THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Stabilité et formation de jets dans les bulles cavitantes : Développement d'une méthode de chaîne de marqueurs adaptée au traitement numérique des équations de Navier–Stokes avec surfaces libres

présentée par

Stéphane Popinet

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris 6
Spécialité : Mécanique : Dynamique des fluides

Soutenue le 16 octobre 2000
devant le jury composé de :

Jean Bataille	Examinateur
Christian Kharif	Rapporteur
Jacques Magnaudet	Rapporteur
Yves Pomeau	Examinateur
Andrea Prosperetti	Examinateur
Stéphane Zaleski	Directeur de thèse

Résumé

Ce mémoire est consacré à la description d'une technique nouvelle permettant une résolution numérique précise et efficace des équations de Navier–Stokes en présence d'interfaces et de surfaces libres. Une première partie est consacrée à la présentation des principes généraux de la méthode appliquée au cas d'écoulements diphasiques. Une attention particulière est accordée au traitement des termes liés à la tension de surface. La méthode est ensuite formalisée dans le cas d'écoulements avec surfaces libres. Plusieurs tests de validation sont présentés incluant : ondes capillaires planes, modes d'oscillation de gouttes, instabilité de Rayleigh–Taylor, montée de bulles dans un liquide.

Deux applications principales sont considérées dans les chapitres suivants : sonoluminescence et cavitation. Nous nous intéressons plus particulièrement au couplage entre oscillations radiales et translationelles dans les bulles en lévitation acoustique ainsi qu'à la stabilité des modes de déformation non–sphériques des bulles sonoluminescentes. La formation de jets dans les bulles de cavitation près de parois solides est simulée numériquement et comparée aux séquences photographiques expérimentales. Une étude paramétrique détaillée des effets de la viscosité sur la formation et la vitesse d'impact du jet est effectuée.

Abstract

This dissertation describes a novel technique for solving numerically the Navier–Stokes equations with interfaces or free–surfaces. The first part is a presentation of the general principle of the method applied to two–phases flows. A particular attention is paid to the treatment of terms linked to surface tension. The method is then formalised for the case of free–surface flows. Several validation tests are presented including: capillary waves, ocillations of drops, Rayleigh–Taylor instability, bubbles rising in a liquid.

Two main applications are considered in the following chapters: sonoluminescence and cavitation. We investigate more particularly the coupling between radial and translational oscillations for acoustically levitated bubbles and the stability of the spherical shape of sonoluminescing bubbles. Jet formation in bubbles cavitating near solid boundaries is simulated numerically and compared to experimental photographic series. A detailed parametric study of the influence of viscosity on jet formation and jet impact velocity is undertaken.

Remerciements

Je voudrais remercier les membres du Laboratoire de Modélisation en Mécanique, thésards et permanents qui m'ont aidé au cours de cette thèse. Je tiens à remercier plus particulièrement Renée Gatignol qui m'a permis d'effectuer cette thèse ainsi que Stéphane Zaleski pour sa compréhension et son ouverture d'esprit.

Je remercie également Jie, Maurice, Vincent, Laurent, Jose et Carolina, Florence, Marie-Gabrielle, Catherine, Sylvain et Laure, Nicole et Jean-Pierre et Vanessa pour leur aide spirituelle et matérielle.

Je remercie également mes parents qui m'ont non seulement donné le jour mais aussi le goût de la recherche scientifique.

"Nevertheless, so profound is our ignorance, and so high our presumption, that we marvel when we hear of the extinction of an organic being; and as we do not see the cause, we invoke cataclysms to desolate the world, or invent laws on the duration of the forms of life!"

Charles Darwin, *The Origin of Species*, 1859

Table des matières

Introduction **1**

1. Méthodes numériques **15**
1.1. Écoulements diphasiques 18
1.1.1. Conditions de saut et courants parasites 22
1.1.2. Marqueurs de surface 25
1.1.3. Ondes capillaires planes 37
1.2. Écoulements à surface libre 41
1.2.1. Extrapolation du champ de vitesse 46
1.2.2. Technique de raffinement dynamique des maillages 50
1.3. Quelques tests préliminaires de validation 53
1.3.1. Modes d'oscillation d'une bulle 53
1.3.2. Fusion de deux gouttes de mercure 56
1.3.3. Ascension de bulles gazeuses dans un liquide . . . 61
1.4. Récapitulatif 68

2. Sonoluminescence **69**
2.1. Équation de Rayleigh–Plesset 71
2.1.1. Stabilité géométrique et dynamique 73
2.1.2. Taux de compression 76
2.2. Simulations numériques 77
2.2.1. Stabilité des modes de déformation 81
2.3. Gradient acoustique et force de Bjerknes 87
2.3.1. Modèle pour la quantité de mouvement verticale . 89
2.4. Couplages non–linéaires entre modes de déformation . . . 99
2.5. Récapitulatif 103

3. Cavitation **105**
3.1. Expériences et simulations numériques 107
3.1.1. Comparaison entre expérience et simulation numérique 109
3.2. Effets de la viscosité 114

3.2.1. Étude paramétrique de la valeur critique du nombre de Reynolds 119

Conclusion **129**

A. Résolution numérique de l'équation de Rayleigh–Plesset **133**

B. Couplage entre marqueurs et maillage cartésien **137**

Bibliographie **143**

Introduction

Les interfaces entre différents états de la matière ou différents matériaux jouent un rôle prépondérant dans de nombreux phénomènes naturels. Dans le cas de fluides — liquides ou gaz — elles sont souvent caractérisées par un comportement complexe et la création de structures géométriques parfois très belles. Le déferlement des vagues sur une plage en bord de mer, les bulles d'air d'un plongeur sous–marin ou les gouttes de pluie tombant dans une flaque d'eau sont des exemples familiers.

Mis à part la pure curiosité que peut nous inspirer ces phénomènes, ils revêtent une grande importance pour de nombreuses applications, industrielles ou liées à la compréhension globale de certains systèmes. L'équilibre du climat dépend ainsi de manière cruciale des échanges — en particulier gazeux — entre l'océan et l'atmosphère. Ce processus global ne peut être décrit sans une modélisation locale de l'influence du déferlement des vagues. Un autre exemple "météorologique" — pour des échelles spatiales encore plus petites — concerne la formation des nuages et de la pluie. Les nuages sont composés de gouttes d'eau et c'est la dynamique locale de leurs interactions, évaporation, fusion, division qui détermine si il pleut ou non.

D'un point de vue plus fondamental, les équations qui gouvernent l'évolution des interfaces sont obtenues par des principes généraux : lois de conservation, continuité. Ce caractère universel explique l'apparition d'équations analogues dans des domaines aussi divers que l'astrophysique ou la physique nucléaire. L'étude théorique de ces équations, et en particulier des instabilités qui leur sont associées, est ainsi liée à notre compréhension globale des lois physiques.

Les applications pratiques directes sont également nombreuses. L'atomisation des jets de carburant injectés dans les moteurs à combustion, la modélisation des écoulements dispersés ou de l'endommagement par cavitation sont quelques exemples de phénomènes encore mal compris mais d'une grande importance technologique et économique. Le concept d'interface peut aussi être étendu au cas de membranes déformables ce qui permet l'étude de nombreux problèmes biomécaniques : couplage fluide–

structure pour les écoulements dans les vaisseaux sanguins, comportement des globules rouges dans les capillaires, optimisation des valves cardiaques artificielles...

La nature à la fois commune mais souvent surprenante des phénomènes interfaciaux, liée au large champ d'applications, a motivé la recherche dans ce domaine. De nombreux résultats théoriques et expérimentaux ont ainsi été obtenus depuis l'époque de pionniers tels que Laplace, Plateau ou Rayleigh. L'étude analytique des équations d'évolution est cependant délicate du fait du couplage entre les conditions aux limites et la position de l'interface, a priori inconnue. Dans de nombreux cas, les résultats théoriques sont ainsi limités à des régimes de faible déformation. D'autres hypothèses simplificatrices peuvent également être utilisées, souvent basées sur une formulation potentielle pour le champ de vitesse, ce qui restreint les résultats aux cas asymptotiques de très faible ou très forte viscosité. Malgré les progrès technologiques accomplis — en particulier pour la photographie ultra–rapide — les expériences nécessaires à la validation de ces théories restent délicates à mettre en oeuvre, en particulier lorsque les échelles spatiales et temporelles sont petites.

Le développement des calculateurs électroniques dans les années 50 a permis d'envisager une nouvelle approche pour ce type de problèmes. En théorie, la résolution numérique directe des équations d'évolution permet d'accéder à l'ensemble des grandeurs physiques et à leur évolution temporelle et spatiale. Ces "expériences numériques" peuvent potentiellement compléter voire remplacer les expériences réelles — en particulier dans le cas de conditions expérimentales difficiles. Dans la pratique, le potentiel de cette technique est limité par la puissance des calculateurs. L'accroissement extrêmement rapide de la vitesse de calcul des ordinateurs durant ces dernières décennies a cependant ouvert de nouvelles perspectives.

De manière générale, la résolution numérique de la dynamique de fluides séparés par des interfaces se décompose en deux parties :

- le choix d'une technique de représentation et de détermination des champs hydrodynamiques à l'intérieur de chacune des phases,
- le couplage de la représentation hydrodynamique avec la représentation de l'interface et des conditions aux limites correspondantes.

Dans certains cas la représentation des champs hydrodynamiques peut être très simplifiée. Les méthodes d'intégrales de frontière supposent ainsi que le champ de vitesse dérive d'un potentiel [Oğuz et al., 1990, Stone, 1994]. On peut alors montrer que l'ensemble de la dynamique peut être ramenée à l'évaluation de la valeur de sources placées sur l'interface uniquement. Dans ce cas seul le couplage évoqué dans le second point de-

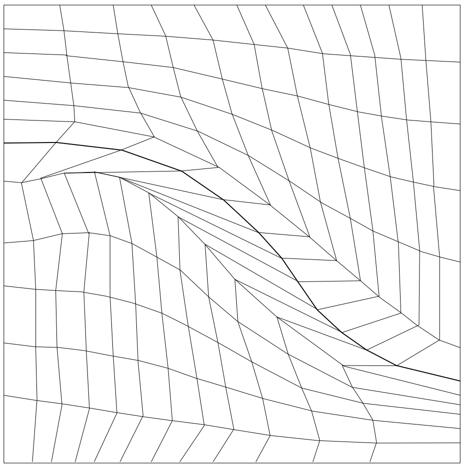


Fig. I.1.: Pour les méthodes lagrangiennes le maillage peut subir des déformations importantes même lorsque l'interface est relativement peu déformée. D'après McHyman (1984).

meure. Cette technique n'est cependant possible que dans les cas limites de très forte ou très faible viscosité de chacun des fluides. Dans le cas général, la plupart des méthodes utilisent une discrétisation des champs hydrodynamiques sur un maillage. Le choix du type de maillage utilisé dépend essentiellement de la manière dont est effectué le couplage avec l'interface.

Il peut sembler judicieux de faire coïncider le bord d'un élément de la discrétisation avec l'interface. De cette manière, tous les éléments discrets sont entièrement contenus dans une seule phase. Les changements de propriétés physiques ne se produisent qu'à la frontière entre éléments. On obtient ainsi, un ensemble de domaines — correspondant à chacune des phases — où les propriétés physiques sont constantes, liés entre eux par l'intermédiaire des conditions aux limites sur l'interface. Cette technique rappelle le type de discrétisation utilisé dans le cas d'écoulements monophasiques dans des domaines géométriquement complexes, où les frontières solides correspondent avec les bords de certains éléments. La différence essentielle est liée au fait que l'interface — contrairement à une paroi solide — est déformée par l'écoulement. Il est donc nécessaire d'utiliser un maillage *mobile* qui suit à chaque instant les déformations de l'interface [Ryskin et al., 1984, Fukai et al., 1993].

Pour ces méthodes sur maillage mobile, les valeurs discrètes des champs hydrodynamiques sont définies sur l'interface, ce qui permet une prise en

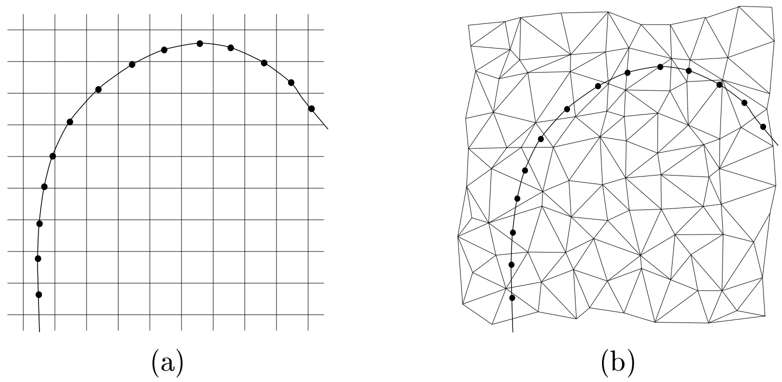


FIG. I.2.: Discrétisation des champs hydrodynamiques et de l'interface. (a) Maillage fixe structuré. (b) Maillage fixe non–structuré.

