr^2), \quad \omega_{m,n}(0)^2 = \frac{g\xi_{m,n}}{R} \tanh\left(\frac{\xi_{m,n}h}{R}\right) \quad (5.31)$$

où $\omega_{m,n}(0)$ est la pulsation en l'absence de rotation. Ce phénomène est analogue à la levée de dégénérescence des modes acoustiques dans une étoile en rotation (utilisée en héliosismologie [175]) ou des modes optiques par application d'un champ magnétique (effet Zeeman). La tension de surface est considérée dans [176] et le cas d'une vitesse de rotation quelconque dans [177]. Étudions quelques conséquences de (5.31) :

- Les modes axisymétriques $m = 0$ ne sont pas modifiés au premier ordre.
- La levée de dégénérescence pour $m \neq 0$ diminue la pulsation du mode circulaire gauche (moment cinétique $\vec{L}_z \propto \vec{\Omega}$) et augmente celle du mode circulaire droit. Qualitativement, le premier a en effet à parcourir sur une période une distance allongée par la rotation solide, contrairement au second.
- La séparation $|\omega_{m,n}(\Omega) - \omega_{m,n}(0)|$ est deux fois plus importante en eau peu profonde qu'en eau profonde, et d'autant plus forte que n et m sont petits. Le mode $m = n = 1$ en eau peu profonde est donc à la fois celui de plus petite fréquence de propre et le plus affecté par la rotation.

5.2.3 Choix de l'interaction résonnante

Pour choisir la triade étudiée, rappelons que nous souhaitons utiliser la rotation la plus faible permettant d'observer une levée de dégénérescence. D'après le dernier point de la liste ci-dessus, nous faisons participer le premier mode de ballottement ($m_A = n_A = 1$). Les modes $m = \pm 1$ étant particulièrement sensibles au forçage retenu, nous considérons l'interaction suivante :

$$(m_A = 1, n_A = 1) + (m_B = -1, n_B = 2) \implies (m_C = 0, n_C = 3). \quad (5.32)$$

La résolution numérique de (5.31) indique que cette résonance sera atteinte pour une rotation $\Omega = 2\pi \times 242$ mHz, correspondant à un nombre de Froude $Fr = 0.25$. Par rapport au calcul mené §5.1.2, cette expérience inclut l'effet de la rotation ($Fr = 0.25$) et d'une hauteur finie pour le premier mode ($k_A h = 0.66$). Ces modifications restent faibles et les principales caractéristiques de l'interaction résonnante sont attendues inchangées.

5.2.4 Mise en évidence des interactions triadiques

Fréquence des modes propres

Nous sollicitons le système avec un bruit basse-fréquence $0 - 4$ Hz ($\omega_A < \omega_B < 4$ Hz $< \omega_C$) et reportons Fig. 5.3 les spectres de puissance de $\eta_1(t)$ pour quelques fréquences de rotation.

On observe la séparation du mode ($m = \pm 1, n = 1$) de fréquence ~ 1.7 Hz en deux pics distincts restant dans l'approximation linéaire (5.31), cf. Fig. 5.4. Concernant l'onde B ($m_B = -1, n_B = 2$) de fréquence légèrement inférieure à 4 Hz, l'effet de la rotation est bien plus faible ($1/(\xi_{m_B, n_B}^2 - m_B^2) \simeq 0.04$) et la séparation en modes $m \pm 1$ n'est pas discernable avec ce dispositif. On mesure aux très basses fréquences la fréquence de rotation ainsi que quelques multiples, résultat de légères imperfections du montage.

Enfin, et il s'agit du résultat principal, nous observons un pic de fréquence proche de 5.2 Hz. En reportant la fréquence de son maximum, nous vérifions qu'il correspond à $(\omega_{1,1} + \omega_{-1,2})/(2\pi)$. Étant donné que ce mode n'est pas forcé directement par le vibreur, d'une part car il s'agit d'un mode axisymétrique et d'autre part car sa fréquence est hors de la bande-passante du bruit, nous concluons qu'il est créé par interaction non linéaire.

Nature des modes mesurés

Pour confirmer ces résultats, nous tirons parti de la mesure simultanée de l'élévation de surface $\eta_1(t)$ et $\eta_2(t)$ en deux points décalés angulairement de $\pi/2$ et calculons la phase de la densité spectrale croisée entre ces signaux $\varphi_{\eta_1, \eta_2}(f)$. Il s'agit d'une quantité définie à partir de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation croisée,

$$\varphi_{\eta_1, \eta_2}(f) = \text{Angle} \left(\iint_{-\infty}^{\infty} \eta_1(t) \eta_2(t + \tau) e^{2i\pi f \tau} dt d\tau \right). \quad (5.33)$$

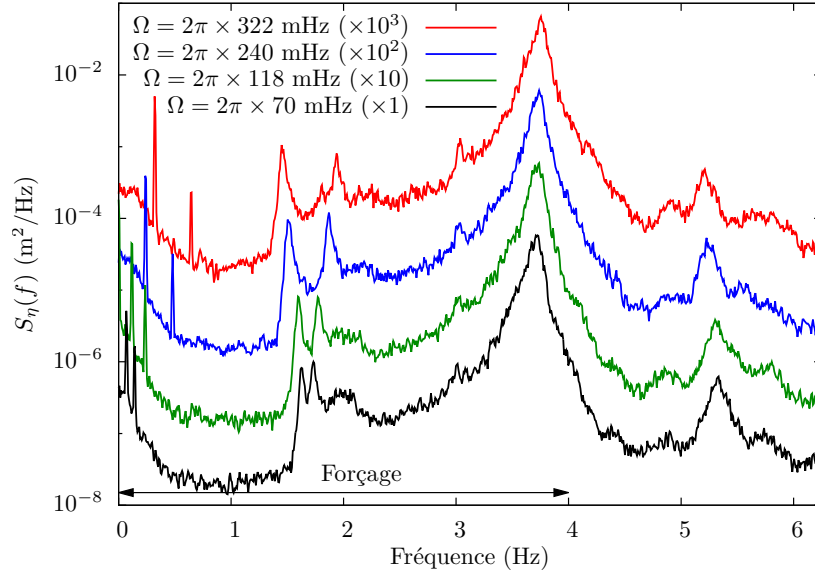
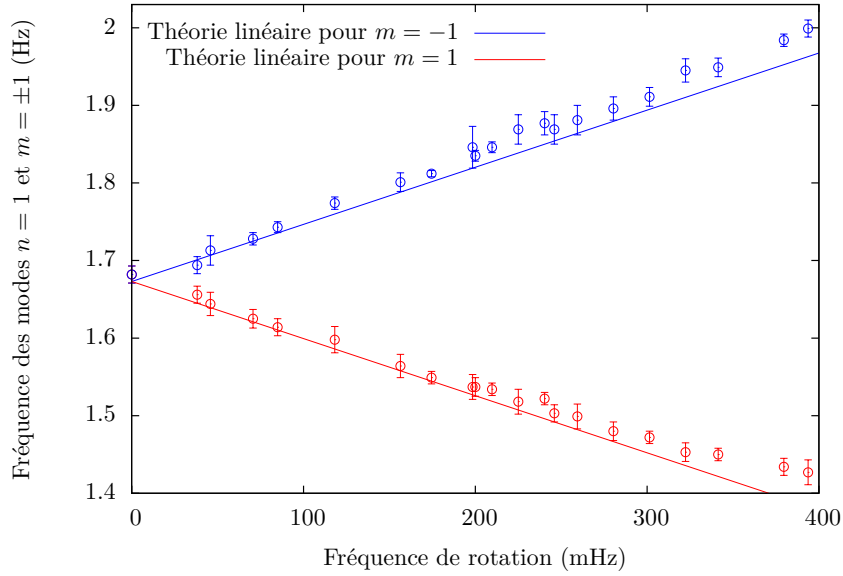


FIGURE 5.3 – Spectre de hauteur d'un capteur pour différentes fréquences de rotation

FIGURE 5.4 – Évolution des fréquences propres des modes $n = 1$ et $m = \pm 1$ sous l'effet de la rotation

Lorsque les réponses sur η_1 et η_2 sont corrélées, cette quantité donne une indication sur le retard de l'une sur l'autre. Par exemple,

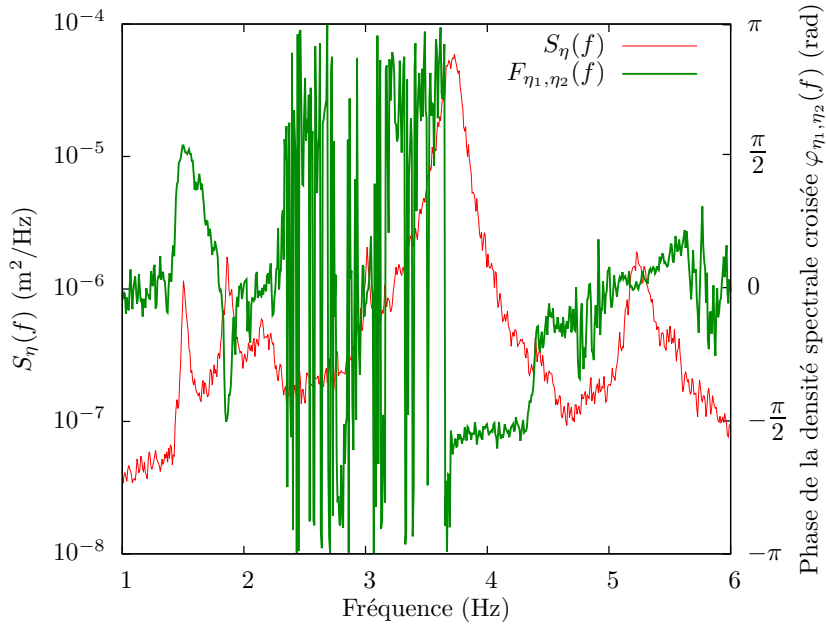
$$(\eta_1 \propto \cos(2\pi ft), \eta_2 \propto \cos(2\pi ft - \varphi_0)) \implies \varphi_{\eta_1, \eta_2}(f) = \varphi_0. \quad (5.34)$$

Dans notre cas, la disposition des capteurs mène aux résultats suivant :

$$\eta(r, \theta, t) \propto \cos(2\pi ft - m\theta) \implies \varphi_{\eta_1, \eta_2}(f) = m \frac{\pi}{2}. \quad (5.35)$$

Nous pouvons alors interpréter le spectre reporté Fig. 5.5 :

- Pour le premier mode, $\varphi_{\eta_1, \eta_2}(1.5 \text{ Hz}) = \pi/2$, comme attendu de $m = 1$.
- Inversement, $\varphi_{\eta_1, \eta_2}(1.9 \text{ Hz}) = -\pi/2$, résultat cohérent avec $m = -1$.
- Au maximum du pic à 5.2 Hz, cette fonction est nulle, comme pour un mode axisymétrique $m = 0$.

FIGURE 5.5 – Spectre de corrélation temporelle entre les deux capteurs ($\Omega = 2\pi \times 240$ mHz)

Énergie de l'onde fille

En se plaçant toujours à la fréquence de rotation théorique correspondant à la condition de résonance (240 mHz), nous faisons finalement varier l'amplitude du forçage. En intégrant les spectres de puissance autour des fréquences de résonance, nous obtenons une quantité proportionnelle à l'énergie des ondes :

$$E_\eta(f_i) = \int_{f \simeq f_i} S_\eta(f) df \quad (5.36)$$

Nous reportons Fig. 5.6 une mesure de l'énergie de l'onde fille $E_\eta(f_C)$ en fonction du produit de celles des ondes mères : nous observons $E_\eta(f_C) \propto E_\eta(f_A) \times E_\eta(f_B)$, comme attendu à partir de l'étude théorique, cf. (5.26).

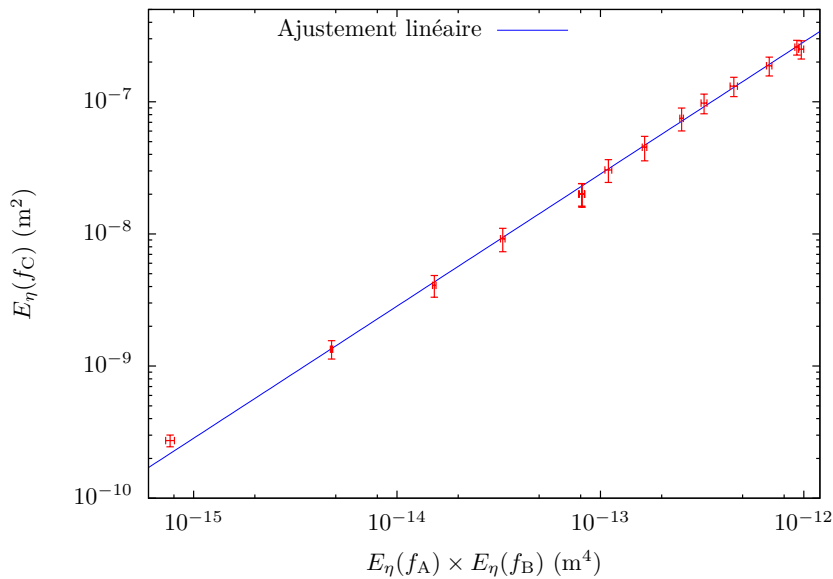


FIGURE 5.6 – Évolution de l'énergie de l'onde fille en fonction du produit des énergies des ondes mères

Ces quelques résultats expérimentaux sont préliminaires, cette étude venant d'être initiée. De nombreux points restent à être précisés, parmi lesquels figurent :

- La vérification du verrouillage de phase
- L'utilisation d'un forçage périodique sollicitant uniquement les ondes mères.
- Décrire le régime de cambrures fortes.
- Quantifier le rôle de la dissipation.

5.3 Interactions à quatre ondes en grand bassin

J'ai eu le plaisir durant cette thèse de participer à la collaboration Turbulon, étudiant expérimentalement les ondes de surface dans le grand bassin de l'école centrale de Nantes. L'une des campagnes que nous avons menée prolonge directement ce chapitre et concerne les ondes gravitaires, cette fois-ci sans effet des parois.

Comme nous l'avons vu, les interactions à trois ondes sont dans ce cas interdites. L'ordre suivant doit être évalué et correspond à des échanges d'énergie entre quatre modes. En notant ω les pulsations et \vec{k} les vecteurs d'onde, les non-linéarités impliquant trois ondes planes A, B et C peuvent mener à la croissance d'une quatrième onde plane D telle que

$$\begin{cases} \omega_D = \pm\omega_A \pm \omega_B \pm \omega_C & (5.37) \\ \vec{k}_D = \pm\vec{k}_A \pm \vec{k}_B \pm \vec{k}_C & (5.38) \end{cases}$$

La relation de dispersion contraint encore ce résultat, et il est possible de montrer qu'un unique signe \pm de (5.37-5.38) peut et doit être négatif [167]. Ainsi, en toute généralité, ce système devient

$$\begin{cases} \omega_D = \omega_A + \omega_B - \omega_C & (5.39) \\ \vec{k}_D = \vec{k}_A + \vec{k}_B - \vec{k}_C & (5.40) \end{cases}$$

Une configuration simple pour étudier cette résonance consiste à se limiter à une interaction dégénérée où les ondes A et B sont identiques, et où l'onde D est initialement absente. Cela revient à faire se rencontrer deux paquets d'ondes de pulsation ω_A (resp. ω_C) et vecteur d'onde \vec{k}_A (resp. \vec{k}_C). La théorie a dans ce cas été initiée par Longuet-Higgins [161] pour décrire les premiers instants de l'interaction, puis généralisée par Zakharov.

Les expériences vérifiant ces résultats ont principalement été menées au milieu du siècle précédent en configuration perpendiculaire [178–180] (cf. pages suivantes pour plus de références). À l'aide d'installations modernes, une étude plus poussée de ces interactions résonantes peut être menée. Tout en restant dans la configuration dégénérée, nous avons pu décrire expérimentalement l'influence de l'angle entre ces deux paquets d'ondes, de leurs fréquences ou encore de leurs cambrures. Les données obtenues s'ajustent remarquablement bien avec la théorie de Zakharov.

L'article détaillant ces résultats est publié dans *Journal of Fluid Mechanics* [181], la version libre disponible sur arXiv est reproduite dans les pages suivantes.

Observation of resonant interactions among surface gravity waves

**F. Bonnefoy^{1†}, F. Haudin², G. Michel³, B. Semin³,
T. Humbert⁴, S. Aumaître⁴, M. Berhanu², and E. Falcon²**

¹École Centrale de Nantes, LHEEA, UMR 6598 CNRS, F-44 321 Nantes, France

²Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, MSC, UMR 7057 CNRS, F-75 013 Paris, France

³École Normale Supérieure, LPS, UMR 8550 CNRS, F-75 005 Paris, France.

⁴CEA-Saclay, Sphynx, DSM, URA 2464 CNRS, F-91 191 Gif-sur-Yvette, France

(Received ?; revised ?; accepted ?.)

We experimentally study resonant interactions of oblique surface gravity waves in a large basin. Our results strongly extend previous experimental results performed mainly for perpendicular or collinear wave trains. We generate two oblique waves crossing at an acute angle, while we control their frequency ratio, steepnesses and directions. These mother waves mutually interact and give birth to a resonant wave whose properties (growth rate, resonant response curve and phase locking) are fully characterized. All our experimental results are found in good quantitative agreement with four-wave interaction theory with no fitting parameter. Off-resonance experiments are also reported and the relevant theoretical analysis is conducted and validated.

1. Introduction

Resonant interactions between nonlinear waves are an efficient mechanism to transfer energy between scales. For instance, three-wave interactions appear in various systems involving quadratic nonlinearity such as for optical waves, hydrodynamic capillary surface waves, or elastic waves on a thin plate.

For hydrodynamic systems, experimental studies of three-wave interactions have been investigated for capillary surface waves (McGoldrick 1970; Henderson & Hammack 1987; Haudin *et al.* 2016; Aubourg & Mordant 2015), internal waves in stratified fluids (Martin *et al.* 1972; Joubaud *et al.* 2012) and inertial waves in fluids in rotation (Bordes *et al.* 2012). For wave systems involving concave dispersion relation (i.e. when the wave frequency ω follows $\omega(k) \sim k^\nu$ with k the wavenumber and $\nu < 1$) or cubic nonlinearity, such as for surface gravity waves in deep-water, three-wave resonance conditions cannot be fulfilled. Four-wave interactions may then occur if interacting waves fulfill the following resonance conditions $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ and $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$, the angular frequencies ω_i and wave vectors \mathbf{k}_i being linked by the linear wave dispersion relation $\omega_i \equiv \omega(\mathbf{k}_i)$. Mainly for the sake of simplicity, special attention has been given to the case of two degenerated mother waves, i.e. $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$. Four-wave resonance conditions thus reduce to

$$\begin{cases} 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 \\ 2\omega_1 - \omega_3 = \omega_4 \end{cases}, \quad (1.1)$$

meaning that two interacting large-scale mother waves (1 and 3) can give birth to a

† Email address for correspondence: felicien.bonnefoy@ec-nantes.fr

smaller-scale daughter one (4). Hereafter, we will focus only on surface gravity waves in deep-water of linear dispersion relation

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|}. \quad (1.2)$$

Four-wave interactions studies started in the early theoretical works of Phillips (1960) and Longuet-Higgins (1962). Surprisingly, there exists only few experiments specifically devoted to study such resonant wave interactions between water waves. Longuet-Higgins & Smith (1966) and McGoldrick *et al.* (1966) were the first to observe the generation a daughter wave by wave interactions in the degenerated case. They notably evidenced a linear growth rate of the daughter wave, at short propagation distance, as predicted theoretically (Longuet-Higgins 1962). These pioneer works were restricted to perpendicular mother waves with fixed and strong wave steepness ($ka=0.1$ with a the wave amplitude) within a relatively small basin (3 m). In the same perpendicular configuration, Tomita (1989) confirmed the daughter growth rate to greater distances within a larger basin (54 m), still for fixed, but lower, mother-wave steepness ($ka < 0.05$). He also conducted slightly off-resonance experiments (wavenumber a few % apart from the resonance). In all those experiments, three degenerated waves of the interacting quartet are generated mechanically (mother waves) and the fourth one (daughter wave) is growing due to four-wave interaction. Finally, the non-degenerated case was conducted recently to observe finite amplitude effects on the resonance condition leading to persistent wave patterns (Hammack *et al.* 2005; Liu *et al.* 2015). In Liu *et al.* (2015), an experimental investigation of steady-state resonant waves is carried out for short-crested waves. A nonlinear steady-state quartet is obtained theoretically in resonance condition by means of the homotopy analysis method. This quartet is then mechanically generated and the steady regime is indeed observed along the propagation in the basin. These experiments confirm the existence of steady-state resonant waves. In these experiments of Liu *et al.* (2015), the generated wavefield consists of the four waves involved in the quartet plus some required higher order waves and therefore no daughter wave is expected in this case. More recently, Waseda *et al.* (2015) investigated experimentally the case of resonant interactions in the presence of an underwater current. Most of these observations were supported by a dynamic model for nonlinear wave interactions (Zakharov 1968; Krasitskii 1994). Note that another type of four-wave interactions involving collinear waves was extensively studied experimentally in the case of modulational instability (Benjamin-Feir instability) and focused on the growth of side-band satellites (Tulin & Waseda 1999; Lake & Yuen 1977; Su *et al.* 1982; Shemer & Chamesse 1999). Such an instability is not observable in our configuration.

Here, we performed experiments to study resonant interactions between two oblique surface gravity waves in a large basin in the degenerated case. Like Longuet-Higgins & Smith (1966); McGoldrick *et al.* (1966); Tomita (1989) we generate three mother waves of a resonant quartet and we observe the growth of the fourth wave, the daughter wave. For the first time however, our experiments are carried out with mother waves crossing with an acute angle instead of perpendicular mother waves. The mother-wave frequency ratio, their interaction angle and steepnesses are control parameters. We fully characterized the generation of a daughter wave for resonance conditions (growth rate, resonance response curve with angle, and phase locking between resonant waves), as well as for out-of-resonance conditions (detuning factor). All our measurements are found in quantitative agreement with four-wave interaction theory with no fitting parameter, provided that the mother-wave steepnesses are small enough ($ka < 0.1$). We also provide theoretical explanations of the phase-locking mechanism and the off-resonance detuning factor from the dynamical equations of Zakharov (1968). The article is organized as

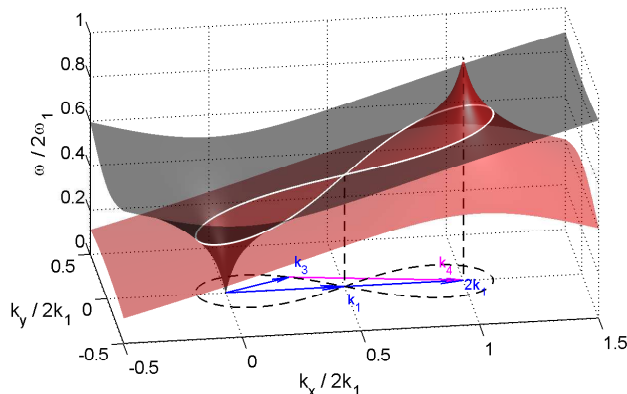


FIGURE 1. Solutions for four-wave resonances of surface gravity waves in the degenerated case of conditions (1.1). The dark-gray surface corresponds to $\omega(\mathbf{k}_3)$, *i. e.* equation (1.2) with $\mathbf{k}_3 = (k_x, k_y)$ and the red (light-gray) surface to the difference $2\omega(\mathbf{k}_1) - \omega(2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)$ for a given \mathbf{k}_1 . Resonance conditions (1.1) are located on the intersection of both surfaces (white solid line). Dashed line at the bottom of the axes corresponds to the projection of the white line. Example vectors are given for $f_1 = 0.9$ Hz, $f_3 = 0.714$ Hz and $\theta = \theta_m = 25^\circ$.

follows. We first recall the resonant interaction theory, a perturbative approach only valid for short times (Phillips 1960; Longuet-Higgins 1962), and then we present the main predictions of the dynamical equations. Details of the derivation are given in a supplementary material. We introduce the experimental set up, report the experimental results for resonant conditions, and for out-of-resonance conditions, before drawing our conclusions.

2. Perturbation approach of the resonant interaction theory

Phillips (1960) and Longuet-Higgins (1962) have investigated four-wave degenerated resonant solutions of (1.1) for deep-water waves. A 3D representation of the solutions for a given wave vector \mathbf{k}_1 is shown in figure 1 (see Aubourg & Mordant (2015) for gravity-capillary waves). The dashed black line is exactly the classical figure-of-eight given by Phillips (1960). The angle between a pair \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_3 on the figure of eight is noted θ . The figure of eight is symmetric with respect to the \mathbf{k}_1 axis and either the frequency ratio $r = \omega_1/\omega_3$ or the angle θ may serve as a unique parameter to describe the eight. A typical example quartet is drawn in blue vectors for the mother waves and magenta for the daughter wave; it corresponds to maximal growth rate for $r = r_m = 1.258$.

Longuet-Higgins (1962) studied theoretically the degenerated resonance in a perturbation approach considering that the mother-wave amplitudes are unaffected by the growth of the daughter wave. Longuet-Higgins (1962) showed that the daughter-wave amplitude at resonance a_4^{res} follows

$$a_4^{res} = \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(r), \quad (2.1)$$

where ε_i are the steepnesses defined by $\varepsilon_i = k_i a_i$, a_i the wave amplitude, d is the distance from the wavemaker along the direction of the daughter wave and G a theoretical growth rate depending on the frequency ratio $r = \omega_1/\omega_3$. Note that the resonance conditions (1.1) in deep water provide for each r a unique angle θ ; G may then be defined as a function of r or θ via $r(\theta)$. The resonant daughter wave is expected to grow linearly with distance and equation (2.1) remains valid as long as $a_4 \ll a_1$ and a_3 . The growth rate

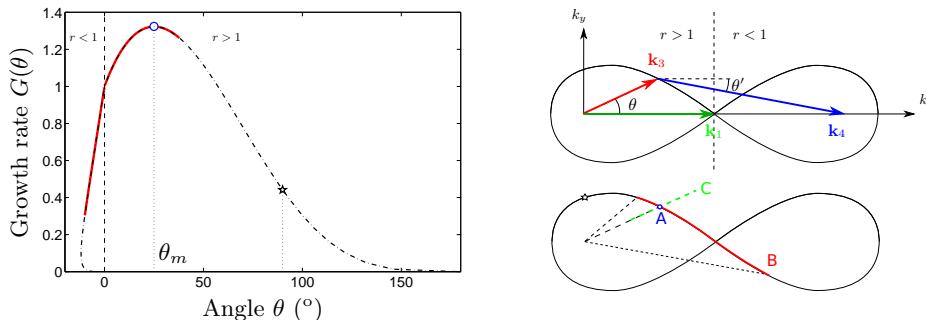


FIGURE 2. Left: theoretical growth-rate $G(\theta)$ of the daughter wave for degenerated case (dashed lines) and experimental tests studied in this paper: set A (blue circle), set B (red solid thick line) and experiments in litterature (black star). Top right: figure of eight with wave vectors. Bottom right: location of the experimental tests studied in this paper: resonant experiments: same convention as in left figure with letters A and B, off-resonance experiments: set C (green dashed line).

G is shown in figure 2, left, as a function of the angle θ . For clarity, we have chosen positive angles for $r > 1$ and negative ones for $r < 1$. The growth rate is maximum for $\theta = \theta_m = 25^\circ$ ($r = r_m = 1.258$); we locate our experimental work around this angle θ_m to obtain a significant daughter-wave amplitude; the angle θ ranges from -10° to $+40^\circ$ in our experiments. The black star on the graph of figure 2 identifies the parameters used for the experiments of Longuet-Higgins & Smith (1966), McGoldrick *et al.* (1966) and Tomita (1989) which were all performed at $\theta = 90^\circ$.

In Longuet-Higgins (1962), we can infer from the sine function describing the daughter wave and the cosine functions describing the mother waves that the phase of the daughter wave is locked to $-\pi/2$ with respect to the mother waves.

For out-of-resonance mother waves, Longuet-Higgins (1962) assumes that the daughter-wave resonant growth rate is modified by a factor $\sin(\Delta kd)/\Delta kd$, which was confirmed by latter experiments (Longuet-Higgins & Smith 1966; McGoldrick *et al.* 1966), Δk being the wavenumber mismatch in resonance conditions (1.1). The Hamiltonian formulation given below provides a simple explanation for such a factor.

3. Hamiltonian formulation of the resonant interaction theory

Here, we use the framework of the approximate Hamiltonian theory of Zakharov (1968) with the formalism from Janssen (2009) in order to explain the off-resonance mismatch factor. The details of the derivation are left to the supplementary material in Bonnefoy *et al.* (2015). We apply the Hamiltonian theory to a resonant degenerated interaction with two mother waves (1 and 3), present initially, and a daughter wave (4) which grows in time. The wave action amplitude is $B(\mathbf{k}, t) = B_1(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + B_3(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3) + B_4(t)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_4)$ with the resonance condition $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = \mathbf{0}$ and the linear frequency mismatch or detuning is $\Delta\omega = 2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4$. The Zakharov equation leads to the following evolution equation for the wave action amplitudes $B_i(t)$ of the degenerated quartet

$$i\partial_t B_1 = (\Omega_1 - \omega_1)B_1 + 2T_{1134} \exp(i\Delta\omega t) B_1^* B_3 B_4, \quad (3.1a)$$

$$i\partial_t B_3 = (\Omega_3 - \omega_3)B_3 + T_{1134} \exp(-i\Delta\omega t) B_1^2 B_4^*, \quad (3.1b)$$

$$i\partial_t B_4 = (\Omega_4 - \omega_4)B_4 + T_{1134} \exp(-i\Delta\omega t) B_1^2 B_3^*, \quad (3.1c)$$

The interaction coefficients $T_{1234} = T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ are the kernels given in Krasitskii (1994) or Janssen (2009). Nonlinear frequencies Ω_i satisfy the following nonlinear dispersion relations

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1 + T_{1111}|B_1|^2 + 2T_{1313}|B_3|^2 + 2T_{1414}|B_4|^2, \\ \Omega_3 &= \omega_3 + 2T_{1313}|B_1|^2 + T_{3333}|B_3|^2 + 2T_{3434}|B_4|^2, \\ \Omega_4 &= \omega_4 + 2T_{1414}|B_1|^2 + 2T_{3434}|B_3|^2 + T_{4444}|B_4|^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

In the early stage of the resonant interaction or for a non-resonant interaction, the daughter-wave amplitude is assumed to be negligible with respect to the mother-wave amplitudes. Equations (3.1a) and (3.1b) give constant magnitude and slowly evolving phase for the mother-waves while equation (3.1c) admits the following solution

$$B_4 = -i T_{1134} B_{10}^2 B_{30}^* \frac{\sin(\Delta\Omega t/2)}{\Delta\Omega/2} \exp(-i(\Omega_4 - \omega_4 + \Delta\Omega/2)t). \quad (3.3)$$

where the subindex 0 denotes the initial value and the total detuning is $\Delta\Omega = 2\Omega_1 - \Omega_3 - \Omega_4$. Derivation of this solution is straightforward and left to the supplementary material (Bonney *et al.* 2015). Converting to wave amplitude by means of the relation $a_i = \sqrt{2k_i/\omega_i} B_i$, we can infer the following wave solutions.

At short time when $|a_4| \ll |a_{10}|, |a_{30}|$, we obtain constant mother amplitudes $a_i(t) = a_{i0}$ (subindex 0 means initial value). The daughter-wave amplitude and phase are

$$|a_4| = T_{1134} \frac{\omega_1}{2k_1^3} \sqrt{\frac{\omega_3 k_4}{\omega_4 k_3^3}} \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 \left| \frac{\sin(\Delta\Omega t/2)}{\Delta\Omega/2} \right|, \quad (3.4a)$$

$$\arg a_4 = -\frac{\pi}{2} + 2 \arg a_{10} - \arg a_{30} - (\Omega_4 - \omega_4 + \Delta\Omega/2)t, \quad (3.4b)$$

where the steepness is defined by its initial value $\varepsilon_i = k_i |a_{i0}|$. Equation (3.4a) provides the evolution of the daughter-wave amplitude while equation (3.4b) gives the nonlinear evolution of its phase.

At resonance ($\Delta\omega = 0$) and at short time ($\Delta\Omega t \ll 1$), we have $\sin(\Delta\Omega t/2)/(\Delta\Omega/2) \simeq t$. Equation (3.4a) now becomes $|a_4^{res}| = T_{1134} \omega_1 \sqrt{\omega_3 k_4}/(2k_1^3 \sqrt{\omega_4 k_3^3}) \varepsilon_{10}^2 \varepsilon_{30} t$ which corresponds to the same results as in Longuet-Higgins (1962). Equation (3.4b) shows that the daughter wave phase is phase-locked to $\arg a_{40} = -\pi/2 + 2 \arg a_{10} - \arg a_{30}$.

In the case of mechanically generated mother waves, the daughter-wave frequency follows from exact resonance condition $\omega_4 = 2\omega_1 - \omega_3$. It is necessary to replace time t in equations (3.4) by d/c_{g4} where c_{g4} is the group velocity of the daughter wave and d the distance in the daughter-wave direction. All the following results are valid in the steady regime between the wavemaker and the daughter-wave front. At resonance, the theoretical amplitude of the resonant wave along the basin is the same as in equation (2.1) (the link between G and T_{1134} is given in the supplementary material).

We consider now an off-resonance degenerated quartet with a linear frequency detuning $\Delta\omega \neq 0$. At the early stage of the interaction when the daughter amplitude is small compared to the mother ones, expression (3.4a) shows that the daughter amplitude evolves as a sine function. We may rewrite equation (3.4a) as $|a_4| = |a_4^{res}| \text{sinc} \Delta\Omega t/2$. Note that this mismatch factor involves the total detuning $\Delta\Omega$ which consists of both linear and nonlinear components. At longer time, the phase mismatch will change from its initial $\Delta\omega$ value due to nonlinear dispersion. For off-resonant mechanically generated mother waves, the direction θ_4 of the daughter wavenumber \mathbf{k}_4 is yet unknown; the condition for wavenumbers is not fulfilled and a wavevector mismatch exists, $\Delta\mathbf{k} = 2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4$. Although the direction of the daughter wave is not specified, we assume that the fastest growing daughter wave is the one with minimal detuning. In other words, the daughter

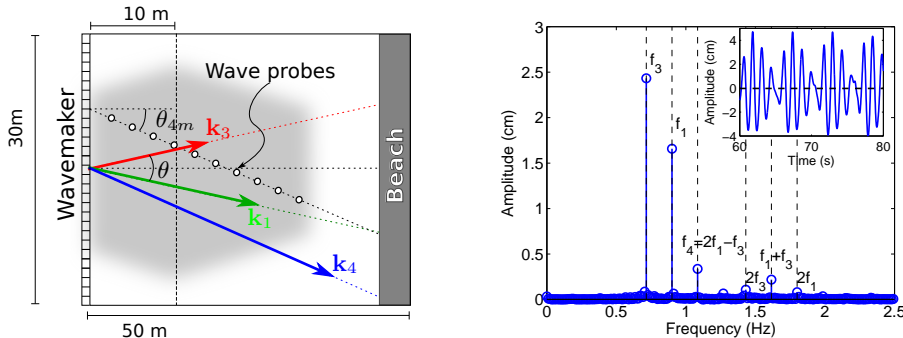


FIGURE 3. Left: Wave basin showing the homogeneous zone (shaded area), the wave probes (circles) and the wave vectors \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_3 and \mathbf{k}_4 for the maximum growth rate case (arrows resp. in green, red and blue), right: Frequency spectrum of wave height $a(t)$ recorded at $d = 21.5$ m. Vertical dashed lines correspond to frequencies: f_3 , f_1 , f_4 , $2f_3$, $f_1 + f_3$, and $2f_1$. Inset: Temporal evolution of the wave height, $a(t)$, dashed line is $\langle a \rangle_t \simeq 0$. Wave conditions $r = r_m$, $\theta = \theta_m$ and $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05$.

wave propagates along the direction of $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$ and the corresponding mismatch is now $\Delta k = |2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - k(2\omega_1 - \omega_3)$. From equation (3.4a), the off-resonance amplitude of the daughter wave is given by the same expression as in Longuet-Higgins (1962)

$$a_4 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(r, \theta) \left| \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta k d}{\frac{1}{2} \Delta k d} \right| = a_4^{res} \left| \text{sinc} \frac{\Delta k d}{2} \right|. \quad (3.5)$$

Note that the nonlinear detuning terms have been omitted here for clarity.