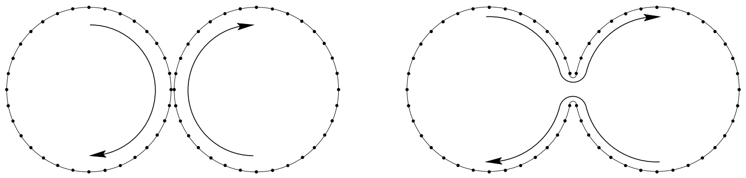
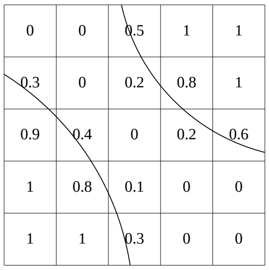


FIG. I.3.: Fusion de deux interfaces par une méthode de marqueurs. Le détail de la reconnexion est déterminé explicitement.

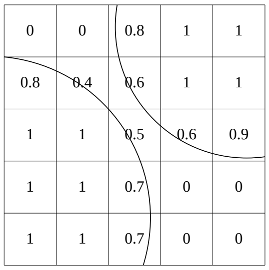
compte des conditions aux limites directe et précise [Dandy et al., 1986, Magnaudet et al., 1995]. Il est cependant difficile de généraliser cette approche lorsque les déformations deviennent importantes (figure I.1). Pour cette raison, il est intéressant d'utiliser un maillage *fixe*. La discrétisation spatiale devient ainsi indépendante de la position de l'interface. Il est donc nécessaire de choisir une représentation pour celle-ci. L'épaisseur de l'interface est généralement négligeable devant les échelles spatiales considérées.[1] Il est ainsi raisonnable de la considérer comme une véritable discontinuité, représentée par une surface (ou une courbe pour un problème bidimensionnel). Cette surface doit elle-même être discrétisée pour pouvoir être manipulée numériquement.

La méthode de *suivi de front* [Glimm et al., 1987, Unverdi et al., 1992] utilise des marqueurs distribués sur la surface et connectés entre eux qui permettent de suivre la position de l'interface. Deux maillages distincts sont ainsi nécessaires. De dimensions différente, ils discrétisent, l'un les

[1]L'épaisseur d'une interface air–eau est de l'ordre du nanomètre.

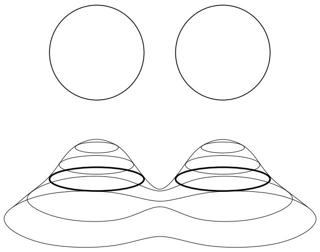


(a)

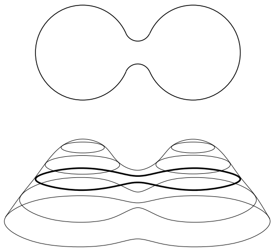


(b)

FIG. I.4.: Représentation d'une interface par la méthode VOF sur un maillage cartésien. (a) Avant reconnexion. (b) Après reconnexion.



(a)



(b)

FIG. I.5.: Représentation d'une interface par une méthode de ligne de niveau. La fonction de phase est représentée ainsi que la ligne de niveau correspondant à l'interface. (a) Avant reconnexion. (b) Après reconnexion.

champs hydrodynamiques et l'autre l'interface (figure I.2). Cette technique pose plusieurs problèmes. Il est par exemple nécessaire d'assurer une distribution homogène des marqueurs au cours de l'évolution de l'interface. Lorsque celle-ci est déformée, s'étire ou simplement lorsque la vitesse tangentielle n'est pas nulle, la densité de marqueurs varie. Il est donc essentiel de "remailler" périodiquement l'interface. Ce remaillage est cependant plus simple que dans le cas des méthodes utilisant une grille mobile car la dimension de l'interface est toujours inférieure à celle de l'espace considéré (une surface en 3D et une courbe en 2D). Les changements de topologie — comme la fusion de deux gouttes illustrée figure I.3 — posent un autre problème. Du fait de la représentation explicite de l'interface, un critère doit être choisi pour décider de l'instant et de la position auxquels s'effectue la reconnexion.

L'interface peut également être représentée implicitement, par exemple par le biais des changements de propriétés physiques telles que la densité ou la viscosité. Il est possible de généraliser cette notion en utilisant une *fonction de phase* dont la valeur indique la nature du fluide en chaque point de l'espace. Cette fonction peut avoir une signification physique comme dans les cas des méthodes de type *Volume Of Fluid* (VOF) [Noh et al., 1976, Ashgriz et al., 1991]. Cette technique applicable aux écoulements diphasiques utilise une fonction de phase définie comme la fraction volumique occupée par l'un des fluides en un point donné de l'espace (figure I.4). L'interface est alors interprétée comme le lieu des changements de cette fraction entre ses valeurs extrêmes zéro et un. Les méthodes de *ligne de niveau* (*level set*) [Sethian, 1996] utilisent une fonction de phase qui n'a pas nécessairement une signification physique. L'interface est simplement définie comme le lieu des points pour lesquels cette fonction s'annule (figure I.5). Dans tous les cas, le traitement de l'évolution de l'interface se résument à une mise à jour des valeurs de la fonction de phase : soit en prenant en compte certaines propriétés physiques, telle que la conservation de la masse dans le cas des méthodes VOF ; soit par simple transport dans le cas des méthodes de ligne de niveau.

Globalement plus simples à mettre en oeuvre que les méthodes de suivi de front — en particulier en trois dimensions — les techniques utilisant une représentation implicite de l'interface ont le gros avantage de traiter naturellement les changements de topologie. Pour une méthode VOF par exemple, la reconnexion de deux interfaces est simplement caractérisée par le passage à une valeur fractionnaire de la fonction de phase dans un certain nombre de cellules séparant deux zones de valeurs entières (figure I.4). Aucun traitement spécial n'est nécessaire. Les méthodes de ligne de niveau présentent les mêmes avantages.

Pour l'ensemble des méthodes sur grille fixe, la position de l'interface — connue dans le cas explicite et qui peut être déduite de la fonction de phase dans le cas implicite — ne correspond généralement pas avec les sites où sont discrétisés les champs hydrodynamiques. La prise en compte des conditions aux limites sur l'interface n'est donc pas directe comme dans le cas des méthodes sur grille mobile. Une approche classique consiste à extrapoler ces conditions sur les sites du maillage fixe voisins de l'interface. Cette extrapolation est effectuée en supposant que l'interface n'est plus une discontinuité parfaite mais possède une certaine épaisseur, généralement dépendante de la résolution spatiale du maillage. Les changements de propriétés physiques, densité, viscosité ainsi que les éventuelles forces interfaciales (comme la tension de surface) sont ainsi distribués sur plusieurs mailles autour de l'interface [Brackbill et al., 1992]. Cette approche limite la précision des méthodes sur maillage fixe et pose un certain nombre de problèmes sur lesquels nous reviendrons.

Il n'existe donc pas de technique de résolution universelle. Les méthodes sur maillage mobile sont précises mais limitées à des géométries simples. Les algorithmes sur maillage fixe, explicites ou implicites, sont plus généraux mais font généralement appel à un épaississement artificiel de l'interface qui peut conduire à des erreurs importantes.

Nous aborderons dans cette thèse un certain nombre de problèmes pour lesquels les conditions aux limites sur l'interface, qu'elles soient liées à la viscosité ou à la tension de surface, ont une influence importante. La première partie de cette étude sera ainsi consacrée à la mise en oeuvre d'une méthode de résolution hybride qui tentera de combiner un traitement précis de l'influence dynamique de l'interface avec une méthode de suivi de front sur maillage fixe. Le but étant d'obtenir des solutions précises y compris dans le cas de grandes déformations.

Sonoluminescence et cavitation

Le phénomène de sonoluminescence a été découvert indépendamment par Marinesco et Trillat en 1932 et Frenzel et Schultes en 1934 dans des circonstances qui rappellent la découverte de la radioactivité par Becquerel en 1896. Ces auteurs étudiaient le comportement de solutions chimiques excitées par les nouveaux transducteurs sonores inventés durant la première guerre mondiale pour la détection des premiers sous-marins. Ils ont constaté que lorsque des plaques photographiques étaient immergées dans le liquide, elles en ressortaient altérées par la “luminescence du champ acoustique”. Cette émission lumineuse, ne provient pas du liquide lui-même mais de nuages de bulles créés par les dépressions acoustiques. Elle est associée à des températures élevées qui accélèrent les réactions chimiques dans la solution. C'est cet effet catalysateur qui intéressait en premier lieu ces auteurs et qui a donné lieu par la suite à la technique dite de *sonochimie* [Suslick, 1988]. Ce phénomène de *sonoluminescence à bulles multiples* est complexe car il dépend de la dynamique couplée de nombreuses bulles sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles. Les données expérimentales sont ainsi généralement des mesures moyennes de l'intensité du champ lumineux et de son spectre ; ce qui autorise une estimation des propriétés globales du phénomène mais ne permet pas d'appréhender le détail des événements à l'origine de l'émission lumineuse.

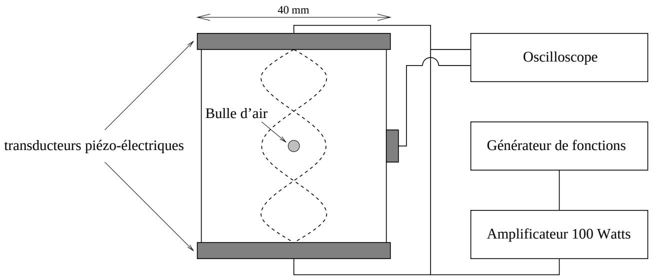


FIG. I.6.: Représentation schématique d'une cellule de lévitation utilisée lors des expériences de sonoluminescence.

La découverte de la *sonoluminescence à bulle unique* en 1988 par Gaitan et Crum a ouvert de nouvelles perspectives. Ces auteurs ont montré qu'il était possible d'obtenir la luminescence stable d'une seule bulle placée dans un champ acoustique. Malgré la petite taille des bulles utilisées (quelques microns), l'émission lumineuse est suffisamment intense pour être visible à l'oeil nu. Pour obtenir ce résultat, il est tout d'abord nécessaire d'empêcher la bulle de remonter à la surface du liquide. Cette stabilisation peut être obtenue au moyen d'une "cellule de lévitation acoustique" classiquement utilisée pour mesurer les propriétés de bulles ou d'autres particules [Apfel, 1976, Young et al., 1984]. Le schéma du dispositif expérimental correspondant est représenté figure I.6. Les deux transducteurs piézo-électriques sont utilisés pour générer une onde stationnaire pour des fréquences ultrasonores comprises entre 20 et 50 kHz. Sous l'effet des fluctuations de pression acoustique la bulle oscille radialement à la fréquence de forçage. L'oscillation du gradient de pression est à l'origine de la force — dite de *Bjerknes* — qui s'oppose à la poussée d'Archimède. Cette force est due au couplage entre l'oscillation radiale et la variation du gradient. Une bulle de volume V placée dans un gradient de pression ∇p subit une force $-V\nabla p$. La force moyenne exercée au cours d'un cycle est donc $1/T \int_T -V(t)\nabla p(t)dt$, où T est la période de forçage. Le signe et l'amplitude de cette force dépendent ainsi de la position de la bulle par rapport à l'onde stationnaire et du déphasage entre l'évolution radiale et le gradient de pression. Si la bulle atteint son rayon maximum lorsque le gradient est positif et son volume minimum lorsque le gradient est négatif, la résultante sera orientée vers le bas et la poussée d'Archimède pourra être compensée.

Le champ acoustique a donc deux effets : lévitation de la bulle et excitation de l'oscillation radiale. Lorsque l'amplitude de forçage est faible

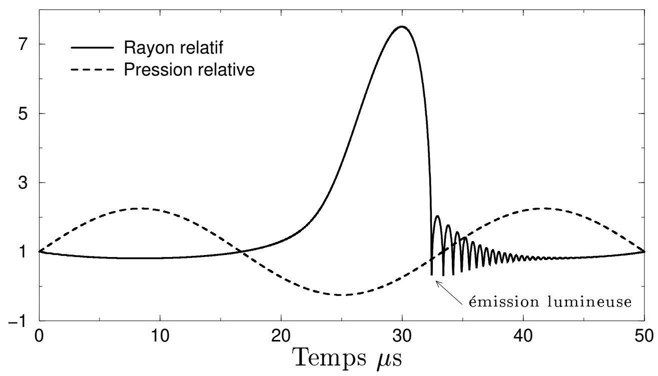


FIG. I.7.: Évolution temporelle du rayon caractéristique d'une bulle sonoluminescente.

l'oscillation radiale est de faible amplitude, sinusoïdale et en phase avec le champ acoustique. Lorsqu'elle augmente, l'inertie du fluide entourant la bulle provoque un déphasage accompagné de violents rebonds secondaires. Pour des valeurs de forçage supérieures à 1 bar, la sonoluminescence peut être obtenue. L'évolution temporelle du rayon de la bulle caractéristique d'un régime de sonoluminescence est représentée figure I.7. Les observations expérimentales montrent que l'émission lumineuse n'est pas continue mais se produit sous forme de flashes émis précisément lors du premier effondrement. L'intensité lumineuse croît avec l'amplitude de forçage jusqu'à un certain seuil au delà duquel la bulle disparaît. Ce seuil est lié — comme nous le verrons — à la stabilité de forme de la bulle [Brenner et al., 1995]. D'autres paramètres expérimentaux tels que la température [Barber et al., 1994] ou encore la composition du gaz dissous dans le liquide [Hiller et al., 1994, Hiller et al., 1995] jouent également un rôle important. Lorsque la température de l'eau décroît de 20 à 1 °C, l'intensité lumineuse augmente d'un facteur 200. La lumière émise est alors visible même en plein jour.

Une autre observation expérimentale intéressante concerne le spectre de l'émission lumineuse [Hiller et al., 1992]. Contrairement au cas de la sonoluminescence à bulles multiples, aucune raie d'émission correspondant à certaines espèces chimiques n'est visible. De plus, une grande partie de la lumière semble être émise dans l'ultraviolet. Il n'est malheureusement pas possible d'obtenir la totalité du spectre du fait de l'absorption des rayons ultraviolets par le liquide entourant la bulle. L'extrapolation des données obtenues suggère toutefois que des températures très élevées pourraient être atteintes (30 000 °K et au delà).

Du fait de la bonne répétabilité du phénomène, il est également possible d'effectuer une estimation de la durée des flashes lumineux. Les premiers expérimentateurs furent surpris de constater que cette durée semblait toujours inférieure au temps de réponse des photo-multiplicateurs utilisés pour la mesure, et ce, quelle que soit leur qualité [Barber et al., 1992]. Cette mesure s'est en fait révélée très délicate, les flashes lumineux étant effectivement extrêmement courts (de l'ordre de la dizaine ou centaine de picosecondes[2]). Récemment, Gompf et ses collaborateurs sont parvenus en utilisant des techniques sophistiquées à résoudre non seulement la durée des flashes [Gompf et al., 1997] mais également la forme de leur évolution temporelle [Pecha et al., 1998]. Il en ressort une estimation précise variant entre 100 et 300 ps suivant l'amplitude de forçage.

La première théorie proposée pour expliquer la sonoluminescence à bulle unique repose sur l'échauffement dû à la compression adiabatique du gaz contenu dans la bulle lors de l'effondrement. Les valeurs minimum et maximum du rayon peuvent en effet différer d'un facteur cent, soit un taux de compression volumique de un million. Cette explication — initialement proposée pour la sonoluminescence à bulles multiples — prédit des valeurs de l'ordre de 5000 °K, inférieures aux températures déduites du spectre lumineux. De plus les estimations initialement obtenues pour la durée de l'impulsion lumineuse sont de l'ordre de 20 nanosecondes (100 fois trop longue).

Ces constatations ont amené Greenspan et Nadim (1993) ainsi que Wu et Roberts (1993) à proposer une théorie liée à la focalisation d'une onde de choc sphérique. En effet, lors de l'effondrement, une modélisation théorique du comportement de la bulle permet de montrer que ses parois dépassent la vitesse du son dans le gaz. Il est donc probable que des ondes de chocs soient formées dans le gaz bien qu'aucune observation directe n'ait été obtenue (du fait de la très petite taille de la bulle et de la très courte durée du phénomène au moment de l'effondrement). Des ondes de choc sont par contre facilement observées dans le liquide [Holzfuss et al., 1998, Pecha et al., 1999]. La théorie de la focalisation permet d'obtenir des valeurs élevées pour la température ainsi que des échelles de temps compatibles avec les mesures de la largeur de l'impulsion lumineuse.

Cette théorie est basée sur l'hypothèse que la symétrie sphérique de l'effondrement est préservée pendant un temps suffisant pour assurer une focalisation efficace de l'onde de choc. Cette hypothèse semble

[2] 1 picoseconde = 10^{-12} seconde

confirmée par certaines visualisations directes qui montrent une bulle peu déformée jusqu'aux derniers instants de l'effondrement [Tian et al., 1996]. L'émission lumineuse a cependant lieu lorsque la bulle atteint des rayons beaucoup plus petits (inférieurs à un micron) pour lesquels une observation directe n'est pas possible. La forme de la bulle au moment de l'émission lumineuse reste donc une question ouverte.

Bien que cette théorie — couplée à une modélisation de l'ionisation du gaz contenu dans la bulle — ait permis récemment de reproduire de manière convaincante les mesures expérimentales de l'amplitude et de la forme des impulsions lumineuses [Hilgenfeldt et al., 1999], un certain nombre de questions restent sans réponse. L'utilisation de traceurs chimiques colorés permet en particulier de mettre en évidence la structure de l'écoulement autour de bulles sonoluminescentes. Cet écoulement apparaît fortement dissymétrique, sous la forme d'un champ de vitesse dipolaire aboutissant à la création de filaments du traceur coloré [Verraes et al., 2000]. Cet écoulement dipolaire disparaît lorsque la bulle est absente. Il ne peut donc être associé à une circulation acoustique (*acoustic streaming*) [Lighthill, 1978]. L'oscillation radiale de la bulle couplée à une oscillation verticale pourrait expliquer cette circulation [Longuet-Higgins, 1998]. Dans tous les cas, l'hypothèse de symétrie sphérique n'est cependant pas vérifiée.

Une source de dissymétrie évidente est la poussée d'Archimède et la force de Bjerknes qui la compense. En effet, l'équilibre entre ces deux forces n'est assuré *qu'en moyenne* sur une période d'oscillation. Comme nous l'avons vu, lorsque la bulle atteint son rayon maximum la force due au gradient de pression s'exerce vers le bas. Le premier effondrement doit donc être accompagné d'une translation vers le bas du centre de gravité de la bulle. Inversement lors de la ré-expansion, le centre de gravité doit se déplacer vers le haut. Se basant sur cette observation, Prosperetti (1997) remet en cause la validité du modèle de focalisation sphérique d'une onde de choc et propose une explication alternative.

Il est bien connu que l'effondrement de cavités initialement sphériques, en translation, est accompagné de grandes déformations de l'interface, sous la forme de jets liquides. Ce phénomène a initialement été observé expérimentalement dans le cadre de l'étude de l'endommagement par cavitation au voisinage de parois solides [Naudé et al., 1961]. La formation spontanée de jets sur une interface ou une surface libre est par ailleurs un phénomène relativement général [Longuet-Higgins et al., 1995, Zeff et al., 2000]. Dans le cas d'une cavité en translation la formation d'un jet peut être expliquée par la conservation de la quantité de mouvement

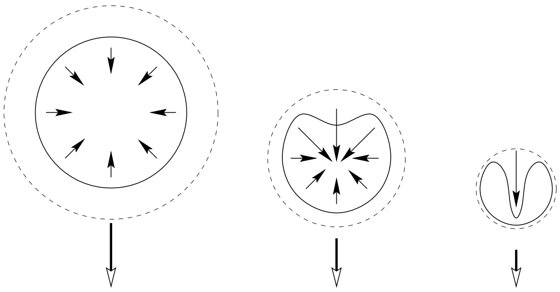


FIG. I.8.: Formation d'un jet pour une cavité s'effondrant tout en se déplaçant. Le liquide entraîné par la bulle est représenté par la zone pointillée. La plus grande partie de la quantité de mouvement translationnelle est transférée dans le jet sur la dernière figure.

translationnelle. Lorsqu'une bulle se déplace dans un liquide, elle entraîne avec elle une partie du fluide environnant. Il en va de même si son rayon varie. Si l'effondrement est sphérique et complet, aboutissant à la disparition de la cavité, la quantité de mouvement translationnelle du liquide ne peut être conservée. En réalité, cette quantité de mouvement est récupérée par un jet liquide se déplaçant dans le sens de la translation (figure I.8).

En suivant cet argument, il est convaincant de supposer qu'une bulle de sonoluminescence ne reste pas sphérique lors de son effondrement et qu'un jet dirigé vers le bas se forme à un instant proche de l'émission lumineuse. Prosperetti propose ainsi d'expliquer la luminescence par l'impact de ce jet sur la paroi opposée. Dans le cas de bulle de cavitation près de parois solides, des expériences révèlent que des vitesses de jet de plusieurs centaines de mètres par seconde sont atteintes [Vogel et al., 1989]. Étant donné la violence de l'effondrement des bulles sonoluminescentes, des vitesses encore plus élevées peuvent être envisagées. Le mécanisme d'émission lumineuse proprement dite invoqué par Prosperetti est la *fractoluminescence*. Ce phénomène est connu dans le cas de solides tels que la glace ou le sucre [Dickinson et al., 1984, Sweeting, 1998], qui émettent de la lumière lorsqu'on les casse. Pour des vitesses d'impact suffisamment élevées, l'eau liquide se comporte comme un solide et on peut imaginer que les mêmes mécanismes de fracture permettent l'émission lumineuse. L'espace de paramètres pour lesquels la sonoluminescence est observée correspondrait ainsi aux valeurs pour lesquelles l'impact du jet est suffisamment violent pour causer la fractoluminescence de l'eau.

Les instabilités hydrodynamiques semblent ainsi jouer un rôle important dans le phénomène de sonoluminescence, que ce soit dans le cadre de la théorie de Prosperetti ou afin de valider les hypothèses de symétrie sphérique nécessaires à la théorie de focalisation de l'onde de choc. De plus, ces instabilités, formation de jets ou excitation d'autres modes de déformation, sont de nature générale et caractérisent la plupart des phénomènes mettant en jeu des bulles ou gouttes de fluide.

Dans le cas de la sonoluminescence, les événements importants liés à l'émission lumineuse se produisent sur des échelles spatiales et temporelles extrêmement petites (inférieures à un micron et 100 nanosecondes) ce qui rend très difficile une investigation expérimentale directe. Une étude par simulation numérique de ces phénomènes semble ainsi prometteuse. Si de nombreux modèles supposant la symétrie sphérique de l'écoulement ont été développés [Greenspan et al., 1993, Wu et al., 1993, Moss et al., 1994, Moss et al., 1997], il n'existe pas à notre connaissance d'études exhaustives dans les cas tridimensionnels ou axisymétriques. Une telle étude permettrait de modéliser la forme de l'interface au moment de l'émission lumineuse et pourrait donner des indications précieuses sur la validité des théories proposées ; que ce soit la formation de jets ou une quantification des déformations de l'interface au moment de l'émission de l'onde de choc.

Dans cette optique, cette thèse sera consacrée au développement d'une méthode numérique permettant la résolution d'écoulements avec interface ou surface libre dans le cas axisymétrique. Cette méthode sera tout d'abord appliquée à divers problèmes dont certains — possédant une solution théorique — permettront d'évaluer la précision de la solution obtenue. Dans une seconde partie nous nous intéresserons spécifiquement à l'étude du comportement de bulles dans les conditions de sonoluminescence ; en particulier en ce qui concerne la stabilité des modes de déformation et le couplage entre la translation et l'effondrement. Enfin, cette étude sera étendue au cas des bulles de cavitation au voisinage de parois solides et à l'influence de la viscosité sur la formation des jets.

1. Méthodes numériques

Pour les méthodes de type eulerien un maillage fixe est utilisé pour discrétiser les champs de grandeurs physiques (vitesse, pression, densité, vorticité, etc.). Des techniques de résolution diverses, issues de la simulation numérique des écoulements monophasiques sont disponibles. Elles diffèrent entre elles essentiellement par le type d'approximation (éléments finis et volume finis) ou l'ordre des schémas utilisés pour le calcul des termes apparaissants dans les équations d'évolution. Loin des interfaces, l'écoulement est monophasique et ces méthodes peuvent être appliquées directement.

Le traitement des interfaces pose deux problèmes directement liés à la manière dont celles-ci sont représentées. Le premier concerne la cinématique. L'interface doit être déformée par le champ de vitesse. Ces déformations peuvent être de grande amplitude et impliquer des changements de topologie (fusion de deux gouttes par exemple). Dans le cas d'écoulements incompressibles, la masse et donc le volume défini par l'interface doivent être conservés. Le second problème est d'ordre dynamique. La résolution de l'écoulement dans chacune des phases implique la prise en compte des changements de propriétés physiques se produisant sur l'interface et des conditions aux limites imposées sur celle-ci.

Une représentation implicite de l'interface est traditionnellement utilisée pour le traitement de problèmes complexes. Les méthodes implicites définissent l'interface par l'intermédiaire d'une fonction de phase, constante mais de valeur différente dans chacune des phases. Une des premières approches ainsi utilisée consiste à résoudre directement une équation d'advection de la forme

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \tag{1.1}$$

pour la masse volumique ρ [Boris et al., 1973, Zalesak, 1979]. L'interface est alors interprétée comme le lieu des discontinuités de ρ. Le problème essentiel lors de la résolution de cette équation est la diffusion numérique des schémas utilisés. Une interface initialement fine, caractérisée par de forts gradients de densité, risquera de s'étaler au cours du calcul sous l'effet de la diffusion numérique. Des schémas classiques pour la résolution des équations hyperboliques adaptés au traitement des discontinuités permettent de limiter cette diffusion et donnent de bons résultats [Sweby, 1984, Shu et al., 1989, Benkenida, 1999]. Une autre technique, motivée par les mêmes considérations, permet d'éliminer cette diffusion. Il s'agit de la méthode VOF (*Volume Of Fluid*) qui consiste à discrétiser l'équation d'advection sous la forme de flux géométriques calculés à partir d'une reconstruction de la forme de l'interface [Noh et al., 1976, Ashgriz et al., 1991, Li, 1995, Gueyffier et al., 1998]. Les méthodes implicites basées sur la résolution plus ou moins directe de l'équation d'advection ont l'avantage d'assurer automatiquement la conservation de la masse (lorsque des schémas conservatifs sont utilisés). Plus récemment, la méthode de ligne de niveau (*level sets*), également basée sur une représentation implicite de l'interface, a connu une certaine popularité. Intéressante par sa simplicité et l'élégance du formalisme mathématique associé, elle présente cependant l'inconvénient de ne pas assurer intrinsèquement la conservation de la masse. De plus, des ré-initialisations périodiques de la fonction de phase sont nécessaires et leur effet sur la solution n'est pas très clair.