4. Experimental setup

The experiments presented here are designed to test the resonance theory for wave directions different from the perpendicular case studied in the 60s and by Tomita (1989). We mechanically generate bichromatic waves (mother waves 1 and 3) in a rectangular wave basin and observe the birth of the daughter wave of frequency $2\omega_1 - \omega_3$ due to resonant interaction (see the supplementary movie available online at doi: 10.1017/jfm..). The wave basin at Ecole Centrale de Nantes has dimensions 50 m \times 30 m \times 5 m and its wavemaker consists of independent 48 flaps that are hinged 2.8 m below the free surface. Figure 3, left, shows a top view of the setup. In order to avoid spurious reflections on the side-walls, the motion of the segmented wavemaker is controlled by means of the Dalrymple method (Dalrymple 1989). The Dalrymple method aims at generating the target wave field at a distance $X_d = 10$ m from the wavemaker and yields a quasi-uniform wave field from the wavemaker up to 25 m (see the grey zone of figure 3); this is crucial for these interaction experiments.

The input parameters to the wavemaker are mother-wave frequency (f_1 and f_3), steepness (or amplitude a_1 or a_3) and direction (θ_1 and θ_3 with respect to the basin main axis). The daughter wave direction is defined as θ_4 in the wave basin. Frequencies for the mother waves are chosen to fit the basin capacities: fixed $f_1 = 0.9$ Hz (wavelength $\lambda_1 \simeq 2$ m) and varied $f_3 = f_1/r$ with $r = 0.8$ to 1.6. The corresponding wavelengths λ_3 ranged from 1.3 to 4 m. The angle $\theta = \theta_3 - \theta_1$ between mother waves 1 and 3 was varied between -10 and 40° with a focus at $\theta_m = 25^\circ$ where the maximum growth rate of the daughter wave occurs ($r_m = 1.258$, see figure 2). In this case, we have $\theta_4 = \theta_{4m} = -23.1^\circ$.

Three sets of experiments are presented in the following, two at resonance and one out-of-resonance. In the first set of experiments, (set A correspond to the point A in figure 2

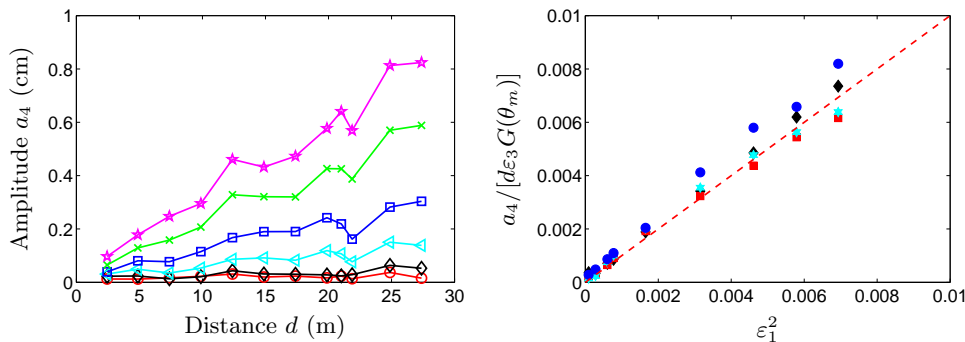


FIGURE 4. Amplitude of the resonant wave a_4 for $\epsilon_3 = 0.05$ and $r = r_m$. Left: amplitude a_4 versus distance, d , for different $\epsilon_1 \times 10^3 = 10, 17, 28, 41, 56, 68$ (from bottom to top). Right: rescaled amplitude of the resonant wave $a_4/[d\epsilon_3 G(\theta_m)]$ as a function of ϵ_1^2 for different distances $d = 9.9$ (\blacklozenge), 14.9 (\blacksquare), 19.9 ($*$), and 24.9 (\bullet) m. The dashed line of unity slope is expected from equation (2.1).

right), the scaling of the daughter-wave steepness ϵ_4 is tested by varying $\epsilon_1 \in [0.01; 0.1]$ at the resonance condition with maximum growth rate (that is $r = r_m$) and for fixed $\epsilon_3 = 0.05$. In set B, the figure-of-eight is tested in the range $\theta \in [-10^\circ; 40^\circ]$, for fixed steepnesses $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.07$. This corresponds to the red line on the figure of eight in figure 2, right. Finally, in set C, we study out-of-resonance conditions by fixing $f_1 = 0.9$ Hz and $\theta = \theta_m$ but changing k_3 by varying $r \in [1.1; 1.6]$ around r_m , again with fixed steepnesses $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0.05$. This corresponds to the dashed green line in figure 2, right.

For cases A and C, wave directions in the basin are made symmetrical $\theta_1 = -\theta_m/2$ and $\theta_3 = \theta_m/2$ to maximize the uniformity of the wave field. The direction of the daughter wave is $\theta_{4m} = -23.1^\circ$ which corresponds to these cases A and C with maximum growth rate when $\theta = \theta_m$. A linear frame supporting an array of twelve resistive wave probes is setup in the direction θ_{4m} (see figure 3, left). The distance between two successive probes is about 2 m. In all experiments, this linear array of wave probes is indeed aligned along the direction of the daughter wave $\theta_{4m} = -23.1^\circ$. The distance d to the wavemaker and measured along the direction of the daughter wave is ranging from $d = 2.5$ to 25 m.

For case B, the directions of the mother waves θ_1 and θ_3 were chosen in such a way that the target angle θ is obtained and that the daughter wave is aligned with the probe array.

The sampling frequency is 100 Hz. Wave heights were recorded during about 100 s which corresponds to steady regime of more than 50 wave periods. Typical amplitudes are $a_{1,3} \simeq$ few cm for mother waves and $a_4 \simeq$ few mm for daughter waves.

5. Resonant wave conditions

We report here our results for resonant degenerated quartets near maximum amplification (case A). A typical example of a temporal evolution of wave elevation $a(t)$ recorded by a probe is shown in the inset of figure 3, right. From the time-series measured at the wave probes, we select a steady-state window after the wave front passed the probe (time window is more than 50 periods long). A Discrete Fourier Transform is applied to the windowed signal with a standard FFT algorithm (frequency resolution is below 20 mHz). The main figure 3, right, shows the corresponding amplitude spectrum for case A. The two mother waves were visible at frequency f_1 and f_3 . The peak at frequency $f_4 = 2f_1 - f_3$ confirms the existence of the daughter wave, but, as expected, its ampli-

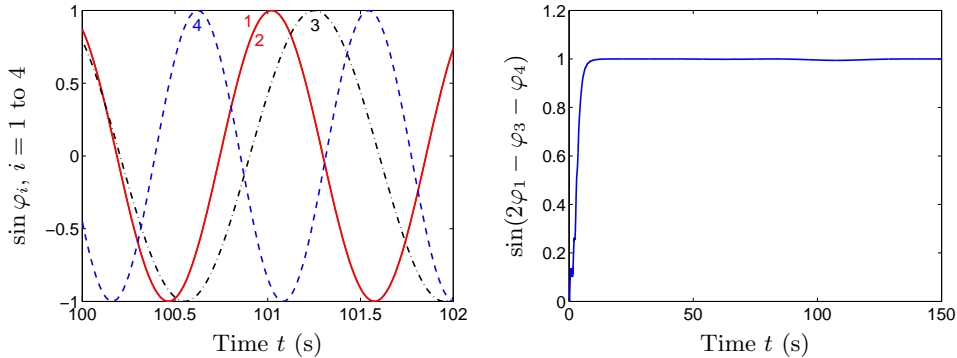


FIGURE 5. Left: Temporal evolution of individual phase $\varphi_i(t) \equiv \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_p - \omega_i t + \varphi_{i0}$ of each wave $i = 1$ (—), 3 (.-), and 4 (---). Right: Temporal evolution of the sine of the interaction phase $\varphi(t) = 2\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_4$. At resonance, the latter reduces to $2\varphi_{10} - \varphi_{30} - \varphi_{40}$ which is constant (phase-locking) equal to $\pi/2$ during the experiment. Conditions $r = r_m$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.05$ at distance $d = 21.5$ m.

tude is smaller than the mother-wave ones. This is a first evidence of a daughter wave generated by resonant interaction. Note that harmonics at frequency $2f_3$, $f_1 + f_3$ and $2f_1$ are also visible, with amplitudes yet lower than that of the daughter wave. They are the signature of second order bound waves accompanying the mother waves. The harmonics at $3f_3$ and $2f_3 - f_1$ corresponding to the third order bound waves are barely visible.

Figure 4 left shows the daughter-wave amplitude a_4 as a function of distance d for different steepnesses. This amplitude is found to grow linearly with distance d as expected from equation (2.1) and to increase with the mother-wave steepness ε_1 . Note that the experiments when ε_1 is fixed and ε_3 is varied (not shown here) show that the daughter amplitude a_4 grow linearly with ε_3 as predicted. The rescaled daughter-wave amplitude $a_4/(\varepsilon_3 d G(\theta_m))$ is then shown in figure 4 (right) as a function of ε_1^2 at different distances d . A good quantitative agreement with the theoretical predictions of equation (2.1) is observed, with no fitting parameter.

For a given probe at the far end of the homogeneous zone, we separate the two mother waves and the daughter wave with appropriate bandpass filters around each component f_1 , f_3 and $2f_1 - f_3$. To wit, we compute the Hilbert transform of each component and we obtain the wave envelope $a_i(t)$ and instantaneous wave phase $\varphi_i(t) \equiv \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_p - \omega_i t + \varphi_{i0}$, where \mathbf{x}_p is the probe position. The phase of each wave $\varphi_i(t)$ is shown in the left of figure 5 and obviously changes with time. On the contrary, the interaction phase defined by $\varphi(t) = 2\varphi_1(t) - \varphi_3(t) - \varphi_4(t)$ is constant with time, as shown in figure 5, right. After the wave front has passed the probes, the interaction phase φ is locked at $\pi/2$. This phase-locking demonstrated by our experiments is in very good agreement with the phase-locking predicted by equation (3.4b) for short distance (*i. e.* $a_4 \ll a_1$ and a_3). The steepness is small during this experiment so the phase-locking is visible even on the most distant probes. This phase-locking is a second evidence of the generation of the daughter wave by resonant interactions.

The figure-of-eight is now investigated in the vicinity of maximum growth rate (see figure 2, left). In the dedicated experiments B, the mother-wave angle θ is varied in the range from -10° to 0° in the case $r < 1$ (or $f_3 > f_1$) and from 0° to $+40^\circ$ in the case $r > 1$. For each angle θ , the frequency f_3 is chosen so that \mathbf{k}_3 is located on the figure-of-eight (see figure 2, right) in order to fulfill the resonance conditions. Note that the correct choice of the directions θ_1 and θ_3 of the individual mother waves in the basin is a key point in obtaining significant results. The successful strategy is to ensure the

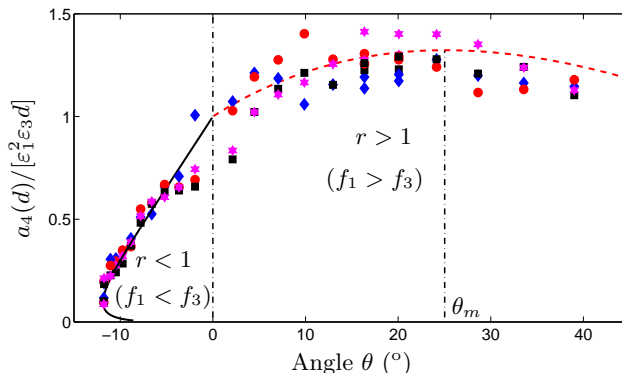


FIGURE 6. Rescaled amplitude $a_4/(\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d)$ vs. angle θ for different distances $d = 7.8$ (\blacklozenge), 9.9 (\bullet), 11.9 (\blacksquare), and 13.8 ($*$) m. Theoretical resonance curve $G[\theta(r)]$ for $r < 1$ (solid black line) and $r > 1$ (dashed red/gray line) from Longuet-Higgins (1962). $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.07$. $f_1 = 0.9$ Hz. $0.83 \leq r \equiv f_1/f_3 \leq 1.38$. $\theta_m = 25^\circ$.

direction of daughter wave 4 follows the line of the probes. Figure 6 shows the rescaled daughter-wave amplitude $a_4/(\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d)$ as a function of the angle θ for different distances d at fixed steepnesses ε_1 and ε_3 . This rescaling allows to measure experimentally the resonance response curve $G(\theta)$ predicted by Longuet-Higgins (1962). For all values of θ , a good quantitative agreement with the theoretical $G(\theta)$ is observed with no fitting parameter. This strongly extends previous experiments (Longuet-Higgins & Smith 1966; McGoldrick *et al.* 1966; Tomita 1989), which were carried out only for perpendicular conditions ($\theta = 90^\circ$).

6. Out-of-resonance experiments

Let us now turn to experiments with out-of-resonance conditions for mechanically generated mother waves. These conditions correspond to $2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4 = 0$ and $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 \equiv \Delta\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$. Although the direction of the daughter wave is not specified, we assume that the fastest growing daughter wave is the one with minimal detuning. In other words, the daughter wave propagates along the direction of $2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$ and the corresponding detuning is now $\Delta k \equiv |2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3| - k(2\omega_1 - \omega_3)$. We investigate experimentally this case (set C) near the location of the maximum growth rate at $r = r_m$. To wit, we kept the same angle $\theta = \theta_m$ and varied the frequency f_3 so that \mathbf{k}_3 can deviate from the figure of eight (see the green dashed line in Figure 2, right). Figure 7, left, shows the normalized daughter-wave amplitude defined by $a_4/(\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 d G(r_m))$ as a function of the detuning Δk for different distances d . We observe a decrease of the resonance bandwidth with increasing distance as expected from the sinc term in equation (3.5). We rescaled all these curves on a single curve as shown on the right in Fig. 7 by scaling the detuning with half the distance. We observe that all our measurements collapse on the sinc curve showing a good agreement with estimation from Longuet-Higgins (1962) or from equation (3.5) rigorously derived.

7. Conclusion

We have presented experiments on resonant interactions of surface gravity waves within the Ecole Centrale de Nantes wave basin (50 m long by 30 m large by 5 m deep) in a degenerated case. Bichromatic mother waves were generated mechanically by means of

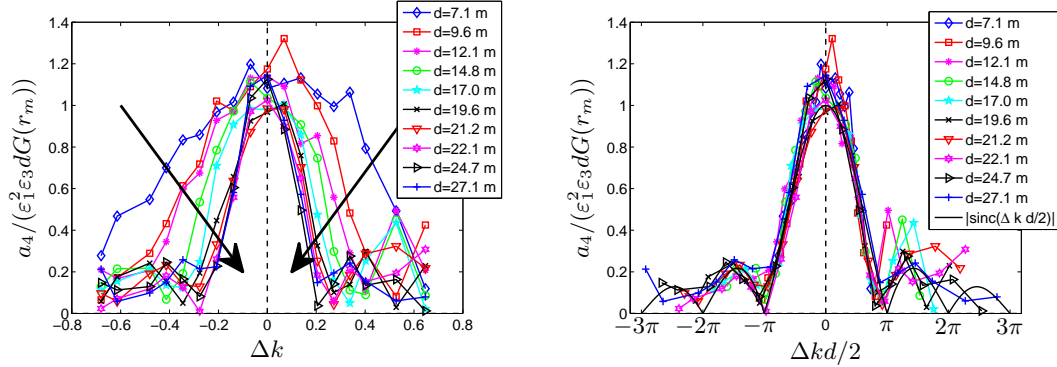


FIGURE 7. Rescaled amplitude $a_4/(\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 dG(r_m))$ measured at different distances d for out-of-resonance conditions ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.07$ and $f_1 = 0.9$ Hz.). Left: rescaled a_4 vs detuning Δk . Symbols corresponds to different $d = 7$ up to 27 m (see arrows). Right: rescaled a_4 vs normalized detuning $\Delta kd/2$. Solid line: absolute sinc function $|\text{sinc}(\Delta kd/2)|$ from Longuet-Higgins (1962) estimation or from equation (3.5).

specific control of oblique wave generation (Dalrymple method). The linear spatial growth of a resonant daughter wave was observed. The theoretical and experimental results presented here extend the pioneering work done in the 60s. Four-wave interaction theory is expressed in the framework of Hamiltonian dynamic theory to demonstrate a phase-locking mechanism for resonant quartets and estimate the daughter-wave amplitude in nearly-resonant quartets. All these theoretical results are supported by experimental observations of generated oblique mother waves: the observed linear spatial growth-rate of daughter wave scaling with mother-wave steepness; the phase-locking between resonant waves; the growth rate G satisfying the law historically found by Longuet-Higgins (1962); as well as the off-resonance response following the expected sinc curve.

The experiments presented in this article correspond to the early stage of resonance, that is when $k_4 \varepsilon^2 d < 1$. Indeed, for longer distance or greater steepness, we observed other common features of nonlinear interactions at resonance (not reported in this paper) such as the pumping of the mother wave by the resonant wave and the decrease of resonant wave growth. For off-resonance conditions and stronger wave steepness ($ka > 0.1$), departures from the approximate off-resonance equation (3.5) are observed: distortion of the response curve (sinc) by a nonlinear detuning. These nonlinear effects will be the subject of a further publication. The Hamiltonian theory may serve as an extension of the theory in Longuet-Higgins (1962) to higher steepness, either by analytical solutions (see e.g. Stiassnie & Shemer (2005)) or numerical solutions (Leblanc 2009). Finally, experiments with much greater steepness should allow quantification of the departure from weakly nonlinear theory (Zakharov equation). It would also provide a better understanding of wave turbulence experiments in strongly nonlinear regimes.

This work was supported by ANR Turbulon 12-BS04-0005. We thank C. Laroche and A. Levesque for their technical help. We also thank H. Houtani and T. Waseda for providing us the report Tomita (1989).

REFERENCES

AUBOURG, Q. & MORDANT, N. 2015 Nonlocal resonances in weak turbulence of gravity-capillary waves. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 144501.

BONNEFOY, F., HAUDIN, F., MICHEL, G., SEMIN, B., HUMBERT, T., AUMAÎTRE, S., BERHANU,

- M. & FALCON, E. 2015 Other supplementary material, observation of resonant interactions among gravity surface waves.
- BORDES, G., MOISY, F., DAUXOIS, T. & CORTET, P.-P. 2012 Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid. *Phys. of Fluids* **24** (1).
- DALRYMPLE, R. A. 1989 Directional wavemaker theory with sidewall reflection. *J. Hydr. Res.* **27** (1), 23–24.
- HAMMACK, J. L., HENDERSON, D. M. & SEGUR, H. 2005 Progressive waves with persistent two-dimensional surface patterns in deep water. *J. Fluid Mech.* **532**, 1–52.
- HAUDIN, F., CAZAUBIEL, A., DEIKE, L., JAMIN, T., FALCON, E. & BERHANU, M. 2016 Experimental study of three-wave interactions among capillary-gravity surface waves. *Phys. Rev. E* **93**, 043110.
- HENDERSON, D. M. & HAMMACK, J. L. 1987 Experiments on ripple instabilities. part 1. resonant triads. *J. Fluid Mech.* **184**, 15–41.
- JANSSEN, P. A. E. M. 2009 On some consequences of the canonical transformation in the hamiltonian theory of water waves. *J. Fluid Mech.* **637**, 1–44.
- JOUBAUD, S., MUNROE, J., ODIER, P. & DAUXOIS, T. 2012 Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids. *Phys. of Fluids* **24** (4).
- KRASITSKII, V. P. 1994 On reduced equations in the hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. *J. Fluid Mech.* **272**, 1 – 20.
- LAKE, B.M. & YUEN, H.C. 1977 A note on some nonlinear water-wave experiments and the comparison of data with theory. *J. Fluid Mech.* **83**, 75–81.
- LEBLANC, S. 2009 Stability of bichromatic gravity waves on deep water. *Eur. J. Mech. / B Fluids* **28** (5), 605–612.
- LIU, Z., XU, D. L., LI, J., PENG, T., ALSAEDI, A. & LIAO, S. J. 2015 On the existence of steady-state resonant waves in experiments. *J. Fluid Mech.* **763**, 1–23.
- LONGUET-HIGGINS, M. S. 1962 Resonant interactions between two trains of gravity waves. *J. Fluid Mech.* **12**, 321–32,
We have noticed a misprint in equation (6.4) in Longuet-Higgins (1962): the term $-(6 + \xi^2)^{1/2}$ should be replaced by $-\text{sgn}(\xi)(6 + \xi^2)^{1/2}$ where $\xi = (1 - r)/r$.
- LONGUET-HIGGINS, M. S. & SMITH, N. D. 1966 An experiment on third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.* **25**, 417–435.
- MARTIN, B. S., SIMMONS, W. & WUNSCH, C. 1972 The excitation of resonant triads by single internal waves. *J. Fluid Mech.* **53**, 17–44.
- MCGOLDRICK, L. F. 1970 An experiment on second-order capillary gravity resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.* **40**, 251–271.
- MCGOLDRICK, L. F., PHILLIPS, O. M., HUANG, N. E. & HODGSON, T. H. 1966 Measurements of third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.* **25**, 437–456.
- PHILLIPS, O. M. 1960 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. part I. the elementary interactions. *J. Fluid Mech.* **9**, 193–217.
- SHEMER, L. & CHAMESSE, M. 1999 Experiments on nonlinear gravitycapillary waves. *J. Fluid Mech.* **380**, 205–232.
- STIASSNIE, M. & SHEMER, L. 2005 On the interaction of four water-waves. *Wave Motion* **41** (4), 307 – 328.
- SU, M.-Y., BERGIN, M., MARLER, P. & MYRICK, R. 1982 Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains. *J. Fluid Mech.* **124**, 45–72.
- TOMITA, H. 1989 Theoretical and experimental investigations of interaction among deep-water gravity waves. *Report of Ship Res. Inst.* **26** (5), 251–350.
- TULIN, M. P. & WASEDA, T. 1999 Laboratory observations of wave group evolution, including breaking effects. *J. Fluid Mech.* **378**, 197–232.
- WASEDA, T., KINOSHITA, T., CAVALERI, L. & TOFFOLI, A. 2015 Third-order resonant wave interactions under the influence of background current fields. *J. Fluid Mech.* **784**, 51–73.
- ZAKHAROV, V. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **2**, 190–198.

Chapitre 6

Turbulence d'ondes et thermodynamique

When the surface of water is agitated by a storm, it is difficult to recognize in its tumultuous tossings, any semblance of order, law, or definite form, which the mind can embrace so as adequately to conceive and understand. Yet in all the madness of the wildest sea the careful observer may find some traces of method; amid the chaos of water he will observe some moving forms which he can group or individualize; he may distinguish some which are round and long, others that are high and sharp; he may observe those that are high gradually becoming acuminate and breaking with a foaming crest, and may notice that the motion of those which are small is short and quick, while the rising and falling of large elevations is long and slow. Some of the crests will advance with a great, others with a less velocity; and in all he will recognize a general form familiar to his mind as the form of the sea in agitation, and which at once distinguishes it from all other phenomena. [182]

John Scott Russell (1808 - 1882)

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous sortons de la problématique des parois pour poursuivre l'étude des interactions résonnantes entre ondes de surface : après avoir décrit les échanges d'énergie entre deux paquets d'ondes bien définis, nous nous intéressons aux propriétés statistiques d'un état permanent où un grand nombre d'ondes évoluent non linéairement. Pour les ondes de surface, l'application principale de ce régime appelé *turbulence d'ondes* est la description statistique de l'océan, mais la théorie sous-jacente peut être transposée à des situations très différentes comme des vibrations de plaques métalliques, de l'optique non linéaire ou encore des ondes de spin. Notre contribution a été de montrer expérimentalement que dans certains cas et pour certaines échelles spatiales et temporelles, un ensemble turbulent d'ondes peut être décrit comme s'il était à l'équilibre thermodynamique. S'agissant de systèmes fortement hors équilibre, cette propriété est remarquable. Avant de présenter ces résultats, il nous faut d'abord introduire la turbulence hydrodynamique puis la turbulence d'ondes.

6.1 Turbulence hydrodynamique

Un état turbulent est caractérisé par la coexistence de nombreuses échelles spatiales et temporelles dont les propriétés évoluent, pour la plupart d'entre elles, de manière chaotique. Les exemples les plus courants relèvent de l'hydrodynamique : l'écoulement de l'eau dans un fleuve, de l'air derrière un véhicule ou encore les vagues au milieu de l'océan semblent à première vue très délicats à décrire quantitativement. C'est en effet le cas, la complexité des structures mises en jeu rendant impossible la prévision des propriétés instantanées, telles que les champs de vitesse ou de pression. Cette situation rappelle les difficultés premières de la théorie cinétique des gaz, où la résolution des équations du mouvement pour l'ensemble des molécules n'est pas envisageable. Tirant les enseignements de cette discipline, nous pouvons espérer quantifier un état turbulent en considérant des grandeurs relatives à son comportement moyen, peut-être reliées entre elles comme le sont la pression et température d'un gaz *via* son équation d'état.

L'aide apportée par la physique statistique s'arrête cependant ici, son cadre d'étude étant limité aux systèmes à l'équilibre ou proche de celui-ci, où la connaissance des fonctions de partition permet de mener les calculs.

À l'inverse, les états turbulents sont violemment hors équilibre, étant associés à des flux d'énergie dus à la dissipation ainsi qu'à, s'il est présent, un forçage extérieur. Il est certes possible d'établir quelques résultats de physique statistique arbitrairement loin de l'équilibre, comme les théorèmes de fluctuations, mais ceux-ci ne sont pas pertinents pour les systèmes macroscopiques considérés ici, se limitant à démontrer l'irréversibilité des évolutions. Une autre approche est donc à développer¹.

L'avancée majeure dans ce domaine est indiscutablement due à Kolmogorov, qui quantifia des propriétés statistiques vérifiées par les écoulements turbulents à partir de considérations dimensionnelles et d'hypothèses sur les phénomènes mis en jeu. Publié en 1941, ce résultat et son approche physique restent encore aujourd'hui fondamentaux, seules de faibles corrections devant être appliquées pour décrire l'ensemble des expériences de turbulence hydrodynamique incompressible, homogène et isotrope (hypothèses de travail du modèle). Il fut en 1967 étendu aux écoulements bidimensionnels par Kraichnan, là encore à l'origine d'une révolution dans la manière de considérer les échanges d'énergie dans les milieux turbulents.

Décrivant remarquablement bien l'atmosphère et l'océan, il s'agit *a priori* de la théorie clef pour traiter des vagues à l'interface entre ces deux milieux, présentant elles-aussi une dynamique chaotique associée à de nombreuses échelles spatiales et temporelles. Il se trouve que transposer brutalement la méthode de Kolmogorov à un système d'ondes en interaction se solde par un échec. Une approche spécifique fut développée par Zakharov dans les années 1960 et permit de retrouver des résultats semblables à ceux de Kolmogorov, fournissant même des informations supplémentaires. Cependant, les hypothèses associées se trouvent aussi bien plus restrictives, leur pertinence pour la description de l'océan étant discutable. S'agissant de l'unique résultat quantitatif associé à ces systèmes, il demeure néanmoins un passage incontournable de leur étude.

Nous allons ici décrire successivement les approches de Kolmogorov et Kraichnan, les systèmes d'ondes en interaction étant considérés dans un second temps.

6.1.1 Approche de Kolmogorov

Bien que non transposable directement aux systèmes d'ondes en interaction, la description des échanges d'énergie ainsi que l'approche dimensionnelle développée par Kolmogorov reste très pertinente. Nous la présentons dans son contexte initial, cherchant à décrire de manière statistique un état stationnaire turbulent mettant en jeu un champ de vitesse tridimensionnel supposé incompressible et statistiquement homogène et isotrope. Ces résultats étant très classiques, aucune référence bibliographique ne sera proposée, n'importe quel ouvrage de mécanique des fluides les traitant.

Bilan de puissance et échelles spatiales

Considérons la situation suivante : un fluide newtonien contenu dans un volume L^3 est mis en mouvement par un objet de taille caractéristique L et de vitesse V suffisante pour atteindre un état turbulent stationnaire. On note respectivement ρ , η , ν , P et \vec{v} la masse volumique, les viscosités dynamique et cinématique et les champs de pression et vitesse. On suppose les vitesses faibles devant celle du son, ce qui autorise à considérer l'écoulement comme incompressible. Les équations régissant la dynamique du fluide sont alors

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} & (6.1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (6.2) \end{cases}$$

Adimensionner l'équation de Navier-Stokes avec les grandeurs caractéristiques du problème (L et V) fait apparaître le nombre de Reynolds Re comparant les termes inertiel et visqueux, dont l'expression est

$$Re = \frac{\rho L V}{\eta}. \quad (6.3)$$

L'expérience montre que les écoulements turbulents sont relatifs à des nombres de Reynolds toujours grands devant l'unité, et nous supposons donc $Re \gg 1$.

1. La turbulence 2D fait figure d'exception à ce développement : la localisation de l'énergie aux grandes échelles a été démontrée en considérant la mécanique statistique d'un nombre limité de modes à l'équilibre, cf. [183] pour une revue.

Dans ces régimes, la puissance moyenne transmise au fluide \mathcal{P} est d'origine inertielle et s'exprime comme le produit de la force de traînée exercée sur l'objet en mouvement ($F \sim \rho L^2 V^2$) par sa vitesse

$$\mathcal{P} \sim \rho L^2 V^3. \quad (6.4)$$

De même, la puissance moyenne \mathcal{P}'_L dissipée par viscosité à l'échelle dite *intégrale* L , où le fluide à une vitesse V imposée par le forçage, est

$$\mathcal{P}'_L \sim \int_{L^3} \left(\eta \frac{V}{L^2} \right) V d^3 \tau \sim \eta L V^2. \quad (6.5)$$

Les expressions des deux puissances \mathcal{P} et \mathcal{P}'_L semblent problématiques, seule l'une d'entre elles dépendant de la viscosité. Le rapport de ces deux termes met en évidence leur différence :

$$\frac{\mathcal{P}'_L}{\mathcal{P}} \sim \frac{\eta L V^2}{\rho L^2 V^3} \sim \frac{1}{Re} \ll 1. \quad (6.6)$$

Ainsi, dans un écoulement turbulent, la dissipation à l'échelle intégrale ne suffit pas à compenser l'injection d'énergie. Ces deux quantités devant être égales en régime stationnaire, il doit apparaître une forme plus efficace de dissipation. Seule la viscosité pouvant jouer ce rôle, elle doit œuvrer efficacement à une autre échelle, appelée *échelle de Kolmogorov* λ et en l'occurrence inférieure à l'échelle intégrale. La turbulence s'associe donc à un transfert d'énergie entre différentes échelles spatiales réalisé par l'intermédiaire du terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes, phénomène dit de « cascade » et schématisé figure 6.1. Cette cascade est de plus qualifiée de « directe » car transférant de l'énergie vers des échelles spatiales inférieures : en pratique, on observe la formation de tourbillons de plus en plus petits.

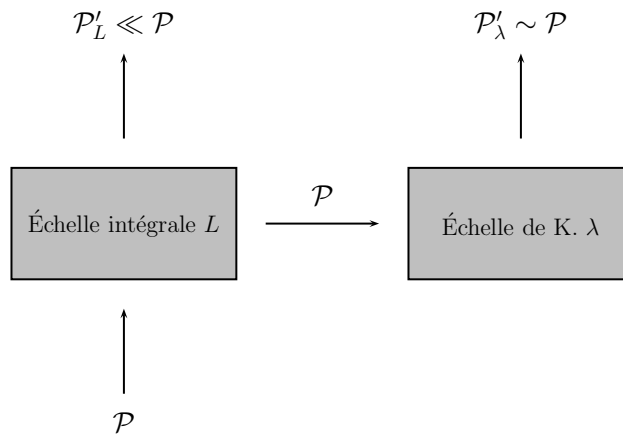


FIGURE 6.1 – Transferts d'énergie lors d'une cascade directe (K. = Kolmogorov)

Description de la cascade d'énergie

L'étape suivante consiste à étudier la gamme d'échelles spatiales dite « inertielle » intermédiaire entre les tailles L et λ , que nous supposons à présent très différentes ($\lambda \ll L$, ce qui sera vérifié ultérieurement). L'hypothèse clef de Kolmogorov est de supposer à ce niveau un comportement intensif : les petites échelles n'étant pas modifiées par la mise en contact du volume L^3 avec un système similaire de même taille et forçage, même si l'écoulement à l'échelle intégrale diffère notablement. Autrement dit, nous supposons les interactions non linéaires *locales*, ne transférant efficacement de l'énergie qu'entre structures de tailles semblables.

L'écoulement à une échelle $\lambda \ll \ell \ll L$ est alors caractérisé par :

1. L'échelle considérée ℓ .
2. La puissance par unité de volume qu'il doit transférer aux échelles inférieures \mathcal{P}/L^3 .
3. Sa vitesse caractéristique v_ℓ , définie rigoureusement par transformée de Fourier du champ de vitesse total.
4. La masse volumique du fluide ρ .

Paramètre	ϵ	ℓ	v_ℓ
Dimension	$L^2 \cdot T^{-3}$	L	$L \cdot T^{-1}$

TABLE 6.1 – Paramètres caractérisant l'écoulement à une échelle inertielle et dimensions associées

Insistons sur les grandeurs « oubliées » par le système à cette échelle :

1. La viscosité dynamique η . Ceci semble légitime, l'écoulement dissipant une puissance moyenne \mathcal{P}'_ℓ très faible comparée à celle qu'il transfère depuis les grandes échelles vers les petites².
2. L'échelle intégrale L et la vitesse associée V , aucun couplage direct n'étant efficace entre L et ℓ .

À ce niveau, l'analyse dimensionnelle couple la masse volumique et la puissance par unité de volume, ce qui se traduit conventionnellement par l'introduction du flux d'énergie par unité de masse ϵ ,

$$\epsilon = \frac{\mathcal{P}}{\rho L^3} \sim \frac{V^3}{L} \quad (6.7)$$

Les paramètres à considérer pour caractériser l'écoulement à une échelle ℓ ainsi que leur dimension sont reportés Tab. 6.1. Nous en déduisons une loi d'échelle devant être vérifiée par la vitesse v_ℓ ,

$$v_\ell \sim (\epsilon \ell)^{1/3} \sim V \left(\frac{\ell}{L} \right)^{1/3}. \quad (6.8)$$

Pour tester ces prédictions, on trace la densité spectrale d'énergie cinétique par unité de masse e_k en fonction du nombre d'onde $k = 2\pi/\ell$. L'unité de e_k étant $L^3 \cdot T^{-2}$, il vient

$$e_k \sim \ell v_\ell^2 \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (6.9)$$

La dépendance en $k^{-5/3}$ est le résultat fondamental de l'approche de Kolmogorov et reste très bien vérifiée expérimentalement³. Nous avons pour caractériser cette échelle supposé que la puissance moyenne dissipée par viscosité reste très faible devant celle transférée, ce qui se traduit par un critère quantitatif :

$$\frac{\mathcal{P}'_\ell}{\mathcal{P}} \sim \frac{\eta L^3 (v_\ell^2 \ell^{-2})}{\rho L^2 V^3} \sim \frac{\eta}{\rho \ell v_\ell} \sim \frac{1}{Re_\ell} \ll 1, \quad (6.10)$$

où Re_ℓ est défini comme le nombre de Reynolds relatif à l'échelle ℓ . L'échelle de Kolmogorov λ , signe de la fin de la cascade, est alors simplement déterminée *via* $Re_\lambda \sim 1$,

$$\lambda \sim L Re^{-3/4} \quad (6.11)$$

Cette dépendance forte vis-à-vis du nombre de Reynolds permet d'observer en pratique une large gamme inertielle. Une illustration de ces résultats est représentée Fig. 6.2.

Flux d'énergie dissipé sur la gamme inertielle

On pourrait opposer l'argument suivant à l'approche de Kolmogorov : même si la puissance dissipée est à chaque échelle inférieure à \mathcal{P} , la somme de tous ces termes peut devenir conséquente bien avant l'échelle de Kolmogorov. Nous vérifions que ce n'est pas le cas en évaluant la puissance dissipée sur l'ensemble du spectre entre deux nombres d'onde k_1 et k_2 :

$$\mathcal{P}'_{k_1 \rightarrow k_2} \sim \int_{k_1}^{k_2} (e_k \rho L^3) \times (\nu k^2) dk \sim \nu \epsilon^{2/3} \rho L^3 (k_2^{4/3} - k_1^{4/3}). \quad (6.12)$$

2. Il peut être éclairant de considérer la viscosité comme un phénomène conservant l'énergie mais l'échangeant de manière non locale, en l'occurrence entre échelles mésoscopiques et microscopiques pour la turbulence.