Une autre approche, somme toute plus naturelle, consiste à représenter explicitement l'interface. Celle-ci peut en effet être considérée comme un objet géométrique continu (une courbe en 2D et une surface en 3D) qui peut être discrétisé au même titre que les champs de grandeurs physiques. La résolution de l'équation d'advection se réduit alors au transport et à la déformation de cet objet par l'écoulement. Un certain nombre de techniques permettent de conserver la qualité de la discrétisation lors de ces déformations (cf. section 1.1.2).

En ce qui concerne le problème cinématique, l'ensemble de ces méthodes, qu'elles soient implicites ou explicites donnent de bons résultats. L'avantage des méthodes implicites est la similitude des algorithmes écrits en deux ou trois dimensions ainsi que le traitement automatique des changements de topologie. Les méthodes explicites traitant l'interface de manière globale doivent en effet nécessairement modifier leur représentation lorsqu'un changement de topologie se produit. De plus, l'utilisation d'objets géométriques (et non pas de champs scalaires) implique des différences topologiques qualitatives qui compliquent la transition entre deux et trois dimensions.

Dans ce cas, pourquoi utiliser une méthode explicite ? Il y a quelques années, lorsque ces méthodes ont vu le jour [Glimm et al., 1987, Tryggvason et al., 1990], la réponse aurait pu être : car les autres méthodes disponibles ne résolvent pas correctement le problème cinématique. En effet les méthodes volume de fluide de l'époque, pour la plupart du premier ordre en espace,[1] ne donnaient pas des résultats satisfaisants pour des tests simples comme la rotation ou la translation solide d'une interface [Lafaurie et al., 1994]. Les schémas volume de fluide d'ordre deux [Li, 1996, Puckett et al., 1997, Gueyffier et al., 1998] et les méthodes de lignes de niveau [Sussman et al., 1994, Sethian, 1996] ont depuis beaucoup amélioré la situation et cet argument n'est plus valable.

Nous pensons que le véritable intérêt des méthodes explicites est lié au problème dynamique. Jusqu'à maintenant l'ensemble des méthodes sur grille fixe, implicites ou explicites, utilisent une discrétisation des termes dynamiques liés à l'interface (la tension de surface en particulier) basée sur un lissage local des discontinuités [Brackbill et al., 1992, Tryggvason et al., 1999]. L'épaississement artificiel de l'interface résultant de ce lissage a plusieurs conséquences importantes :

- Il introduit une échelle spatiale artificielle dont l'influence doit être minimisée en utilisant une résolution spatiale accrue (idéalement uniquement au voisinage de l'interface).
- Il rend difficile une étude locale de l'équilibre entre les forces discrétisées au voisinage de l'interface.
- Il est difficilement généralisable à des termes de surface quelconques (tension de surface variable, membranes complexes, etc.).
- La précision de la discrétisation obtenue est discutable.

Ces problèmes disparaissent si l'interface est traitée comme une véritable discontinuité. C'est le cas en particulier avec les méthodes sur maillage mobile [Magnaudet et al., 1995] qui assurent une discrétisation très précise des termes de surface. Ces méthodes utilisent également un formalisme mathématique plus rigoureux. Cette précision est cependant obtenue au prix d'une plus grande complexité et de contraintes géométriques importantes (simplicité géométrique, déformations limitées). Il semble malheureusement difficile de concilier les erreurs géométriques liées à une représentation implicite avec un traitement de l'interface comme une discontinuité (c'est en partie pour cette raison que l'approximation continue a été utilisée).

[1] Il est intéressant de noter que les toutes premières implémentations de la méthode volume de fluide étaient en fait d'ordre deux [DeBar, 1974, Youngs, 1982], mais faute de publicité, elles n'ont pas eu le succès qu'elles méritaient. Les schémas d'ordre deux restent toutefois difficile à généraliser dans le cas de maillages arbitraires.

Nous pensons qu'une méthode réunissant représentation explicite et traitement dynamique de l'interface comme une discontinuité peut combiner la flexibilité des méthodes sur grille fixe avec la précision et la rigueur mathématique des méthodes sur grille mobile. Nous présentons dans la section suivante une première application de ce concept aux termes de tension de surface et de gradient de pression pour un écoulement diphasique. La section 1.2 généralise cette approche pour le cas d'un écoulement à surface libre.

1.1. Écoulements diphasiques

De manière générale, les équations de Navier–Stokes incompressibles avec densité et viscosité variables et tension de surface peuvent s'écrire sous la forme

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \sigma \kappa \delta_s \mathbf{n}, \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1.3}$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ est la vitesse du fluide, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ la densité, $\mu = \mu(\mathbf{x}, t)$ la viscosité dynamique, $\mathbf{D}$ le tenseur de taux de déformation défini comme $D_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$. Le terme de tension de surface $\sigma \kappa \delta_s \mathbf{n}$ est non–nul ($\delta_s = \infty$ associé à une intégration au sens des distributions) sur l'interface et nul partout ailleurs, σ est le coefficient de tension de surface, κ le rayon de courbure et $\mathbf{n}$ la normale à l'interface.

Dans le cas de deux fluides non–miscibles, on peut définir une fonction de phase χ égale à 1 dans la première phase et 0 dans la seconde. En l'absence de changement de phase, χ suit simplement le mouvement du fluide selon l'équation d'advection

$$\partial_t \chi + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0. \tag{1.4}$$

La densité et la viscosité peuvent alors être définies à partir de la fonction de phase comme

$$\rho = \chi \rho_1 + (1 - \chi) \rho_2, \tag{1.5}$$

$$\mu = \chi \mu_1 + (1 - \chi) \mu_2. \tag{1.6}$$

Une formulation équivalente utile fait intervenir les conditions de saut à travers l'interface. Au voisinage de l'interface S, l'équation pour la quantité de mouvement (1.2) et l'équation de continuité (1.3) se réduisent à la condition sur le saut de contrainte tangentielle

$$[\mu \mathbf{t} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]_S = 0, \tag{1.7}$$

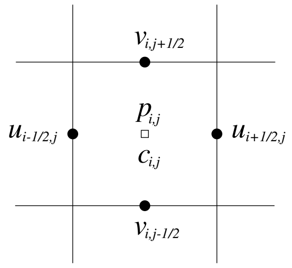


FIG. 1.1.: Discrétisation de type MAC.

et sur le saut de contrainte normale

$$[\mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}) \cdot \mathbf{n}]_S = \sigma\kappa, \tag{1.8}$$

associées à l'hypothèse de continuité de la vitesse

$$[\mathbf{u}]_S = 0. \tag{1.9}$$

Discrétisation des équations et méthode de projection

Nous avons choisi une discrétisation décalée de type MAC sur grille cartésienne [Peyret et al., 1983] ; ce choix étant essentiellement dicté par des considérations de simplicité de mise en oeuvre. De plus l'utilisation d'une grille régulière de pas $\delta x = \delta y = h$ assure le second ordre de la discrétisation spatiale centrée des termes de gradient.

La fraction surfacique $c_{i,j}$ est définie comme la surface relative occupée par le fluide 1 pour la cellule de contrôle $\Omega_{i,j}$ illustrée figure 1.1, soit

$$c_{i,j} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_{i,j}} \chi d\mathbf{x}, \tag{1.10}$$

où $|\Omega| = h^2$ est l'aire du volume de contrôle. Les équations (1.5) et (1.6) sont approchées comme

$$\rho_{i,j} = c_{i,j}\rho_1 + (1 - c_{i,j})\rho_2, \tag{1.11}$$

$$\mu_{i,j} = c_{i,j}\mu_1 + (1 - c_{i,j})\mu_2. \tag{1.12}$$

La méthode de projection, classiquement utilisée pour la résolution des équations de Navier–Stokes incompressibles monophasiques [Peyret et al., 1983], peut être adaptée au cas diphasique. L'algorithme utilisé peut être décomposé comme suit pour un pas de temps :

1. L'interface est advectée par le champ de vitesse au temps $t_n = n\tau$, où τ est le pas de temps. La fraction surfacique $c_{i,j}$ est mise à jour à partir de la position de l'interface (cf. Annexe B).
2. Une solution provisoire $\mathbf{u}^\star$ est obtenue par une discrétisation explicite en temps de l'équation de quantité de mouvement (1.2) :

$$\mathbf{u}^\star = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}^n) + \frac{\sigma}{\rho}\kappa \delta_s \mathbf{n}. \tag{1.13}$$

Les termes d'advection et de contraintes visqueuses sont discrétisés spatialement à l'aide d'un schéma centré. Le terme de tension de surface est obtenu comme décrit dans la section 1.1.2. Un terme de "correction du gradient de pression" peut également être ajouté. Dans certains cas, en particulier lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé, la condition de stabilité du schéma centré est difficile à vérifier et un schéma décentré de type *upwind* peut être utilisé. Un schéma upwind aussi compact que le schéma centré (n'utilisant qu'un seul point en amont et en aval) présente toutefois l'inconvénient de n'être que du premier ordre sur une grille régulière.
3. La non–divergence du champ de vitesse au temps $n+1$ est assurée par l'intermédiaire du terme de pression. Le champ de vitesse au temps $n+1$ est obtenu comme

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^\star - \frac{\tau}{\rho^{n+1}}\nabla p^{n+1}. \tag{1.14}$$

Afin d'assurer la non–divergence $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ de l'écoulement au temps $n+1$ la pression doit ainsi vérifier l'équation suivante

$$\nabla \cdot \left(\frac{\tau}{\rho^{n+1}}\nabla p^{n+1}\right) = \nabla \cdot \mathbf{u}^\star. \tag{1.15}$$

Cette équation, analogue à l'équation de Poisson pour la pression dans le cas incompressible monophasique, constitue la seule composante spatiale implicite de l'algorithme. Ceci s'explique physiquement par la nécessité de résoudre la vitesse de propagation infinie (du fait de l'hypothèse d'incompressibilité) de l'information liée aux fluctuations de pression ("ondes sonores" de vitesse infinie).

Si l'on utilise des différences finies centrées, l'équation (1.15) s'exprime sous forme discrète comme

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\rho_{i+1/2,j}} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\rho_{i-1/2,j}} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\rho_{i,j+1/2}} - \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1/2}} = \tag{1.16}$$
$$\frac{h}{\tau}(u^\star_{i+1/2,j} - u^\star_{i-1/2,j} + v^\star_{i,j+1/2} - v^\star_{i,j-1/2}),$$

soit après factorisation

$$\left(\frac{1}{\rho_{i+1/2,j}}+\frac{1}{\rho_{i-1/2,j}}+\frac{1}{\rho_{i,j+1/2}}+\frac{1}{\rho_{i,j-1/2}}\right)p_{i,j} = \tag{1.17}$$
$$\frac{p_{i+1,j}}{\rho_{i+1/2,j}}+\frac{p_{i-1,j}}{\rho_{i-1/2,j}}+\frac{p_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1/2}}+\frac{p_{i,j-1}}{\rho_{i,j-1/2}} -$$
$$\frac{h}{\tau}(u^\star_{i+1/2,j}-u^\star_{i-1/2,j}+v^\star_{i,j+1/2}-v^\star_{i,j-1/2}).$$

Ce système linéaire pentadiagonal peut être résolu par différentes techniques. Il est important de noter que la matrice définie par l'équation (1.17) est à diagonale dominante. L'approche la plus simple consiste à effectuer un nombre suffisant de relaxations de type Gauss–Seidel [Hämmerlin et al., 1991] en utilisant l'opérateur défini par l'équation (1.17). L'erreur sur la divergence peut être utilisée comme critère d'arrêt. Cette solution est satisfaisante lorsque le nombre de points de grille est limité. Lorsque la taille du système augmente, les performances de la plupart des méthodes de résolution itératives (Gauss–Seidel, décomposition de Cholesky ou méthode de gradient conjugué) diminuent. Ce phénomène est accentué dans le cas où le contraste de densité entre les deux fluides est important. En effet à proximité de l'interface, l'opérateur (1.17) peut devenir très dissymétrique ce qui nuit au conditionnement du système d'équations.