3. Des corrections dites d'intermittence doivent quelquefois être considérées, mais restent dans la majorité des cas très faibles.

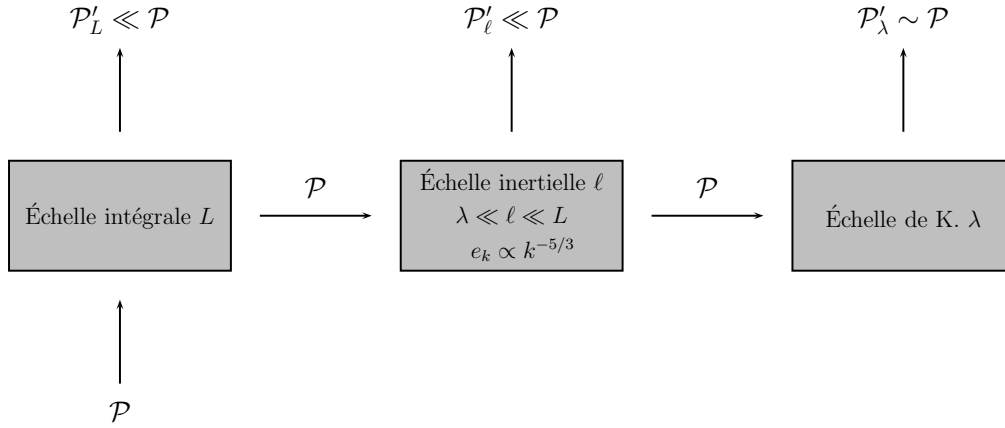


FIGURE 6.2 – Approche de Kolmogorov de la cascade d'énergie

Ceci nous permet de borner supérieurement l'énergie dissipée entre l'échelle intégrale et un nombre d'onde quelconque k de la zone inertielle par

$$\mathcal{P}'_{0 \rightarrow k} \sim \nu \epsilon^{2/3} \rho L^3 k^{4/3}. \quad (6.13)$$

Comparons la puissance dissipée jusqu'à cette échelle k à celle injectée dans le système,

$$\frac{\mathcal{P}'_{0 \rightarrow k}}{\mathcal{P}} \sim \frac{\nu \epsilon^{2/3} \rho L^3 k^{4/3}}{\epsilon \rho L^3} \sim (k\lambda)^{4/3}. \quad (6.14)$$

Ainsi, la diminution du flux transporté par la cascade n'est notable que proche de l'échelle de Kolmogorov.

6.1.2 Contribution de Kraichnan

L'étude précédente s'applique avec succès à la majorité des systèmes de mécanique des fluides. Il arrive cependant que des effets géométriques ou l'action de forces extérieures contraignent fortement la dynamique et brise l'isotropie du champ de vitesse. La limite des écoulements purement bidimensionnels est en cela intéressante car mène à des résultats profondément différents du cas précédent. Ce modèle est par exemple plus pertinent que celui de Kolmogorov pour décrire certaines gammes d'écoulements atmosphériques, des films de savon ou encore occasionnellement en magnétohydrodynamique. Ces travaux sont associés aux noms de Fjørtoft et Kraichnan.

Insuffisance du modèle précédent

La terminologie n'étant pas fixée, nous définissons un écoulement bidimensionnel par un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, t)\vec{e}_y$. La vorticité $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ suit alors l'équation suivante,

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \quad (6.15)$$

où \vec{f} est une force volumique mettant le fluide en mouvement. Avec un peu d'analyse vectorielle, on montre que de nouvelles quantités sont conservées dans les gammes inertielles. La principale est l'enstrophie, définie par

$$Z = \frac{1}{2} \int_{L^3} \vec{\omega}^2 d^3\tau. \quad (6.16)$$

Ce résultat est propre aux écoulements bidimensionnels et n'est pas vérifié en présence d'un forçage ou de viscosité, respectivement associés à une production et une dissipation d'enstrophie. Nous pouvons, à l'image du traitement réalisé pour l'énergie dans la partie précédente, quantifier les échanges d'enstrophie. Commençons par nous demander si le profil turbulent déterminé précédemment constitue une solution acceptable au problème.

- **À l'échelle intégrale**

Le forçage cause un flux d'enstrophie $\xi \sim V^3$ et l'écoulement à l'échelle intégrale le dissipe à un taux

$$\xi'_L \sim \frac{\nu V^2}{L} \sim \frac{\xi}{Re}. \quad (6.17)$$

Comme l'énergie, l'enstrophie doit être dissipée à une autre échelle pour qu'un régime stationnaire existe.

- **Aux échelles inertielles**

Aucun forçage n'étant appliqué à ce niveau, il n'y a pas de production d'enstrophie. La viscosité, quant à elle, est à l'origine d'une dissipation ξ'_ℓ égale à

$$\xi'_\ell \sim \frac{\nu L^3 v_\ell^2}{\ell^4}. \quad (6.18)$$

Comparons cette dissipation à celle injectée par le forçage, en supposant valide l'expression de v_ℓ (6.8),

$$\frac{\xi'_\ell}{\xi} \sim \frac{\nu L^3 v_\ell^2}{\ell^4} \times \frac{1}{V^3} \sim \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 \times \frac{1}{Re_\ell} \quad (6.19)$$

Nous rencontrons un problème, la dissipation d'enstrophie à l'échelle de Kolmogorov dépassant largement son injection, étant donné $\lambda \ll L$ et $Re_\lambda \sim 1$. Le profil de vitesse issu de la partie précédente doit donc être rejeté.

Cascade directe dominée par l'enstrophie

La gamme inertielle directe ne pouvant pas être caractérisée par le transfert d'énergie, nous allons étudier ce qu'il adviendrait si elle était plutôt décrite par le flux d'enstrophie ξ . Pour cela, nous cherchons v_ℓ non pas comme fonction de ℓ et de ϵ , mais de ℓ et de la densité de flux d'enstrophie ξ/L^3 ,

$$v_\ell \sim \left(\frac{\ell}{L}\right) \xi^{1/3} \sim V \times \left(\frac{\ell}{L}\right). \quad (6.20)$$

Nous déterminons ainsi une loi d'échelle très différente de celle de Kolmogorov (6.8), modifiant l'exposant du spectre d'énergie cinétique par unité de masse e_k de $k^{-5/3}$ à k^{-3} , comme le montre l'expression

$$e_k \sim \ell v_\ell^2 \sim \left(\frac{\xi}{L^3}\right)^{2/3} k^{-3} \quad (6.21)$$

Nous pouvons alors reprendre l'expression (6.19) afin de déterminer dans le cas présent la fin de la cascade :

$$\frac{\xi'_\ell}{\xi} \sim \frac{\nu L^3 v_\ell^2}{\ell^4} \times \frac{1}{V^3} \sim \frac{\nu L}{V \ell^2} \sim \left(\frac{L}{\ell}\right) \frac{1}{Re_\ell}. \quad (6.22)$$

L'échelle de Kolmogorov est ici trouvée en égalant les enstrophies dissipée et injectée, et il vient

$$\lambda_{2D} \sim L Re^{-1/2} \quad (6.23)$$

Notons qu'à cette échelle, $Re_{\lambda_{2D}} \sim \sqrt{Re} \gg 1$: un régime visqueux n'est toujours pas atteint à la fin de la cascade. Reprenant l'expression (6.10) ainsi que la loi d'échelle pour v_ℓ (6.20), nous évaluons

$$\frac{\mathcal{P}'_{\lambda_{2D}}}{\mathcal{P}} \sim Re^{-1/2} \ll 1. \quad (6.24)$$

La puissance dissipée reste donc, même aux plus petites échelles de la cascade, faible devant la puissance injectée. Nous avons réglé le problème de flux dissipatif supérieur à l'injection, mais au prix d'une perte de stationnarité se traduisant par une accumulation d'énergie à l'échelle intégrale! La situation est résumée Fig. 6.3.

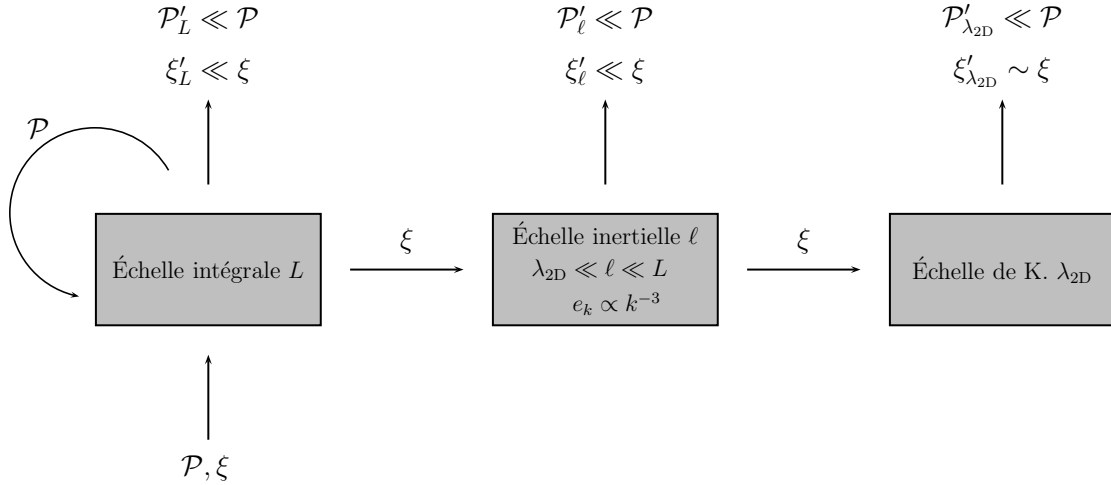


FIGURE 6.3 – Cascades en turbulence 2D : première tentative

Condensation et cascade inverse

Le régime précédent n'égalisant pas les flux d'énergie, il évolue nécessairement vers un autre état. Deux cas sont alors à distinguer.

1. L'échelle intégrale L correspond à la limite physique des parois

Dans ce cas, des non-linéarités plus importantes se développent, pouvant mener à un schéma d'interaction non local, à l'apparition de dissipation supplémentaire à l'échelle intégrale, à une adaptation du champ de vitesse réduisant la puissance injectée ou encore à des régimes intermittents. Nous n'étudierons pas cette limite.

2. L'échelle intégrale L n'est pas la plus grande accessible

Via des interactions non linéaires que nous supposons locales, un transfert d'énergie vers les grandes échelles est observé, où un phénomène dissipatif agit alors efficacement. La suite de cette étude se place dans ce cas dit de « cascade inverse » .

Nous faisons donc l'hypothèse de l'existence d'une large gamme d'échelles de longueur supérieures à celle correspondant au forçage, où des interactions non linéaires locales transfèrent un flux. L'enstrophie étant déjà équilibrée, l'énergie injectée cascade vers les grandes échelles où elle est alors dissipée (échelle \mathcal{L}), influençant l'écoulement aux échelles inertielles qu'elle traverse ($L \ll \ell \ll \mathcal{L}$). Ces échelles intermédiaires ℓ de la cascade inverse sont alors décrites par les lois relatives à la cascade directe d'énergie en turbulence 3D, à savoir

$$v_\ell \sim (\epsilon \ell)^{1/3}, \quad e_k \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (6.25)$$

Le problème majeur reste la dissipation. En ce plaçant dans ce régime inertiel, nous évaluons

$$\frac{\mathcal{P}'_\ell}{\mathcal{P}} \sim \frac{1}{Re} (L/\ell)^{2/3}, \quad \frac{\xi'_\ell}{\xi} \sim \frac{1}{Re} (L/\ell)^{10/3}. \quad (6.26)$$

Ainsi, lorsque $\ell > L$, ce phénomène dissipatif ne sera jamais dominant. Jusqu'à présent, l'effet de la viscosité a été considéré en volume, la puissance dissipée étant intensive. Cependant, les couches limites au niveau des parois entraînent localement une dissipation plus importante que dans le reste du système. Pour déterminer la puissance dissipée de cette manière \mathcal{P}_ℓ^S , nous imposons une relation linéaire avec le volume concerné, produit de la surface du système \mathcal{S} par l'épaisseur de la couche limite δ . En équilibrant les termes linéaire inertiel et visqueux de l'équation de Navier-Stokes, il vient $\delta \sim \sqrt{\nu \ell / v_\ell}$, et ainsi

$$\mathcal{P}_\ell^S \sim (\mathcal{S} \delta) \rho \frac{v_\ell^3}{\ell} \sim \mathcal{S} \rho v_\ell^{5/2} \sqrt{\frac{\nu}{\ell}}. \quad (6.27)$$

Nous pouvons déjà vérifier que cette nouvelle dissipation reste négligeable dans la cascade directe d'énstrophie,

$$\frac{\mathcal{P}_{\lambda_{2D}}^S}{\mathcal{P}_L^S} \sim \frac{1}{Re} \ll 1. \quad (6.28)$$

Qu'en est-il pour la cascade inverse ? Dans la gamme inertielle associée, l'expression de v_ℓ mène à

$$\frac{\mathcal{P}_\ell^S}{\mathcal{P}_L^S} \sim \left(\frac{\ell}{L}\right)^{1/3}. \quad (6.29)$$

Nous trouvons donc que la puissance dissipée est d'autant plus importante que la cascade inverse suit son cours, ce qui permet de déterminer la fin de la cascade en égalisant les flux d'énergie :

$$\frac{\mathcal{P}_L^S}{P} \sim \left(\frac{1}{\rho L^2 V^3}\right) \times \left(S\rho(\epsilon L)^{5/6} \sqrt{\frac{\nu}{L}}\right) \sim 1 \implies L \sim L \left(\frac{L^2}{S} \times \sqrt{Re}\right)^3. \quad (6.30)$$

Ainsi, un nombre de Reynolds intégral suffisamment grand mène à une cascade inverse étendue et rend pertinente la description des échelles inertielles intermédiaires. Une cascade inverse fournit donc une description satisfaisante des échanges d'énergie. Reste enfin à vérifier que cette dissipation supplémentaire ne perturbe pas les flux d'énstrophie. Notant ξ_ℓ^S le taux de dissipation associé, nous déterminons

$$\xi_\ell^S \sim (S\delta) \left(\frac{v_\ell}{\ell}\right)^3, \quad (6.31)$$

ce qui nous permet d'estimer successivement

$$\frac{\xi_L^S}{\xi} \sim \left[\left(\frac{S}{L^2}\right) \frac{1}{\sqrt{Re}}\right]^6, \quad \frac{\xi_L^S}{\xi} \sim \left(\frac{S}{L^2}\right) \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad \frac{\xi_{\lambda_{2D}}^S}{\xi} \sim \left(\frac{S}{L^2}\right) \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (6.32)$$

Nous vérifions que l'énstrophie est uniquement dissipée par viscosité en volume : ce modèle est donc cohérent.

Résumé des résultats sur les cascades en turbulence 2D

La turbulence bidimensionnelle est associée à la cascade de deux grandeurs, cf. Fig. 6.4.

- **L'énstrophie** : injectée à l'échelle du forçage, elle est intégralement⁴ dissipée par viscosité en volume aux petites échelles, le régime inertiel intermédiaire vérifiant $e_k \propto k^{-3}$.
- **L'énergie** : injectée à l'échelle du forçage, elle est intégralement dissipée par viscosité dans les couches limites aux grandes échelles, le régime inertiel intermédiaire vérifiant $e_k \propto k^{-5/3}$.

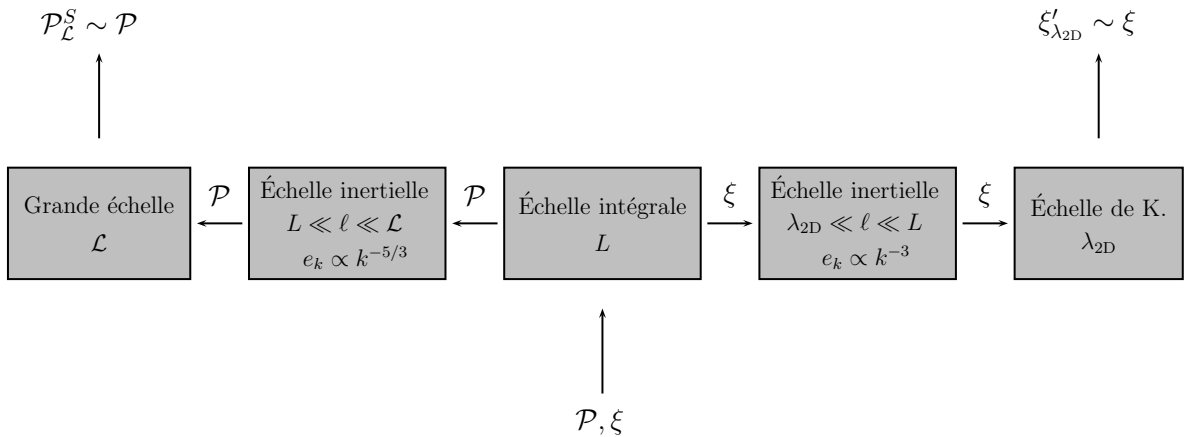


FIGURE 6.4 – Schéma de la cascade duale en turbulence bidimensionnelle

4. Le lecteur pourra évaluer les fractions dissipées à chaque échelle en fonction de Re . On se place ici dans la limite $Re \gg 1$.

6.1.3 Autres résultats accessibles par analyse dimensionnelle

Nous avons présenté une approche décrivant un état stationnaire turbulent par des cascades, directe en turbulence tridimensionnelle, duale dans le cas bidimensionnel. Alors que ce second modèle ne laisse pas le choix quant aux directions des échanges d'énergie et d'entrophie, nous pouvons revenir un instant sur le cas 3D : qu'est-ce qui justifie de considérer une cascade directe d'énergie, alors que nous aurions pu équilibrer les puissances injectées et dissipées aux plus grandes échelles (comme dans le cas bidimensionnel) ? Plusieurs réponses peuvent être apportées, reposant sur l'expérience ou l'étude des non-linéarités de l'équation de Navier-Stokes. Nous proposons une approche attribuée par Nazarenko à Frish⁵ [185] permettant de déterminer le sens des échanges d'énergie à partir des spectres d'équilibre thermique.

Pour cela, considérons la gamme inertielle mise dans un état stationnaire hors équilibre par un flux d'énergie la traversant : son spectre d'énergie présente un comportement en loi de puissance $e_k \propto k^{-5/3}$. Nous avons vu que les interactions sont en première approximation locales et cherchons à déterminer le sens suivant lequel ces non-linéarités transfèrent l'énergie. Imaginons que nous découplons à partir d'un instant donné la gamme inertielle du reste du spectre : aucun transfert d'énergie n'a lieu avec les échelles intégrale et dissipative. De plus, nous supposons toujours la stricte conservation de l'énergie dans ce régime. Le système n'étant plus sollicité, il tend vers son état d'équilibre thermodynamique dont le spectre d'énergie par unité de masse se détermine pour le cas tridimensionnel par analyse dimensionnelle comme fonction de $k_b T$, ρ et k ⁶,

$$e_k \sim \frac{k_b T}{\rho} k^2 \quad (6.33)$$

Libérées de toute contrainte, les interactions non linéaires transforment donc un spectre de $k^{-5/3}$ à k^2 , ce qui s'effectue nécessairement en transférant de l'énergie des grandes échelles vers les petites : dans la configuration initiale, c'est-à-dire l'état turbulent stationnaire de spectre $e_k \propto k^{-5/3}$, la cascade d'énergie est donc directe.

Conclusion

L'objectif de cette introduction aux lois d'échelles turbulentes était de présenter les résultats suivant :

1. Lorsqu'un système est excité suffisamment intensément, la dissipation à l'échelle de forçage ne réussit plus à compenser la puissance fournie. Si cet effet est important, il apparaît une gamme inertielle séparant injection et dissipation se contentant de transférer un flux (d'énergie par exemple) que l'on peut décrire en supposant la localité des interactions non linéaires.
2. Si l'énergie est la seule quantité conservée, elle subit une cascade dont la direction peut être déterminée grâce au spectre d'équilibre thermique.
3. Si une autre quantité est conservée, la cascade devient duale, les phénomènes dissipatifs agissant spécifiquement sur une grandeur aux extrémités du spectre. L'analyse dimensionnelle permet de même de décrire les différentes zones inertielles.

5. Mais dont l'origine est probablement moins claire, on la retrouve déjà dans le papier fondateur de Kraichnan [184].

6. Il s'agit de l'équivalent du spectre de Rayleigh-Jeans décrivant la partie classique d'un corps noir ou des phonons d'un solide. Nous pouvons bien entendu nous limiter à ce cas, l'énergie des modes que nous considérons étant très grande devant $h \times (v_l/\ell)$, où h est la constante de Planck. Notons de plus qu'en turbulence 3D une autre quantité (l'hélicité) est conservée dans la gamme inertielle et l'expression du spectre d'énergie reportée est valide uniquement si elle est nulle, *i.e.* si le forçage n'injecte pas d'hélicité. Dans le cas contraire, e_k reste une fonction croissante mais plus complexe de k et la conclusion est la même [186].

6.2 Turbulence d'ondes de surface

La turbulence d'ondes est associée à un grand nombre de quantités différentes : pour alléger le manuscrit, elles sont définies dans l'annexe D, qui résume aussi leurs dimensions ainsi que les principaux résultats.

6.2.1 Approche naïve de la turbulence d'ondes

La surface de l'océan présente une phénoménologie analogue à celle de la turbulence hydrodynamique, où un grand nombre de structures coexistent et interagissent non linéairement dans un état stationnaire hors équilibre maintenu par l'existence d'un forçage (le vent) et de phénomènes dissipatifs associés entre autres à la viscosité. Ceci constitue ce que nous appelons la turbulence d'ondes. N'importe quel type d'onde peut mener à de tels états à l'exception notable des ondes électromagnétiques dans le vide, la possibilité d'interaction non linéaire étant indispensable ; par exemple,

- Les ondes de flexion dans des plaques métalliques fines. Ce régime non linéaire peut être mis en évidence en excitant grossièrement une telle plaque, un couplage acoustique rendant audibles des oscillations induites à des fréquences très différentes de celle du forçage.
- Les ondes électromagnétiques dans les milieux (optique non linéaire). Une expérience plus coûteuse mais aussi très démonstrative consiste à envoyer une impulsion laser infrarouge dans un cristal de saphir : si ce dernier est bien orienté, on observe en sortie une lumière blanche, signe d'une cascade directe d'énergie.

Il est tentant de transposer l'approche de Kolmogorov à de tels systèmes pour prédire la répartition statistique d'énergie dans les différentes échelles spatiales et temporelles. Une différence fondamentale existe cependant entre un régime de turbulence d'ondes et la turbulence hydrodynamique, à savoir l'existence d'une vitesse de propagation. Ceci est trivial lorsqu'on considère la définition d'un « mode » dans ces deux domaines.

- **En hydrodynamique**, un mode est le résultat d'une décomposition en série de Fourier et sert de base pour l'expression de la solution totale. Plusieurs choix sont possibles suivant la géométrie du système et le phénomène étudié, les plus courants étant construits en exploitant l'existence de potentiels scalaire ou vecteur, conséquence respective du caractère irrotationnel et incompressible du champ de vitesse. Par exemple, il est souvent pertinent pour un écoulement bidimensionnel dans une boîte carrée de taille $L \times L$ de considérer les potentiels vecteurs $\vec{A}_{m,n}$ définis par

$$\vec{A}_{m,n}(\vec{r}) = A_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{e}_z, \quad \vec{k} = \frac{\pi}{L} (m\vec{e}_x + n\vec{e}_y), \quad (6.34)$$

m et n représentant le nombre de tourbillons dans les directions x et y . En l'absence de sollicitation extérieure, un tel écoulement est solution de l'équation de Navier-Stokes linéarisée inviscide avec conditions aux limites de non-pénétration. Dans le cas général, un faible nombre de modes peut, s'ils sont bien choisis, contenir l'essentiel de l'énergie et suffire pour discuter la dynamique à une certaine échelle. Quoi qu'il en soit, un mode hydrodynamique est une fonction de l'espace seulement, l'écoulement correspondant étant stationnaire. Bien qu'il soit possible de lui associer un temps caractéristique, celui-ci est relatif à son amplitude et sa structure spatiale ($\tau \sim 1/(kv)$), s'agissant de la durée mise par une particule de fluide pour revenir à sa position initiale.

- **En physique des ondes**, l'existence d'une ou plusieurs forces de rappel modifie radicalement la nature des solutions approchées en l'absence d'excitation extérieure. Celles-ci ne sont plus stationnaires mais dépendent du temps : il s'agit d'ondes, c'est-à-dire « de perturbations d'une grandeur physique se propageant de proche en proche dans un milieu » [187]. La base pertinente pour décomposer les solutions, analogue des modes de Fourier du cas précédent, est composée de *modes propres*, *i.e.* des « ondes ou vibrations de fréquence donnée pouvant se propager ou s'établir dans un système physique ». Ainsi, pour décrire la variation de la hauteur d'eau $\eta(x, y, t)$ à la surface d'un récipient de dimension $L \times L$, on pourra considérer les modes

$$\eta_{m,n}(\vec{r}, t) = \eta_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\omega_k t}, \quad \vec{k} = \frac{\pi}{L} (m\vec{e}_x + n\vec{e}_y), \quad (6.35)$$

où ω_k est une pulsation dépendant directement du vecteur d'onde \vec{k} et du nouvel ingrédient introduit, à savoir la force de rappel. **Le temps caractéristique $\tau = 2\pi/\omega_k$ est totalement découplé de l'amplitude du mode** : il s'agit d'une nouvelle donnée dépendant finement des mécanismes de rappel.

L'ajout de cette nouvelle échelle de temps empêche de conclure directement par analyse dimensionnelle. En effet, pour caractériser une gamme inertielle, disons associée à un flux d'énergie, les paramètres à considérer sont :

- Le nombre d'onde k et l'amplitude η_k associée, similaires aux grandeurs ℓ et v_ℓ de la turbulence. On peut remplacer η_k par sa densité spectrale de puissance $S_\eta(k)$ (cf. annexe D) pour une description spectrale continue.
- Le flux d'énergie par unité de masse de surface $\epsilon \sim \mathcal{P}/(\rho\mathcal{S})$, où \mathcal{P} est la puissance injectée au système de surface \mathcal{S} et de masse volumique ρ , analogue au paramètre $\mathcal{P}/(\rho L^3)$ de la turbulence hydrodynamique.
- La pulsation ω_k des ondes à cette échelle.

Paramètre	k	η_k ou $S_\eta(k)$	ϵ	ω_k
Dimension	L^{-1}	L ou L^3	$L^3 \cdot T^{-3}$	T^{-1}

TABLE 6.2 – Paramètres caractérisant une échelle inertielle et dimensions associées

Les dimensions associées étant résumées Tab. 6.2, nous obtenons,

$$\eta_k = k^{-1} \times \mathcal{F}\left(\frac{\epsilon k^3}{\omega_k^3}\right) \iff S_\eta(k) = k^{-3} \times \mathcal{G}\left(\frac{\epsilon k^3}{\omega_k^3}\right) \quad (6.36)$$

où \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des fonctions inconnues. L'étude de la cascade hydrodynamique a montré l'importance de ϵ , et l'équation précédente s'écrit aussi sous la forme

$$\eta_k = k^{-1} \times \mathcal{F}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) \iff S_\eta(k) = k^{-3} \times \mathcal{G}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right), \quad (6.37)$$

où $\epsilon_c = (\omega_k/k)^3$ peut uniquement être interprété comme un « flux d'énergie critique » (par unité de masse de surface) : on s'attend à ce qu'un phénomène physique se produise lorsque $\epsilon \sim \epsilon_c$. Celui-ci ne peut pas être lié à la dissipation, la viscosité n'ayant pas été introduite comme paramètre, et ϵ_c quantifie la localité des interactions non linéaires. Remarquons en outre qu'un tel flux critique n'existe pas en turbulence hydrodynamique (sinon il serait de même apparu dimensionnellement) : **contrairement à la turbulence hydrodynamique, la turbulence d'ondes ne peut cascader localement qu'une puissance finie**. Dans les régimes gravitaire et capillaire, $\epsilon < \epsilon_c$ devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon < \epsilon_c \iff k < k_c^g = g\epsilon^{-2/3} & \text{Régime gravitaire} \\ \epsilon < \epsilon_c \iff k > k_c^c = \frac{\rho}{\sigma}\epsilon^{2/3} & \text{Régime capillaire} \end{array} \right. \quad (6.38)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon < \epsilon_c \iff k < k_c^g = g\epsilon^{-2/3} & \text{Régime gravitaire} \\ \epsilon < \epsilon_c \iff k > k_c^c = \frac{\rho}{\sigma}\epsilon^{2/3} & \text{Régime capillaire} \end{array} \right. \quad (6.39)$$

Nous reportons à plus tard l'étude de ces résultats, n'ayant pour l'instant pas encore tous les éléments permettant une analyse pertinente. Néanmoins, nous pouvons d'ores et déjà nous limiter au cas $\epsilon \ll \epsilon_c$ pour pouvoir compter sur la localité des interactions. Dans cette limite, une approche usuelle en analyse dimensionnelle consiste à supposer que les fonctions $\mathcal{F}(x)$ et $\mathcal{G}(x)$ ont une limite finie non nulle pour $x \rightarrow 0$, ce qui mène à

$$\eta_k \underset{\epsilon \ll \epsilon_c}{\sim} k^{-1} \times \mathcal{F}(0) \iff S_\eta(k) \underset{\epsilon \ll \epsilon_c}{\sim} k^{-3} \times \mathcal{G}(0). \quad (6.40)$$

Nous aboutissons à un résultat absurde : la gamme inertielle ne dépend pas du flux qu'elle transporte⁷. Ceci n'est pas acceptable, $\mathcal{F}(x)$ et $\mathcal{G}(x)$ tendent donc vers une limite nulle ou infinie pour $x \rightarrow 0$. On suppose alors une forme d'auto-similarité incomplète correspondant à $\mathcal{F}(x) \sim x^\alpha$ (resp. $\mathcal{G}(x) \sim x^\beta$),

$$\eta_k \underset{\epsilon \ll \epsilon_c}{\sim} k^{-1} \times \left(\frac{\epsilon k^3}{\omega_k^3}\right)^\alpha \iff S_\eta(k) \underset{\epsilon \ll \epsilon_c}{\sim} k^{-3} \times \left(\frac{\epsilon k^3}{\omega_k^3}\right)^\beta. \quad (6.41)$$

7. Autrement dit, nous nous attendons à la disparition de la gamme inertielle lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, i.e. $\eta_k \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$.

Nous obtenons comme en turbulence hydrodynamique une loi d'échelle pour η_k , correspondant à un spectre en loi de puissance. Cependant, ce résultat est limité par un flux maximal et nous ne connaissons pas l'exposant α . Pour étudier plus en détail la forme du spectre d'énergie, une méthode suggérée par (6.41) consiste à se placer dans le cas $\epsilon \rightarrow 0$ pour deux raisons :

- D'une part, α continue à décrire la dynamique de la cascade, nous pouvons donc espérer le déterminer.
- D'autre part, nous nous attendons à une réduction des non-linéarités dans la limite de faible amplitude. En l'occurrence, il sera légitime de ne considérer que les interactions dominantes.

Cette démarche s'appelle la « théorie de la turbulence faible », que nous abordons en commençant par compléter ce que nous avons déjà montré chapitre 5 concernant les interactions non linéaires.

6.2.2 Nombre d'ondes et grandeurs conservées en turbulence faible

On peut être surpris d'apprendre que le premier traitement statistique des non-linéarités entre ondes a eu lieu en mécanique quantique. Ce fut lors d'une étude perturbative des interactions entre phonons dans les cristaux menée en 1929 par Peierls [188], cherchant à répondre aux questions suivantes :

- Comment et à quelle vitesse s'établit l'équilibre thermique ?
- Peut-on, à partir de considérations microscopiques, déterminer la conductivité thermique d'un cristal ? Celle-ci est en effet liée au libre parcours moyen d'un phonon, résultat des interactions non linéaires.
- La dilatation thermique tout comme l'écart à la loi de Dulong et Petit sont modélisés à température ambiante par une anharmonicité du potentiel inter-atomique. Cela étant, il est nécessaire à basses températures de considérer non plus des mouvements atomiques individuels mais des excitations d'ensemble, c'est-à-dire des phonons : il s'agit du modèle de Debye. Des écarts à la loi correspondante ($C_v \propto T^3$) sont observés et résultent d'interactions entre phonons, peut-on les quantifier ?

Nous voyons qu'il s'agit de considérations liées à l'état d'équilibre thermodynamique, bien différentes de celles de la turbulence d'ondes telle que nous l'abordons dans cette thèse, où la présence de flux empêche le retour à l'équilibre. De nombreux résultats sont néanmoins transposables à notre étude et celui qui nous intéresse porte sur la fréquence des processus non linéaires. Nous allons dans ce chapitre recourir à une analogie quantique qui permet de retrouver la majorité des résultats de la turbulence d'ondes à une constante sans dimension près. La résolution complète du problème et sa formalisation classique, plus satisfaisante pour le traitement d'ondes de surface que l'approche quantique, utilise le formalisme hamiltonien : il s'agit de la théorie de Zakharov, non présentée ici⁸.

Nous effectuons un passage analogue à celui entre onde électromagnétique et photon, ou encore entre onde acoustique et phonon : toute onde de surface harmonique progressive de vecteur d'onde \vec{k} est constituée de N_k pseudo-particules d'énergie $\hbar\omega_k$ et quantité de mouvement $\hbar\vec{k}$. Ses énergie et quantité de mouvement valent respectivement

$$E_k = N_k \hbar\omega_k, \quad \vec{P}_k = N_k \hbar\vec{k}. \quad (6.42)$$

Ceci n'est justifié que dans le domaine linéaire, et cette partie se place dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire d'un état très faiblement non linéaire. Dans cette limite, les non-linéarités ont pour effet d'autoriser des interactions entre pseudo-particules sans modifier l'expression des énergie et impulsion. De tels processus deviennent très rares, leurs probabilités d'occurrence étant reliées aux nombres de particules des modes impliqués : les premières corrections sur la dynamique du système dépendent donc des interactions impliquant le moins d'ondes possible. Nous commençons donc par étudier les résonances à trois ondes.

Fréquence des interactions à trois ondes

Considérer des interactions à peu d'ondes confère un avantage certain : il n'existe que peu de mécanismes différents possibles. En l'occurrence, il n'y en a que deux lorsque trois ondes sont impliquées, à savoir le passage d'une pseudo-particule à deux et réciproquement, comme schématisé Fig. 6.5.

Nous cherchons à évaluer à quelle vitesse les interactions non linéaires ont lieu à une échelle k donnée, que nous repérons par la suite par l'indice 1. Un bilan des différents mécanismes impliqués mène directement à

8. Pour des lecteurs intéressés par cette approche ou dérangés par l'idée d'établir des résultats classiques en passant par une étape impliquant \hbar , mentionnons deux références : une présentation de Le Bellac intitulée « An introduction to Zakharov theory of weak turbulence » dans [189] ainsi que le livre de Nazarenko [185] (moins accessible mais très complet). L'analogie entre onde de surface et pseudo-particule a quant à elle été discutée dans le cas gravitaire par Hasselmann [168].

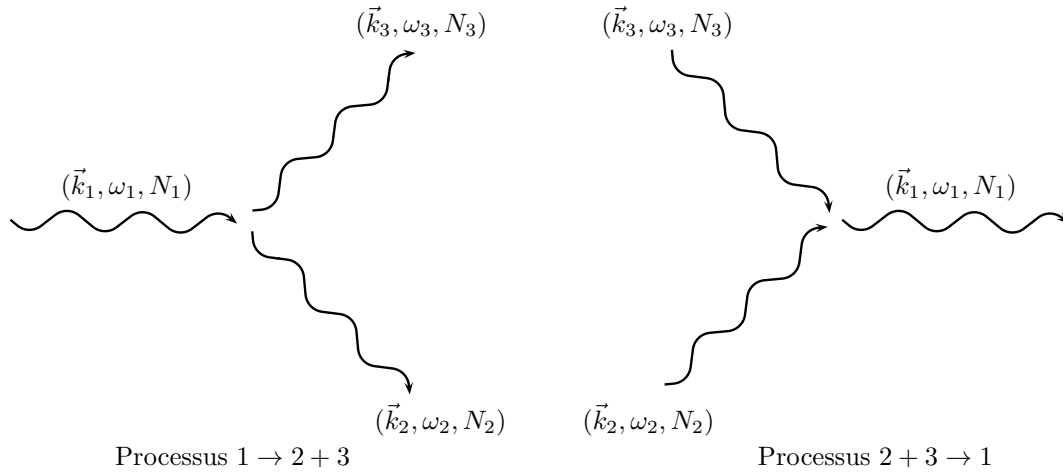


FIGURE 6.5 – Deux mécanismes de disparition et de création d'onde 1

l'équation suivante, où $\Gamma(\mathcal{P})$ représente la fréquence du processus \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right)_{3 \text{ ondes}} &= \sum_{2,3} \left(\delta_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_3} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}^{\vec{k}_3} \left\{ \Gamma(3 \rightarrow 1+2) - \Gamma(1+2 \rightarrow 3) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\omega_1+\omega_3}^{\omega_2} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_3}^{\vec{k}_2} \frac{1}{2} \left\{ \Gamma(2+3 \rightarrow 1) - \Gamma(1 \rightarrow 2+3) \right\} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Le facteur 1/2 évite de compter deux fois le même terme et les symboles de Kronecker assurent les conservations d'énergie et d'impulsion lors des échanges. Intéressons-nous à un processus particulier \mathcal{P}_1 , par exemple

$$1 \rightarrow 2 + 3, \quad (6.44)$$

dont la fréquence dépend d'une part des paramètres caractérisant les ondes de surface (gravité, tension de surface, etc.) et d'autre part des nombres d'ondes⁹ dans les différents états N_1 , N_2 et N_3 . Un raisonnement de cinétique chimique donnerait $\Gamma(\mathcal{P}_1) \propto N_1 \times (N_2 N_3)^0$ et mènerait à des taux de transition égaux pour les mécanismes $1 \rightarrow 2+3$ et $1 \rightarrow 2+3+4+5+6$. Nous constatons son inadéquation à la description des interactions non linéaires : retenons que les fréquences des mécanismes non linéaires dépendent des concentrations des réactifs ainsi que de celles des produits. Les contraintes sur $\Gamma(\mathcal{P}_1)$ que nous souhaitons voir réalisées sont les suivantes,

- $\Gamma(\mathcal{P}_1)$ dépend de N_1 , et doit s'annuler lorsque $N_1 = 0$, aucun réactif n'étant présent.
- $\Gamma(\mathcal{P}_1)$ dépend de N_2 , et ne doit pas s'annuler lorsque $N_2 = 0$. En effet, les interactions non linéaires à trois ondes doivent suffire à initier les cascades.
- $\Gamma(\mathcal{P}_1)$ dépend de N_3 de la même manière que N_2 par symétrie.

Ces quelques remarques nous mènent à postuler un taux Γ sous la forme

$$\Gamma(1 \rightarrow 2 + 3) = |V_1^{2,3}|^2 N_1 (\alpha N_2 + 1) (\beta N_3 + 1), \quad (6.45)$$

où les coefficients $|V_1^{2,3}|^2$, α et β dépendent de la taille du système (surface \mathcal{S}) ainsi que des paramètres intensifs (σ , g , ω_1 , ω_2 , etc.). Un raisonnement similaire appliqué à $2 + 3 \rightarrow 1$ donne

$$\Gamma(2 + 3 \rightarrow 1) = |V_{2,3}^1|^2 (\gamma N_1 + 1) N_2 N_3. \quad (6.46)$$

Allons plus loin : en invoquant la réversibilité des processus à l'équilibre, nous justifions que lorsque les nombres d'ondes prennent leurs valeurs d'équilibre thermodynamique¹⁰, les processus précédents sont équiprobables¹¹

$$\Gamma(1 \rightarrow 2 + 3)_{N_i=N_i^{\text{eq}}} = \Gamma(2 + 3 \rightarrow 1) \implies \begin{cases} |V_1^{2,3}|^2 = |V_{2,3}^1|^2 = |V_{1,2,3}|^2 \\ \alpha = \beta = \gamma = 1 \end{cases}$$

9. Attention à ne pas confondre un nombre d'ondes N d'un nombre d'onde $|\vec{k}|$.

10. Il s'agit de distributions de Bose-Einstein $N_i^{\text{eq}} = (e^{\hbar\omega_i/(k_B T)} - 1)^{-1}$.

11. En voyant ces processus comme éléments d'une chaîne de Markov, nous utilisons la balance détaillée.

Finalement, nous aboutissons aux fréquences suivantes pour les différents processus considérés :

$$\Gamma(1 \rightarrow 2 + 3) = |V_{1,2,3}|^2 N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1), \quad (6.47)$$

$$\Gamma(3 \rightarrow 1 + 2) = |V_{1,2,3}|^2 (N_1 + 1) (N_2 + 1) N_3, \quad (6.48)$$

$$\Gamma(1 + 2 \rightarrow 3) = |V_{1,2,3}|^2 N_1 N_2 (N_3 + 1), \quad (6.49)$$

$$\Gamma(2 + 3 \rightarrow 1) = |V_{1,2,3}|^2 (N_1 + 1) N_2 N_3. \quad (6.50)$$

Ces résultats sont exacts et constituent le point de départ du traitement des interactions entre phonons [190]. (6.43) devient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right)_{3 \text{ ondes}} = & \sum_{2,3} |V_{1,2,3}|^2 N_1 N_2 N_3 \left(\delta_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_3} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}^{\vec{k}_3} \left\{ \left(1 + \frac{1}{N_1}\right) \left(1 + \frac{1}{N_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{N_3}\right) \right\} \right. \\ & \left. + \delta_{\omega_1+\omega_3}^{\omega_2} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_3}^{\vec{k}_2} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{N_1}\right) - \left(1 + \frac{1}{N_2}\right) \left(1 + \frac{1}{N_3}\right) \right\} \right). \end{aligned} \quad (6.51)$$

que l'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N_1}{\partial t} \right)_{3 \text{ ondes}} = & \sum_{2,3} |V_{1,2,3}|^2 \left(\delta_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_3} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}^{\vec{k}_3} \left\{ N_1 N_3 + N_2 N_3 - N_1 N_2 + N_3 \right\} \right. \\ & \left. + \delta_{\omega_1+\omega_3}^{\omega_2} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_3}^{\vec{k}_2} \frac{1}{2} \left\{ N_2 N_3 - N_1 N_2 - N_1 N_3 - N_1 \right\} \right). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Cette équation fondamentale de turbulence d'ondes s'obtient à l'ordre dominant lors du traitement classique des non-linéarités et s'appelle *équation cinétique*. Notre approche nous apprend que la nature quadratique du terme de droite est associée à des taux de transition cubiques identiques ($\Gamma = |V_{1,2,3}|^2 N_1 N_2 N_3 + \dots$) nécessitant d'aller à l'ordre sous-dominant. En supposant les interactions locales ($N_1 \sim N_2 \sim N_3$, *idem* pour ω_i et $|\vec{k}_i|$), l'équation (6.52) fournit une estimation de la fréquence des interactions $\tau_{\text{NL}}(k)^{-1}$ (inverse du « temps non linéaire ») :

$$\boxed{\tau_{\text{NL}}(k)_{3 \text{ ondes}}^{-1} \sim N_k |V_{1,2,3}|^2.} \quad (6.53)$$

Ce résultat a été obtenu dans un autre contexte par un développement des équations hydrodynamiques, cf. (5.19). Il nous permettra de contraindre l'analyse dimensionnelle et de conclure sur la description des gammes inertielles. Avant d'entreprendre cela, nous devons considérer le cas des ondes gravitaires, où nous avons vu chapitre 5 que les interactions impliquent au minimum quatre ondes.

Contraintes sur les interactions dans le régime gravitaire

Pour les ondes de gravité, les premiers mécanismes non linéaires impliquent quatre ondes et sont schématisés Fig. 6.6.

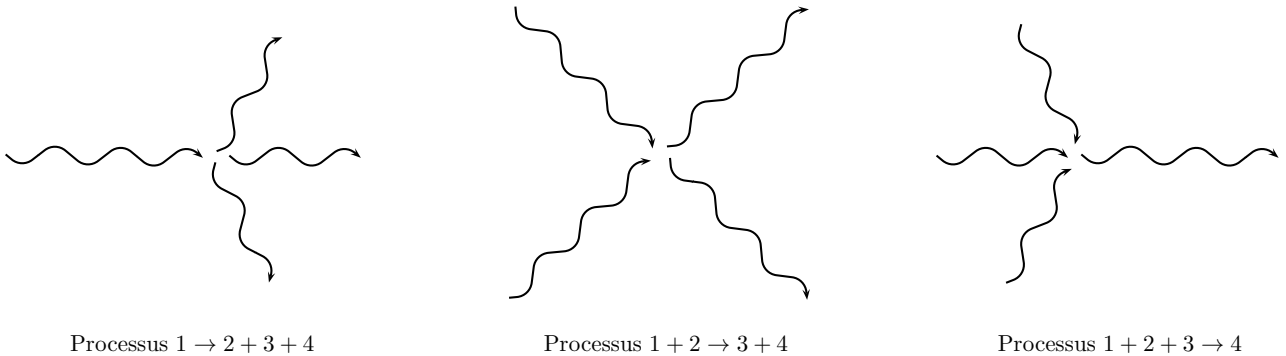


FIGURE 6.6 – Mécanismes d'interactions à quatre ondes

Les contraintes liées à la relation de dispersion agissent aussi à ce niveau et seul le processus de type $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ est autorisé, cf. [167]. Ce mécanisme diffère de tous les autres étudiés jusqu'à présent en ayant le même nombre d'ondes en entrée et en sortie, à savoir deux. S'agissant du seul type d'interaction autorisé, nous aboutissons au constat suivant : **dans le régime gravitaire, lorsque seules les premières non-linéarités sont efficaces, le nombre d'ondes total est conservé dans la gamme inertielle.** Ce résultat ne repose pas sur une hypothèse de localité, mais nécessite ϵ « suffisamment petit » pour ne considérer que les interactions à quatre ondes : le seul flux critique issu de l'analyse dimensionnelle étant ϵ_c , nous nous attendons à ce que ces deux phénomènes (perte de localité et interactions à des ordres supérieurs) soient liés au rapport ϵ/ϵ_c . De plus, l'étude de la turbulence hydrodynamique bidimensionnelle a mis en évidence le rôle des quantités conservées sur la phénoménologie des échanges d'énergie et nous prévoyons dans le régime gravitaire une situation analogue, c'est-à-dire l'existence de deux cascades, d'énergie et de nombre d'ondes. L'évaluation du temps non linéaire à quatre ondes se mène comme précédemment.

Nous obtenons l'équation cinétique suivante¹²,

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial t}\right)_{4 \text{ ondes}} = \sum_{2,3,4} |W_{1,2}^{3,4}|^2 \delta_{\omega_1+\omega_2}^{\omega_3+\omega_4} \delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}^{\vec{k}_3+\vec{k}_4} N_1 N_2 N_3 N_4 \left\{ \left(1 + \frac{1}{N_3}\right) \left(1 + \frac{1}{N_4}\right) - \left(1 + \frac{1}{N_1}\right) \left(1 + \frac{1}{N_2}\right) \right\}. \quad (6.54)$$

Sous hypothèse de localité, nous déduisons le temps non linéaire à quatre ondes

$$\tau_{\text{NL}}(k)_{4 \text{ ondes}}^{-1} \sim N_k^2 |W_{1,2}^{3,4}|^2 \quad (6.55)$$

là encore déjà démontré par une approche différente, cf. (5.20).

Les échelles de temps en turbulence d'ondes

L'estimation de ces temps sert à valider la démarche retenue. En effet, nous avons considéré jusqu'ici que les non-linéarités conservent l'énergie. Cependant, d'un point de vue quantique, une marge d'erreur $\Delta E \sim \hbar/\tau_{\text{NL}}$ issue du principe d'indétermination doit être ajoutée. Si nous souhaitons que les résonances soient bien définies, il est nécessaire d'imposer $\Delta E \ll \hbar\omega_k$, soit

$$\tau_{\text{NL}} \gg \tau, \quad (6.56)$$

où τ est la période de l'onde. Ce résultat peut être retrouvé de manière classique, et nous verrons qu'il est cohérent avec l'hypothèse de turbulence faible, c'est-à-dire aussi relié au rapport ϵ/ϵ_c . Exprimons maintenant ces différents temps en fonction de la densité spectrale spatiale d'énergie par unité de masse de surface e_k ¹³

- **En régime capillaire** : (6.53) impose une relation linéaire entre τ_{NL}^{-1} et e_k , d'où dimensionnellement

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-1/2} k^{5/2} e_k. \quad (6.57)$$

- **En régime gravitaire** : (6.55) mène quant à elle à une dépendance quadratique en e_k , d'où

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim g^{-3/2} k^{13/2} e_k^2. \quad (6.58)$$

Une gamme inertielle suppose de plus de négliger les phénomènes dissipatifs, et le temps caractéristique associé τ_{diss} doit donc être très supérieur à tous les autres temps caractéristiques (τ et τ_{NL}), d'où l'inégalité

$$\tau_{\text{diss}} \gg \tau_{\text{NL}} \gg \tau \quad (6.59)$$

12. Elle fut démontrée dans le cadre des ondes de surface en régime gravitaire par Hasselmann [167], qui ne chercha pas de solution en loi de puissance, car [168] : « *It is felt that solutions [corresponding to Kolmogorov's inertial subrange for turbulent spectra] do not exist, as it is difficult to see how a constant energy flux from an energy source at zero wave-number to a sink at infinity can conserve both mean energy and the mean number density* ». Sous cette forme, (6.54) a cependant été écrite bien plus tôt (en 1928) comme équivalent quantique de l'équation de Boltzmann [191] (précédent les travaux plus formels de Peierls), qui décrit l'évolution de la fonction de distribution à une particule dans un gaz dilué de molécules effectuant des collisions binaires. L'analogie avec la théorie cinétique est attendue dans ce régime où seules les collisions type $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ sont autorisées, le caractère quantique correspondant à notre cadre d'étude. La théorie classique de Boltzmann se retrouve dans la limite des faibles nombres d'ondes ($N_i \ll 1$), à l'opposé de la turbulence faible ($N_i \gg 1$).

13. On pourrait tout aussi bien choisir e_ω , $S_\eta(k)$, $S_\eta(\omega)$, n_k ou encore n_ω , cf. annexe D.

La condition sur τ_{diss} permet de connaître la fin de la cascade, correspondant à l'échelle où les phénomènes dissipatifs entrent en jeu. Remarquons que l'inégalité $\tau_{\text{diss}} \gg \tau$, inexistante en turbulence hydrodynamique et indépendante du forçage, implique que certaines échelles des systèmes d'ondes ne mèneront jamais à un régime de turbulence d'ondes, quelle que soit l'énergie injectée.

6.2.3 Description de la gamme inertielle capillaire

Le temps non linéaire fournit l'ingrédient manquant et permet de caractériser la turbulence faible en régime capillaire. Rappelons (6.57),

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-1/2} k^{5/2} e_k. \quad (6.60)$$

Il s'agit de la fréquence des interactions non linéaires transférant des particules (et donc de l'énergie), *i.e.* le déséquilibre des vitesses de réaction entre le sens direct et inverse. Les interactions étant locales, le flux d'énergie passant par la cascade s'exprime comme

$$\boxed{\epsilon \sim \frac{k e_k}{\tau_{\text{NL}}}} \quad (6.61)$$

Le numérateur représentant l'énergie des modes susceptibles d'interagir localement, et τ_{NL}^{-1} la fréquence des interactions. Cette égalité exprime simplement ce que nous entendons par « flux d'énergie » dans le cas d'échanges locaux¹⁴. En combinant les deux équations précédentes, nous obtenons ainsi

$$e_k \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4}, \quad (6.62)$$

$$S_\eta(k) \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4} \sim k^{-3} \times \left(\frac{\epsilon k^3}{\omega_k^3}\right)^{1/2}, \quad (6.63)$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{NL}}}\right) \sim \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^{1/2} \sim k S_{\nabla\eta}(k) \sim (k\eta_k)^2. \quad (6.64)$$

Nous vérifions *a posteriori* que notre hypothèse d'auto-similarité incomplète pour \mathcal{G} est raisonnable, déterminons le coefficient $\beta = 1/2$ et montrons que toutes les hypothèses réalisées sont équivalentes entre elles (hormis $\tau_{\text{diss}} \gg \tau_{\text{NL}}$ que nous n'avons pas encore exploitée) : avoir des résonances bien définies revient à considérer des flux faibles devant le flux critique, ou encore des cambrures toujours petites. Les deux informations nous manquant sur cette cascade concernent son sens ainsi que les phénomènes dissipatifs. Pour le sens, nous utilisons une démarche analogue à la turbulence hydrodynamique en nous aidant du spectre d'équipartition e_k^{eq} (de dimension $L^4 \cdot T^{-2}$). Celui-ci s'obtient par un calcul de physique statistique ou par analyse dimensionnelle,

$$\boxed{e_k^{\text{eq}} \sim \frac{k_b T}{\rho} k} \quad (6.65)$$

Étant donné que $1 > -7/4$, les mêmes arguments qu'en turbulence 3D indiquent que la cascade d'énergie est directe.

Fin de la cascade et « Échelle de Kolmogorov »

Les effets dissipatifs ont été discutés précédemment dans ce manuscrit. Pour illustrer la démarche, nous considérons une pollution en surface et posons donc $\tau_{\text{diss}}^{-1} \sim \sqrt{\nu\omega_k} k$. En égalant les taux d'énergie dissipée et transférée par la cascade, nous obtenons une condition pour la fin de cette dernière,

$$\frac{k e_k}{\tau_{\text{diss}}} \sim \frac{k e_k}{\tau_{\text{NL}}} \implies \tau_{\text{diss}} \sim \tau_{\text{NL}}. \quad (6.66)$$

14. Si nous utilisons cette égalité en turbulence hydrodynamique 3D pour définir τ_{NL}^{-1} , nous retrouvons la fréquence de rotation des tourbillons à l'échelle k^{-1} .

L'expression du temps non linéaire étant connue, nous déterminons le nombre d'onde terminant la cascade,

$$k_{\text{diss}} \sim \sqrt{\frac{\epsilon \rho}{\nu \sigma}}. \quad (6.67)$$

En notant L la taille de l'échelle intégrale, on obtient,

$$\left(\frac{L}{2\pi} k_{\text{diss}}\right) \sim \left(\frac{L}{\nu} \times \frac{\rho \epsilon L}{\sigma 4\pi^2}\right)^{1/2}. \quad (6.68)$$

Ce nombre sans dimension séparant les échelles d'injection et de Kolmogorov est équivalent au nombre de Reynolds en turbulence 3D ($L/\lambda \sim Re^{3/4}$). Sa valeur maximale est atteinte lorsque¹⁵ $\epsilon = \epsilon_c = (2\pi\sigma/\rho L)^{3/2}$,

$$\left(\frac{L}{2\pi} k_{\text{diss}}\right)_{\text{max}} \sim \left(\frac{\sigma L}{2\pi\rho\nu^2}\right)^{1/4} \sim \left(\frac{L}{L_c}\right)^{1/4}, \quad (6.69)$$

où $L_c = 2\pi\rho\nu^2/\sigma \simeq 10^{-7}$ m pour l'eau. Ce résultat est intéressant car quantifie l'étendue maximale de la cascade observable en présence d'une surface polluée. En prenant la longueur capillaire ℓ_{cap} comme échelle d'injection et les données de l'eau, on détermine

$$\left(\frac{L}{2\pi} \times k_{\text{diss}}\right)_{\text{max}} \sim 20 \iff \left(\frac{f_{\text{diss}}}{f_0}\right)_{\text{max}} \sim 100. \quad (6.70)$$

Si on s'intéresse à la manière dont l'énergie est dissipée au sein de la cascade, comme nous l'avons fait en turbulence hydrodynamique, nous obtenons pour la puissance dissipée entre deux pulsations ω_1 et ω_2 ,

$$\mathcal{P}'_{\omega_1 \rightarrow \omega_2} \sim \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\rho S e_\omega) \times (\sqrt{\nu \omega k} k) d\omega \sim \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\rho S \sqrt{\nu \epsilon} (\sigma/\rho)^{-1/6}) \omega^{-1/3} d\omega. \quad (6.71)$$

Pour un même intervalle de fréquence, les grandes échelles dissipent plus que les petites. La phénoménologie même de cascade d'énergie est alors à revoir. L'approche de la turbulence faible est mise en défaut par certains types de dissipation (comme celle en surface) et ses prédictions ne seront pas vérifiées sur toute la gamme inertielle : le flux d'énergie n'est pas transféré puis à terme dissipé mais plutôt progressivement dissipé au cours de la cascade. En pratique, on s'attend à observer les prédictions de la turbulence faible au début de la cascade, dans une gamme de fréquences où seule une fraction du flux d'énergie injectée est dissipée.

En considérant un milieu sans couche limite, la dissipation est cette fois-ci localisée aux petites échelles et il vient

$$\left(\frac{L}{2\pi} \times k_{\text{diss}}\right)_{\text{max}} \sim \left(\frac{L}{L_c}\right)^{2/5} \sim 100 \iff \left(\frac{f_{\text{diss}}}{f_0}\right)_{\text{max}} \sim 1000. \quad (6.72)$$

Pour observer un régime local de turbulence d'ondes capillaire, il est donc indispensable de diminuer au maximum la dissipation. Quoi qu'il en soit, ces résultats mettent en évidence que la turbulence faible est, du moins dans ce régime capillaire, beaucoup plus limitée que la turbulence hydrodynamique.

6.2.4 Description des gammes inertielles gravitaires

Nous allons effectuer la même démarche pour le régime gravitaire, où deux quantités sont conservées dans la gamme inertielle : l'énergie et le nombre d'ondes. Suivant l'approche de la turbulence hydrodynamique 2D, nous commençons par déterminer les exposants des deux cascades puis déterminons leurs sens respectifs.

Cascade d'énergie

La cascade d'énergie est caractérisée par

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim g^{-3/2} k^{13/2} e_k^2, \quad \epsilon \sim \frac{k e_k}{\tau_{\text{NL}}}. \quad (6.73)$$

15. Rappelons qu'en régime capillaire, la condition $\epsilon < \epsilon_c$ se traduit par une inégalité type $k > k_c$ étant donné la forme de la relation de dispersion : c'est donc bien l'échelle L qu'il faut considérer dans le flux critique.

Il vient directement

$$e_k \sim \epsilon^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2}, \quad (6.74)$$

$$S_\eta(k) \sim \epsilon^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2} \sim k^{-3} \times \left(\frac{\epsilon k^3}{\omega_k^3} \right)^{1/3}, \quad (6.75)$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{NL}}} \right) \sim \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^{2/3} \sim (k S_{\nabla\eta}(k))^2 \sim (k \eta_k)^4. \quad (6.76)$$

Comme dans le cas précédent, nous vérifions qu'observer des résonances bien définies ($\tau_{\text{NL}} \gg \tau$) équivaut à des transferts d'énergie locaux ($\epsilon \ll \epsilon_c$) ou encore à des cambrures faibles ($k \eta_k \ll 1$).

Cascade de nombre d'ondes

La seconde cascade est liée au nombre d'ondes. En physique classique, il est représenté par la grandeur $n_k = e_k/\omega_k$, équivalente à la quantité $N_k = E_k/(\hbar\omega_k)$ que nous avons introduite *via* les pseudo-particules. n_k est « la densité spectrale spatiale de nombre d'ondes par unité de masse de surface »¹⁶. Le flux associé est défini comme l'analogie de ϵ ,

$$\epsilon = \frac{\mathcal{P}}{\rho\mathcal{S}} \iff \zeta = \frac{\phi}{\rho\mathcal{S}}, \quad (6.77)$$

où ϕ est le nombre d'ondes (c'est-à-dire de pseudo-particules multiplié par \hbar) que l'opérateur injecte dans le système par unité de temps. La dimension de ζ est donc $\text{L}^3 \cdot \text{T}^{-2}$. Le forçage étant actif à l'échelle intégrale k_0 , nous nous attendons à

$$\epsilon \sim \frac{\zeta}{\omega_{k_0}}. \quad (6.78)$$

L'approche dimensionnelle naïve peut être adaptée ici et met en évidence l'existence d'un flux critique dans le cas d'une cascade de nombre d'ondes $\zeta_c = \omega_{k_0}^2/k^3$. Cette distinction faite, les différents exposants se déterminent simplement avec un système d'équations similaire aux précédents

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim g^{-3/2} k^{13/2} e_k^2, \quad \zeta \sim \frac{k e_k}{\tau_{\text{NL}}} \times \frac{1}{\omega_k} \sim \frac{k n_k}{\tau_{\text{NL}}}. \quad (6.79)$$

Et nous obtenons

$$e_k \sim \zeta^{1/3} g^{2/3} k^{-7/3}, \quad (6.80)$$

$$S_\eta(k) \sim \zeta^{1/3} g^{-1/3} k^{-7/3}, \quad (6.81)$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{NL}}} \right) \sim \left(\frac{\zeta}{\zeta_c} \right)^{2/3} \sim (k S_{\nabla\eta}(k))^2. \quad (6.82)$$

Les cascades directe et inverse sont ainsi très proches du point de vue des exposants et des conditions de validité.

Sens des cascades

Nous adaptons les arguments de Kraichnan et Fjørtoft au cas présent pour déterminer les directions des échanges d'énergie et de nombre d'ondes. Raisonnons pour cela au niveau des flux injectés et dissipés :

- **À l'échelle intégrale** repérée par le nombre d'onde k_0 et la pulsation ω_{k_0} , les flux d'énergie et de nombre d'ondes (par unité de masse de surface) sont

$$\epsilon_0, \quad \zeta_0 \sim \frac{\epsilon_0}{\omega_{k_0}}. \quad (6.83)$$

- **À la fin de la cascade d'énergie**, repérée par k_e et ω_{k_e} , ces mêmes flux doivent vérifier

$$\epsilon_e \sim \epsilon_0, \quad \zeta_e \sim \frac{\epsilon_e}{\omega_{k_e}} \sim \frac{\epsilon_0}{\omega_{k_e}} \sim \left(\frac{\omega_{k_0}}{\omega_{k_e}} \right) \zeta_0. \quad (6.84)$$

La condition $\zeta_e \ll \zeta_0$ impose $k_0 \ll k_e$, c'est-à-dire une cascade d'énergie directe (vers les petites échelles).

16. Le nombre d'ondes n'est donc pas un nombre mais a la dimension d'un moment cinétique (comme \hbar).

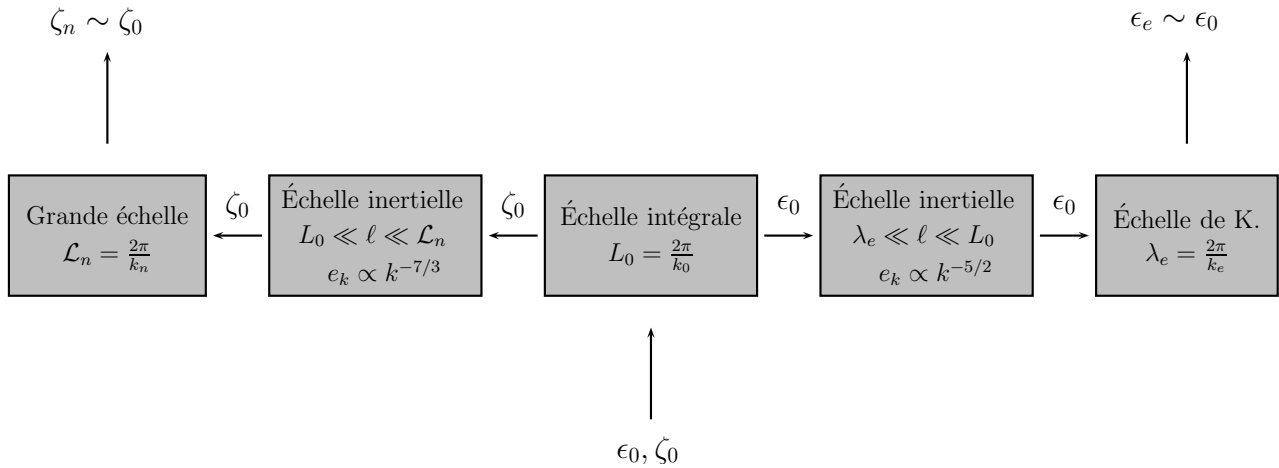


FIGURE 6.7 – Schéma de la cascade duale en turbulence d'ondes gravitaire

- À la fin de la cascade de nombre d'ondes, repérée par k_n et ω_{k_n} , nous avons de même :

$$\zeta_n \sim \zeta_0, \quad \epsilon_n \sim \omega_{k_n} \zeta_n \sim \omega_{k_n} \zeta_0 \sim \left(\frac{\omega_{k_n}}{\omega_{k_0}} \right) \times \epsilon_0. \quad (6.85)$$

La condition $\ll \epsilon_0$ impose $k_n \ll k_0$, contraignant la cascade de nombre d'ondes à être inverse (vers les grandes échelles).

Nous aboutissons à une phénoménologie similaire à celle de la turbulence hydrodynamique 2D, les résultats principaux étant résumés Fig. 6.7. Les phénomènes dissipatifs peuvent être étudiés par analogie avec le régime capillaire.

6.2.5 Au-delà de la turbulence faible : spectres stationnaires non locaux

Tous les résultats précédents reposent sur l'hypothèse de localité, qui n'est pas vérifiée sur une gamme inertielle arbitrairement développée. Dans certain cas, la dissipation devient efficace avant la perte de localité et aucun régime non local n'est observé. Le reste du temps, il faut considérer une cascade non locale : nous traitons ici la fin d'une cascade locale directe en régime gravitaire¹⁷.

Le problème semble délicat. Alors qu'il est possible de se limiter à l'étude des premières non-linéarités en turbulence faible, ce régime se place dans le cas où ϵ/ϵ_c est de l'ordre de l'unité voire plus et nous nous attendons à des échanges d'énergie mettant en jeu un nombre quelconque d'ondes. Une approche possible consiste à espérer que la solution vérifie certaines propriétés contraignantes nous permettant de la trouver simplement, si elle existe. Nous faisons les hypothèses suivantes :

1. Ce régime ne brise ni l'isotropie, ni l'homogénéité, ni la stationnarité.
2. Il reste possible de parler d'ondes, c'est-à-dire que le temps de vie de ces dernières (le temps non linéaire en l'absence de dissipation) est supérieur à leur période.
3. Ce régime ne se déstabilise jamais, c'est-à-dire qu'il est en mesure de décrire une gamme inertielle arbitrairement développée. Toutes les conditions de validité des cascades locales étant équivalentes (cf. eq (6.64), (6.76) et (6.82)), on suppose que les quantités telles la cambrure ($k\eta_k$), le rapport des temps linéaires sur non linéaires (τ/τ_{NL}) ou encore le flux d'énergie transféré localement sur le flux critique $\epsilon_{loc}/\epsilon_c$ restent constantes au cours de la cascade, *i.e.* ne dépendent pas de k .

17. La perte de localité en régime capillaire s'effectuant aux plus faibles nombres d'onde, une telle situation ne peut pas se rencontrer dans ce régime : ou bien le spectre de turbulence faible n'est jamais observé, ou bien il l'est et reste toujours local.

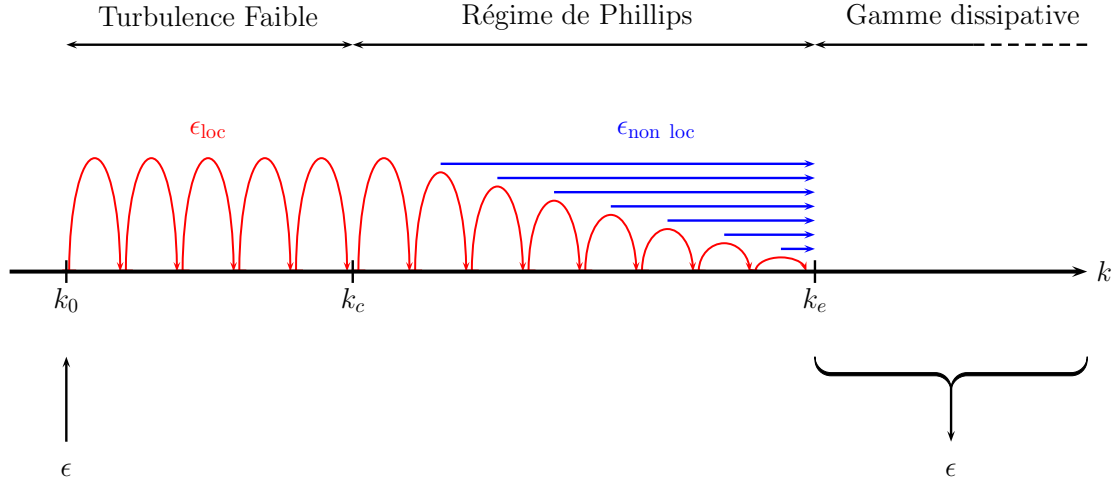


FIGURE 6.8 – Schéma de la cascade d'énergie en régime gravitaire (le régime capillaire n'est pas considéré)

Connaissant les ordres de grandeur des temps non linéaires, ce dernier point mène au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\tau(k)}{\tau_{\text{NL}}(k)} \right)_{4 \text{ ondes}} \sim g^{-2} k^6 e_k^2 \sim (g^{-1} k^3 e_k)^2 \sim \Phi_4 \end{array} \right. \quad (6.86)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\tau(k)}{\tau_{\text{NL}}(k)} \right)_{5 \text{ ondes}} \sim g^{-3} k^9 e_k^3 \sim (g^{-1} k^3 e_k)^3 \sim \Phi_5 \end{array} \right. \quad (6.87)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\tau(k)}{\tau_{\text{NL}}(k)} \right)_{n \text{ ondes}} \sim g^{2-n} k^{3n-6} e_k^{n-2} \sim (g^{-1} k^3 e_k)^{n-2} \sim \Phi_n \end{array} \right. \quad (6.88)$$

Avec Φ_n des constantes. Une solution existe donc, nommée « spectre de Phillips e_k^{Ph} » [192] et telle que le rapport entre temps non linéaire et période des ondes est indépendant de k :

$$\boxed{e_k^{\text{Ph}} = C g k^{-3} \iff S_\eta(k) = C k^{-3}} \quad (6.89)$$

où C est une constante inférieure à l'unité pour une convergence de Φ_n . Une autre propriété remarquable de ce spectre, mentionnée par Newell et Zakharov [193], est que ce nombre C ne dépend pas du flux d'énergie total. Ce comportement très singulier se comprend en évaluant de deux manières différentes le flux d'énergie transféré au début du spectre de Phillips, *i.e.* à l'échelle $k_c \sim g \epsilon^{-2/3}$:

1. D'une part, comme limite du régime de turbulence faible, le flux d'énergie transféré localement à cette échelle est celui injecté à l'échelle intégrale, à savoir ϵ .
2. D'autre part, le flux d'énergie transféré localement à cette échelle s'évalue en connaissant les différents temps non linéaires $(\tau_{\text{NL}})_{n \text{ ondes}}^{-1} \sim \omega_k \Phi_n$, le spectre de Phillips $e_k^{\text{Ph}} = C g k^{-3}$ et le nombre d'onde critique $k_c \sim g \epsilon^{-2/3}$ par

$$\sum_{n \geq 4} \left(\frac{k_c e_k^{\text{Ph}}}{\tau_{\text{NL}}} \right)_{n \text{ ondes}} \sim \sum_{n \geq 4} k_c \times (\omega_k \Phi_n) \times (C g k_c^{-3}) \sim \epsilon \times \sum_{n \geq 3} C^n \sim \epsilon. \quad (6.90)$$

L'égalité de ces deux termes n'impose aucune dépendance de C vis-à-vis de ϵ . On peut être surpris par ce résultat, comment des spectres identiques peuvent cascader des puissances différentes? Cela révèle que notre intuition est souvent limitée aux échanges d'énergie locaux : connaître le spectre à une certaine échelle détermine uniquement le flux transféré *localement* à ce niveau, que nous notons $\epsilon_{\text{loc}}(k)$ et évaluons simplement *via*

$$\epsilon_{\text{loc}}(k) \sim \sum_{n \geq 4} \left(\frac{k e_k^{\text{Ph}}}{\tau_{\text{NL}}} \right)_{n \text{ ondes}} \sim \sum_{n \geq 4} k \times (\omega_k \Phi_n) \times (C g k^{-3}) \sim \epsilon \times \left(\frac{k_c}{k} \right)^{3/2} \sim \left(\frac{g}{k} \right)^{3/2}. \quad (6.91)$$

À une échelle quelconque, la stationnarité impose l'existence d'un flux d'énergie transféré de manière non locale $\epsilon_{\text{non-loc}}(k)$ dont la conservation de l'énergie donne l'expression,

$$\epsilon_{\text{non-loc}}(k) = \epsilon - \epsilon_{\text{loc}}(k) = \epsilon \times \left(1 - \left(\frac{k_c}{k}\right)^{3/2}\right). \quad (6.92)$$

Le schéma Fig. 6.8 permet de visualiser la situation. Résumons les principales propriétés du spectre de Phillips :

- Il est homogène, isotrope, stationnaire, comme les spectres de turbulence faible.
- Il est non local, à l'inverse des spectres de turbulence faible.
- Il ne dépend pas du flux d'énergie transféré, qui peut être arbitrairement grand.