Nous utilisons une méthode multigrille maintenant classique permettant d'accélérer la convergence des algorithmes itératifs [Brandt, 1982, Briggs, 1987, Press et al., 1991]. Cette technique est basée sur la constatation suivante : les algorithmes itératifs peuvent être interprétés physiquement comme la solution discrète spatialement et temporellement d'une équation de diffusion pour l'écart entre le champ initial et la solution recherchée. Un nombre de pas de temps suffisant est nécessaire pour converger vers l'état stationnaire. Ce nombre d'itérations dépend directement de la taille du domaine considéré, dans la mesure où la vitesse de diffusion est normalisée par le pas de temps et la taille d'une maille. Il peut donc être intéressant de chercher à résoudre les modes de grande longueur d'onde de la solution sur un maillage plus grossier. Cette solution à grande échelle peut ensuite être utilisée comme première approximation de la solution à une échelle plus petite. À son tour la recherche de la solution à grande échelle peut bénéficier d'une première approximation à très grande échelle obtenue sur un maillage encore plus grossier. Ce schéma conduit à utiliser la méthode itérative sur une succession de maillages imbriqués de plus en plus grossiers. Sur chacun des maillages, les échelles spatiales de la solution de l'ordre de la taille de la maille peuvent être obtenues en un nombre constant d'itérations. Ceci aboutit à un nombre total d'itérations indépendant de la taille du maillage le plus fin.

Dans la pratique, cette méthode donne de bons résultats, y compris pour de grands rapports de densité [Gueyffier et al., 1998, Li, 1996]. La résolution de l'équation pour la pression reste toutefois l'opération la plus coûteuse en temps (60 à 80 %) de l'ensemble de l'algorithme de résolution des équations de Navier–Stokes.

1.1.1. Conditions de saut et courants parasites

Un problème souvent rencontré lors de simulations numériques diphasiques avec tension de surface a été nommé *courants parasites* [Lafaurie et al., 1994]. Si l'on considère deux fluides non–miscibles au repos séparés par une interface circulaire (en deux dimensions), le champ de vitesse est nul et le champ de pression est donné par l'équation de Laplace

$$[p]_s = \frac{\sigma}{R}, \tag{1.18}$$

où R est le rayon. Le saut de pression à travers l'interface équilibre exactement la tension de surface. Il s'agit d'un test simple permettant de vérifier la précision du traitement des conditions de saut sur l'interface.

La plupart des méthodes utilisant un maillage fixe, qu'elles soient de type *level sets*, volume de fluide ou suivi de front modélisent l'interface non pas comme une discontinuité mais comme un changement rapide mais continu des propriétés physiques. L'interface est donc artificiellement épaissie et les termes surfaciques comme la tension de surface sont distribués sur une épaisseur finie.

Appliquées au cas de la bulle stationnaire, l'ensemble de ces méthodes exhibent un résultat similaire à celui illustré figure 1.2. La solution numérique ne converge pas vers la solution de Laplace mais vers une solution caractérisée par des *courants parasites* dont l'intensité $\max(|\mathbf{u}|)$ est essentiellement proportionnelle à la tension de surface et inversement proportionnelle à la viscosité [Lafaurie et al., 1994]. La constante de proportionnalité τ telle que $\max(|\mathbf{u}|) = \tau\sigma/\mu$ est importante dans la mesure où elle contrôle l'espace de paramètres (σ, μ) accessible en utilisant une méthode donnée. En effet, lorsque σ/μ est suffisamment grand, les courants parasites peuvent conduire à une instabilité catastrophique de l'interface et à sa destruction rapide.

Lors des tests initiaux de la plupart des méthodes numériques, des paramètres peu contraignants sont en général choisis : faible tension de

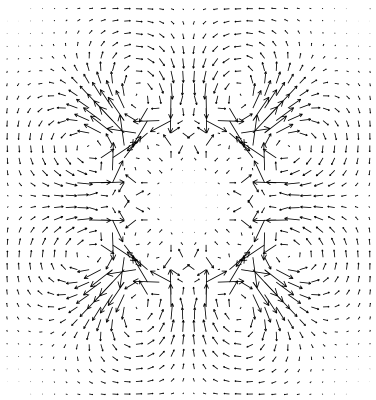


Fig. 1.2.: Exemple de courants parasites autour d'une bulle au repos obtenus pour un schéma d'advection de type VOF et une formulation continue des termes de tension de surface.

surface, viscosité moyenne et faibles rapports de densité entre les phases. Le coefficient de proportionnalité τ étant généralement petit, les courants parasites passent alors facilement inaperçus. Une application à des problèmes concrets plus contraignants comme des interfaces air–eau ou air–mercure sera très difficile si τ n'est pas petit. La plupart des auteurs admettent avoir observé ces courants parasites mais les mentionnent rarement dans leurs publications. On peut toutefois se demander si leur présence n'est pas une des causes des difficultés éprouvées lors de la simulation de problèmes concrets. De manière plus générale, ce problème peut amener à douter de la précision du traitement de l'ensemble des termes soumis aux conditions de saut, en particulier le saut de contrainte normale dû à la viscosité [Benkenida, 1999].

La plupart des méthodes utilisant une formulation continue des termes de surface luttent généralement contre l'influence des courants parasites en utilisant diverses fonctions de lissage qui permettent d'amoindrir leur intensité [Williams et al., 1998, Gueyffier et al., 1998]. Le choix de ces fonctions est en général empirique car il est difficile de réaliser une étude analytique des erreurs induites par la formulation continue. En conséquence, il n'existe pas à notre connaissance d'explication détaillée quant à l'origine des courants parasites.

Dans le cas d'une discrétisation MAC, Li [Li, 1996] démontre qu'étant donné le traitement du gradient de pression prés de l'interface, l'équilibre entre tension de surface et pression nécessaire pour obtenir la solution de Laplace dans le cas d'une bulle stationnaire ne peut pas être assuré.

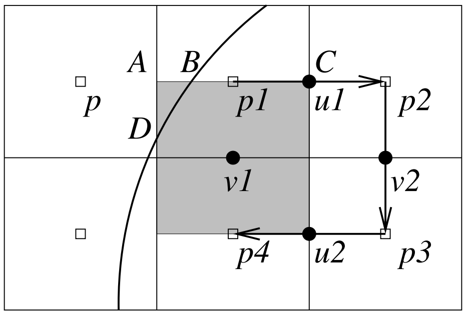


FIG. 1.3.: Incompatibilité entre tension de surface et gradient de pression sur une grille MAC.

Le raisonnement est illustré figure 1.3, où une interface circulaire dans un fluide au repos coupe la discrétisation suivant une configuration particulière. La composante de la vitesse horizontale $u1$ devant être nulle, le gradient de pression horizontal exprimé en $u1$ doit également être nul. Ce gradient est obtenu par différences finies comme $(p2 - p1)/h$ donc nécessairement $p1 = p2$. En appliquant ce même raisonnement pour les composantes $u2$ et $v2$, on obtient finalement $p1 = p2 = p3 = p4$. Or le volume de contrôle de la composante $v1$ (zone grisée) est coupé par l'interface. La contribution du terme de tension de surface dans l'équation de quantité de mouvement pour cette composante est donc non–nulle. Cette contribution n'étant pas équilibrée par le gradient de pression $(p1-p4)/h$, la composante $v1$ ne peut rester nulle.

Cette incohérence est clairement due au fait que le gradient de pression exprimé en $v1$ n'est pas calculé correctement. En effet, le saut de pression au point B donné par la solution de Laplace n'est pas pris en compte. Une solution simple consiste à calculer le gradient de pression en $v1$ comme $(p_{AB} + p_{BC} - p4)/h$. Un choix judicieux de p_{AB} et p_{BC} permet de compenser exactement le terme de tension de surface. Cette correction locale constitue la base de la méthode de *correction du gradient de pression* présentée section 1.1.2.

Il est important de noter que le raisonnement ci-dessus ne concerne que le gradient de pression et suppose que le terme de tension de surface est calculé exactement. En particulier, il semble difficile de généraliser ce résultat pour le cas où la tension de surface est distribuée sur plusieurs volumes de contrôle au voisinage de l'interface.

1.1.2. Marqueurs de surface

L'interface est représentée comme une liste ordonnée $\{p_1, \ldots, p_N\}$ de points advectés par l'écoulement (*marqueurs*), avec $p_i = (x_i, y_i)$. Afin de passer de cette représentation discrète à une représentation continue, il est nécessaire de choisir une technique d'interpolation entre ces points. Un choix simple consiste à relier les points par des segments de droite. La courbe obtenue est de classe $\mathcal{C}^0$ ce qui est gênant si les grandeurs géométriques locales comme la tangente ou la courbure sont nécessaires lors du calcul. Nous avons retenu une interpolation de classe $\mathcal{C}^2$ qui assure la continuité de la tangente et de la courbure le long de l'interface.

Pour se faire, l'interface est représentée entre chaque paire de points consécutifs par une courbe paramétrique définie par deux polynômes cubiques $\mathbf{p}_i(s) = (p_i^x(s), p_i^y(s))$. Le paramètre s est une approximation de l'abscisse curviligne. Il est défini comme

$$s_i = \sum_{j=1}^{i-1} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}. \tag{1.19}$$

L'interface définie comme $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{N-1}\}$ devant être de classe $\mathcal{C}^2$, les polynômes $\mathbf{p}$ vérifient :

$$\mathbf{p}_i(s_i) = p_i \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_i(s_{i+1}) = p_{i+1}, \tag{1.20}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial s}\right|_{s_i} = \left.\frac{\partial \mathbf{p}_{i-1}}{\partial s}\right|_{s_i} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 \mathbf{p}_i}{\partial s}\right|_{s_i} = \left.\frac{\partial^2 \mathbf{p}_{i-1}}{\partial s}\right|_{s_i}. \tag{1.21}$$

Dans le cas général, ces conditions peuvent s'écrire sous la forme de deux systèmes linéaires tridiagonaux découplés [Hämmerlin et al., 1991]. Afin de fermer le système il est nécessaire de fournir deux conditions aux limites supplémentaires pour les valeurs de $\partial_s \mathbf{p}_1|_{s_1}$ et $\partial_s \mathbf{p}_{N-1}|_{s_N}$. Ces conditions aux limites peuvent être dépendantes du temps. Ceci permet par exemple de contrôler précisément l'angle de contact dynamique entre les extrémités de l'interface et une frontière solide.

Dans le cas où l'interface est fermée ou périodique les conditions de fermeture sont obtenues directement en appliquant les conditions (1.20) et (1.21) entre $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_N$. On obtient alors un système de la forme

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ c_N & 0 & 0 & a_N & b_N \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

La solution de ce type de système "pseudo tridiagonal" peut être ramenée à la solution de deux systèmes tridiagonaux [Press et al., 1989]. Dans tous les cas la construction de la courbe paramétrique $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N\}$ peut être effectuée avec un nombre d'opérations proportionnel à N. Ce type de courbe est connu sous le nom de *spline cubique paramétrique* [Walsh et al., 1962].

Afin d'advecter les marqueurs, il est nécessaire d'exprimer la vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$ du fluide pour une coordonnée $\mathbf{x} = (x, y)$ quelconque. Sur un maillage cartésien un choix simple est une interpolation bilinéaire de la forme[2]

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad = \quad & \mathbf{u}_{i,j}(1 - x - y + xy) + \mathbf{u}_{i+1,j}x(1 - y) + \\ & \mathbf{u}_{i,j+1}y(1 - x) + \mathbf{u}_{i+1,j+1}xy.\end{aligned} \tag{1.23}$$

D'autres choix d'interpolation sont possibles, d'ordre plus élevé par exemple. L'ensemble des tests que nous avons effectués tendent à montrer que le type d'interpolation a peu d'influence sur les résultats.

Un des problèmes classiques lié à l'utilisation de marqueurs de surface est la nécessité de maintenir une distribution uniforme des points le long de l'interface lors de son évolution. En effet, l'interface peut localement être étirée ou comprimée par l'écoulement et la densité de marqueurs par unité de longueur variera en conséquence. De plus, même dans le cas où l'interface n'est pas déformée (lorsque la composante normale de la vitesse est nulle), une composante tangentielle non–nulle de la vitesse causera une dérive des marqueurs le long de l'interface. Afin d'assurer une discrétisation régulière de la géométrie de l'interface il est donc nécessaire de supprimer ou de rajouter localement des marqueurs lors de l'évolution temporelle. Une méthode simple consiste à remplacer deux marqueurs consécutifs trop proches par un unique marqueur (le milieu du segment par exemple) et à rajouter un marqueur entre deux marqueurs consécutifs trop éloignés. En utilisant cette technique il est toutefois relativement difficile d'assurer la continuité temporelle des dérivées comme la tangente ou la courbure. La nature discrète des évènements d'insertions et de suppressions introduit généralement de brusques variations locales des dérivées.

Afin d'éviter ces problèmes et de profiter pleinement de la représentation par splines cubiques de l'interface, nous utilisons une méthode qui assure une distribution des marqueurs homogène et temporellement continue. À chaque pas de temps l'ensemble des marqueurs est redistribué le long de l'interface définie par sa représentation paramétrique

[2] Les coordonnées étant adimensionnées par δx et δy.

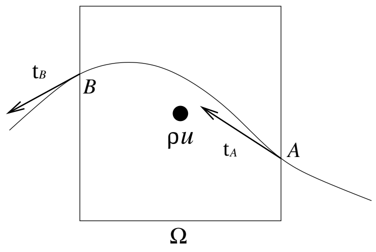


FIG. 1.4.: Volume de contrôle et contribution de la tension de surface.

$\mathbf{p}(s) = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{N-1}\}$. On définit la longueur de redistribution l comme la distance entre deux marqueurs successifs le long de l'interface. Comme s est une approximation de l'abscisse curviligne, le nombre de marqueurs qui peuvent être placés sur l'interface à une distance l les uns des autres est donné par $N = s_N/l$ et leurs coordonnées sont obtenues comme $p_i = \mathbf{p}((i-1)l)$. Une fois le nouvel ensemble de marqueurs calculé, les polynômes définissant les splines cubiques sont mis à jour. La longueur de redistribution en général utilisée correspond à la taille d'une maille de la discrétisation MAC. Ce choix est justifié dans la mesure où la discrétisation spatiale définit l'échelle résolue la plus petite des phénomènes simulés.

Tension de surface

La représentation par marqueurs autorise un traitement direct des termes de tension de surface. Si l'on considère un volume de contrôle Ω coupé par l'interface (figure 1.4) la contribution intégrale de la tension de surface à la variation de quantité de mouvement s'écrit

$$\int_{\Omega} \sigma \kappa \delta_s \mathbf{n} = \sigma \oint_A^B \kappa \mathbf{n} ds, \tag{1.24}$$

que l'on peut transformer en utilisant la première formule de Frenet pour les courbes paramétriques en

$$\sigma \oint_A^B \kappa \mathbf{n} ds = \sigma \oint_A^B d\mathbf{t} = \sigma(\mathbf{t}_B - \mathbf{t}_A), \tag{1.25}$$

où $\mathbf{t}$ est la tangente à l'interface orientée et unitaire. On retrouve en fait la formulation originelle de la *tension* de surface interprétée comme une force tangentielle à l'interface.

Un algorithme simple permet ainsi de calculer le terme de tension de surface. L'interface est parcourue d'une extrémité à l'autre, chaque fois qu'elle traverse le bord $\partial\Omega$ d'une cellule de contrôle (un segment vertical ou horizontal dans le cas d'un maillage cartésien), le point d'intersection A et la tangente $\mathbf{t}$ sont calculés. Les volumes de contrôle situés de part et d'autre de $\partial\Omega$ reçoivent alors une contribution $\sigma\mathbf{t}$ si l'interface vient de sortir et $-\sigma\mathbf{t}$ si l'interface vient de rentrer. Cet algorithme assure que la somme des contributions dues à la tension de surface est nulle (pour une interface fermée).

Dans le cas de la discrétisation MAC, les volumes de contrôle pour les composantes horizontales et verticales de la vitesse sont décalés. L'algorithme est donc utilisé deux fois, une fois pour chaque composante, en décalant la position des marqueurs. Sur une grille cartésienne la détection des intersections entre l'interface et les limites horizontales et verticales des volumes de contrôle est simple et conduit à un algorithme de coût $\mathcal{O}(N)$ où N est le nombre de marqueurs. Le calcul du point d'intersection est effectué comme décrit dans l'annexe B.

Correction du gradient de pression

Le terme de tension de surface étant défini directement, nous pouvons maintenant utiliser le résultat présenté section 1.1.1 concernant le gradient de pression. Il s'agit de modifier l'opérateur gradient discret ∇_h localement au voisinage de l'interface de manière à prendre en compte le saut de pression. Nous nous plaçons pour l'instant dans le cas de la bulle stationnaire vérifiant la solution de Laplace. On suppose que le champ de pression et le terme de tension de surface sont connus exactement dans le cas illustré figure 1.3. La pression sur le segment AB est constante et égale à p, la pression sur le segment BC est constante et égale à $p1$ et ces deux pressions sont liées par la relation de saut : $p1 = p + \sigma/R$. Dans ce cas la contribution de la pression à la variation de quantité de mouvement contenue dans le volume de contrôle de $v1$ s'écrit

$$h^2\,\nabla_h^\star p|_{v1} = d\,p + (h-d)\,p1 - h\,p4, \tag{1.26}$$

où d est la longueur du segment AB. Il est clair que cet opérateur dépend de la position du point B par rapport à $p1$. Si d est supérieur à $h/2$, p doit être remplacé par $p1$ et $p1$ par $p2$ dans la formule ci-dessus. Dans le cas général on peut définir $\nabla_h^\star$ comme

$$h^2\,\nabla_h^\star p|_{v_{i,j}} = h\,p_{i,j+1/2} + C_{i,j+1/2} - h\,p_{i,j-1/2} - C_{i,j-1/2}, \tag{1.27}$$

avec

$$C_{i,j} = \begin{cases} d(p_{i-1,j} - p_{i,j}) & \text{si } d \le h/2 \\ (h-d)(p_{i+1,j} - p_{i,j}) & \text{si } d > h/2 \end{cases} \tag{1.28}$$

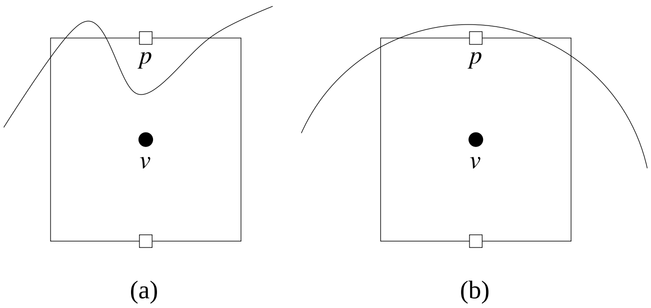


FIG. 1.5.: Cas plus complexes pour la méthode de correction du gradient de pression.

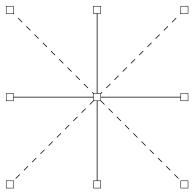


FIG. 1.6.: *Stencil* nécessaire pour la résolution de l'équation de pression avec opérateur de gradient corrigé.

Si les hypothèses précédentes sont vérifiées (exactitude du champ de pression et des termes de tension de surface) l'utilisation de cet opérateur assure — par définition — l'équilibre exact entre tension de surface et pression.

Dans le cas général où la pression peut varier à l'intérieur et à l'extérieur de l'interface, cet opérateur peut être interprété comme une extrapolation du premier ordre des champs de pression internes et externes au voisinage de l'interface. Des extrapolations d'ordre plus élevé sont possibles en utilisant plusieurs plus proches voisins. De plus dans le cas où l'interface coupe plusieurs fois le bord d'un volume de contrôle (figures 1.5), l'approche présentée ici n'est plus valable. Ces formes complexes faisant généralement intervenir des rayons de courbure de l'ordre de la taille de la maille (exception faite du cas illustré figure 1.5.(b)) sont peu fréquents. Néanmoins un algorithme robuste devra les traiter correctement et d'autres techniques d'extrapolation plus générales peuvent être utilisées (voir section 1.2.1). Dans tous les cas le principe de la méthode n'est toutefois pas remis en cause.

L'utilisation de ce nouvel opérateur est compliquée par la nature implicite de la pression pour un fluide incompressible. En effet, dans la méthode de projection, la pression n'apparaît que comme solution de la pseudo–équation de Poisson [Peyret et al., 1983]. L'approche la plus correcte consiste à utiliser le nouvel opérateur $\nabla_h^\star$ directement lors de la résolution de cette équation. Ceci a le désavantage de nécessiter l'utilisation d'un *stencil* faisant apparaître les huit plus proches voisins pour chaque point de pression (figure 1.6). L'opérateur standard n'utilise que les quatre plus proches voisins, il n'est donc pas possible d'utiliser les solveurs classiquement mis en oeuvre avec la méthode MAC.

Afin de simplifier l'évaluation initiale de la méthode, nous avons choisi une approche plus simple mais moins rigoureuse qui consiste à traiter la correction C du gradient de pression comme un terme source dans l'équation de quantité de mouvement (1.13). Effectuée de cette manière, la correction C est explicite en temps, elle est calculée comme fonction de la pression au pas de temps précédent.

L'évaluation des termes de correction du gradient de pression nécessite le calcul des points d'intersection avec les bords horizontaux des volumes de contrôle pour la composante v et avec les bords verticaux pour la composante u. Il est donc simple et naturel de calculer ces termes en même temps que les termes de tension de surface associés au même volume de contrôle (cf. Annexe B).

Application au cas de l'interface circulaire

Comme montré ci-dessus, l'utilisation de l'opérateur de gradient de pression corrigé garantit en principe l'existence de la solution discrète de Laplace pour le cas d'une bulle circulaire. Dans la pratique l'utilisation de courbes splines paramétriques de classe $\mathcal{C}^2$ ne permet pas de représenter exactement une interface circulaire (de classe $\mathcal{C}^\infty$). Une erreur géométrique sera donc commise lors de l'évaluation des termes de tension de surface et de correction du gradient de pression. Deux questions se posent alors : la solution approchée est-elle stable ? Converge-t-elle numériquement vers la solution exacte ?

On considère deux fluides de même densité ρ et viscosité μ séparés par une interface circulaire de diamètre D avec un coefficient de tension de surface σ. Le seul nombre sans dimension qui peut être formé est le nombre de Ohnesorge $Oh = \mu/(\sigma\rho D)^{1/2}$ (ou le nombre de Laplace équivalent $La = 1/Oh^2$). Comme nous l'avons mentionné précédemment, on s'attend à ce que l'amplitude $\max(|\mathbf{u}|)$ des courants parasites soit proportionnelle à σ/μ. Ce qui revient à définir un nombre capillaire $Ca_p =$

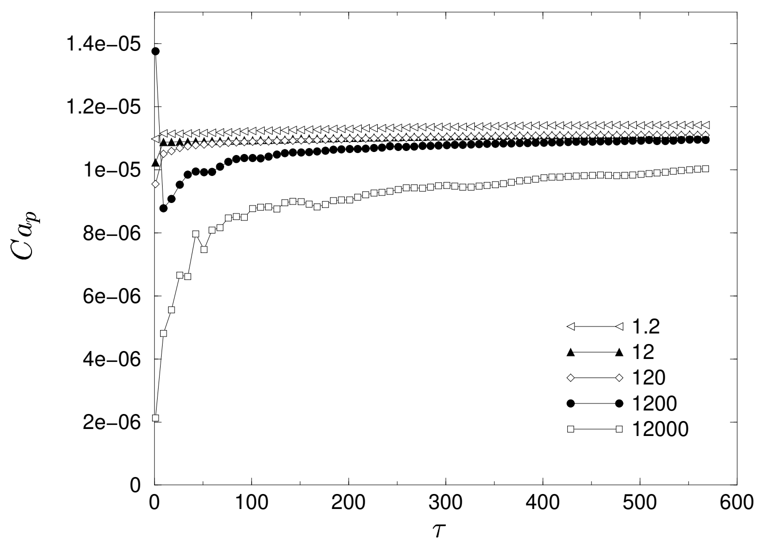


FIG. 1.7.: Évolution temporelle de l'amplitude des courants parasites en fonction du nombre de Laplace. La légende donne les différentes valeurs de La. Maillage 32×32.

$\max(|\mathbf{u}|)\mu/\sigma$ constant quel que soit Oh. La valeur de ce nombre capillaire est une mesure de l'erreur par rapport à la solution exacte.

Afin de tester ces hypothèses et d'évaluer la précision du schéma de correction du gradient de pression, nous avons effectué plusieurs simulations pour un nombre de Ohnesorge variable. La goutte est placée au centre d'un domaine carré et des conditions périodiques sont appliquées dans les deux directions. Le rapport entre la taille du domaine et le diamètre de la goutte est 2.5. Les champs de vitesse et de pression sont initialement nuls. L'évolution de Ca_p en fonction du temps $\tau = t\sigma/(\mu D)$ est illustrée figure 1.7 pour différentes valeurs du nombre de Laplace. Après une phase transitoire, l'ensemble des solutions convergent asymptotiquement. Conformément à notre hypothèse, les asymptotes sont proches d'une valeur unique qui peut être estimée à $1.1 \times 10^{-6} \pm 10\%$.

Cette valeur asymptotique caractérise la précision de la solution. On s'attend donc à ce qu'elle dépende de la résolution spatiale. La figure 1.8 illustre cette dépendance. Les tailles de maillage utilisées sont 16^2, 32^2, 64^2, 128^2 et 256^2. La convergence est d'ordre supérieur à deux (l'exposant est environ égal à 2.75). Pour une résolution de 256^2 la valeur absolue de l'amplitude des courants parasites est de l'ordre de la précision machine.