Le spectre de puissance de hauteur de Phillips, $S_\eta(k) \sim k^{-3}$, permet d'aborder différemment ce résultat. Son indépendance vis-à-vis des constantes dimensionnelles décrivant le mécanisme de rappel ou le flux d'énergie total indique qu'il s'agit d'un résultat purement géométrique. En l'occurrence, on peut montrer qu'une répartition aléatoire de crêtes, c'est-à-dire de discontinuités d'une des dérivées spatiales de $\eta(x, y, t)$, engendre ce spectre [193]. Déjà avancé par Phillips, cet argument est renforcé par le fait que le début de ce régime équivaut à une accélération $\partial^2\eta/\partial t^2 \sim g$ apte à s'opposer au mécanisme de rappel gravitaire.

Dans ce régime fortement non linéaire, les spectres en temps ($S_\eta(\omega)$) ne se déduisent pas de ceux en espace ($S_\eta(k)$) via la relation de dispersion linéaire. Dans la limite de structure cohérente, c'est au contraire une relation non dispersive $\omega \propto k$ qu'il faut utiliser [194].

Retour sur l'approche naïve de la turbulence d'ondes et conclusion

Notre étude de la turbulence d'ondes a commencé par un résultat d'analyse dimensionnelle, contraignant la densité spectrale de puissance de hauteur des ondes de surface à s'écrire comme :

$$S_\eta(k) = k^{-3} \times \mathcal{G}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right). \quad (6.93)$$

Cette forme permet de résumer les principaux résultats de ce chapitre, la fonction inconnue $\mathcal{G}(x)$ ayant été décrite dans ses différentes limites :

- Pour $x \ll 1$, c'est-à-dire en turbulence faible, $\mathcal{G}(x) = C'x^\beta$ avec β connu en détaillant les premières non-linéarités et C' une constante dépendant du type d'onde considéré (gravitaire, capillaire, etc.). En explicitant les pré-facteurs lors de l'étude des non-linéarités et à l'aide de calculs bien plus laborieux, il est possible de déterminer exactement C' .
- Pour $x > 1$, grâce au spectre de Phillips, $\mathcal{G}(x) = C$. Notons qu'il n'était pas du tout évident que le spectre de Phillips, non local, n'implique pas l'échelle intégrale et vérifie l'argument dimensionnel initial. La constante universelle C doit quant à elle être tirée de l'expérience.
- Le comportement autour de $x = 1$ ne peut être prédit précisément par aucune de ces deux théories. Seul un raccordement « à la main » des deux spectres, comme décrit Fig. 6.8, est possible.

6.3 Résultats expérimentaux en turbulence d'ondes de surface

L'étude des milieux turbulents étant essentiellement phénoménologique, les expériences jouent un rôle capital, soutenues depuis la croissance des capacités de calcul informatique par les simulations numériques. Ces dernières semblent particulièrement pertinentes en turbulence d'ondes où la dimension du milieu à modéliser est diminuée et de nombreuses questions encore ouvertes. Nous présentons ici les principaux résultats expérimentaux et numériques touchant à la turbulence d'ondes de surface.

6.3.1 Régime capillaire

L'étude expérimentale de la turbulence d'ondes a concerné à ses débuts des régimes purement capillaires. En utilisant un forçage paramétrique et des méthodes de mesure globales (par diffusion de la lumière [58, 59, 195]) ou locales (par fluorescence [196]), les premiers spectres d'énergie stationnaires ont été observés dans l'eau. Un accord avec les prédictions de la turbulence faible est observé sur environ un tiers de décade en fréquence, traduisant l'énorme limite que constitue la dissipation en surface.

Un groupe d'auteurs mentionne l'existence de structures dissipatives localisées, signe d'un comportement intermittent [59]. Pour élargir la gamme inertielle, plusieurs solutions ont été envisagées :

- Réaliser des expériences en gravité réduite. L'unique expérience de ce type observe un spectre fréquentiel en accord avec la théorie sur deux décades [197].
- Utiliser deux fluides de même densité, s'affranchissant de la contamination de l'interface tout en permettant de forcer à basse fréquence. Ceci a été réalisé mais l'interprétation est alors différente, les interactions à trois ondes n'étant plus autorisées [198]. Diminuer la différence de densité sans l'annuler est cependant possible et profitable, cf. [199].
- Utiliser du mercure, permettant grâce à sa faible viscosité cinématique d'observer une gamme inertielle maximale plus développée que dans le cas de l'eau. En faisant osciller une paroi à des fréquences cette fois-ci inférieures à la fréquence capillaire, la turbulence faible est observée [69] et des signatures de l'intermittence restent visibles [70].

Dans ce dernier cas, une dépendance linéaire des spectres de puissance vis-à-vis du flux d'énergie est reportée, contraire aux prédictions de la turbulence faible. L'origine de cet écart réside dans le fait que le flux d'énergie arrivant dans le domaine capillaire est très inférieur à celui fourni par le vibreur, à cause de la dissipation en régime gravitaire [200]. Le déclin de la turbulence a aussi été étudié, montrant une simple décroissance exponentielle de toutes les composantes du spectre avec le même temps caractéristique [71], résultats similaires à ceux trouvés en Russie dans de l'hydrogène liquide [201, 202] et en accord avec les prédictions théoriques [203]. Des simulations numériques ont vérifié dans des situations idéales les propriétés prévues par la turbulence faible [204, 205] et précisé le rôle de la dissipation [206]. Des études résolues en temps et en espace ont permis de vérifier la validité de la relation de dispersion [60, 66, 207].

Le régime capillaire est donc dans l'ensemble relativement bien compris, même si quelques questions restent encore ouvertes, dont deux semblent particulièrement importantes :

- Est-il possible d'observer le spectre de Phillips en régime capillaire ? Si non, quel régime résulte d'un flux d'énergie mettant en défaut les hypothèses de la turbulence faible ?
- Quelle est l'origine de l'intermittence ? Pourquoi ne modifie-t-elle pas l'allure des spectres d'énergie ?

6.3.2 Régime gravitaire

La turbulence d'ondes en régime gravitaire étant peu perturbée par la dissipation, on pourrait s'attendre à ce qu'elle vérifie toutes les prédictions de la turbulence faible. Il se trouve que ce n'est pas du tout le cas. Dans le but de comprendre le comportement statistique de l'océan, la formation de vague à sa surface a été étudiée au travers de trois différentes approches :

- L'action d'un écoulement différentiel uniforme et stationnaire entre les deux phases remonte à Kelvin et Helmholtz. L'efficacité de cette instabilité dans le cas de l'océan a cependant rapidement été remise en cause, ne prédisant aucune onde de surface pour des vitesses de vent inférieures à $6.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Près d'un siècle plus tard, en 1957, Phillips proposa un mécanisme impliquant les fluctuations de pression dans la couche limite de l'écoulement turbulent de l'air [208].
- La même année, Miles considéra cette couche limite sous un autre angle : en négligeant ses fluctuations et en étudiant la manière dont elle est modifiée par la présence d'ondes de surface [209].

La vision actuelle (le « modèle de Miles-Phillips ») combine ces approches complémentaires de la couche limite et offre une vision satisfaisante même si encore incomplète et toujours étudiée d'un point de vue expérimental comme numérique. Quoi qu'il en soit, l'injection d'énergie par le vent n'est pas localisée dans le spectre, forçant sur une mer calme des longueurs d'onde allant du centimètre à quelques dizaines de centimètres, son interaction avec une surface hautement turbulente constituant une question ouverte. Conjugée à sa forte anisotropie et, dans les conditions naturelles, à son évolution dans le temps, il n'est pas surprenant que les mesures effectuées en mer [210], en lac [211] ou en soufflerie [212] s'écartent fortement des prédictions de la turbulence faible. En l'occurrence, les spectres de puissance évoluent avec les détails du forçage (direction, vitesse et constance du vent), pouvant être ajustés par des lois de puissance dont l'exposant varie entre $S_\eta(\omega) \propto \omega^{-4}$ et $S_\eta(\omega) \propto \omega^{-5}$, prédictions respectives de la turbulence faible et de Phillips pour les cascades directes. Il faut être conscient que ces spectres sont très raides, et leur étude se limite donc à une demi-décade en fréquence.

Pour clarifier la situation, des études contrôlées dans des grands bassins ont été menées en remplaçant l'effet du vent par des plans oscillants [194, 213–215]. L'équivalent dans des systèmes de taille réduite a été menée relativement proche de la fréquence capillaire [69]. Les spectres de puissance restent cependant dépendant du

forçage et hors des prédictions de la turbulence faible, qu'il s'agisse des spectres de puissance en un point $S_\eta(\omega)$ ou de mesures résolues en espace $S_\eta(k)$, contrairement aux simulations numériques directes [216] où les prédictions de la turbulence faible sont observées. Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer ce désaccord :

- La coexistence en régime stationnaire de structures cohérentes fortement non linéaires et de composantes aléatoires [64, 207, 214].
- Les effets de taille finie du domaine [217].
- La fluctuation du flux d'énergie injecté [218].
- Le type de forçage retenu [219].
- Des interactions non locales à trois ondes entre régimes gravitaire et capillaire [57, 66, 220].

La cascade inverse reste très peu étudiée, à cause notamment des limites pratiques dues à la taille du système (ou à sa profondeur en milieu naturel) ; exception faite de [221]. De nombreuses questions ouvertes persistent donc concernant la turbulence d'ondes en régime gravitaire, dont nous proposons une liste non exhaustive :

- Quel est l'effet du vent sur une mer turbulente ? Son injection d'énergie dans le domaine spectrale reste-t-elle confinée à une certaine échelle ?
- Quels sont les mécanismes dissipatifs efficaces à grande échelle dans l'océan : la conversion d'énergie en ondes internes, la dissipation visqueuse en volume, en surface ou au fond ?
- Quel est l'effet des régimes capillaire et gravitaire en eau peu profonde, limites respectivement haute fréquence et basse fréquence du régime gravitaire en eau profonde étudié ici ?
- La turbulence d'ondes purement gravitaire est-elle intermittente ? Si oui, quelle en est l'origine ?
- Quelle est la principale hypothèse mise en défaut en pratique (cf. liste ci-dessus) qui remet en question l'application de la turbulence faible ?
- Comment, dans l'océan, turbulence d'ondes et turbulence en volume interagissent ?

6.4 Grandes échelles en régime capillaire

Abordons maintenant les travaux que nous avons réalisés durant cette thèse, portant sur la turbulence d'ondes en régime capillaire. D'après la description en turbulence faible, une injection d'énergie mène à une cascade directe jusqu'à une échelle visqueuse, mais dans quel état sont les échelles spatiales *plus grandes* que celle du forçage (cf. Fig 6.9) ?

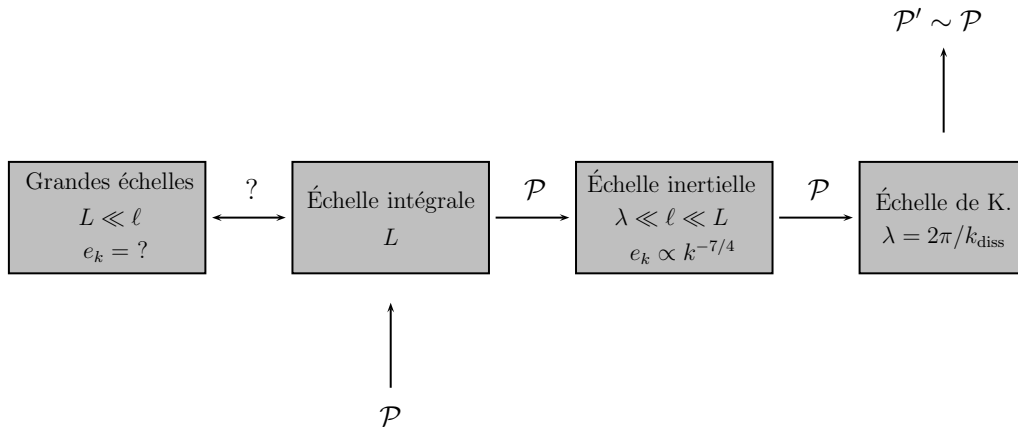


FIGURE 6.9 – Grandes échelles en turbulence d'ondes capillaires

Cette question fut initialement abordée en turbulence hydrodynamique 3D. Étant donné que dans la théorie de Kolmogorov aucun flux d'énergie ne va vers les grandes échelles, celles-ci furent proposées être à l'équilibre thermodynamique (cf. [222], p209). Les spectres devant se rejoindre, la température effective associée T_{eff} dépend de la puissance injectée et est des ordres de grandeur supérieure à la température ambiante : en égalisant (6.33)

et (6.9), on obtient

$$T_{\text{eff}} \sim \frac{\rho \epsilon^{2/3}}{k_B} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-11/3}. \quad (6.94)$$

Avec des valeurs typiques d'expériences de turbulence dans l'air, $\mathcal{P} = 100$ W, $L = 1$ m et $\rho = 1$ kg · m⁻³; on évalue $T_{\text{eff}} \sim 10^{21}$ K. Ce résultat a été récemment vérifié numériquement [223] mais reste toujours en attente de confirmation expérimentale.

En transposant le raisonnement à la turbulence d'ondes, on s'attend dans le cas capillaire à ce que les grandes échelles soient décrites par un état d'équilibre thermodynamique : il se trouve qu'il est même possible de démontrer ce résultat à l'aide du formalisme de Zakharov [224]. Cependant, à cause d'une dissipation importante, la seule expérience s'étant intéressé à ce problème observe un régime de cascade duale, où de l'énergie est transférée à la fois aux petites et grandes échelles [225], ce qui fut ensuite décrit théoriquement [226].

À l'aide d'un fluide de faible viscosité cinématique (du mercure) piégé dans une petite cavité par un ensemble de vibreurs, nous avons pu diminuer l'importance relative des phénomènes dissipatifs et observer pour la première fois cet état d'équilibre thermique en régime capillaire.

La publication associée figure dans *Physical Review Letters* [227] et sa version libre publiée sur arXiv est reproduite dans les pages suivantes.

Observation of thermal equilibrium in capillary wave turbulence

Guillaume Michel,* François Pétrélis, and Stéphan Fauve
*Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure, CNRS,
 Université P. et M. Curie, Université Paris Diderot, Paris, France*
 (Dated: January 30, 2017)

We consider capillary wave turbulence at scales larger than the forcing one. At such scales, our measurements show that the surface waves dynamics is the one of a thermal equilibrium state in which the effective temperature is related to the injected power. We characterize this evolution with a scaling law and report the statistical properties of the large-scale surface elevation depending on this effective temperature.

PACS numbers: 47.35.-i, 05.45.-a, 47.27.-i

Introduction. — One of the striking features of turbulence is the very wide range of time-scales over which the dynamics evolves, from less than 10^{-4} s up to several days in laboratory experiments (see *e.g.* [1]) and way more in astrophysical systems (~ 200 kyr for the mean time between reversals of the earth magnetic field, triggered by turbulent fluctuations). Until recently, these statistical properties of the flow were either related to the transfer of a quadratic conserved quantity through scales, the so-called Kolmogorov cascade and equivalents, or to the chaotic dynamics of a structure (*e.g.* reversal of a large-scale flow [1], motion of a shear layer in a von Kármán swirling flow [2], *etc.*). In the case of an homogeneous flow conserving a single quadratic invariant, namely energy, another scenario involving a thermal equilibrium state was referred to in order to describe scales larger than the forcing one (see [3], p209). This has been recently confirmed by numerical simulations [4] but is so far in lack of experimental evidence.

The very same description applies to surface wave turbulence, which consists in the statistical study of many interacting surface waves [5], an example of interest being the ocean. Again, most studies have focused on direct or inverse cascades (see *e.g.* [6, 7]) or on the dynamics of localized structures (rogue waves [8], Faraday patterns [9], solitons, *etc.*). If energy is the only quadratic conserved quantity, weak wave turbulence theory predicts its transfer to small scales through a direct cascade (similar to the Kolmogorov one), whereas it has been predicted that large scales are in thermal equilibrium [10]. Capillary waves are the simplest experimental system concerned by these predictions and experiments were carried out in a thin layer of liquid helium to study these large scales [12]. However, because of sizable dissipation at these scales, in place of the expected equilibrium state was another energy cascade. Such a regime of bidirectional energy cascade was later theoretically described in the framework of wave turbulence [13].

In this letter, we report the observation of a thermal equilibrium regime in capillary wave turbulence, we show that this out-of-equilibrium system can be fully described with an equilibrium statistics in the low frequency range.

This is achieved by using a large depth of fluid with low kinematic viscosity (mercury), hence reducing both viscous drag at the bottom and bulk dissipation. We describe the statistical properties of this state (energy spectrum and probability distribution function of the surface elevation) and show how the effective temperature can be related to the injected power sustaining the out-of-equilibrium state.

Equilibrium and out-of-equilibrium power spectra. —

Before describing the experiment, we briefly sum up theoretical results. In the limit of large depth, surface waves follow the dispersion relation

$$\omega^2 = gk + \left(\frac{\sigma}{\rho}\right) k^3, \quad (1)$$

where ω is the angular frequency, k is the wave number, g is the acceleration of gravity, ρ is the density of the fluid and σ is the surface tension. The gravity and capillary terms are equal at a frequency $f_{g.c.} = (2\pi)^{-1}(4\rho g^3/\sigma)^{1/4}$ and we thereafter consider waves at larger frequencies, *i.e.* capillary waves.

If the system is in thermodynamic equilibrium, the isotropic energy spectral density per unit density and per unit surface $e_k^{(1D)}$ is given by

$$e_k^{(1D)} dk = k_B T \times \frac{2\pi k dk}{(2\pi/L)^2} \times \frac{1}{\rho L^2} \implies e_k^{(1D)} = \frac{k_B T k}{2\pi \rho}. \quad (2)$$

$e_k^{(1D)}$ can be related to the power spectrum density of the surface elevation *via* $S_\eta(k) = (\sigma/\rho)^{-1} k^{-2} e_k^{(1D)}$,

$$S_\eta(k) = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-1} \frac{k_B T}{2\pi \rho} k^{-1}. \quad (3)$$

Using (1), the power spectrum density in the frequency domain $S_\eta(f) = 2\pi(dk/d\omega)S_\eta(k)$ is

$$S_\eta(f) = \frac{k_B T}{3\sigma \pi f}. \quad (4)$$

Thermal equilibrium of capillary waves with no external forcing (*i.e.* in which T is the room temperature)

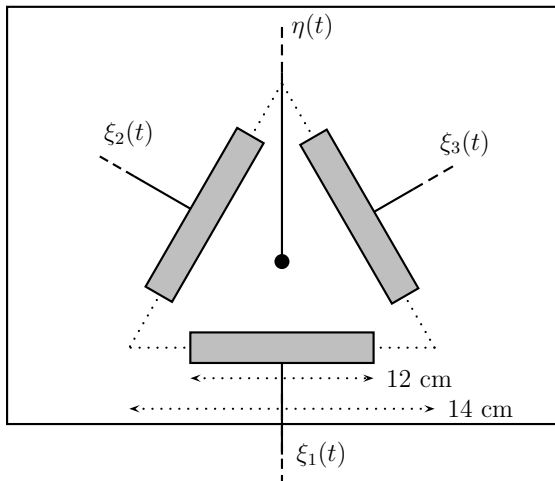


FIG. 1. Experimental setup, consisting in three wave-makers and a capacitive height sensor in a rectangular vessel.

has been measured by light scattering in the sixties, for instance to investigate the validity of (1) at high frequencies [14] or the behavior of surface tension in the vicinity of the liquid-vapor critical point [15].

On the other hand, if an energy input at a single frequency f_{inj} is considered, the system is no longer in thermal equilibrium but eventually reaches a non-equilibrium steady-state. It is then expected to display a direct energy cascade characterized by [16]

$$S_{\eta}(f) \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{1/6} f^{-17/6}, \quad (5)$$

where ϵ is the mean energy flux through scales (per unit mass and surface). Wave turbulence theory predicts that even if such a system is very far from equilibrium, (4) should still be observed in the range $f_{\text{g.c.}} < f < f_{\text{inj}}$ while (5) describes frequencies from f_{inj} up to a dissipative scale. Matching (4) and (5) at the single energy input scale of frequency f_{inj} gives

$$k_{\text{B}}T \sim \epsilon^{1/2} \sigma^{7/6} \rho^{-1/6} f_{\text{inj}}^{-11/6}, \quad (6)$$

that was obtained within the weak turbulence framework in [10]. Note that all these results are derived in the absence of gravity waves, which follow a different path since another quadratic quantity called wave action is conserved. From a practical point of view, they are expected to hold as long as the energy density at frequency $f_{\text{g.c.}}$ is small enough ((1) and (2) show that energy density increases with frequency in the thermal range). Finally, we point out that the derivation of (4) reduces surface waves to harmonic oscillators: at very high temperatures, non-linear corrections are expected.

Experimental setup and results. — The experimental setup consists of a rectangular plastic vessel ($225 \times 180 \times 45\text{mm}$) filled with mercury up to 30 mm. For this fluid,

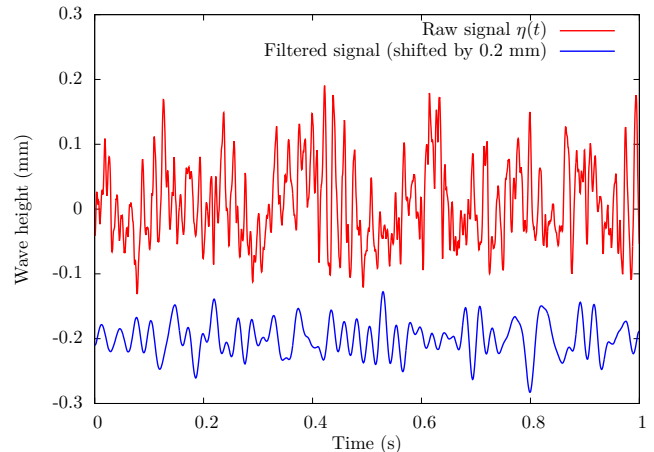


FIG. 2. (Color online) Typical elevation signal and filtered data ($f_{\text{inj}} = 50\text{Hz}$).

the density is $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, the surface tension is $\sigma = 0.485 \text{ N/m}$ and the kinematic viscosity is $\nu = 1.15 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. These parameters give $f_{\text{g.c.}} \simeq 16\text{Hz}$ and a corresponding wavelength of 12 mm, making drag friction at the bottom irrelevant. To get reproducible results, care has been taken to keep the surface free from pollution: similarly to clean water in which damping increases during approximately one hour until surface gets fully contaminated [11], oxydation affects mercury. This effect can be significantly reduced by cleaning the surface after every acquisition (every ten minutes).

Three wave-makers (oscillating paddles of size $120 \times 80 \times 4\text{mm}$ plunged 10 mm below the free surface) are placed regularly around a home-made capacitive height sensor (see Fig. 1). This size of cavity has been chosen so that the frequencies of the first eigenmodes are a few hertz, thus reducing substantially the gravity range. The diameter of the wire, 0.35mm, imposes a high-frequency cut-off of a few hundred Hertz. Each wave-maker is driven by a Brüel & Kjær 4810 shaker and its motion $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) is tracked with a Brüel & Kjær 4393 accelerometer. Functions $\xi_i(t)$ are different realizations of a random noise excitation supplied by a function generator (Agilent 33500B) and selected in a frequency range $f_{\text{inj}} - 200\text{Hz}$ by a SR 650 filter. Several forcing amplitudes and frequencies f_{inj} have been considered, the latter varying from 50 Hz to 100 Hz. After each acquisition, the motions of the wave-makers have been checked to be of similar power spectra, localized in the range $f_{\text{inj}} - 200\text{Hz}$. Finally, the wave height η and the accelerations $\ddot{\xi}_i$ are recorded with a NI acquisition card and 50 Hz electrical noise is filtered out and not considered in the following data treatments.

A typical elevation signal is shown in Fig. 2, together with the same sample filtered in the range $f_{\text{g.c.}}$ to $0.85f_{\text{inj}}$: we observe that a sizable amount of energy is located at frequencies lower than the forcing ones. In all the re-

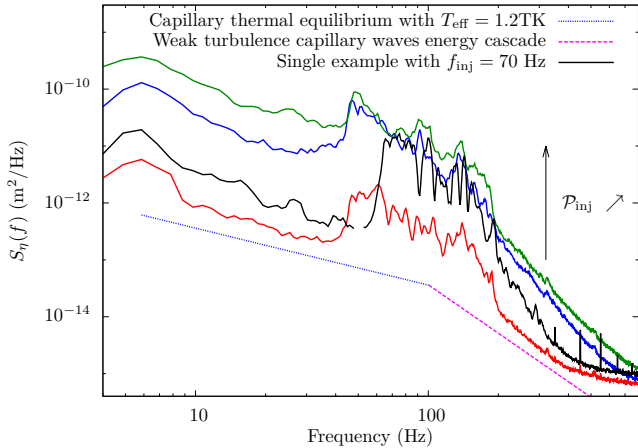


FIG. 3. (Color online) Power spectra of the wave height for three forcing amplitudes with the same bandwidth (50 to 200 Hz) and one from 70 to 200 Hz. A theoretical capillary thermal equilibrium state and direct energy cascade are shown in dotted and dashed lines. \mathcal{P}_{inj} is the mean injected power.

ported experiments, the standard deviation of the height signal $\sigma_\eta = \sqrt{\eta^2(t)}$ ranges from 0.02mm to 0.1mm, corresponding to significant typical steepnesses since the forcing is at high frequencies ($k_{\text{inj}}\sigma_\eta$ is between 0.04 and 0.2). Moreover, we checked that all the results presented here do not strongly rely on the specific value of the cutoff frequency $0.85f_{\text{inj}}$.

Four power spectra of the wave height η are displayed in Fig. 3 along with the theoretical ones of a thermal equilibrium state at temperature $T_{\text{eff}} = 1, 2.10^{12}\text{K}$ and of a direct energy cascade. They were obtained with $f_{\text{inj}} = 50\text{Hz}$ and different forcing amplitudes, or with $f_{\text{inj}} = 70\text{Hz}$. From $f_{\text{g.c.}}$ to the forcing frequency f_{inj} , they display a f^{-1} power-law, characteristic of a thermal equilibrium state. In some spectra the f^{-1} slope develops below $f_{\text{g.c.}}$: similarly to the gravity-capillary transition observed in surface wave turbulence forced at low frequencies, $f_{\text{g.c.}}$ is only an indicator of the crossover, that may reasonably differ from it (see *e.g.* [6]). From 200 Hz to a dissipative scale, another self-similar regime is observed. Because the energy flux is in practice not conserved during this energy cascade [17, 18] and as a consequence of the high-frequency cut-off of the measurement device, steeper power-laws than the theoretical scaling (5) are observed. This cascade has been the subject of an extensive literature over the past two decades and will not be further investigated here (see for instance [6, 18–22] and references therein).

For each of these spectrum, we compute the effective temperature by integrating the height power spectrum in the thermal range:

$$T_{\text{eff}} = \frac{3\pi\sigma}{k_B} \frac{\int_{f_{\text{g.c.}}}^{0.85f_{\text{inj}}} S_\eta(f)df}{\ln(0.85f_{\text{inj}}/f_{\text{g.c.}})} \quad (7)$$

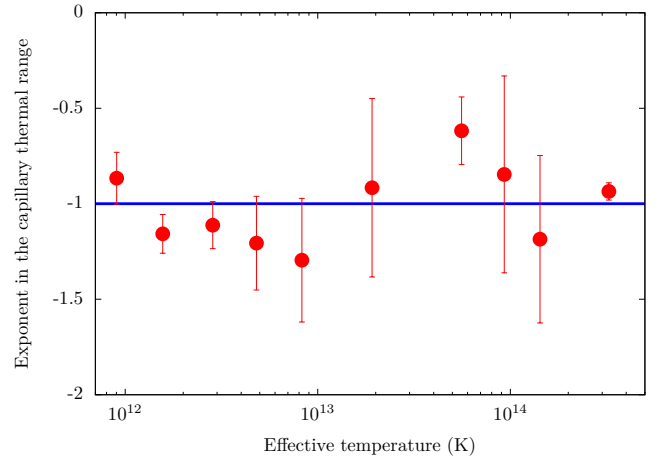


FIG. 4. Exponent of the large-scale range ($f_{\text{g.c.}}$ to $0.85f_{\text{inj}}$) as a function of the effective temperature.

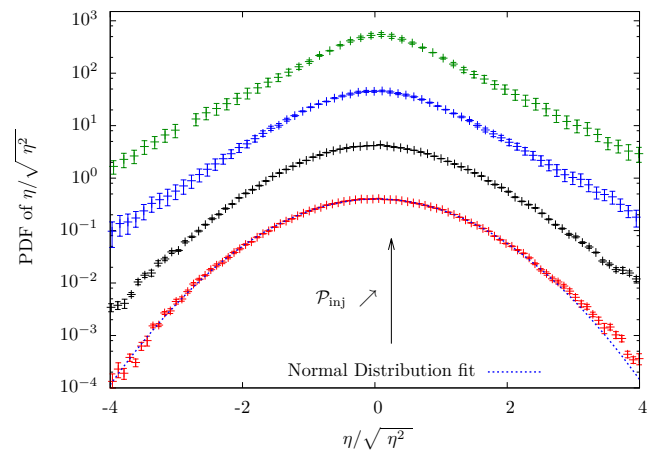


FIG. 5. (Color online) Probability density functions of the large-scale wave height for the spectra reported in Fig 4 (same color-key). Data and errorbars are multiplied by $\times 1$, $\times 10$, $\times 100$ and $\times 1000$ for clarity.

A fit by a normal distribution is shown in dotted line.

The power spectrum $S_\eta(f)$ is fitted by a power-law $\text{cst} \times f^\alpha$ in the same frequency range ($f_{\text{g.c.}}$ to $0.85f_{\text{inj}}$), and values of α are reported in Fig. 4. They stand close to -1, as expected for a thermal equilibrium range.

Four probability distribution functions (PDF) of the height signal filtered in the same range ($f_{\text{g.c.}}$ to $0.85f_{\text{inj}}$) and corresponding to the spectra reported in Fig. 3 are shown in Fig. 5. The PDF are found to be Gaussian at low forcing and tails turn to exponentials as the injected power increases. To be more precise the kurtosis of the signal, equal to 3 in the case of a normal distribution, is reported in Fig. 6 and is found to increase with the effective temperature, *i.e.* the steepness of the waves. The same phenomenon was reported in wave turbulence [6, 12] and ascribed to extreme events as rogue waves [23, 24], that can also take place in a thermal equilibrium state when the steepness of the waves is high

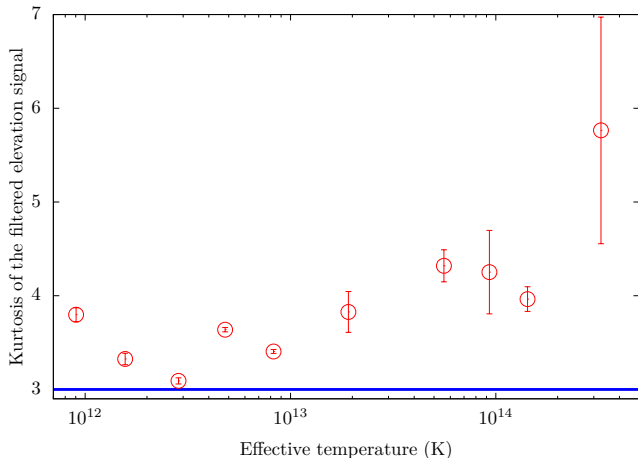


FIG. 6. Kurtosis of the probability density functions as a function of the effective temperature.

enough. Note that departure from a normal law is a sign of sizeable non-linear interactions between modes, as the central limit theorem fails in presence of correlated random variables. As for the other moments of this filtered signal, the standard deviation evolves as the square root of T_{eff} (a consequence of (7)) and the skewness is roughly constant and close to 0.20.

The sign of the skewness is related to the shape of the wave-trains: for gravity waves, non-linearities sharpen the crests and flatten the troughs [25], whereas the opposite occurs for capillary waves [26]. These phenomena directly reflect on the skewness of the PDF for a random wave field. A positive skewness is routinely observed in experiments of wave turbulence involving gravito-capillary waves [6, 20]. For pure capillary waves, these effects are scarce: a recent numerical simulation of capillary wave turbulence [22], even though involving large wave steepnesses (~ 0.3), has for instance not evidenced any negative skewness. In our experiments, the skewness is positive since the height spectra of the signal filtered between $f_{\text{g.c.}}$ and $0.85f_{\text{inj}}$ is dominated by components at $f_{\text{g.c.}}$, and vanishes as the low-pass filtering frequency increases.

We now consider the dependence of the effective temperature on the mean injected power \mathcal{P}_{inj} . This quantity is estimated from the measured velocities $\dot{\xi}_i$:

$$\mathcal{P}_{\text{inj}} \sim \rho S_{\text{w.m.}} (|\dot{\xi}_1|^3 + |\dot{\xi}_2|^3 + |\dot{\xi}_3|^3) \quad (8)$$

where $S_{\text{w.m.}} = 12.10^{-4} \text{ m}^2$ is the submerged section of each wave-maker. It should not be confused with the mean energy flux through scales ϵ of wave turbulence theory, as most of the injected energy drives bulk flows [17]. A careful experimental study of the relationship between these two quantities has evidenced the scaling $\mathcal{P}_{\text{inj}} \propto \rho \mathcal{S} \sqrt{\epsilon}$ (see [17]), and (6) thus predicts $k_{\text{B}}T \propto \mathcal{P}_{\text{inj}}$. Experimental data are reported in Fig. 7 and follow a linear law $T_{\text{eff}} \propto \mathcal{P}_{\text{inj}}$ over three decades.

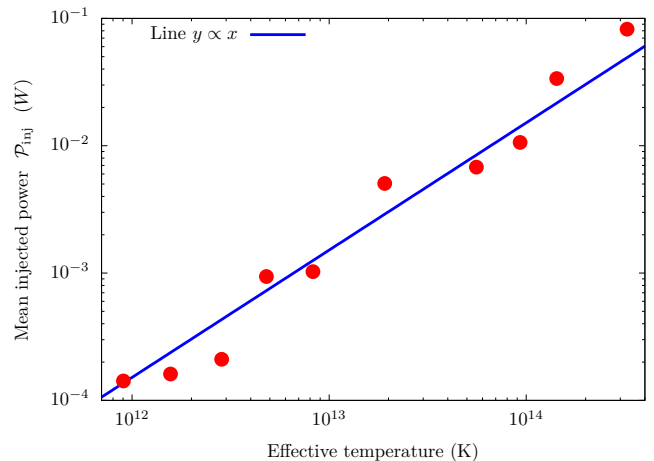


FIG. 7. Evolution of the mean injected power \mathcal{P}_{inj} with the effective temperature.

We finally discuss the role of dissipation. In wave turbulence, damping has been recognized as a source of discrepancy between theory (that assumes a dissipation localized in a restricted frequency range) and experiments, for surface waves [17] as well as for other wave fields (*e.g.* vibrating plates [27]), in which this hypothesis is not fulfilled. To be more precise, energy in weak wave turbulence theory is injected at a given frequency and fully transferred to a dissipative scale (similarly to the Kolmogorov picture of hydrodynamic turbulence), whereas it is essentially dissipated at the injection scale in experiments [17]. The latter description also applies in this experiment, one reason being that a f^{-1} height spectrum is not steep enough for low-frequency waves to reach a sizable amplitude, hence to dissipate a significant part of the injected energy. This can be seen from the dissipation spectrum $D_{\eta}(f)$, that characterizes the amount of energy dissipated by surface waves of frequency f [17]: $S_{\eta}(f) \propto f^{-1}$ leads to $D_{\eta}(f) \propto f^{5/3}$ or $D_{\eta}(f) \propto f^{3/2}$ depending on the source of dissipation considered (respectively viscosity in the bulk and surface contamination). Dissipating energy at the injection scales does not prevent the observation of the equilibrium range studied here: in contrast with an energy cascade whose aim is to eventually dissipate energy, the existence of the equilibrium range relies on the hypothesis that no energy is dissipated at these frequencies. It also constrains the setup for such observations: experiments have to be carried out in small vessels, with fluids of low kinematic viscosities and with a large number of efficient resonant interactions at injection scales, otherwise bidirectional energy cascades would be generated [12]. For instance, with our setup, we could not observe thermal equilibrium states if water was used instead of mercury, as well as if the forcing was narrow-band, monochromatic, too low or if $f_{\text{inj}} > 100\text{Hz}$.