Sur le même graphe est représentée la valeur du nombre capillaire

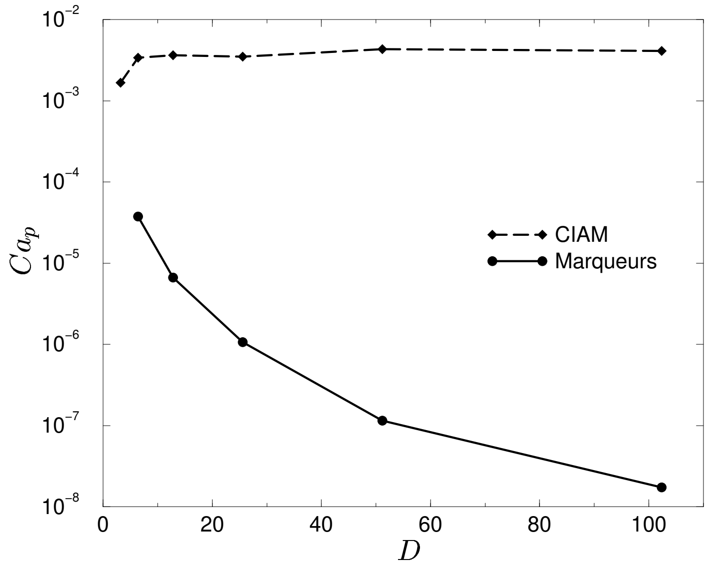


FIG. 1.8.: Évolution de l'amplitude des courants parasites en fonction de la résolution spatiale. Le diamètre D est donné en nombre de mailles.

pour la méthode CIAM (Construction d'Interface Affine par Morceaux) associée à une formulation continue du terme de tension de surface. Dans ce cas l'amplitude des courants parasites est indépendante de la résolution. Les champs de pression normalisés par σ/R, obtenus en régime stationnaire sont représentés figures 1.9.(a) et 1.9.(b) pour chacune des deux méthodes. L'épaississement de l'interface dû à la formulation continue apparaît clairement dans le cas CIAM. Dans le cas des marqueurs, la pression est constante de part et d'autre de l'interface. Les erreurs relatives par rapport à la solution exacte pour la pression sont illustrées pour chacune des deux méthodes figures 1.9.(c) et 1.9.(d).

Fluides de propriétés physiques différentes

Dans le cas où les propriétés physiques sont différentes pour chacun des fluides, il est nécessaire de calculer les valeurs de la fonction χ en fonction de la position de l'interface. La fonction χ est généralement définie comme la fraction surfacique occupée par l'une des deux phases pour un volume de contrôle donné. Les chaînes de marqueurs orientées peuvent être utilisées pour calculer les valeurs de ces fractions surfaciques en transformant les intégrales de surfaces en calculs de circulation. Cette

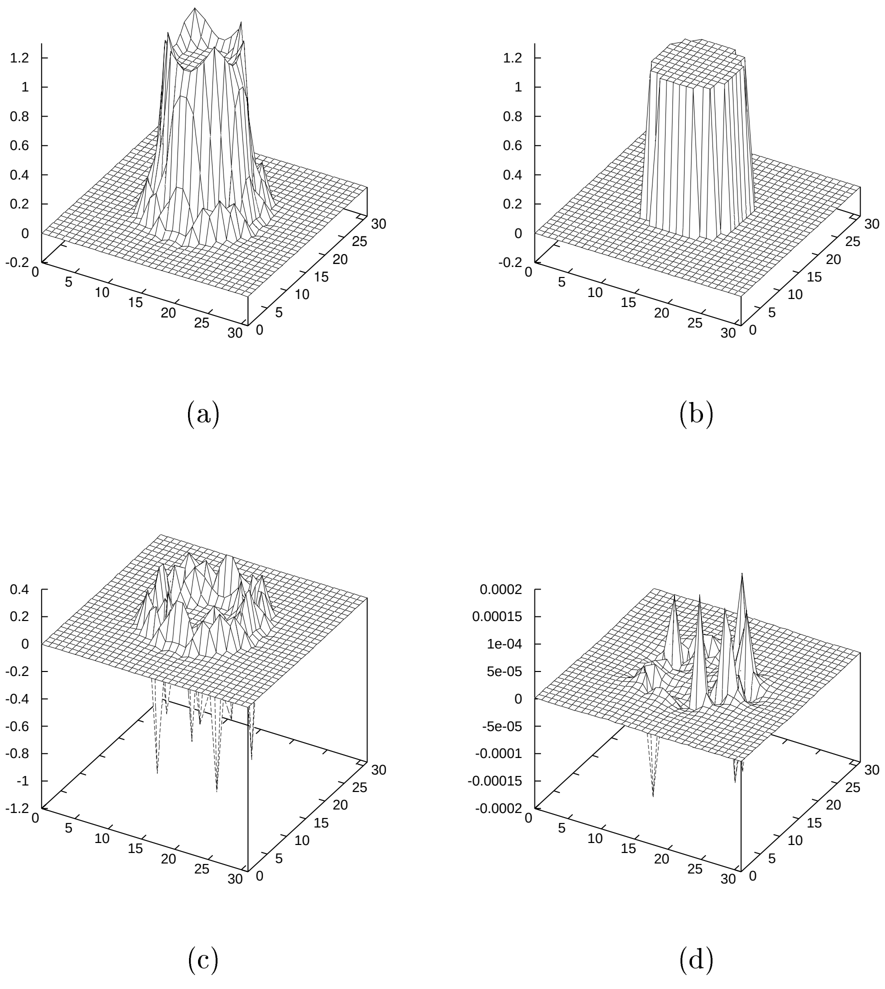


Fig. 1.9.: Solutions et erreurs pour le champ de pression autour d'une goutte avec tension de surface. Pressions : (a) CIAM avec formulation continue, (b) Marqueurs avec correction du gradient de pression. Erreurs relatives par rapport à la solution exacte : (c) CIAM, (d) Marqueurs.

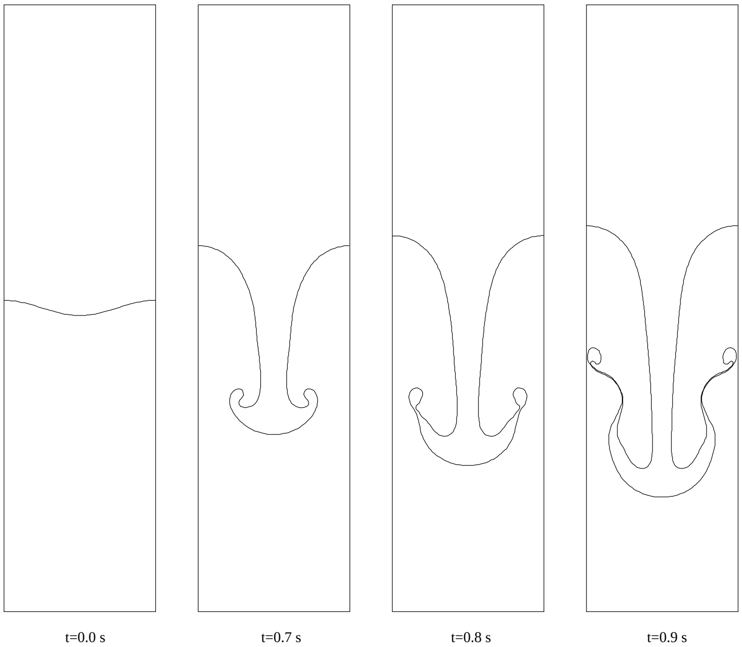


FIG. 1.10.: Instabilité de Rayleigh–Taylor simulée par la méthode de marqueurs. La taille du maillage est 64×256.

approche présentée en détail dans l'annexe B permet la mise à jour des valeurs de χ au cours du temps pour un coût essentiellement proportionnel à N, le nombre de marqueurs utilisés.

Un exemple d'utilisation des marqueurs dans le cas de fluides de densités différentes est présenté figure 1.10. Il s'agit d'un test classique illustrant une instabilité de Rayleigh–Taylor, initialement utilisé par Puckett et al. (1997) pour évaluer une méthode de type VOF. Une boîte fermée de taille 1×4 mètres est remplie avec deux fluides de densités différentes et de viscosités dynamiques identiques. Les densités sont 1.225 kg/m^3 pour le fluide contenu dans la moitié supérieure et 0.1694 kg/m^3 pour celui contenue dans la moitié inférieure. La viscosité dynamique est 0.00313 kg/m.s pour chacun des fluides. L'interface est initialement perturbée par une onde sinusoïdale d'amplitude 0.05 m. L'évolution de l'interface est illustrée après 0, 0.7, 0.8 et 0.9 secondes. La figure 1.11 correspond à la résolution du même problème en utilisant la méthode CIAM pour l'advection de l'interface [Li, 1996]. Ces résultats sont en bon accord avec la solution présentée par Puckett et al. (1997).

Dans le cas des marqueurs, on peut remarquer que la technique de

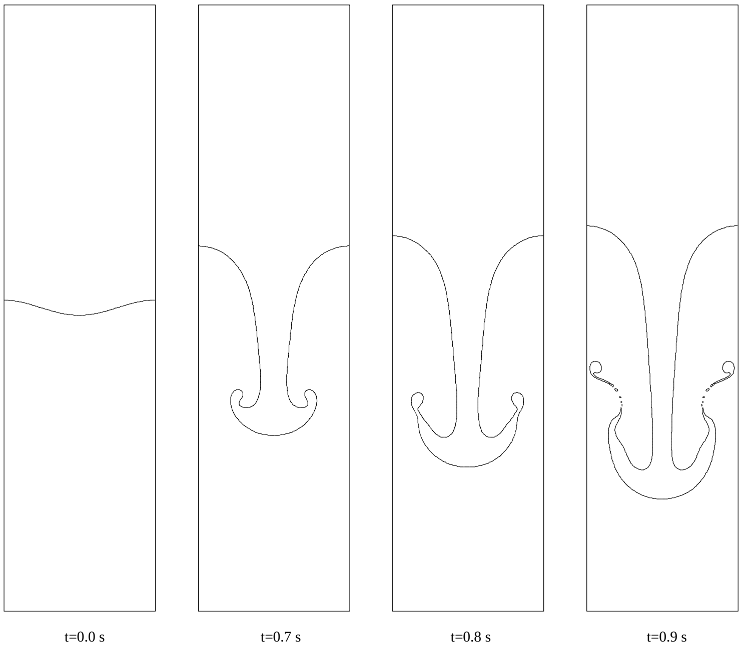


FIG. 1.11.: Instabilité de Rayleigh–Taylor simulée par la méthode CIAM. La taille du maillage est 128×512.

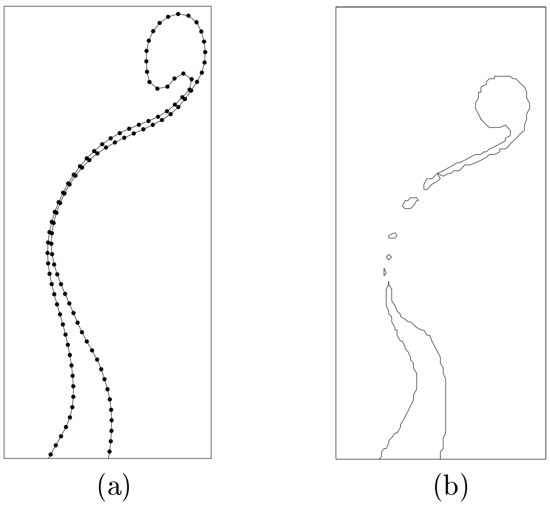


FIG. 1.12.: Détail de l'interface pour les simulations figures 1.10 et 1.11. (a) Représentation par marqueurs. (b) Courbe de niveau $\chi = 1/2$ obtenue par la méthode CIAM.

redistribution autorise une bonne représentation de l'interface au cours du temps, bien que celle-ci subisse des déformations importantes. De plus, la différence essentielle entre les marqueurs et la solution CIAM est la préservation des petites structures filamentaires représentées figure 1.12.(a). La représentation implicite de l'interface par la méthode VOF conduit à une reconnexion automatique des structures de taille proche de celle de la maille. Ce traitement implicite des reconnexions est généralement utile car il assure la robustesse de la résolution même dans le cas où des changements de topologie complexes se produisent. Il a néanmoins le désavantage d'être lié à un critère numérique arbitraire qui fait dépendre le changement de topologie de la résolution spatiale du calcul. Dans le cas illustré ici, la solution obtenue par méthode VOF pour une résolution égale à celle utilisée avec les marqueurs (64×256) est relativement éloignée des solutions présentées du fait de ruptures prématurées des filaments aux extrémités du “champignon” de Rayleigh–Taylor.

D'un autre côté, la méthode de marqueurs présentée ici n'autorise pas pour l'instant les changements de topologie. Le problème du traitement des reconnexions pour les méthodes de type marqueurs est généralement considéré difficile pour des raisons liées à des problèmes de programmation des algorithmes nécessaires. En se basant sur les essais de reconnexion que nous avons effectués, nous ne pensons pas que cet argument doive être retenu. Le choix de techniques de programmation et de structures de données appropriées permet une implémentation relativement simple et efficace de ces opérations [Tryggvason et al., 1999]. L'obstacle essentiel concerne le choix d'un critère de reconnexion cohérent et si possible justifié par des considérations physiques. Ce problème est amplifié dans le cas où la tension de surface n'est pas nulle. En effet, lors des reconnexions des rayons de courbure arbitrairement petits peuvent être créés ce qui conduit à une singularité du terme de tension de surface. Cette singularité traduit le fait qu'aux échelles auxquelles se produit la reconnexion, le milieu ne peut plus être considéré comme continu et une modélisation physique différente doit être utilisée. Une implémentation correcte du traitement des changements de topologie pour les méthodes de marqueurs nécessite ainsi une compréhension approfondie des phénomènes physiques liés aux ruptures d'interfaces. Une approche prometteuse est le couplage de méthodes de marqueurs et de modèles physiques locaux lors des reconnexions.