Conclusion.— We experimentally evidenced a thermal equilibrium state over an out-of-equilibrium background in capillary wave turbulence. Its power spectrum density can be used to define an effective temperature that is strongly linked with the statistical properties of this range of scales (*e.g.* shape of the PDF) and to the ones of the out-of-equilibrium state (*e.g.* energy flux). The temperatures obtained are more than ten order of magnitudes higher than the room temperature and we emphasize that such equilibrium states display non-linear phenomena, such as strong coupling between modes. The precise conditions required for the observation of such equilibrium state, as well as the role of the transition to gravity waves remain open questions.

Being able to characterize some scales of an out-of-equilibrium system by equilibrium statistics seems promising. In particular, one may wonder if other tools of equilibrium statistical mechanics can be used. For instance the equation of state, the response coefficients and the fluctuation-dissipation relations could be investigated and compared to their equilibrium counterparts.

This work is supported by CNES and ANR-12-BS04-0005-02.

* email: guillaume.michel@ens.fr

- [1] J. Herault, F. Pétrélis and S. Fauve, EPL **111**, 44002 (2015).
- [2] F. Ravelet, A. Chiffaudel and F. Daviaud, J. Fluid. Mech. **601**, 339 (2008).
- [3] U. Frish, Cambridge University Press, Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov (Cambridge, England) (1963).
- [4] V. Dallas, S. Fauve and A. Alexakis, Phys. Rev. Lett. **115**, 204501 (2015).
- [5] S. Nazarenko, Wave Turbulence (2011).
- [6] E. Falcon, C. Laroche and S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **98**, 094503 (2007).
- [7] L. Deike, C. Laroche and E. Falcon, EPL **96**, 34004 (2011).
- [8] A. Chabcoub, N. P. Hoffmann and N. Akhmediev, Phys. Rev. Lett. **106**, 204502 (2011).
- [9] N. B. Tuffiaro, R. Ramshankar and J. P. Gollub, Phys. Rev. Lett. **62**, 422 (1989).
- [10] E. Balkovsky, G. Falkovich, V. Lebedev and I. Ya. Shapiro, Phys. Rev. E **52**, 4537 (1995).
- [11] W. G. Van Dorn, J. Fluid Mech. **24**, 769 (1966).
- [12] L. V. Abdurakhimov, M. Arefin, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, Yu. V. Lvov and I. A. Remizov, Phys. Rev. E **91**, 023021 (2015).
- [13] Yu. V. Lvov, H. Andy and G. V. Kolmakov, EPL **112**, 24004 (2015).
- [14] R. H. Katyl and U. Ingard, Phys. Rev. Lett. **20**, 248 (1968).
- [15] M. A. Bouchiat and J. Meunier, Phys. Rev. Lett. **23**, 752 (1969).
- [16] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, J. Appl. Mech. Tech. **8**, 37 (1967).
- [17] L. Deike, M. Berhanu and E. Falcon, Phys. Rev. E **89**, 023003 (2014).
- [18] Y. Pan and D. K. P. Yue, J. Fluid Mech. **780**, R1 (2015).
- [19] C. Falcón, E. Falcon, U. Bortolozzo and S. Fauve, EPL **86**, 14002 (2009).
- [20] E. Falcon and C. Laroche, EPL **95**, 34003 (2011).
- [21] E. Henry, P. Alstrom and M. T. Levinsen, EPL **52**, 27 (2000).
- [22] L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu and E. Falcon, Phys. Rev. Lett. **112**, 234501 (2014).
- [23] V. P. Ruban, Phys. Rev. E **74**, 036305 (2006).
- [24] M. Shats and H. Punzmann and H. Xia, Phys. Rev. Lett. **104**, 104503 (2010).
- [25] G. G. Stokes, Trans. Camb. Philo. Soc. **8**, 441 (1847).
- [26] G. D. Crapper, J. Fluid Mech. **2**, 532 (1957).
- [27] B. Miquel, A. Alexakis and N. Mordant, Phys. Rev. E **89**, 062925 (2014).

Conclusion

J'éprouve une sensation de douloureux effarement quand je plonge dans ces vieux bouquins : tant de travail pour tant d'oubli! [228]

Henri Bouasse (1866 - 1953)

Après avoir parcouru ce manuscrit, le lecteur sera je l'espère convaincu qu'une équation d'onde ne peut traiter correctement des effets des parois sur les ondes de surface. Sous cet aspect, les vagues sont fondamentalement différentes des autres ondes, pour lesquelles prescrire une condition aux limites suffit, qu'il s'agisse de la vibration d'une corde, du son dans un instrument à vent ou encore de la réfraction de la lumière par un dioptre. Quelques années de mécanique des fluides mènent souvent à conclure qu'il doit s'agir d'un effet des non-linéarités intrinsèques à la discipline : cela est cependant faux, tous les résultats du chapitre 1 ayant été obtenus en négligeant le terme en $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$. L'origine réelle du problème est que la dynamique d'une interface ne traduit qu'une partie des écoulements en volume, et ce sont ces derniers que les parois contraignent. Il devient alors nécessaire de retourner aux équations de Navier-Stokes pour décrire le champ de vitesse dans l'intégralité du fluide.

En vue d'isoler les phénomènes dominants associés aux parois, il est instructif de comparer les échelles spatiales d'une onde en milieu infini (amplitude η et longueur d'onde $2\pi/k$) à celles ajoutées par la présence d'obstacles. La première d'entre elles est la longueur capillaire ℓ_c , c'est-à-dire la hauteur du ménisque. Lorsqu'elle devient comparable à l'amplitude ou à la longueur d'onde, on s'attend à un effet important du mouillage sur la dynamique du problème : cela fut abordé aux chapitres 2 et 3, où nous avons mesuré la dissipation additionnelle qu'il cause. De manière surprenante, les phénomènes dissipatifs associés au ménisque impliquent une autre distance caractéristique liée aux parois, à savoir l'épaisseur des couches limites visqueuses $\delta = \sqrt{\nu/\omega}$. Des effets non linéaires entrent en jeu dès que l'amplitude de l'onde l'atteint, du moins en situation de mouillage total, cf. chapitre 3. Dans les situations courantes, δ est de l'ordre d'une fraction de millimètre et l'atténuation du ballonnement est ainsi rarement modélisable par une loi linéaire. En mouillage partiel, il existe une amplitude seuil à partir de laquelle le ménisque se met en mouvement. Ce régime n'a pas été quantifié durant cette thèse, mais implique quant à lui les détails topographiques et chimiques de la paroi : les échelles de rugosité ou, le cas échéant, d'inhomogénéité chimique, sont alors à considérer. Une étude rigoureusement analogue à celle du chapitre 2 pourrait être menée, le dispositif expérimental étant maintenant établi. Il serait par exemple intéressant de comparer l'évolution du coefficient de réflexion d'une onde gravito-capillaire sur une surface plus ou moins poreuse, homogène ou même inclinée en fonction du rapport entre l'échelle spatiale supplémentaire et l'amplitude (ou la longueur d'onde) de l'onde incidente. Toutes les études de ce type ont été initiées depuis longtemps théoriquement et numériquement (*e.g.* [229–231]) mais manquent cruellement de données expérimentales.

Le cas du couplage entre un objet en mouvement et le champ d'ondes est abordé différemment suivant le rapport entre la vitesse de la paroi et celle des ondes de surface (le nombre de Mach). Pour des faibles nombres de Mach, l'oscillation d'une surface d'amplitude ΔX ajoute une nouvelle échelle spatiale et a été étudiée au chapitre 4 : l'effet Doppler modifie notablement les ondes réfléchies si $k\Delta X \gtrsim 1$. De nombreuses questions restent ouvertes à ce sujet, notamment concernant l'influence de ces échanges d'énergie sur les expériences de turbulence d'ondes ou encore du rôle du ménisque pour les ondes gravito-capillaires. Les voies les plus prometteuses pour traiter ces problèmes me semblent différentes. Des simulations numériques directes seraient à même de calculer le spectre d'énergie d'un ensemble d'ondes gravitaires enfermées dans une cavité oscillante, l'avantage étant de supprimer les effets capillaires et de pouvoir se placer dans la limite jointe de faibles forçage et viscosité. Ceci est

d'autant plus vrai qu'une étude unidimensionnelle (champ de vitesse $v(x, y, t)$) suffirait d'une part à répondre à la question posée, d'autre part serait plus simple à coder et plus rapide à exécuter, et enfin permettrait de s'affranchir des interactions résonantes entre ondes, quasi inexistantes à 1D. Appliquer la théorie de la turbulence faible à ce problème est aussi envisageable théoriquement [232]. L'extension à l'effet Doppler à des ondes gravito-capillaires par la prise en compte du ménisque est en revanche un projet purement expérimental, le dispositif acoustique développé s'y prêtant d'ailleurs bien. Les considérations théoriques ayant recouru à une condition aux limites artificielles n'ont pour l'instant mené à aucun résultat applicable, et des simulations numériques de ce problème sont irréalistes, la dynamique du ménisque comportant bien trop d'échelles spatiales.

Sortir de la limite des faibles Mach ouvre de nouvelles perspectives. La principale application de ce régime est de décrire la génération d'ondes de surface par des corps en mouvement. Pour des ondes gravitaires, il s'agit du problème de l'angle de Kelvin, récemment revisité [233]. Une question qui m'intrigue est la transposition de ce résultat pour les ondes gravito-capillaires, plus précisément concernant la force résistive due aux vagues aux nombres de Mach proches de l'unité. Une définition plus précise de ce nombre est alors nécessaire, étant donné le phénomène de dispersion, et on définit par la suite $Ma = v/c_{\min}$ comme le rapport entre la vitesse de l'objet et la vitesse de phase minimale des ondes de surface¹⁸. Raphaël et de Gennes ont montré que dans la limite inviscide, la résistance de vague est nulle pour $Ma < 1$, discontinue en $Ma = 1$ puis croît progressivement [234]. Cet effet est rigoureusement analogue aux ondes de choc émises par un objet en mouvement à des nombres de Mach acoustiques supérieurs à l'unité, ou encore à l'effet Cherenkov lorsqu'une particule chargée dépasse la vitesse de la lumière dans un milieu matériel. L'ajout de viscosité régularise la discontinuité, la déformation de surface induite par le déplacement dissipant de l'énergie à défaut de l'envoyer à l'infini (mécanisme de la résistance de vague inviscide à $Ma \geq 1$) [235]. Les quelques expériences existantes sur le sujet [236–238] montrent des comportements différents de ceux prédits théoriquement autour de $Ma = 1$, des études ultérieures proposant des raisons à cet écart [239, 240], mais n'offrant toujours pas d'accord quantitatif. Une approche expérimentale pouvant résoudre ce problème serait de translater un fil capacitif à vitesse constante dans de l'eau tout en mesurant la force : l'intérêt de ce dispositif est qu'il permet l'acquisition directe de l'élévation de surface au niveau de l'objet en mouvement, inconnue dans les expériences antérieures. Il serait alors possible de comparer quantitativement la théorie à l'expérience, et idéalement de déterminer l'origine des différences. Il s'agit aussi d'une autre expérience de mouillage dynamique, mesurant le déplacement de la ligne triple et ses différents régimes (ménisque fixe ou oscillant) en fonction de la vitesse de translation de l'objet.

Les derniers chapitres de cette thèse portent sur les interactions entre paquets d'ondes. Là encore, l'influence des parois se fait sentir et peut modifier la nature de ces résonances, ce fut l'objet du chapitre 5, la partie expérimentale associée étant toujours en cours. D'autres effets de même nature pourraient être évoqués. Par exemple, étant donné l'importance des modes localisés sur les interactions entre ondes et parois, il me paraît indispensable d'aborder leurs couplages sous l'action des non-linéarités, pour l'instant totalement inconnu. Il est d'ailleurs surprenant que ce domaine soit encore vierge, le calcul des interactions résonantes pourrait être mené comme présenté au chapitre 5, les expériences seraient quant à elles à même de décrire comment ces résultats influencent des instabilités liées aux parois, *e.g.* la création de *cross waves*¹⁹. De plus, alors que les modes localisés considérés jusqu'ici sont stationnaires en z car associés à un transfert de quantité de mouvement nul suivant la verticale, il serait motivant de déterminer comment exciter des modes localisés progressifs vers le fond, pouvant transférer de l'énergie des ondes de surface vers un écoulement en volume (ou inversement).

Pour ouvrir la problématique aux ondes de surface en milieu infini, la turbulence d'ondes a été présentée au chapitre 6 ainsi que son lien avec les états d'équilibre thermique. Les difficultés rencontrées par la théorie de la turbulence faible pour décrire le régime gravitaire sont à l'heure actuelle essentiellement inexplicées, la cause principale de ce désaccord n'ayant pas encore été isolée parmi les nombreux candidats proposés. C'est principalement aux expérimentateurs et aux numériciens qu'il incombe maintenant de mener des travaux innovants pouvant faire avancer la recherche dans ce domaine. Décrire plus finement la cascade inverse gravitaire me paraît être une priorité, une seule étude expérimentale l'ayant pour l'instant observée [221], à opposer aux nombreuses études de la cascade directe. Une méthode originale pour cela serait de mesurer les vagues à la surface d'azote liquide, les avantages étant multiples. D'une part, la transition de phase servirait de forçage uniforme sur toute la surface, contrairement aux plans oscillants habituels. D'autre part, le renouvellement continu de

18. $c_{\min} = (4g\sigma/\rho)^{1/4}$, soit $23 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'eau.

19. Lorsqu'une plaque partiellement immergée oscille trop intensément, on observe une instabilité transverse assimilée à l'instabilité de Faraday, cf. [241] et références.

l'interface devrait la maintenir propre et ainsi diminuer la dissipation. Enfin, la longueur capillaire de l'azote liquide est trois fois plus faible que celle de l'eau, permettant d'accéder à une gamme inertielle conséquente avec une expérience dont la taille reste raisonnable. Un peu de travail serait certes nécessaire pour mesurer l'état de la surface, mais une technique de déflexion d'un faisceau laser est envisageable.

L'aspect familier des ondes de surface ne doit pas masquer les nombreuses questions ouvertes les concernant. La liste esquissée ci-dessus est loin d'être exhaustive : les transferts d'énergie en régime fortement non linéaire (*e.g.* par déferlement), l'effet du vent ou encore le couplage à un écoulement en volume sont autant de problèmes à la fois simples à énoncer et difficiles à résoudre. Quant au mouillage, l'origine de la transition vers un amortissement non linéaire en mouillage total n'a pas été élucidée et au-delà aucun résultat n'est connu. Ne sachant caractériser dans ce régime les oscillations de plus d'une fraction de millimètre, dois-je détailler l'état de l'art en mouillage partiel? Mais restons optimistes, si l'homme a réussi à aller sur la lune, il finira bien par comprendre ce qu'il se passe dans un verre d'eau.

Annexe A

Quelques résultats sur les fonctions de Bessel

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) est l'un des plus grands astronomes du XIX^e siècle. Il est connu pour ses travaux sur l'étude du mouvement des étoiles, la mesure de distances stellaires et la détermination d'un référentiel « le plus galiléen possible » [242]. En l'occurrence, c'est lors d'un calcul perturbatif s'intéressant aux conséquences du mouvement du soleil sous l'effet des autres astres sur l'orbite d'une planète que Bessel rencontre puis étudie les fonctions qui portent son nom.

Ces fonctions sont connues depuis « la famille Bernoulli »¹, qui les rencontre au travers d'équations différentielles non linéaires ainsi que durant la mise en équation du mouvement d'une chaîne massique accrochée à une extrémité. L'établissement de l'équation de d'Alembert donne une autre dimension au problème, Euler traitant rapidement le cas de conditions aux limites circulaires, impliquant des fonctions de Bessel (plus tard, Euler les retrouve lors de l'étude du flambage d'une tige circulaire). Dans le même registre, Fourier aboutit à ces fonctions pour la diffusion thermique au sein d'un cylindre, puis Poisson en considérant le refroidissement d'une sphère. Tous ces travaux établissent une grande partie des résultats sur les fonctions de Bessel, mais c'est à Bessel que l'on doit leur étude systématique, concluant son mémoire par des tables de $J_0(x)$ et $J_1(x)$ pour 320 valeurs de x entre 0 et 3.2 avec dix décimales [243]!

De nos jours, les fonctions de Bessel sont le plus souvent rencontrées en physique lors de la résolution de problème ondulatoire avec conditions aux limites circulaires ou cylindriques (tâche d'Airy, modes de vibration d'un tambour, vagues ou particule quantique dans un récipient circulaire, guide d'onde cylindrique, etc.).

On définit les fonctions de Bessel comme les solutions de l'équation différentielle

$$f''(x)x^2 + f'(x)x + (x^2 - n^2)f(x) = 0, \quad (\text{A.1})$$

où n est un nombre complexe. Ici, nous nous restreignons aux cas où n est entier et la solution définie en zéro² : on parle de fonction de Bessel de première espèce d'ordre n , notée $J_n(x)$. $J_n(x)$ est liée à des intégrales impliquant des fonctions trigonométriques, rencontrées dans les calculs de diffraction par une ouverture circulaire

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin \tau) d\tau = (-1)^n J_{-n}(x). \quad (\text{A.2})$$

Les différents ordres des fonctions de Bessel sont reliés par des relations de récurrence, entre autres

$$\begin{cases} J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), & (\text{A.3}) \\ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J'_n(x). & (\text{A.4}) \end{cases}$$

1. Pour situer chronologiquement les noms de ce paragraphe : John Bernoulli (1667-1748), son fils Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Fourier (1768-1830), Siméon Denis Poisson (1781-1840).

2. Il existe une classe de fonctions qui divergent en 0, les fonctions de Bessel de seconde espèce Y_n .

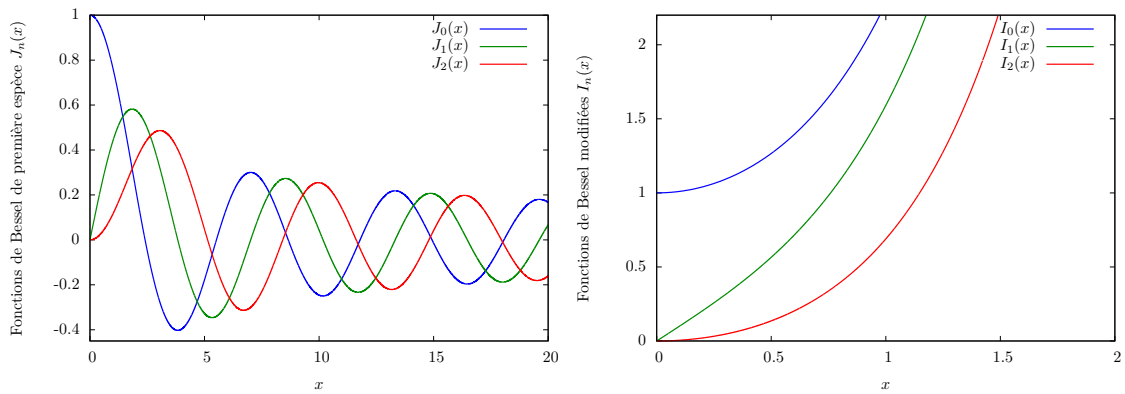
Les « identités de Jacobi-Anger » associent les fonctions de Bessel à une décomposition harmonique :

$$e^{iA \sin(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(A) e^{in\omega t}, \quad e^{iA \cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(A) e^{in\omega t}. \quad (\text{A.5})$$

Enfin, le comportement de ces fonctions au voisinage de zéro est donné par

$$J_n(x) \underset{x \ll 1}{\sim} \frac{x^n}{2^n n!}. \quad (\text{A.6})$$

Un graphe de $J_0(x)$, $J_1(x)$ et $J_2(x)$ est représenté Fig. A.1(a)



(a) Graphe des premières fonctions de Bessel

(b) Graphe des premières fonctions de Bessel modifiées

FIGURE A.1 – Graphe des premières fonctions de Bessel

Le pendant hyperbolique des fonctions de Bessel constitue les fonctions de Bessel modifiées, quant à elles définies comme solutions de l'équation différentielle

$$f''(x)x^2 + f'(x)x - (x^2 + n^2)f(x) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Nous nous restreignons encore à des valeurs entières de n et des solutions définies en zéro³ : il s'agit des I_n , nommées fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre n . Leur développement en série entière est

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}. \quad (\text{A.8})$$

Ces fonctions peuvent être vues comme une extension aux arguments complexes des fonctions J_n :

$$J_n(ix) = i^n I_n(x). \quad (\text{A.9})$$

En utilisant l'une des deux expressions précédentes, on montre

$$I_{-n}(x) = I_n(x) = (-1)^n I_n(-x). \quad (\text{A.10})$$

Ces égalités nous permettent enfin d'écrire l'équivalent des identités de Jacobi-Anger, où réside l'intérêt principale de ces fonctions en ce qui nous concerne :

$$e^{A \sin(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n I_n(A) e^{in\omega t}, \quad e^{A \cos(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(A) e^{in\omega t}, \quad (\text{A.11})$$

Les fonctions $I_0(x)$, $I_1(x)$ et $I_2(x)$ sont tracées Fig. A.1(b).

3. Les autres fonctions, divergeant en zéro, sont les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce K_n .

Annexe B

Détail des étapes calculatoires

Annexe au chapitre 2, §2.2.5

Il s'agit d'expliciter une moyenne spatiale sur un disque Σ de rayon R de la fonction $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \cos(\omega_v t - k_v x)$.

$$\pi R^2 \langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_\Sigma = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \xi(x, t) \quad (\text{B.1})$$

$$= 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2 - x^2} \xi(x, t) \quad (\text{B.2})$$

$$= 2\xi_0 \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2 - x^2} (\cos(\omega_v t) \cos(k_v x) + \sin(\omega_v t) \sin(k_v x)) \quad (\text{B.3})$$

$$= 2\xi_0 \cos(\omega_v t) \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2 - x^2} \cos(k_v x) \quad (\text{B.4})$$

$$= 4\xi_0 \cos(\omega_v t) \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} \cos(k_v x) \quad (\text{B.5})$$

Cette intégrale se calcule en effectuant un changement de variable $x = R \sin(\theta)$ puis en utilisant les relations intégrale et de récurrence sur les fonctions de Bessel (respectivement (A.2) et (A.3)) :

$$\pi R^2 \langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_\Sigma = 4\xi_0 \cos(\omega_v t) \int_0^R dx \sqrt{R^2 - x^2} \cos(k_v x) \quad (\text{B.6})$$

$$= 4\xi_0 \cos(\omega_v t) R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2(\theta) \cos(k_v \sin(\theta)) \quad (\text{B.7})$$

$$= 2\xi_0 \cos(\omega_v t) R^2 \int_0^\pi d\theta \cos^2(\theta) \cos(k_v \sin(\theta)) \quad (\text{B.8})$$

$$= \xi_0 \cos(\omega_v t) R^2 \int_0^\pi d\theta (1 + \cos(2\theta)) \cos(k_v \sin(\theta)) \quad (\text{B.9})$$

$$= \xi_0 \cos(\omega_v t) R^2 \left(\int_0^\pi d\theta \cos(k_v \sin(\theta)) + \int_0^\pi d\theta \cos(k_v \sin(\theta) - 2\theta) \right) \quad (\text{B.10})$$

$$= \xi_0 \cos(\omega_v t) R^2 \pi (J_0(Rk_v) + J_2(Rk_v)) \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{2\pi R J_1(Rk_v)}{k_v} \xi_0 \cos(\omega_v t) \quad (\text{B.12})$$

Nous aboutissons à une expression pour la moyenne spatiale,

$$\boxed{\langle \xi(\vec{r}, t) \rangle_\Sigma = \frac{2\xi_0 J_1(k_v R)}{k_v R} \cos(\omega_v t)} \quad (\text{B.13})$$

Annexe au chapitre 3 : oscillateurs non linéaires

Nous détaillons dans cette annexe quelques propriétés des oscillateurs non linéaires les plus classiques, où un terme quadratique corrige respectivement la force de rappel (oscillateur de Duffing) ou la dissipation (oscillateur de type Van der Pol).

Oscillateur de Duffing

Un oscillateur de Duffing suit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x(1 + \alpha x^2) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) = \frac{F_0}{2m} e^{i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (\text{B.14})$$

où c.c. désigne le complexe conjugué. On étudie les premiers effets des non-linéarités en définissant

$$x(t) = \sqrt{\epsilon} (x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots), \quad (\text{B.15})$$

avec $F_0/(2m) = f_0 = \sqrt{\epsilon}\mathcal{F}$. Il vient à l'ordre le plus bas

$$x_0(t) = \frac{\mathcal{F}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} e^{i\omega t} + \text{c.c.} = \mathcal{F}X_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{B.16})$$

Le calcul de l'ordre suivant mène à une équation différentielle pour $x_1(t)$,

$$\ddot{x}_1 + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 \alpha x_0^3 = -3\mathcal{F}^3 \omega_0^2 \alpha |X_0|^2 X_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.} + \text{h.r.}, \quad (\text{B.17})$$

où h.r. représente les termes hors résonance. D'où

$$x_1(t) = -3\mathcal{F}^3 \omega_0^2 \alpha |X_0|^2 X_0^2 e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{B.18})$$

Nous pouvons finalement évaluer la grandeur d'intérêt :

$$x(t) = \sqrt{\epsilon}\mathcal{F} (X_0 - 3\epsilon\mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^2 X_0^2) e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{B.19})$$

En définissant la résonance comme le lieu d'un déphasage de $-\pi/2$ par rapport au forçage, la recherche consiste à annuler la partie réelle du terme entre parenthèses et à étudier comment les parties réelles et imaginaires évoluent autour de ce point. On pose

$$R = \text{Re} (X_0 - 3\epsilon\mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^2 X_0^2), \quad (\text{B.20})$$

qui se simplifie en

$$R = |X_0|^2 \text{Re} \left((\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega\omega_0}{Q} - 3\epsilon\mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) - i\frac{\omega\omega_0}{Q} \right\}^2 \right), \quad (\text{B.21})$$

c'est-à-dire

$$R = |X_0|^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2) - 3\epsilon\mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\omega\omega_0}{Q} \right)^2 \right\} \right). \quad (\text{B.22})$$

On commence par chercher la résonance, telle que $R(\omega_r) = 0$, en posant pour cela $\omega_r = \omega_0 + \epsilon\bar{\omega}$. Au premier ordre en ϵ , il vient

$$0 = -2\omega_0\bar{\omega} - 3\mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^4 \left(-\frac{\omega_0^4}{Q^2} \right). \quad (\text{B.23})$$

À l'ordre zéro en ϵ , on a de plus $|X_0|^2 = Q^2/\omega_0^4$, d'où

$$\boxed{\frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{3Q^2}{2} \frac{\mathcal{F}^2 \alpha}{\omega_0^4} \implies \omega_r = \omega_0 \left(1 + \frac{3Q^2}{8} \frac{\mathcal{F}^2 \alpha}{m^2 \omega_0^4} \right)} \quad (\text{B.24})$$

un résultat classique sur l'oscillateur de Duffing. Si on veut aller plus loin, il faut évaluer la partie imaginaire de la réponse à résonance, pour en déduire l'amplitude à résonance ainsi que l'évolution de la phase ; on définit pour cela

$$I = \text{Im} \left(X_0 - 3\epsilon \mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^2 X_0 \right). \quad (\text{B.25})$$

De même, on calcule

$$I = |X_0|^2 \text{Im} \left((\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega \omega_0}{Q} - 3\epsilon \mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega \omega_0}{Q} \right\}^2 \right), \quad (\text{B.26})$$

et

$$I = |X_0|^2 \left(-\frac{\omega \omega_0}{Q} - 3\epsilon \mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^4 \left\{ -2(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\omega \omega_0}{Q} \right\} \right). \quad (\text{B.27})$$

Le second terme de la parenthèse est en ϵ^2 en remarquant $(\omega_0^2 - \omega^2) \propto (\omega - \omega_0)$

$$I = |X_0|^2 \left(-\frac{\omega \omega_0}{Q} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right). \quad (\text{B.28})$$

Si l'on s'intéresse à l'amplitude à résonance, il vient

$$x(t) \underset{\omega=\omega_r}{=} \sqrt{\epsilon} \mathcal{F} I e^{i\omega_r t} + \text{c.c.}, \quad (\text{B.29})$$

et l'amplitude à résonance vaut donc, avec $\omega = \omega_0 + \epsilon \bar{\omega}$

$$\frac{\sqrt{\epsilon} \mathcal{F}}{2} |I| = \frac{\sqrt{\epsilon} \mathcal{F}}{2} |X_0|^2 \left(\frac{\omega_0^2}{Q} \right) \left(1 + \frac{\epsilon \bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right). \quad (\text{B.30})$$

En explicitant $|X_0|^2 = \frac{Q^2}{\omega_0^4} (1 - 2\frac{\epsilon \bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2))$, on déduit

$$\frac{\sqrt{\epsilon} \mathcal{F}}{2} |I| = \frac{\sqrt{\epsilon} \mathcal{F}}{2} \frac{Q}{\omega_0^2} \left(1 - 2\frac{\epsilon \bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left(1 + \frac{\epsilon \bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right), \quad (\text{B.31})$$

i.e., avec $x(t) = R \cos(\omega t) - I \sin(\omega t)$,

$$\boxed{x(t) \underset{\omega=\omega_r}{=} \frac{F_0 Q}{m \omega_0^2} \left(1 - \frac{3Q^2}{8} \frac{F_0^2 \alpha}{m^2 \omega_0^4} \right) \sin(\omega_r t)} \quad (\text{B.32})$$

Enfin, on peut s'intéresser à l'évolution de la phase ϕ près de la résonance, donnée par

$$\tan(\phi) = \frac{I}{R}. \quad (\text{B.33})$$

Étant donné que $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ à la résonance, on évalue plutôt $\varphi = \phi + \frac{\pi}{2}$ *via*

$$\tan(\varphi) = \frac{-1}{\tan(\phi)} = \frac{-R}{I}. \quad (\text{B.34})$$

On se place infiniment proche de la résonance, dans un domaine où la phase évolue donc linéairement suivant

$$\varphi \simeq \frac{-R}{I} \simeq 0 + -C \times (\omega - \omega_r), \quad (\text{B.35})$$

et on cherche cette constante C . Ainsi,

$$\varphi(\omega = \omega_r + \delta\omega) = \frac{-\delta\omega (\partial R / \partial \omega)(\omega = \omega_r)}{I(\omega = \omega_r)} \rightarrow C = \frac{(\partial R / \partial \omega)(\omega = \omega_r)}{I(\omega = \omega_r)}, \quad (\text{B.36})$$

I et R comprennent un pré-facteur $|X_0|^2$ qui se simplifie, d'où

$$C = \frac{\partial_\omega \left((\omega_0^2 - \omega^2) - 3\epsilon \mathcal{F}^2 \omega_0^2 \alpha |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2 \right\} \right)}{\left(-\frac{\omega \omega_0}{Q} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right)}. \quad (\text{B.37})$$

On reste au premier ordre en ϵ au numérateur et au dénominateur

$$C = -\frac{Q}{\omega_0^2} \frac{\left(-2\omega_0(1 + \epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) - 3\epsilon \mathcal{F}^2 \alpha \omega_0^2 \left\{ -2\frac{Q^4}{\omega_0^8} \left(\frac{\omega_0^3}{Q^2} \right) + 4\left(\frac{Q^4}{\omega_0^8} \right) \frac{\omega_0^4}{Q^2} \right\} \right)}{1 + \epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}, \quad (\text{B.38})$$

i.e.

$$C = \frac{2Q}{\omega_0} \frac{\left(1 + \epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) + 3\epsilon \mathcal{F}^2 \alpha \omega_0 \frac{Q^4}{\omega_0^8} \frac{\omega_0^3}{Q^2} \right)}{1 + \epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}. \quad (\text{B.39})$$

On retrouve $\bar{\omega}/\omega_0$,

$$C = \frac{2Q}{\omega_0} \frac{\left(1 + \epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) + 2\epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} \right)}{1 + \epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}, \quad (\text{B.40})$$

d'où

$$C = \frac{2Q}{\omega_0} \left(1 + 2\epsilon \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} \right) = \frac{2Q}{\omega_0} \left(1 + \frac{3Q^2}{4} \frac{F_0^2 \alpha}{m^2 \omega_0^4} \right) \quad (\text{B.41})$$

Conclusion : pour l'oscillateur de Duffing, tout se passe au niveau faiblement non linéaire comme si

$$\omega_0 \implies \omega_0 \left(1 + \frac{3Q^2}{8} \frac{F_0^2 \alpha}{m^2 \omega_0^4} \right) \quad (\text{B.42a})$$

$$F_0 \implies F_0 \left(1 - \frac{3Q^2}{8} \frac{F_0^2 \alpha}{m^2 \omega_0^4} \right) \quad (\text{B.42b})$$

$$\frac{Q}{\omega_0} \implies \frac{Q}{\omega_0} \left(1 + \frac{3Q^2}{4} \frac{F_0^2 \alpha}{m^2 \omega_0^4} \right) \quad (\text{B.42c})$$

Ce modèle ne convient pas pour le premier mode de ballonnement, car prédit une évolution au même ordre de la pulsation de résonance et de la dissipation (alors que ω_0 est trouvée constante dans l'expérience).

Oscillateur « type Van der Pol » forcé

Considérons maintenant une non-linéarité portant sur la dissipation,

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}(1 + \beta x^2) + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) = \frac{F_0}{2m} e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{B.43})$$

On étudie le problème de la même manière, en définissant

$$x(t) = \sqrt{\epsilon} (x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots), \quad (\text{B.44})$$

avec $F_0/(2m) = f_0 = \sqrt{\epsilon} \mathcal{F}$. Il vient alors

$$x_0(t) = \frac{\mathcal{F}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} e^{i\omega t} + \text{c.c.} = \mathcal{F} X_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.}, \quad (\text{B.45})$$

puis

$$\ddot{x}_1 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{\omega_0}{Q} \beta \dot{x}_0 x_0^2 = -\frac{\omega_0}{Q} \beta i \omega \mathcal{F}^3 |X_0|^2 X_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.} + \text{h.r.} \quad (\text{B.46})$$

Cette nouvelle composante sera donc déphasée de $\pi/2$ par rapport au cas de l'oscillateur de Duffing :

$$x_1(t) = -\frac{\omega_0}{Q} \beta i \omega \mathcal{F}^3 |X_0|^2 X_0^2 e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{B.47})$$

On retourne à la grandeur d'intérêt :

$$x(t) = \sqrt{\epsilon} \mathcal{F} \left(X_0 - \epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta i \omega \mathcal{F}^2 |X_0|^2 X_0^2 \right) e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad (\text{B.48})$$

Tout comme précédemment, on étudie

$$R = \text{Re} \left(X_0 - \epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta i \omega \mathcal{F}^2 |X_0|^2 X_0^2 \right), \quad (\text{B.49})$$

qui se simplifie en

$$R = |X_0|^2 \text{Re} \left((\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega \omega_0}{Q} - \epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta i \omega \mathcal{F}^2 |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega \omega_0}{Q} \right\}^2 \right), \quad (\text{B.50})$$

c'est-à-dire

$$R = |X_0|^2 (\omega_0^2 - \omega^2) \left(1 - 2\epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta \omega \mathcal{F}^2 |X_0|^4 \frac{\omega \omega_0}{Q} \right). \quad (\text{B.51})$$

On constate ici que la fréquence de résonance faiblement non linéaire est égale à sa valeur linéaire : ω_r **n'évolue pas à l'ordre ϵ dans ce système** (l'ordre suivant nécessite de calculer x_2) :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \left(1 + \mathcal{O} \left(\beta F_0^2 \frac{Q^2}{m^2 \omega_0^4} \right)^2 \right)} \quad (\text{B.52})$$

La partie imaginaire de la réponse vaut

$$I = |X_0|^2 \text{Im} \left((\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega \omega_0}{Q} - \epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta i \omega \mathcal{F}^2 |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) - i \frac{\omega \omega_0}{Q} \right\}^2 \right), \quad (\text{B.53})$$

i.e.

$$I = |X_0|^2 \left(-\frac{\omega \omega_0}{Q} - \epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta \omega \mathcal{F}^2 |X_0|^4 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2 \right\} \right), \quad (\text{B.54})$$

que l'on évalue à résonance pour $\omega = \omega_0$:

$$I_{\omega=\omega_0} = \frac{Q^2}{\omega_0^4} \left(-\frac{\omega_0^2}{Q} \right) \left(1 + \epsilon \frac{\omega_0}{Q} \beta \omega_0 \mathcal{F}^2 \frac{Q^4}{\omega_0^8} \left(-\frac{\omega_0^2}{Q} \right) \right) = -\frac{Q}{\omega_0^2} \left(1 - \epsilon \beta \mathcal{F}^2 \frac{Q^2}{\omega_0^4} \right). \quad (\text{B.55})$$

Ainsi,

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0 Q}{m \omega_0^2} \left(1 - \frac{F_0^2 \beta Q^2}{4m^2 \omega_0^4} \right) \sin(\omega_0 t)} \quad (\text{B.56})$$

Enfin, on évalue C via

$$C = \frac{(\partial R / \partial \omega)(\omega = \omega_r)}{I(\omega = \omega_r)} = \left(-2 \frac{Q^2}{\omega_0^3} \right) \times \left(1 - 2\epsilon \beta \mathcal{F}^2 \frac{Q^2}{\omega_0^4} \right) \times \left(\frac{-\omega_0^2}{Q \left(1 - \epsilon \beta \mathcal{F}^2 \frac{Q^2}{\omega_0^4} \right)} \right), \quad (\text{B.57})$$

d'où

$$\boxed{C = \frac{2Q}{\omega_0} \left(1 - \epsilon \beta \mathcal{F}^2 \frac{Q^2}{\omega_0^4} \right) = \frac{2Q}{\omega_0} \left(1 - \frac{F_0^2 \beta Q^2}{4m^2 \omega_0^4} \right)} \quad (\text{B.58})$$

Conclusion : pour un oscillateur avec une dissipation non linéaire, tout se passe au niveau faiblement non linéaire comme si

$$\omega_0 \implies \omega_0 \quad (\text{B.59a})$$

$$F_0 \implies F_0 \left(1 - \frac{F_0^2 \beta Q^2}{4m^2 \omega_0^4} \right) \quad (\text{B.59b})$$

$$\frac{Q}{\omega_0} \implies \frac{Q}{\omega_0} \left(1 - \frac{F_0^2 \beta Q^2}{4m^2 \omega_0^4} \right) \quad (\text{B.59c})$$

Annexe au chapitre 4, §4.1.2

En utilisant les mêmes notations que dans le cœur du manuscrit,

$$E_{\text{onde}}(t) = \frac{1}{2} \int_{\xi(t)}^L ((\partial_t \eta)^2 + c^2 (\partial_x \eta)^2) dx \quad (\text{B.60})$$

$$= c^2 \int_{\xi(t)}^L (\dot{\eta}_+^2(x+ct) + \dot{\eta}_-^2(x-ct)) dx \quad (\text{B.61})$$

$$= c^2 \left(\int_{\xi(t)+ct}^{L+ct} \dot{\eta}_+^2(u) du + \int_{\xi(t)-ct}^{L-ct} \dot{\eta}_-^2(v) dv \right) \quad (\text{B.62})$$

en posant $u = x + ct$ et $v = x - ct$. On effectue ensuite un second changement de variable, $u = \xi(s) + cs$. Avec \bar{t} défini par $L + ct = \xi(\bar{t}) + c\bar{t}$ puis en utilisant (4.12) et (4.13),

$$\int_{\xi(t)+ct}^{L+ct} \dot{\eta}_+^2(u) du = c \int_t^{\bar{t}} \dot{\eta}_+^2(\xi(s) + cs) (1 + \mathcal{M}(s)) ds \quad (\text{B.63})$$

$$= c \int_t^{\bar{t}} \dot{\eta}_-^2(\xi(s) - cs) \frac{(1 - \mathcal{M}(s))^2}{1 + \mathcal{M}(s)} ds \quad (\text{B.64})$$

$$= \frac{c}{4} \int_t^{\bar{t}} (\partial_x \eta)^2(\xi(s), s) (1 + \mathcal{M}(s)) (1 - \mathcal{M}(s))^2 ds. \quad (\text{B.65})$$

L'expression de la pression de radiation (4.7), sa relation de récurrence (4.20) et un changement de variable $q = t'(s)$ donnent successivement

$$\int_{\xi(t)+ct}^{L+ct} \dot{\eta}_+^2(u) du = \frac{1}{2c} \int_t^{\bar{t}} SP_{\text{rad}}(s) (1 - \mathcal{M}(s)) ds \quad (\text{B.66})$$

$$= \frac{1}{2c} \int_t^{\bar{t}} SP_{\text{rad}}(t'(s)) (1 + \mathcal{M}(s)) \times \left(\frac{1 + \mathcal{M}(t'(s))}{1 - \mathcal{M}(t'(s))} \right) ds \quad (\text{B.67})$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{t'}^{\bar{t}} SP_{\text{rad}}(q) (1 + \mathcal{M}(q)) dq, \quad (\text{B.68})$$

avec $\bar{t} = t'(\bar{t})$ tel que $\bar{t} - \xi(\bar{t})/c = t - L/c$. La même démarche mène à (avec $v = \xi(r) - cr$),

$$\int_{\xi(t)-ct}^{L-ct} \dot{\eta}_-^2(v) dv = c \int_{\bar{t}}^t \dot{\eta}_-^2(\xi(r) - cr) (1 - \mathcal{M}(r)) dr \quad (\text{B.69})$$

$$= \frac{c}{4} \int_{\bar{t}}^t (\partial_x \eta)^2(\xi(r), r) (1 + \mathcal{M}(r))^2 (1 - \mathcal{M}(r)) dr \quad (\text{B.70})$$

$$= \frac{1}{2c} \int_{\bar{t}}^t SP_{\text{rad}}(r) (1 + \mathcal{M}(r)) dr \quad (\text{B.71})$$

Finalement, (B.62), (B.68) et (B.71) mènent à

$$E_{\text{onde}}(t) = \frac{c}{2} \int_{t'}^t SP_{\text{rad}}(s)(1 + \mathcal{M}(s))ds \quad (\text{B.72})$$

Annexe au chapitre 4, §4.1.3

On présente ici la manière de traiter le problème §4.1.3 avec la méthode des échelles multiples. Cela sert à formaliser l'approche menée ainsi qu'à calculer avec plus de facilité les ordres supérieurs. Suivant (4.28), nous définissons la pression de radiation comme

$$P_{\text{rad}}(t) = \left(\frac{m\ell\omega_p^2}{S} \right) \times \epsilon\psi(N, \tau) \quad (\text{B.73})$$

où $\epsilon \ll 1$ est un nombre sans dimension, $N = \epsilon n$ est la variable lente associée au nombre de réflexions considérées et $\tau = ct/\ell$ celle caractérisant l'évolution de l'enveloppe du paquet d'ondes sur la taille ℓ/c . La distinction entre $(2\pi/\omega_0)$ et (σ/ω_p^2) , tout comme celles entre ℓ et L , respectivement nécessaires à l'« oubli » de l'évolution rapide de la pression de radiation ainsi qu'à la localisation du paquet d'ondes servant à définir n , est prise d'ordre supérieur à tous les ordres considérés ici. Nous posons enfin

$$\sigma = \epsilon \frac{\omega_p^2 \ell}{c}, \quad (\text{B.74})$$

pour que tous les effets physique négligés au premier ordre arrivent simultanément au second. En reprenant les étapes précédentes, (4.26) devient

$$\xi = -\epsilon\ell\psi + \epsilon^2\ell\partial_\tau\psi + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (\text{B.75})$$

(4.27) est maintenant

$$\mathcal{M} = -\epsilon\partial_\tau\psi + \epsilon^2\partial_{\tau\tau}\psi + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (\text{B.76})$$

Une récurrence ($t' \rightarrow t$), se traduit dans le nouveau jeu de deux variables par $n \rightarrow n + 1$ et $t \rightarrow t + \delta t$, où δt est donné par (4.18)

$$\frac{c}{\ell}\delta t = 2\psi\epsilon + (2\partial_\tau\psi(\psi - 1) + \partial_N\psi)\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (\text{B.77})$$

Avec ces quelques résultats, (4.20) s'écrit

$$\psi(N + \epsilon, \tau + 2\epsilon\psi + \epsilon^2(2\partial_\tau\psi(\psi - 1) + \partial_N\psi) + \mathcal{O}(\epsilon^3)) = \quad (\text{B.78})$$

$$\left(\frac{1 - \epsilon\{\partial_\tau\psi + \epsilon\partial_N\psi + 2\epsilon\psi\partial_{\tau\tau}\psi\} + \epsilon^2\partial_{\tau\tau}\psi + \mathcal{O}(\epsilon^3)}{1 + \epsilon\{\partial_\tau\psi + \epsilon\partial_N\psi + 2\epsilon\psi\partial_{\tau\tau}\psi\} - \epsilon^2\partial_{\tau\tau}\psi + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \right) \times \left(\frac{1 - \epsilon\partial_\tau\psi + \epsilon^2\partial_{\tau\tau}\psi + \mathcal{O}(\epsilon^3)}{1 + \epsilon\partial_\tau\psi - \epsilon^2\partial_{\tau\tau}\psi + \mathcal{O}(\epsilon^3)} \right) \times \psi(N, \tau) \quad (\text{B.79})$$

Un développement de cette équation permettrait d'aller à l'ordre ϵ^2 . Nous ne le ferons pas ici, et observons simplement que l'ordre ϵ donne de nouveau l'équation de Burgers :

$$6\psi\partial_\tau\psi + \partial_N\psi = 0 \quad (\text{B.80})$$

Annexe au chapitre 5, §5.1.2

Les interactions à trois ondes en régime gravitaire peuvent être calculées dans la limite faiblement non linéaire d'après la démarche de Longuet-Higgins. En notant le champ de vitesse linéaire des deux ondes mères \vec{u}_{10} et \vec{u}_{01} , le potentiel scalaire décrivant le couplage de ces ondes est donné par (5.12),

$$\partial_{tt}\phi_{11} + g\partial_z\phi_{11} \Big|_{z=0} = 2\partial_t(\vec{u}_{01} \cdot \vec{u}_{10}). \quad (\text{B.81})$$

Dans toute cette partie, les indices 01, 10 et 11 représentent l'ordre non linéaire du développement (comme dans (5.12)) et non les caractéristiques d'un mode en géométrie cylindrique (comme dans (5.21)). L'onde mère A, de nombre d'onde k_A et moment cinétique selon z $L_z \propto m_A$ est associée au champ de vitesse

$$\vec{u}_{10} = -\vec{\nabla}(\psi_A J_{m_A}(k_A r) e^{k_A z} \sin(\omega_A t - m_A \theta)) \Rightarrow \eta_A(r, \theta, t) = \frac{\psi_A k_A}{\omega_A} J_{m_A}(k_A r) \cos(\omega_A t - m_A \theta), \quad (\text{B.82})$$

et de même pour l'onde mère B,

$$\vec{u}_{01} = -\vec{\nabla} (\psi_B J_{m_B}(k_B r) e^{k_B z} \sin(\omega_B t - m_B \theta)) \Rightarrow \eta_B(r, \theta, t) = \frac{\psi_B k_B}{\omega_B} J_{m_B}(k_B r) \cos(\omega_B t - m_B \theta). \quad (\text{B.83})$$

Un calcul direct donne

$$(\vec{u}_{01} \cdot \vec{u}_{10})_{z=0} = \psi_A \psi_B k_A k_B \left([J_{m_A} J_{m_B} + J'_{m_A} J'_{m_B}] \sin(\Psi_A) \sin(\Psi_B) + \frac{m_A m_B}{(k_A r)(k_B r)} J_{m_A} J_{m_B} \cos(\Psi_A) \cos(\Psi_B) \right), \quad (\text{B.84})$$

avec $\Psi_A = \omega_A t - m_A \theta$ et $\Psi_B = \omega_B t - m_B \theta$. Les fonctions de Bessel se simplifient en utilisant les relations de récurrence (A.3) et (A.4), et des relations de trigonométrie donnent

$$(\vec{u}_{01} \cdot \vec{u}_{10})_{z=0} = \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} \left([2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B+1} + J_{m_A-1} J_{m_B-1}] \cos(\Psi_A - \Psi_B) + [-2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B-1} + J_{m_A-1} J_{m_B+1}] \cos(\Psi_A + \Psi_B) \right). \quad (\text{B.85})$$

On décompose chacune des fonctions de r du membre de droite sur une base de fonction de Bessel adaptée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} (2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B+1} + J_{m_A-1} J_{m_B-1}) = \sum_n \alpha_n J_{m_A - m_B} \left(\xi_{m_A - m_B, n} \frac{r}{R} \right) \\ \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} (-2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B-1} + J_{m_A-1} J_{m_B+1}) = \sum_n \beta_n J_{m_A + m_B} \left(\xi_{m_A + m_B, n} \frac{r}{R} \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.86})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} (2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B+1} + J_{m_A-1} J_{m_B-1}) = \sum_n \alpha_n J_{m_A - m_B} \left(\xi_{m_A - m_B, n} \frac{r}{R} \right) \\ \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} (-2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B-1} + J_{m_A-1} J_{m_B+1}) = \sum_n \beta_n J_{m_A + m_B} \left(\xi_{m_A + m_B, n} \frac{r}{R} \right) \end{array} \right. \quad (\text{B.87})$$

où les coefficients α_n et β_n peuvent être calculés en utilisant des relations d'orthogonalité. (B.81) devient

$$\partial_{tt} \phi_{11} + g \partial_z \phi_{11} \Big|_{z=0} = -2 \sum_n \left(\alpha_n \omega_- J_{m_-} \left(\xi_{m_-, n} \frac{r}{R} \right) \sin(\omega_- t - m_- \theta) + \beta_n \omega_+ J_{m_+} \left(\xi_{m_+, n} \frac{r}{R} \right) \sin(\omega_+ t + m_+ \theta) \right), \quad (\text{B.88})$$

avec $\omega_{\pm} = \omega_A \pm \omega_B$ et $m_{\pm} = m_A \pm m_B$. Comme constaté dans l'étude des interactions en milieu infini, la condition de résonance est l'existence d'un couple $\{m_{\pm}, n\}$ tel que

$$\boxed{\omega_{\pm}^2 = g k_{m_{\pm}, n} = g \frac{\xi_{m_{\pm}, n}}{R}} \quad (\text{B.89})$$

Supposons donc que $\omega_+^2 = g k_{m_+, n_0} \equiv g k_+$ et cherchons la solution au forçage résonant

$$\partial_{tt} \phi_{11} + g \partial_z \phi_{11} \Big|_{z=0} = -2 \beta_{n_0} \omega_+ J_{m_+}(k_+ r) \sin(\omega_+ t - m_+ \theta). \quad (\text{B.90})$$

On obtient

$$\phi_{11} = \beta_{n_0} t J_{m_+}(k_+ r) e^{k_+ z} \cos(\omega_+ t - m_+ \theta) \Rightarrow \eta_{11}(r, \theta, t) = -\frac{\beta_{n_0} k_+ t}{\omega_+} J_{m_+}(k_+ r) \sin(\omega_+ t - m_+ \theta). \quad (\text{B.91})$$

Il reste à expliciter β_{n_0} , ce qui est possible à partir de (B.87) :

$$\beta_{n_0} = \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} \left(\frac{\int_0^R r J_{m_+}(k_+ r) (-2J_{m_A} J_{m_B} + J_{m_A+1} J_{m_B-1} + J_{m_A-1} J_{m_B+1}) dr}{\int_0^R r J_{m_+}^2(k_+ r) dr} \right) \quad (\text{B.92})$$

$$\equiv \frac{\psi_A \psi_B k_A k_B}{4} \kappa. \quad (\text{B.93})$$

(B.82), (B.83), (B.91) et (B.93) mènent à la conclusion suivante : soient deux ondes de surface de cambrure

$$\begin{cases} k_A \eta_A(r, \theta, t) = \epsilon_A J_{m_A}(k_A r) \cos(\omega_A t - m_A \theta), \\ k_B \eta_B(r, \theta, t) = \epsilon_B J_{m_B}(k_B r) \cos(\omega_B t - m_B \theta). \end{cases} \quad (\text{B.94})$$

$$\begin{cases} k_A \eta_A(r, \theta, t) = \epsilon_A J_{m_A}(k_A r) \cos(\omega_A t - m_A \theta), \\ k_B \eta_B(r, \theta, t) = \epsilon_B J_{m_B}(k_B r) \cos(\omega_B t - m_B \theta). \end{cases} \quad (\text{B.95})$$

S'il existe $k_C = \xi_{m_A + m_B, n_0} r / R$ tel que $(\omega_A + \omega_B)^2 = g k_C$, alors les effets non linéaires mènent à la croissance d'une onde fille de cambrure

$$k_C \eta_C(r, \theta, t) = -\kappa \frac{(\omega_A + \omega_B)^3}{4 \omega_A \omega_B} \epsilon_A \epsilon_B t J_{m_A + m_B}(k_C r) \sin((\omega_A + \omega_B)t - (m_A + m_B)\theta), \quad (\text{B.96})$$

avec κ un nombre sans dimension donné (B.93).

Annexe C

Électronique du capteur capacitif

Cet annexe présente le fonctionnement électronique du boîtier permettant le suivi des variations de capacité du fil vernis plongeant dans l'eau¹, deux potentiomètres permettant le réglage du gain et du décalage sur le signal de sortie. Contrairement aux LCR-mètres commerciaux utilisant une détection synchrone et un composant de référence [244], ce circuit réalisé par les électroniciens du département de physique de l'ENS ne donne pas de mesure absolue de la capacité et doit être préalablement étalonné, mais présente de bons temps de réponse et sensibilité². Le schéma électronique général de ce capteur est reproduit Fig. C.3 et présente deux parties séparées par des pointillés :

1. La zone en haut à gauche du diagramme est intégrée au capteur et fournit un signal déjà pré-traité au boîtier, dans le but de s'affranchir des effets électriques du mètre de câble les séparant (autant résistif que capacitif, même s'il ne s'agit pas d'un câble coaxial). Il est alimenté par une tension continue de 5V.
2. Le reste du montage met en forme le signal, prend en compte les réglages des deux potentiomètres et sort la tension recherchée *via* une connectique BNC.

Première partie : électronique intégrée

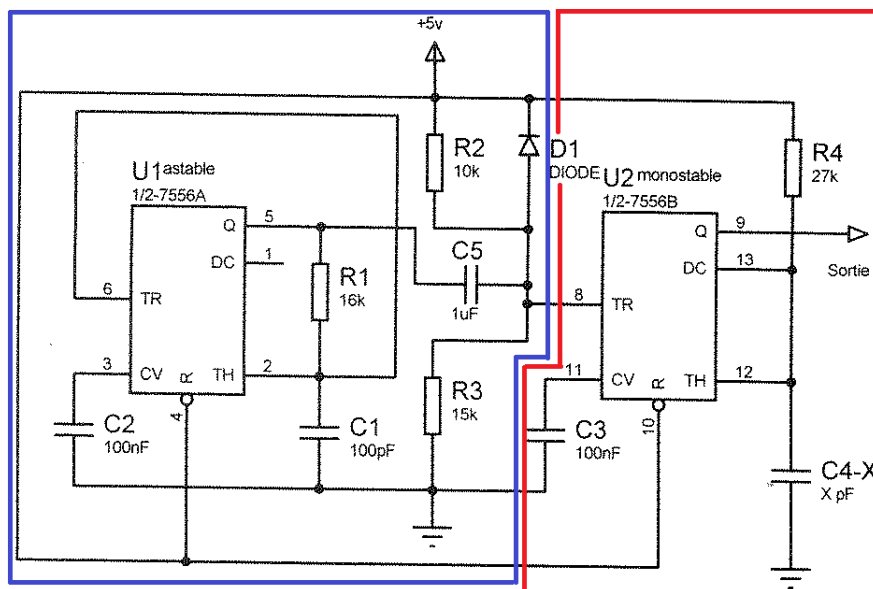


FIGURE C.1 – Schéma électronique au niveau de la capacité à mesurer

1. Une mesure au LCR-mètre indique une variation de capacité de l'ordre de la dizaine de picofarads par centimètre d'immersion.
2. De plus, comme tous les circuits électriques réalisés à la main, le prix total ne doit pas dépasser quelques euros.

On étudie dans cette partie l'électronique située au niveau du fil, comportant notamment deux timers 555 (circuit intégré proposant de nombreuses fonctions). Il est possible de séparer ce montage en deux blocs permettant de comprendre le fonctionnement global, cf. Fig. C.1 :

1. Un premier bloc encadré en bleu est totalement décorrélé du reste du circuit, les branches du haut et du bas étant à un potentiel fixé par l'alimentation, celle reliée à C_3 constitue la masse et l'entrée TR8 (*trigger*) du second timer disposant d'une impédance infinie. Le timer fonctionne en mode astable bien que le montage associé soit non conventionnel : il réalise au niveau de TR8 une suite de pulses de fréquence plusieurs centaines de kilohertz.
2. L'évolution du bloc rouge dépend quant à elle de cette suite de pulse reçue sur son entrée TR8, seule interaction existant avec l'autre partie du montage. En pratique, à chaque fois que l'entrée TR8 devient inférieure à une valeur seuil (1,7V), soit une fois par pulse, une bascule interne se déclenche découplant DC13 (*discharge*) de la masse. Il s'ensuit une charge du condensateur C_{4-X} dont on cherche à mesurer la capacité, qui s'arrête lorsque la tension à l'entrée TH12 (*threshold*) atteint une certaine valeur (3,4V). La durée de ce transitoire se déduit facilement des lois de l'électrocinétique et vaut $1,1R_4C_{4-X}$: il s'agit simplement d'une charge d'un circuit RC. Le condensateur est ensuite déchargé et ainsi de suite. Durant toute la charge, la tension à la sortie Q9 est constante et non nulle, contrairement au reste de l'évolution où Q9 est à la masse.

En conclusion, le signal issu de l'électronique intégrée consiste en une série de créneaux à plusieurs centaines de kilohertz dont chaque durée de saturation positive est directement proportionnelle à la capacité à mesurer, deux exemples étant reportés Fig. C.2. Cela permet de plus d'identifier le composant clef de ce montage, à savoir la résistance R_4 de 27 k Ω , devant être choisie aussi grande que possible (car la sensibilité lui est directement proportionnelle) sous réserve que la durée $1.1R_4C_{4-X}$ dépendant de la capacité à mesurer soit inférieure à l'espacement entre deux pulses du timer astable. Il est donc préférable de travailler autant que possible avec un fil peu immergé, permettant de diminuer la composante constante de C_{4-X} ne présentant pas d'intérêt et d'augmenter d'autant R_4 .

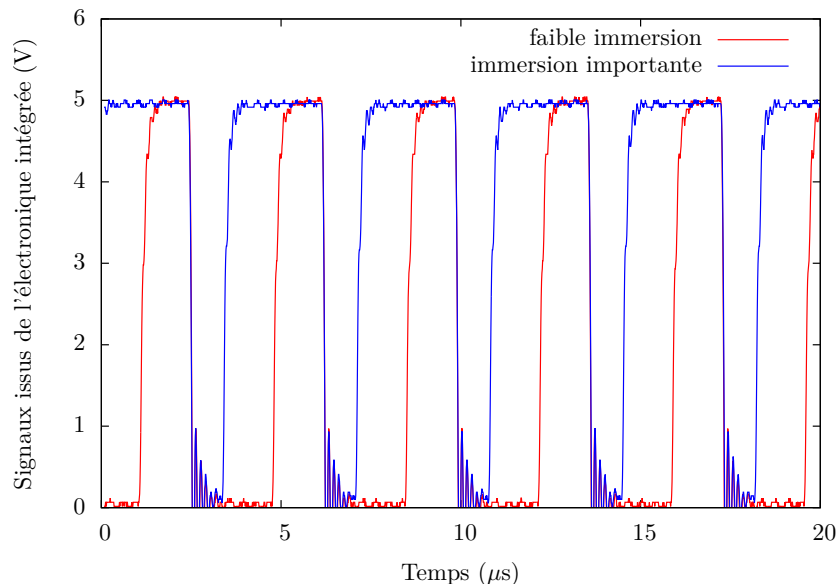


FIGURE C.2 – Exemples de signaux sortant de l'électronique intégrée pour deux immersions différentes

Seconde partie : traitement du signal

Le traitement du signal a lieu dans un boîtier disposant de deux potentiomètres et dont le but est de transformer la série de pulse qu'il reçoit en un signal continu dont le gain et le décalage (*offset*) sont ajustables. Il s'agit ici d'électronique bien plus classique, les différentes étapes étant les suivantes :

1. Le signal est filtré par un passe-bas passif d'ordre cinq et dont les fréquences de coupure sont de l'ordre de la dizaine de kilohertz, soit bien inférieures à celle du timer astable que l'on cherche à éliminer.
2. Un montage amplificateur non inverseur de gain réglable *via* un potentiomètre permet d'une part d'amplifier le signal et d'autre part d'empêcher une rétroaction de la suite du circuit sur le fonctionnement du filtre.
3. La branche inférieure a pour but de réaliser une tension continue stable dans le temps, d'amplitude ajustable et ne dépendant pas d'éventuelles fluctuations de tension de l'alimentation 9V. Pour cela, une diode Zener est utilisée en inverse dans sa zone d'avalanche (typiquement entre 5V et 6V), le montage associé permettant d'exploiter cette partie de sa caractéristique. Ensuite, un diviseur de tension contrôlé par le potentiomètre d'offset et un amplificateur non inverseur permet d'ajuster la valeur de cette tension.
4. Enfin, un montage amplificateur différentiel soustrait cette tension continue au signal précédemment amplifié et effectue une dernière étape de filtrage à quelques dizaines de kilohertz.

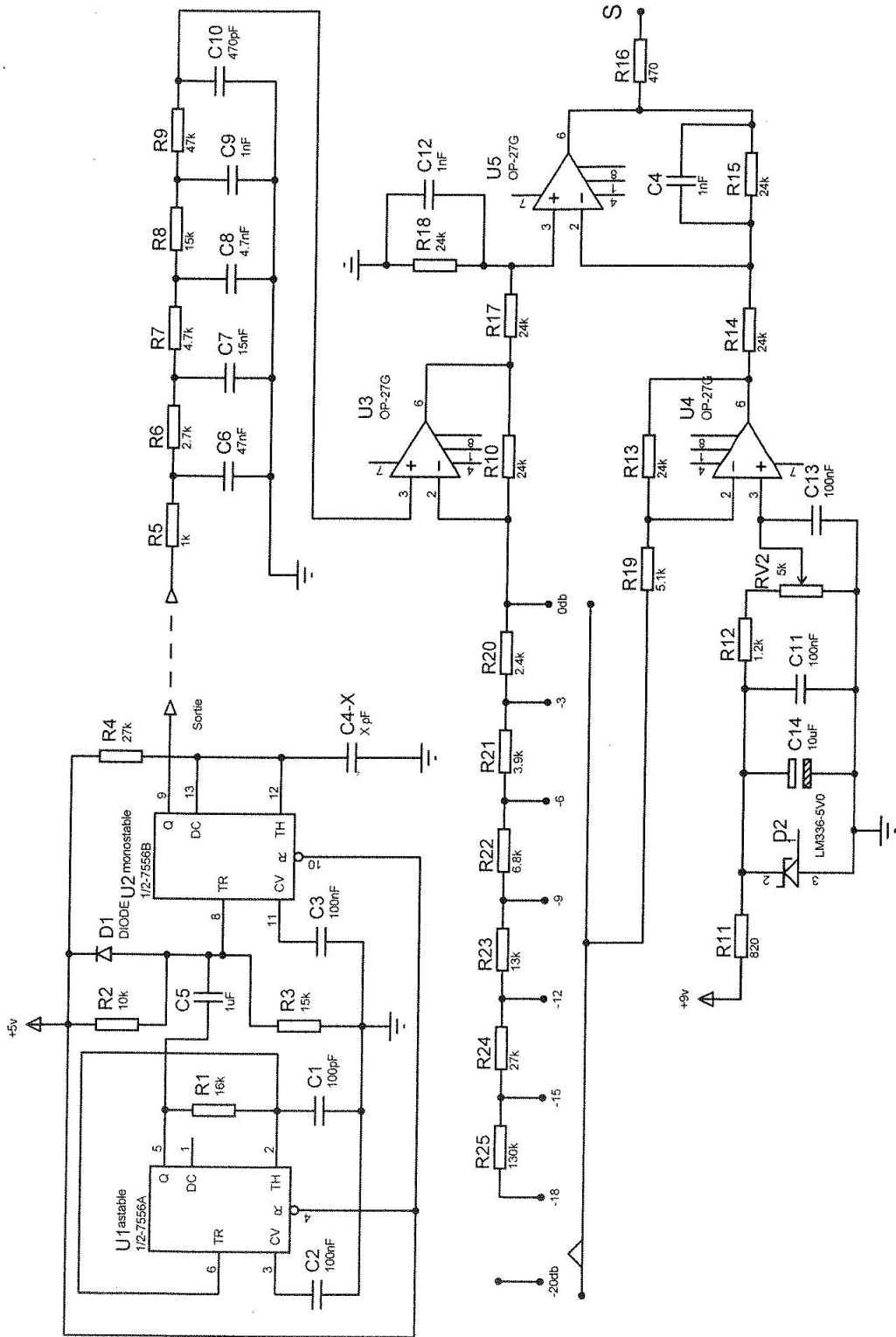


FIGURE C.3 – Schéma électronique général

Annexe D

Formulaire de turbulence d'ondes

Domaine d'application de ce formulaire

Nous résumons ici les définitions, dimensions et résultats de la turbulence faible dans les limites suivantes :

1. Toutes les relations reportées ici concernent une interface entre deux fluides de densités très différentes. Dans le cas contraire, par exemple proche du point critique, les modifications suivantes sont à appliquer :

$$g \rightarrow g \times \left(\frac{\rho_\ell - \rho_g}{\rho_\ell + \rho_g} \right)$$
$$\frac{\sigma}{\rho} \rightarrow \frac{\sigma}{\rho_\ell + \rho_g}$$

où ρ_ℓ est la masse volumique de la phase liquide (par la suite notée ρ) et ρ_g celle du gaz. Les résultats associées aux non-linéarités peuvent être fortement modifiés et impliquer le nombre d'Atwood $A = (\rho_\ell - \rho_g)/(\rho_\ell + \rho_g)$.

2. Condition d'eau profonde : la hauteur du liquide est grande devant toute autre longueur caractéristique.
3. Régime stationnaire, homogène et isotrope.

Description des ondes de surface

1. \mathcal{S} : surface du système (L^2), supposée grande devant toutes les autres longueurs caractéristiques
2. ρ : masse volumique du liquide ($M \cdot L^{-3}$)
3. σ : tension de surface ($M \cdot T^{-2}$)
4. k : nombre d'onde (L^{-1}), norme du vecteur d'onde
5. ω_k : pulsation d'une onde de nombre d'onde k (T^{-1}), reliée au nombre d'onde par la relation de dispersion
 - *Cas capillaire* :

$$\omega^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) k^3 \quad (D.1)$$

- *Cas gravitaire* :

$$\omega^2 = gk \quad (D.2)$$

6. ℓ_c : longueur capillaire (L), séparant les deux régimes précédents

$$\ell_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (D.3)$$

7. $\eta(\vec{r}, t)$: élévation de la surface (L)
8. $\eta_k(t)$: amplitude du mode k (L), décrivant la décomposition en série de Fourier de $\eta(\vec{r}, t)$

$$\eta(\vec{r}, t) = \sum_k \eta_k(t) \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_k) \quad (D.4)$$

9. $S_\eta(k)$: densité spectrale spatiale de puissance de la hauteur des ondes de surface (L^3), passage au continu de la grandeur η_k précédemment introduite

$$\langle \eta(x, y, t)^2 \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S \eta(\vec{r}, t)^2 dx dy = \frac{1}{2} \sum_k \eta_k(t)^2 = \int_k S_\eta(k) dk \quad (D.5)$$

10. $S_\eta(\omega)$: densité spectrale temporelle de puissance de la hauteur des ondes de surface ($L^2 \cdot T$), comme précédemment, mais relatif à l'évolution temporelle du signal

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \eta(x, y, t)^2 \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(\vec{r}, t)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_k \eta_k^2 = \int_\omega S_\eta(\omega) d\omega \quad (D.6)$$

$S_\eta(\omega)$ et $S_\eta(k)$ sont liés par la relation de dispersion

$$S_\eta(k) dk = S_\eta(\omega_k) d\omega_k \quad (D.7)$$

11. $|\vec{\nabla}\eta(x, y, t)|$: cambrure (sans dimension), paramètre contrôlant la linéarité des ondes de surface
 12. $k\eta_k$: cambrure du mode k (sans dimension)
 13. $S_{\nabla\eta}(k)$: densité spectrale spatiale de puissance de la cambrure (L), passage au continu de la grandeur précédente

$$\langle (\vec{\nabla}\eta(x, y, t))^2 \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S (\vec{\nabla}\eta(\vec{r}, t))^2 dx dy = \frac{1}{2} \sum_k (k\eta_k(t))^2 = \int_k S_{\nabla\eta}(k) dk \quad (D.8)$$

$S_\eta(k)$ et $S_{\nabla\eta}(k)$ sont liés par

$$S_{\nabla\eta}(k) = S_\eta(k) k^2 \quad (D.9)$$

Grandeurs relatives à l'énergie

1. E_{tot} : énergie totale du système d'ondes ($M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$)
2. \mathcal{P} : puissance injectée ($M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$)
3. E_k : énergie d'un mode de nombre d'onde k ($M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$). Le théorème du viriel permet une évaluation simple en fonction de l'amplitude de l'onde de surface dans les différents régimes.

- *Cas gravitaire*

$$E_k = 2 \times \left(\frac{\rho g}{2} \int_S (\eta_k \cos(\omega_k t - kx))^2 dx dy \right) = \frac{S \rho g \eta_k^2}{2} \quad (D.10)$$

- *Cas capillaire*

$$E_k = 2 \times \left(\sigma \int_S \sqrt{1 + (\vec{\nabla}\eta_k \cos(\omega_k t - kx))^2} dx dy \right) \simeq \frac{S \sigma k^2 \eta_k^2}{2} \quad (D.11)$$

4. e_k : densité spectrale spatiale d'énergie par unité de masse de surface ($L^4 \cdot T^{-2}$). Issue du passage au continu dans l'espace réciproque, cette grandeur est de plus intensive et s'exprime simplement dans les différents régimes.

$$E_{\text{tot}} = \sum_k E_k = \rho S \int e_k dk \quad (D.12)$$

- *Cas gravitaire*

$$e_k = g S_\eta(k) \quad (D.13)$$

- *Cas capillaire*

$$e_k = \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) k^2 S_\eta(k) \quad (D.14)$$

5. $\rho(k)$: densité de modes dans l'espace réciproque (L). $\rho(k)dk$ dénombre la quantité de modes propres entre les nombres d'onde k et $k + dk$. Pour des systèmes de grande taille ($k\sqrt{\mathcal{S}} \gg 1$), on calcule

$$\rho(k) \sim \mathcal{S}k \quad (\text{D.15})$$

Cela permet de relier E_k et e_k :

$$E_k \rho(k) = \rho \mathcal{S} e_k \Leftrightarrow e_k \sim \frac{E_k}{k \mathcal{S}} \quad (\text{D.16})$$

6. e_ω : densité spectrale temporelle d'énergie par unité de masse de surface ($\text{L}^3 \cdot \text{T}^{-1}$). Équivalent temporel de e_k souvent considéré pour confronter théorie et expérience.

$$E_{\text{tot}} = \sum_k E_k = \rho \mathcal{S} \int e_\omega d\omega \quad (\text{D.17})$$

- *Cas gravitaire*

$$e_\omega = g \mathcal{S}_\eta(\omega) \quad (\text{D.18})$$

- *Cas capillaire*

$$e_\omega = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/3} \omega^{4/3} \mathcal{S}_\eta(\omega) \quad (\text{D.19})$$

e_ω et e_k sont liés par la relation de dispersion linéaire aux faibles cambrures,

$$e_k dk = e_{\omega_k} d\omega_k \quad (\text{D.20})$$

7. ϵ : flux d'énergie par unité de masse de surface ($\text{L}^3 \cdot \text{T}^{-3}$). Paramètre clef de la turbulence d'ondes.

$$\epsilon = \frac{\mathcal{P}}{\rho \mathcal{S}} \quad (\text{D.21})$$

8. ϵ_c : flux d'énergie critique par unité de masse de surface ($\text{L}^3 \cdot \text{T}^{-3}$). Quantifie la validité de l'hypothèse de localité des interactions à une échelle k , sur laquelle repose la théorie de la turbulence faible

$$\epsilon_c = \left(\frac{\omega_k}{k}\right)^3 \quad (\text{D.22})$$

Grandeurs relatives au nombre d'ondes

1. n_k : densité spectrale spatiale de nombre d'ondes par unité de masse de surface ($\text{L}^4 \cdot \text{T}^{-1}$). Définie à partir de e_k , elle s'exprime simplement dans les différents régimes.

- *Cas gravitaire*

$$n_k = \frac{e_k}{\omega_k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \mathcal{S}_\eta(k) \quad (\text{D.23})$$

- *Cas capillaire*

$$n_k = \frac{e_k}{\omega_k} = \sqrt{\frac{k\sigma}{\rho}} \mathcal{S}_\eta(k) \quad (\text{D.24})$$

2. n_ω : densité spectrale temporelle de nombre d'ondes par unité de masse de surface (L^3).

- *Cas gravitaire*

$$n_\omega = \frac{e_\omega}{\omega} = \frac{g}{\omega} \mathcal{S}_\eta(\omega) \quad (\text{D.25})$$

- *Cas capillaire*

$$n_\omega = \frac{e_\omega}{\omega} = \left(\frac{\sigma\omega}{\rho}\right)^{1/3} \mathcal{S}_\eta(\omega) \quad (\text{D.26})$$

n_ω et n_k sont liés par la relation de dispersion,

$$n_k dk = n_{\omega_k} d\omega_k \quad (\text{D.27})$$

3. ζ : flux de nombre d'ondes par unité de masse de surface ($L^3 \cdot T^{-2}$). En supposant que le forçage est localisé à l'échelle intégrale associée au nombre d'onde k_0 ,

$$\zeta \sim \frac{\mathcal{P}}{\rho \mathcal{S} \omega_{k_0}} \sim \frac{\epsilon}{\omega_{k_0}} \quad (D.28)$$

4. ζ_c : flux de nombre d'ondes critique par unité de masse de surface ($L^3 \cdot T^{-2}$). Quantifie la validité de l'hypothèse de localité des interactions à une échelle k pour une cascade dominée par le nombre d'ondes

$$\zeta_c = \frac{\omega_k^2}{k^3} \quad (D.29)$$

Résultats sur le régime capillaire

Les premières interactions non linéaires résonantes impliquent trois ondes, menant à une cascade directe d'énergie.

1. Fréquence d'interaction non linéaire τ_{NL}^{-1} . Inverse du temps non linéaire, celui-ci est donné respectivement *via* l'étude des interactions puis la turbulence faible par

$$\frac{1}{\tau_{NL}} \sim \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-1/2} k^{5/2} e_k \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-1/4} k^{3/4} \quad (D.30)$$

2. Densités spectrales d'énergie par unité de masse de surface à l'équilibre thermique

$$e_k^{eq} \sim k \frac{k_b T}{\rho} \iff e_\omega^{eq} \sim \left(\frac{k_b T}{\sigma}\right) \times \left(\frac{\sigma \omega}{\rho}\right)^{1/3} \quad (D.31)$$

3. Densités spectrales d'énergie par unité de masse de surface en turbulence faible,

$$e_k \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/4} k^{-7/4} \iff e_\omega \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/2} \omega^{-3/2} \quad (D.32)$$

4. Densités spectrales de puissance de la hauteur des ondes de surface en turbulence faible,

$$S_\eta(k) \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{-3/4} k^{-15/4} \iff S_\eta(\omega) \sim \epsilon^{1/2} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{1/6} \omega^{-17/6} \quad (D.33)$$

5. Flux d'énergie critique par unité de masse de surface ϵ_c

$$\epsilon_c = \left(\frac{\sigma k}{\rho}\right)^{3/2} \quad (D.34)$$

6. Nombre d'onde critique k_c . Défini comme le nombre d'onde où $\epsilon = \epsilon_c$, il vient

$$k_c = \frac{\rho}{\sigma} \epsilon^{2/3} \quad (D.35)$$

7. Validité de la turbulence faible, en oubliant l'existence d'un régime gravitaire

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{NL}}\right) \ll 1 \iff k S_{\nabla\eta}(k) \ll 1 \iff \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^{1/2} \ll 1 \iff \left(\frac{k}{k_c}\right)^{3/4} \gg 1 \quad (D.36)$$

$$\left(\frac{\tau_{diss}}{\tau_{NL}}\right) \ll 1 \quad (D.37)$$

Résultats sur le régime gravitaire

Les premières interactions non linéaires résonantes impliquent quatre ondes, menant à une cascade directe d'énergie et inverse de nombre d'ondes.

1. Fréquence d'interaction non linéaire τ_{NL}^{-1} . Inverse du temps non linéaire

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim g^{-3/2} k^{13/2} e_k^2 \quad (\text{D.38})$$

2. Densités spectrales d'énergie par unité de masse de surface à l'équilibre thermique, *en supposant la conservation du nombre d'ondes*, quantifiée par la pulsation ω_0 . Hors du régime de turbulence faible, le nombre d'ondes ne se conserve pas et il faut poser $\omega_0 = 0$.

$$e_k^{\text{eq}} \sim k \frac{k_b T}{\rho} \times \left(\frac{\sqrt{gk}}{\sqrt{gk} + \omega_0} \right) \iff e_\omega^{\text{eq}} \sim \frac{k_b T}{\rho g^2} \times \left(\frac{\omega^4}{\omega + \omega_0} \right) \quad (\text{D.39})$$

3. Flux d'énergie critique par unité de masse de surface ϵ_c

$$\epsilon_c = \left(\frac{g}{k} \right)^{3/2} \quad (\text{D.40})$$

4. Flux de nombre d'ondes critique par unité de masse de surface ζ_c

$$\zeta_c = \frac{g}{k^2} \quad (\text{D.41})$$

5. Validité de la turbulence faible, en oubliant l'existence d'un régime capillaire

$$\left(\frac{\tau}{\tau_{\text{NL}}} \right) \ll 1 \iff (k S_{\nabla\eta}(k))^2 \ll 1 \iff \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^{2/3} \ll 1 \iff \left(\frac{\zeta}{\zeta_c} \right)^{2/3} \ll 1 \quad (\text{D.42})$$

$$\left(\frac{\tau_{\text{diss}}}{\tau_{\text{NL}}} \right) \ll 1 \quad (\text{D.43})$$

(régime gravitaire) cascade directe d'énergie

6. Densités spectrales d'énergie par unité de masse de surface en turbulence faible,

$$e_k \sim \epsilon^{1/3} g^{1/2} k^{-5/2} \iff e_\omega \sim \epsilon^{1/3} g^2 \omega^{-4} \quad (\text{D.44})$$

7. Densité spectrale d'énergie par unité de masse de surface de Phillips,

$$e_k^{\text{Ph}} \sim g k^{-3} \quad (\text{D.45})$$

8. Densités spectrales de puissance de la hauteur des ondes de surface en turbulence faible,

$$S_\eta(k) \sim \epsilon^{1/3} g^{-1/2} k^{-5/2} \iff S_\eta(\omega) \sim \epsilon^{1/3} g \omega^{-4} \quad (\text{D.46})$$

9. Nombre d'onde critique k_c . Défini comme le nombre d'onde où $\epsilon = \epsilon_c$, il vient

$$\epsilon \ll \epsilon_c \iff k \gg k_c = g \epsilon^{-2/3} \quad (\text{D.47})$$

10. Fréquence d'interaction non linéaire τ_{NL}^{-1} . Inverse du temps non linéaire

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim g^{-3/2} k^{13/2} e_k^2 \sim \epsilon^{2/3} g^{-1/2} k^{3/2} \quad (\text{D.48})$$

(régime gravitaire) cascade inverse de nombre d'ondes

11. Densités spectrales d'énergie par unité de masse de surface en turbulence faible,

$$e_k \sim \zeta^{1/3} g^{2/3} k^{-7/3} \iff e_\omega \sim \zeta^{1/3} g^2 \omega^{-11/3} \quad (\text{D.49})$$

12. Densités spectrales de puissance de la hauteur des ondes de surface en turbulence faible,

$$S_\eta(k) \sim \zeta^{1/3} g^{-1/3} k^{-7/3} \iff S_\eta(\omega) \sim \zeta^{1/3} g \omega^{-11/3} \quad (\text{D.50})$$

13. Nombre d'onde critique k_c . Défini comme le nombre d'onde où $\zeta = \zeta_c$, il vient

$$\zeta \ll \zeta_c \iff k \gg k_c = g^{1/2} \zeta^{-1/2} \quad (\text{D.51})$$

14. Fréquence d'interaction non linéaire τ_{NL}^{-1} . Inverse du temps non linéaire

$$\frac{1}{\tau_{\text{NL}}} \sim g^{-3/2} k^{13/2} e_k^2 \sim \zeta^{2/3} g^{-1/6} k^{11/6} \quad (\text{D.52})$$

Interaction entre régimes gravitaire et capillaire

1. k_{gc} : nombre d'onde gravito-capillaire (L^{-1}). Égalise les densités spectrales d'énergie des deux régimes

$$k_{gc} = \epsilon^{-2/9} g^{2/3} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{-1/3} \quad (\text{D.53})$$

Bibliographie

- [1] A. Mangin, *Les mystères de l'océan* (Alfred Mame, Tours, 1864).
- [2] F. Arago, C. R. Acad. Sci. Paris **1**, 380 (1835).
- [3] A. D. D. Craik, Annu. Rev. Fluid Mech. **36**, 1 (2004).
- [4] D. Dalmedico, in *The History of Modern Mathematics, vol II. Institutions and Applications* (Boston-San Diego-New York : Academic Press, 1989), p. 129.
- [5] A. D. D. Craik, Annu. Rev. Fluid Mech. **37**, 23 (2005).
- [6] N. A. of Sciences, *Ocean Wave Spectra, Proceedings of a conference* (Prentice-hall, Inc., 1963).
- [7] J. B. Zicker, *The science of ocean waves* (Johns Hopkins University Press, 2013).
- [8] H. C. Mayer et R. Krechetnikov, Phys. Rev. E **85**, 406117 (2012).
- [9] A. Sauret, F. Boulogne, J. Cappello, E. Dressaire et H. A. Stone, Phys. Fluids **27**, 022103 (2015).
- [10] J. Rodríguez-Rodríguez, A. Casado-Chacón et D. Fuster, Phys. Rev. Lett. **113**, 214501 (2014).
- [11] C. M. Linton et M. McIver, J. Fluid Mech. **304**, 213 (1995).
- [12] W. R. Dean, Proc. Camb. Phil. Soc. **44**, 483 (1948).
- [13] F. Ursell, Proc. Camb. Phil. Soc. **46**, 141 (1950).
- [14] F. Ursell, Proc. Camb. Phil. Soc. **46**, 153 (1950).
- [15] E. Melhum, Appl. Ocean Res. **2**, 171 (1980).
- [16] T. F. Ogilvie, J. Fluid Mech. **16**, 451 (1963).
- [17] C. M. Linton et P. McIver, *Handbook of Mathematical Techniques for Wave/Structure Interactions* (CRC Press, 2001).
- [18] M. S. Longuet-Higgins, Phil. Trans. Roy. Soc. A **245**, 535 (1953).
- [19] A-K. Liu et S. H. Davis, J. Fluid Mech. **81**, 63 (1977).
- [20] F. Biesel, La Houille Blanche **5**, 630 (1949).
- [21] J. A. Nicolás et J. M. Vega, J. Fluid Mech. **410**, 367 (2000).
- [22] R. Kidambi, Fluid Dyn. Res. **43**, 035504 (2011).
- [23] H. Lamb, *Hydrodynamics* (1916), quatrième ed.
- [24] J. W. Miles, Proc. R. Soc. London A **297**, 459 (1967).
- [25] R. Kidambi, J. Fluid Mech. **627**, 323 (2009).

- [26] C.-L. Ting et M. Perlin, *J. Fluid Mech.* **295**, 263 (1995).
- [27] K. M. Case et W. C. Parkinson, *J. Fluid. Mech.* **2**, 172 (1957).
- [28] D. Henderson, J. Hammack, P. Kumar et D. Shah, *Phys. Fluids* **4**, 2320 (1992).
- [29] D. Henderson et J.W. Miles, *J. Fluid Mech.* **275**, 285 (1994).
- [30] D. R. Howell, B. Buhrow, T. Heath, C. McKenna, W. Hwang et M. F. Schatz, *Phys. Fluids* **12**, 322 (2000).
- [31] C. Martel, J. A. Nicolás et J. M. Vega, *J. Fluid Mech.* **360**, 213 (1998).
- [32] J. W. Miles et D. M. Henderson, *J. Fluid Mech.* **364**, 319 (1998).
- [33] L. Jiang, M. Perlin et W. W. Schultz, *Phys. Fluids* **16**, 748 (2004).
- [34] B. Cocciaro, S. Faetti et M. Nobili, *J. Fluid Mech.* **231**, 325 (1991).
- [35] B. Cocciaro, S. Faetti et M. Nobili, *J. Fluid Mech.* **246**, 43 (1993).
- [36] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **149**, 1 (1984).
- [37] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **149**, 15 (1984).
- [38] M. Funakoshi et S. Inoue, *J. Fluid Mech.* **192**, 219 (1988).
- [39] S. Ciliberto et J. P. Gollub, *J. Fluid Mech.* **158**, 381 (1985).
- [40] M. Funakoshi et S. Inoue, *Phys. Lett. A* **121**, 229 (1987).
- [41] S. R. Massel, *Coast. Eng.* **7**, 357 (1983).
- [42] T. Ohyama et K. Nadaoka, *Coast. Eng.* **24**, 1 (1994).
- [43] E. F. Bartholomeusz, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **54**, 106 (1958).
- [44] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **28**, 755 (1967).
- [45] J. N. Newman, *J. Fluid Mech.* **23**, 399 (1965).
- [46] W. R. Dean, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **41**, 231 (1945).
- [47] F. Ursell, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **43**, 374 (1974).
- [48] D. V. Evans, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **64**, 795 (1968).
- [49] J. H. Snoeijer et B. Andreotti, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **45**, 269 (2013).
- [50] P. G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 827 (1985).
- [51] P. F. Rhodes-Robinson, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **92**, 369 (1982).
- [52] T. H. Havelock, *Phil. Mag.* **8**, 569 (1929).
- [53] F. Ursell, R. G. Dean et Y. S. Yu, *J. Fluid. Mech.* **7**, 33 (1960).
- [54] S. W. Joo, W. W. Schlytz et A. F. Messiter, *J. Fluid. Mech.* **214**, 161 (1990).
- [55] J. C. Slater, *Rev. Mod. Phys.* **30**, 197 (1958).
- [56] V. Bacot, M. Labousse, A. Eddi, M. Fink et E. Fort, *Nature Phys.* **12**, 972 (2016).
- [57] F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike, T. Jamin, E. Falcon et M. Berhanu, *Phys. Rev. E* **93**, 043110 (2016).
- [58] W. B. Wright, R. Budakian et S. J. Putterman, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4528 (1996).

- [59] W. B. Wright, R. Budakian, D. J. Pine et S. J. Putterman, *Science* **278**, 1609 (1997).
- [60] M. Berhanu et E. Falcon, *Phys. Rev. E* **87**, 033003 (2013).
- [61] F. Moisy, M. Rabaud et K. Salsac, *Exp. Fluids* **46**, 1021 (2009).
- [62] A. Eddi, E. Fort, F. Moisy et Y. Couder, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 240401 (2009).
- [63] P. J. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux et P. Petitjeans, *Exp. Fluids* **46**, 1047 (2009).
- [64] E. Herbert, N. Mordant et E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 144502 (2010).
- [65] B. Miquel et N. Mordant, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 034501 (2011).
- [66] Q. Aubourg et N. Mordant, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 144501 (2015).
- [67] A. Benetazzo, *Cost. Eng.* **53**, 1013 (2006).
- [68] K. Mozumi, T. Waseda et A. Chabchoub, in *Proceedings of the ASME 34th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering* (2015).
- [69] E. Falcon, C. Laroche et S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 094503 (2007).
- [70] E. Falcon, S. Fauve et C. Laroche, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 154501 (2007).
- [71] L. Deike, M. Berhanu et E. Falcon, *Phys. Rev. E* **85**, 066311 (2012).
- [72] F. Petrelis, S. Aumaître et S. Fauve, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 070603 (2005).
- [73] E. S. Wu et W. W. Webb, *Phys. Rev. A* **8**, 2077 (1973).
- [74] M. Françon, *J. Phys. Phys. Appl.* **13**, 99 (1952).
- [75] M. Cagnet, M. Françon et J-C. Thrierr, *Atlas de phénomènes d'optique, Vol. 2* (Springer-Verlag, 1971).
- [76] B. Deroncourt, J.F. Pinton et S. Fauve, *Physica D* **117**, 181 (1998).
- [77] F. Lund et C. Rojas, *Physica D* **37**, 508 (1989).
- [78] K. Toman, *Eos* **65**, 1193 (1984).
- [79] N. Mujica, R. Wunenburger et S. Fauve, *Eur. Phys. J. B* **33**, 209 (2003).
- [80] R. Wunenburger, N. Mujica et S. Fauve, *J. Acoust. Soc. Am.* **115**, 507 (2004).
- [81] D. Censor, *J. Franklin Inst.* **295**, 103 (1973).
- [82] D. Censor, *J. Sound Vib.* **25**, 101 (1972).
- [83] D. Censor, *J. Acoust. Soc. Am.* **76**, 1527 (1984).
- [84] P. H. Rogers, *J. Sound Vib.* **28**, 764 (1973).
- [85] J. C. Piquette et A. L. Van Buren, *J. Acoust. Soc. Am.* **76**, 880 (1984).
- [86] J. C. Piquette et A. L. Van Buren, *J. Acoust. Soc. Am.* **79**, 179 (1986).
- [87] D. Censor, *J. Acoust. Soc. Am.* **79**, 181 (1986).
- [88] J. C. Piquette et A. L. Van Buren, *J. Acoust. Soc. Am.* **80**, 1533 (1986).
- [89] D. Censor, *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1223 (1988).
- [90] J. C. Piquette et A. L. Van Buren, *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1681 (1988).

- [91] O. Bou Matar, J. P. Remenieras, C. Bruneau, A. Roncin et F. Patat, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **45**, 626 (1998).
- [92] Lord Rayleigh, *Theory of Sound, Vol. 2* (1878).
- [93] L. Fortuin, J. Acoust. Soc. Am. **47**, 1209 (1970).
- [94] E. O. LaCasce et P. Tamarkin, J. Appl. Phys. **27**, 138 (1956).
- [95] C. Eckart, J. Acoust. Soc. Am. **25**, 566 (1953).
- [96] L. N. Liebermann, J. Acoust. Soc. Am. **35**, 923 (1963).
- [97] L. Brillouin, Ann. Phys. **17**, 88 (1922).
- [98] P. Debye et F. W. Sears, Proc. Nat. Acad. Sc. **18**, 409 (1932).
- [99] P. Debye, H. Sack et F. Coulon, C. R. Acad. Sci. Paris **198**, 922 (1934).
- [100] R. Lucas et P. Biquard, C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 2132 (1932).
- [101] C. V. Raman et N. S. Nagendra Nath, Proc. Ind. Acad. Sci. **2**, 406 (1935).
- [102] C. V. Raman et N. S. Nagendra Nath, Proc. Ind. Acad. Sci. **2**, 413 (1935).
- [103] C. V. Raman et N. S. Nagendra Nath, Proc. Ind. Acad. Sci. **3**, 75 (1936).
- [104] C. V. Raman et N. S. Nagendra Nath, Proc. Ind. Acad. Sci. **3**, 119 (1936).
- [105] C. V. Raman et N. S. Nagendra Nath, Proc. Ind. Acad. Sci. **3**, 459 (1936).
- [106] P. Kang et F. C. Young, Am. J. Phys. **40**, 697 (1972).
- [107] G. Michel, F. Pétrélis et S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **116**, 174301 (2016).
- [108] G. G. Stokes, Trans. Cambr. Phil. Soc. **9 (part II)**, 8 (1851).
- [109] W. J. Harrison, Proc. Lond. Math Soc. **s2-6**, 396 (1908).
- [110] B. Franklin, W. Brownrigg et Mr. Farish, Phil. Trans. **64**, 445 (1774).
- [111] W. G. Van Dorn, J. Fluid Mech. **24**, 769 (1966).
- [112] J. Kou et J. R. Saylor, Rev. Sci. Instrum. **79**, 123907 (2008).
- [113] J. Taylor, ed., *In Search of More Solutions : More Ideas for Problem Solving Activities* (Royal Society of Chemistry, 1995).
- [114] P. C. Hohenberg et B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [115] J. Zollweg, H. Hawkings et G. B. Benedek, Phys. Rev. Lett. **27**, 1182 (1971).
- [116] M. A. Bouchiat et J. Meunier, Phys. Rev. Lett. **23**, 752 (1969).
- [117] M. Born et E. Wolf, *Principles of Optics* (1970).
- [118] S. Y. Larsen, R. D. Mountain et R. Zwanzig, J. Chem. Phys. **42**, 2187 (1965).
- [119] D. J. Coumou, E. L. Mackor et J. Aijmans, Trans. Faraday Soc. **60**, 1539 (1964).
- [120] H. B. Levine et D. A. Mcquarrie, J. Chem. Phys. **49**, 4181 (1968).
- [121] D. Beysens et P. Calmettes, J. Chem. Phys. **66**, 766 (1977).
- [122] W. Wagner, N. Kurzeja et B. Pieperbeck, Fluid Phase Equilibria **79**, 151 (1992).

- [123] W. Rathjen et J. Straub, I.I.F.-I.I.R.-Commission-Zürich **4**, 129 (1973).
- [124] D. Balzarini et P. Palfy, Can. J. Phys. **52**, 2007 (1974).
- [125] W. Rathjen et J. Straub, Proc. of the 7th Symposium on Thermophysical Properties p. 839 (1977).
- [126] W. Rathjen et J. Straub, Wärme-Stoffübertrag. **14**, 59 (1980).
- [127] D. Balzarini et K. Ohn, Phys. Rev. Lett. **29**, 840 (1972).
- [128] M. R. Moldover, Phys. Rev. A **31**, 1022 (1985).
- [129] S. N. Biswas, N. J. Trappeniers et J. H. B. Hoogland, Physica A **126**, 384 (1984).
- [130] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique* (2001).
- [131] J. W. Cahn, J. Chem. Phys. **66**, 3667 (1977).
- [132] G. Michel, F. Pétrélis et S. Fauve, Phys. Rev. Fluids **2**, 022801 (2017).
- [133] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley & Son, 2011).
- [134] J. Dittrich, P. Duclos et P. Šeba, Phys. Rev. E **49**, 3535 (1994).
- [135] C. K. Law, Phys. Rev. Lett. **73**, 1931 (1994).
- [136] O. Méplan et C. Gignoux, Phys. Rev. Lett. **76**, 408 (1996).
- [137] V. V. Dodonov, Phys. Scr. **82**, 038105 (2010).
- [138] G. Michel, EPL **116**, 44002 (2016).
- [139] A.C. Clarke, *Rendezvous with Rama* (Gollancz, 1973).
- [140] D. J. Kortevég et G. De Vries, Philos. Mag. J. Sci. **39**, 422 (1895).
- [141] E. Falcon, C. Laroche et S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **89**, 204501 (2002).
- [142] S. Perrard, L. Deike, C. Duchêne et C.-T. Pham, Phys. Rev. E **92**, 011002 (2015).
- [143] B. B. K. et V. I. Petviashvili, Sov. Phys. Dokl. **15**, 539 (1970).
- [144] S.V. Manakov, V.E. Zakharov, L.A. Bordag et V.B. Matveev, Phys. Lett. A **63**, 205 (1977).
- [145] M. Peyrard et T. Dauxois, *Physique des solitons* (EDP Sciences, 2004).
- [146] G. G. Stokes, Trans. Camb. Phil. Soc. **8**, 441 (1847).
- [147] G. D. Crapper, J. Fluid Mech. **2**, 532 (1957).
- [148] W. H. Hui et G. Tenti, TWMS J. Appl. Eng. Math. **33**, 569 (1982).
- [149] M. S. Longuet-Higgins, Proc. R. Soc. Lond. A. **342**, 157 (1975).
- [150] E. D. Cokelet, Phil. Trans. Roy. Soc. A **286**, 183 (1977).
- [151] J. D. Fenton, J. Waterway Port Coastal Ocean Eng. **111**, 216 (1985).
- [152] T. B. Benjamin et J. E. Feir, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967).
- [153] V. E. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**, 86 (1968).
- [154] R. Thomas, C. Kharif et M. Manna, Phys. Fluids **24**, 127102 (2012).
- [155] F. Dias et C. Kharif, Annu. Rev. Fluid Mech. **31**, 301 (1999).

- [156] H. C. Yuen et B. M. Lake, *Phys. Fluid* **18**, 956 (1975).
- [157] A. Chabchoub et N. Hoffmann N. Akhmediev, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
- [158] A. Chabchoub, O. Kimmoun, H. Branger, N. Hoffmann, D. Proment, M. Onorato et N. Akhmediev, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 124101 (2013).
- [159] H. C. Yuen et B. M. Lake, *Adv. Appl. Mech.* **22**, 67 (1982).
- [160] O. M. Phillips, *J. Fluid Mech.* **9**, 193 (1960).
- [161] M. S. Longuet-Higgins, *J. Fluid Mech.* **12**, 321 (1962).
- [162] P. E. A. M. Janssen, *J. Fluid Mech.* **637**, 1 (2009).
- [163] L. F. McGoldrick, *J. Fluid Mech.* **21**, 305 (1965).
- [164] V. E. Zakharov et N. N. Filonenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **8**, 37 (1967).
- [165] P. A. Madsen et D. R. Fuhrman, *J. Fluid Mech.* **698**, 304 (2012).
- [166] A.I. Dyachenko et Y. V. Lvov, *J. Phys. Ocean* **25**, 3237 (1995).
- [167] K. Hasselmann, *J. Fluid Mech.* **12**, 481 (1962).
- [168] K. Hasselmann, *J. Fluid Mech.* **15**, 273 (1963).
- [169] H. Tomita, *La mer* **25**, 53 (1987).
- [170] *The Ocean Surface* (D. Reidel Publishing Company, 1985).
- [171] E. Fermi, J. Pasta et S. Ulam, Los Alamos report pp. LA-1940 (1955).
- [172] W. Thomson, *Phil. Mag.* **10**, 109 (1880).
- [173] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **5**, 297 (1903).
- [174] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **187**, 187 (1964).
- [175] T. G. Cowling et R. A. Newing, *Astrophys. J.* **109**, 149 (1949).
- [176] H. F. Bauer et W. Eidel, *Forsch. Ingwes.* **63**, 215 (1997).
- [177] J. Mougel, D. Fabre et L. Lacaze, *J. Fluid Mech.* **783**, 211 (2015).
- [178] M. S. Longuet-Higgins et N. D. Smith, *J. Fluid Mech.* **25**, 417 (1966).
- [179] L. F. McGoldrick, O. M. Phillips, N. E. Huang et T. H. Hodgson, *J. Fluid Mech.* **25**, 437 (1966).
- [180] H. Tomita, *Rep. Ship Res. Inst.* **26**, 251 (1989).
- [181] F. Bonnefoy, F. Haudin, G. Michel, B. Semin, T. Humbert, S. Aumaître, M. Berhanu et E. Falcon, *J. Fluid Mech.* **805**, R3 (2016).
- [182] J. S. Russell, *Reports on Waves* (Richard and John E. Taylor, Londres, 1845).
- [183] R. H. Kraichnan et D. Montgomery, *Rep. Prog. Phys.* **43**, 35 (1980).
- [184] R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
- [185] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (2001).
- [186] R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **59**, 745 (1973).
- [187] R. Taillet, *Dictionnaire de physique* (De Boeck, 2013), troisième ed.

- [188] R. Peierls, *Annalen Physik* **395**, 1055 (1929).
- [189] R. Kaiser et J. Montaldi, ed., *Peyresq Lectures on Nonlinear Phenomena* (World scientific, 2000).
- [190] O. Madelung, *Introduction to solid-state theory* (Springer, 1978).
- [191] L. W. Nordheim, *Proc. R. Soc. Lond. A.* **119**, 689 (1928).
- [192] O. M. Phillips, *J. Fluid Mech.* **4**, 426 (1958).
- [193] A. C. Newell et V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **372**, 4230 (2008).
- [194] S. Nazarenko, S. Lukaschuk, S. McLelland et P. Denissenko, *J. Fluid. Mech.* **642**, 395 (2010).
- [195] E. Henry, P. Alstrom et M. T. Levinsen, *Europhys. Lett.* **52**, 27 (2000).
- [196] M. Lommer et M. T. Levinsen, *Journal of Fluorescence* **12**, 45 (2002).
- [197] C. Falcòn, E. Falcon, U. Bortolozzo et S. Fauve, *Europhys. Lett.* **86**, 14002 (2009).
- [198] G. Düring et C. Falcòn, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 174503 (2009).
- [199] B. Issenmann, C. Laroche et E. Falcon, *EPL* **116**, 64005 (2016).
- [200] L. Deike, M. Berhanu et E. Falcon, *Phys. Rev. E* **89**, 023003 (2014).
- [201] G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, M. Yu. Brazhnikov, L. P. Mezhev-Deglin, A. N. Silchenko et P. V. E. McClintock, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 074501 (2004).
- [202] G. V. Kolmakov, M. Yu. Brazhnikov, A. A. Levchenko, A. N. Silchenko, P. V. E. McClintock et L. P. Mezhev-Deglin, *J. Low Temp. Phys.* **145**, 311 (2006).
- [203] G. E. Falkovich, I. Ya. Shapiro et L. Shtilman, *Europhys. Lett.* **29**, 1 (1995).
- [204] L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu et E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 234501 (2014).
- [205] Y. Pan et D. K. P. Yue, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 094501 (2014).
- [206] Y. Pan et D. K. P. Yue, *J. Fluid Mech.* **780** (2015).
- [207] P. Cobelli, A. Przadka, P. Petitjeans, G. Lagubeau, V. Pagneux et A. Maurel, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 214503 (2011).
- [208] O. M. Phillips, *J. Fluid. Mech.* **2**, 417 (1957).
- [209] J. W. Miles, *J. Fluid. Mech.* **3**, 185 (1957).
- [210] C. E. Long et D. T. Resio, *J. Geophys. Res.* **112**, C05001 (2007).
- [211] M. A. Donelan, J. Hamilton et W. H. Hui, *Phil. Trans. R. Soc. London. A* **315**, 509 (1985).
- [212] Y. Toba, *J. Oceanog. Soc. Japan* **29**, 209 (1973).
- [213] P. Denissenko, S. Lukaschuk et S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 014501 (2007).
- [214] S. Lukaschuk, S. Nazarenko, S. McLelland et P. Denissenko, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 044501 (2009).
- [215] L. Deike, B. Miquel, P. Gutiérrez, T. Jamin, B. Semin, M. Berhanu, E. Falcon et F. Bonnefoy, *J. Fluid Mech.* **781** (2015).
- [216] A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich et V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 134501 (2004).
- [217] E. Zakharov, A. O. Korotkevich, A. N. Pushkariv et A. I. Dyachenko, *JETP Lett.* **82**, 487 (2005).

- [218] S. Aumaître, E. Falcon et S. Fauve , *Advances in Wave Turbulence* (World Scient., 2013), chap. 2.
- [219] B. Issenmann et E. Falcon, Phys. Rev. E **87**, 011001 (2013).
- [220] Q. Aubourg et N. Mordant, Phys. Rev. Fluid **1**, 023701 (2016).
- [221] L. Deike, C. Laroche et E. Falcon, Europhys. Lett. **96**, 34004 (2011).
- [222] U. Frish, *Turbulence : The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1963).
- [223] V. Dallas, S. Fauve et A. Alexakis, Phys. Rev. Lett. **115**, 204501 (2015).
- [224] E. Balkovsky, G. Falkovich, V. Lebedev et I. Ya. Shapiro, Phys. Rev. E **52**, 4537 (1995).
- [225] L. V. Abdurakhimov, M. Arefin, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, Yu. V. Lvov et I. A. Remizov, Phys. Rev. E **91**, 023021 (2015).
- [226] Yu. V. Lvov, G. V. Kolmakov et A. He, EPL **112**, 24004 (2015).
- [227] G. Michel, F. Pétrélis et S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **118**, 144502 (2017).
- [228] H. Bouasse, *Pendule spiral diapason* (Librairie Delagrave, 1920).
- [229] C. Macaskill, J. Fluid Mech. **95**, 141 (1979).
- [230] J. Wu, Z. Wan et Y. Fang, Ocean Engng. **25**, 767 (1998).
- [231] D. V. Evans et M. A. Peter, J. Eng. Math. **69**, 135 (2011).
- [232] B. Gallet, Private communication (2016).
- [233] M. Rabaud et F. Moisy, Phys. Rev. Lett. **110**, 214503 (2013).
- [234] E. Raphaël et P.-G. de Gennes, Phys. Rev. E **53**, 3448 (1996).
- [235] D. Richard et E. Raphaël, Europhys. Lett. **48**, 49 (1999).
- [236] T. Burghilea et V. Steinberg, Phys. Rev. Lett. **86**, 2557 (2001).
- [237] J. Browaeys, J.-C. Bacri, R. Perzynski et M. I. Shliomis, Europhys. Lett. **53**, 209 (2001).
- [238] T. Burghilea et V. Steinberg, Phys. Rev. E **66**, 051204 (2002).
- [239] F. Chevy et E. Raphaël, Europhys. Lett. **61**, 796 (2003).
- [240] M. Benzaquen, F. Chevy et E. Raphaël, EPL **96**, 34003 (2011).
- [241] F. Moisy, G.-L. Michon, M. Rabaud et E. Sultan, Phys. Fluids **24**, 022110 (2012).
- [242] W. Fricke, Astrophys. Space Sci. **110**, 11 (1985).
- [243] J. Dutka, Arch. Hist. Exact Sci. **49**, 105 (1995).
- [244] R. D. et J.P. Lievre, *Expériences d'électronique* (1999).

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions comment la présence de parois affecte les ondes de surface. La dissipation associée au mouillage, objet central des premiers chapitres, est abordée expérimentalement. Nous mesurons son évolution avec la taille du ménisque et montrons qu'en mouillage total des non-linéarités apparaissent dès que l'oscillation du ménisque atteint l'épaisseur des couches limites.

Dans un deuxième temps, nous quantifions les échanges d'énergie ayant lieu lors de la réflexion d'une onde de surface sur une paroi oscillante, appelés *effet Doppler généralisé*. Après une mise en évidence expérimentale, une approche théorique les évalue et illustre comment leurs effets cumulatifs peuvent mener à des spectres en compétition avec ceux de la turbulence d'ondes.

Finalement, nous traitons les interactions entre paquets d'ondes. En géométrie confinée, nous montrons que des résonances à trois ondes gravitaires sont autorisées. Dépassant la problématique des parois, nous caractérisons les interactions entre ondes gravitaires en milieu infini, puis décrivons les grandes échelles de la turbulence d'ondes capillaire.

Mots Clés

Onde de surface, Capillarité, Ménisque, Dissipation, Couche limite, Exposant critique, Effet Doppler, Turbulence d'ondes, Interactions non linéaires, Système en rotation, Équilibre thermodynamique.

Abstract

In this thesis, we study the impact of solid boundaries on surface waves. We first consider the dissipation caused by dynamical wetting. We experimentally show how the damping of surface waves evolves with the size of the meniscus and demonstrate that in perfect wetting it leads to a nonlinear behavior as soon as the meniscus oscillation amplitude compares to the thickness of the boundary layer.

Secondly, we investigate energy exchanges through scales occurring when a surface wave reflects on an oscillating wall, the so-called *generalized Doppler effect*. We evidence the creation of Doppler-shifted waves, compute their amplitudes and illustrate how the continuous bouncing of surface waves on wave-makers may lead to self-similar spectra competing with the ones of wave turbulence.

Finally, we focus on nonlinear interaction between surface waves. We prove that gravity waves can undergo triad resonances in confined geometry. Going beyond the consequences of solid boundaries, we perform experiments on four-wave interactions in the gravity regime and describe large scales in capillary wave turbulence.

Keywords

Surface wave, Capillarity, Meniscus, Dissipation, Boundary layer, Critical exponent, Doppler effect, Wave turbulence, Nonlinear interaction, Rotating system, Thermal equilibrium