1.1.3. Ondes capillaires planes

Un cas test quantitatif simple mais important concerne la simulation numérique des oscillations amorties d'une onde capillaire. Un certain nombre de résultats théoriques sont disponibles. La théorie linéaire pour les oscillations de faible amplitude de l'interface entre deux fluides de même densité ρ donne la relation de dispersion

$$\omega_0^2 = \frac{\sigma k^3}{2\rho}, \tag{1.29}$$

où σ est le coefficient de tension de surface et k est le nombre d'onde. Ce résultat est valable dans le cas où le domaine est infiniment vaste et la viscosité négligeable.

Dans le cas où la viscosité n'est pas négligeable et si les deux fluides ont une viscosité identique μ, l'analyse par mode normal [Lamb, 1932] donne la relation

$$\omega^2 = \frac{\sigma k^3}{2\rho}(1 - k/q) = \omega_0^2(1 - k/q), \tag{1.30}$$

avec

$$q = \sqrt{k^2 - i\rho\omega/\mu}. \tag{1.31}$$

En éliminant ω entre (1.30) et (1.31) on obtient q comme racine de l'équation

$$q(q-k)(q+k)^2 = -\frac{\sigma k^3 \rho}{2\mu^2}. \tag{1.32}$$

En résolvant numériquement cette équation, on obtient le taux d'amortissement dans le cas visqueux.

Comme nous allons le voir, cette solution n'est cependant pas exacte dans le cas où l'ensemble du fluide est initialement au repos. En effet, dans ces circonstances un terme transitoire correspondant à la diffusion de la vorticité créée à l'interface dans le fluide doit être pris en compte. Comme démontré par Prosperetti (1981) , dans le cas où les deux fluides ont la même viscosité dynamique, une solution analytique existe pour l'évolution temporelle d'une onde de faible amplitude. Les densités ρ_1 et ρ_2 peuvent être différentes.

Nous considérons une perturbation sinusoïdale de faible amplitude H_0. Une échelle de temps est donnée par ω_0^{-1} et une échelle de longueur par k^{-1}. On peut définir un temps et une viscosité adimensionnée comme

$$\tau = \omega_0 t, \ \epsilon = \nu k^2/\omega_0. \tag{1.33}$$

Dans cet espace de paramètres, la solution pour l'évolution de l'amplitude est donnée comme

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{4(1-4\beta)\epsilon^2}{8(1-4\beta)\epsilon^2+1}\mathrm{erfc}(\epsilon^{1/2}\tau^{1/2}) \\ &+\sum_{i=1}^{4}\frac{z_i}{Z_i}\frac{\omega_0^2}{z_i^2-\epsilon\omega_0}\times\exp[(\mathrm{z_i^2}-\epsilon\omega_0)\tau/\omega_0]\mathrm{erfc}(\mathrm{z_i}\tau^{1/2}/\omega_0^{1/2}), \end{aligned} \tag{1.34}$$

où les z_i sont les quatre racines de l'équation

$$\begin{aligned} z^4-4\beta(\epsilon\omega_0)^{1/2}z^3+2(1-6\beta)\epsilon\omega_0 z^2+ \\ 4(1-3\beta)(\epsilon\omega_0)^{3/2}z+(1-4\beta)(\epsilon\omega_0)^2+\omega_0^2=0, \end{aligned} \tag{1.35}$$

et $Z_1=(z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_4-z_1)$, Z_2, Z_3 et Z_4 sont définis par permutation des indices. Le paramètre sans dimension β est donné par

$$\beta=\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}. \tag{1.36}$$

Le cas test qui a été retenu est une boîte carrée séparée en deux parties égales par une interface perturbée sinusoïdalement. La longueur d'onde de la perturbation est égale à la largeur de la boîte et son amplitude à un centième de la hauteur de la boîte. Des conditions de glissement libre sont appliquées sur les parois supérieures et inférieures et des conditions périodiques dans la direction horizontale. Le nombre de Laplace est 30 000, la viscosité adimensionnée $\epsilon\approx 6.472\times10^{-2}$. Les densités ρ_1 et ρ_2 sont identiques ce qui donne $\beta=1/4$. Les évolutions temporelles de l'amplitude obtenues par simulation numérique, ainsi que par les théories de mode normal et de Prosperetti sont illustrées figure 1.13. La courbe de mode normal est obtenue comme

$$H_0\exp(\lambda\tau/\omega_0)\cos(\omega\tau/\omega_0), \tag{1.37}$$

où ω est λ sont obtenus par résolution numérique de l'équation (1.30). Un très bon accord est obtenu entre la simulation numérique et la solution de Prosperetti. Il est intéressant de noter l'écart significatif entre les deux théories (figure 1.14).

Nous avons répété ce test en variant la résolution spatiale. La table 1.1 résume les résultats obtenus pour des résolutions de 8^2, 16^2, 32^2, 64^2 et 128^2. L'erreur relative indiquée est calculée comme la racine carrée de la valeur moyenne du carré de la différence entre la simulation numérique et les solutions théoriques, rapportée à l'amplitude initiale (0.01).

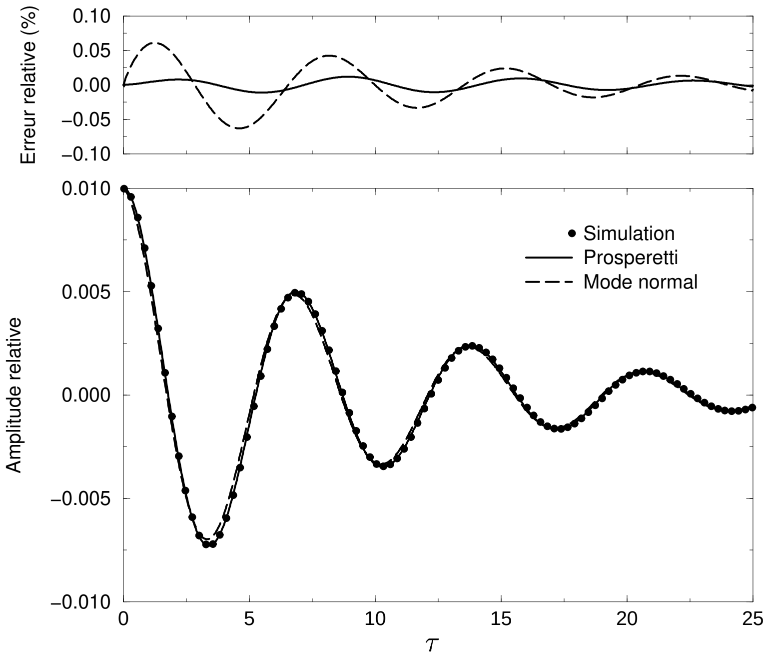


FIG. 1.13.: Évolution temporelle de l'amplitude d'une onde capillaire. La résolution est de 128×128.

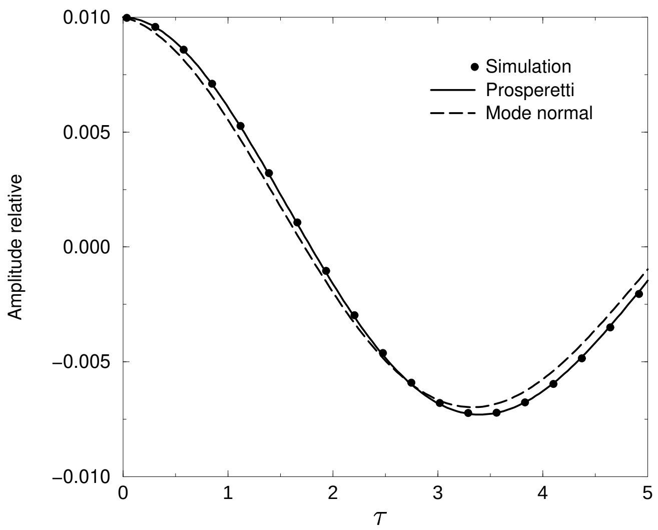


FIG. 1.14.: Agrandissement de la figure 1.13 illustrant les différences entre la solution de mode normal et la solution de Prosperetti.

Résolution	Erreur/Prosperetti	Erreur/Mode normal
8^2	0.3018	0.3077
16^2	0.0778	0.0959
32^2	0.0131	0.0332
64^2	0.0082	0.0307
128^2	0.00645	0.0280

TAB. 1.1.: Évolution de l'erreur relative pour une onde capillaire à différentes résolutions. Les paramètres sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2$, $\beta = 1/4$, $\epsilon \approx 6.472 \times 10^{-2}$, $La = 3000$.

Amplitude	0.0025	0.005	0.01	0.02
8^2	0.3074	0.3054	0.3018	0.2962
16^2	0.0782	0.0781	0.0778	0.0798
32^2	0.0114	0.0118	0.0131	0.0183
64^2	0.00660	0.00695	0.0082	0.0117
128^2	0.00540	0.00565	0.00645	
256^2		0.00505	0.0057	

TAB. 1.2.: Évolution de l'erreur relative pour une onde capillaire à différentes résolutions et différentes amplitudes relatives initiales. Les paramètres sont les suivants : $\rho_1 = \rho_2$, $\beta = 1/4$, $\epsilon \approx 6.472 \times 10^{-2}$, $La = 3000$.

Résolution	Erreur/Prosperetti
8^2	0.3593
16^2	0.1397
32^2	0.0566
64^2	0.0264
128^2	0.0148

TAB. 1.3.: Évolution de l'erreur relative pour une onde capillaire à différentes résolutions. Les paramètres sont les suivants : $\rho_1 = 10\rho_2$, $\beta \approx 0.826$, $\epsilon \approx 6.472 \times 10^{-2}$, $La = 3000$.

Cette moyenne est effectuée sur 25 unités de temps adimensionné, soit environ quatre périodes d'oscillation. L'erreur décroît rapidement avec la résolution mais semble converger vers une valeur de 0.5 % environ. La théorie linéaire n'étant valable que pour des amplitudes d'oscillation faibles, on peut se demander si cette erreur est dépendante de l'amplitude initiale. La table 1.2 résume les résultats obtenus pour des amplitudes relatives initiales variables. La convergence est légèrement meilleure pour les amplitudes les plus faibles mais cette tendance ne semble pas expliquer l'erreur finale.

La théorie de Prosperetti est également valable pour deux fluides de densité différentes (mais de mêmes viscosités dynamiques). La table 1.3 donne les résultats obtenus lorsque le rapport de densité est de dix. L'accord est satisfaisant dans les deux cas. Il est important de noter que la théorie de Prosperetti est valable dans le cas d'un domaine non–borné. Les simulations sont effectuées dans des boîtes fermées et les effets de confinement peuvent sans doute expliquer l'erreur de l'ordre de un pour cent observée pour des résolutions élevées.

1.2. Écoulements à surface libre

Les écoulements à surface libre peuvent être abordés comme le cas limite d'écoulements diphasiques, lorsque le contraste de densité tend vers l'infini. Dans la pratique les performances des codes diphasiques diminuent lorsque le rapport de densité devient élevé. Il est donc intéressant de développer une méthode permettant de résoudre les équations uniquement à l'intérieur du fluide de forte densité. En raison de son large champ d'application (écoulements liquide–gaz), cette approche a été l'une des premières à bénéficier d'un traitement numérique [Harlow et al., 1965].

Si elle est séduisante d'un point de vue analytique, son implémentation numérique correcte se heurte à un certain nombre de problèmes que nous abordons ici.

Les équations de Navier–Stokes exprimées en coordonnées axisymétriques représentent un bon compromis entre une modélisation bidimensionnelle plane et une modélisation tridimensionnelle. Un point important en faveur d'une représentation axisymétrique est la préservation des lois d'échelles reliant surface et volume et ce, pour un coût de calcul équivalent au cas plan. L'hypothèse d'axisymétrie étant bien adaptée à une première étude de la dynamique des bulles de sonoluminescence ou de cavitation, nous considérons ici les équations de Navier–Stokes suivantes exprimées dans un repère (z, r) :

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (v_r v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r S_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zr}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r}, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r v_z)}{\partial r} + \frac{\partial (v_z^2)}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r S_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}, \tag{1.39}$$

où $\phi = p/\rho$, la masse volumique ρ est constante et le tenseur des contraintes s'exprime comme

$$S_{rr} = 2\nu \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{1.40}$$

$$S_{\theta\theta} = 2\nu \frac{v_r}{r} \tag{1.41}$$

$$S_{zz} = 2\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.42}$$

$$S_{zr} = S_{rz} = \nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right). \tag{1.43}$$

La condition d'incompressibilité s'exprime quant à elle comme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{1.44}$$

Afin de clarifier le rôle géométrique de la surface libre, il est utile de considérer une solution faible de type intégrale des équations de quantité de mouvement (1.38) et (1.39). Cette intégration conduit à une approche classique de type volume fini. À cette fin, on considère un domaine Ω, de frontière $\partial\Omega$. Notons $\mathbf{u}$ la vitesse de $\partial\Omega$ par rapport au repère galiléen. En intégrant la condition d'incompressibilité (1.44) et les équations de quantité de mouvement (1.38) et (1.39), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} r \; dr \; dz + \int_{\partial\Omega} r(v_z - u_z) \; dr - \int_{\partial\Omega} r(v_r - u_r) \; dz = 0, \tag{1.45}$$

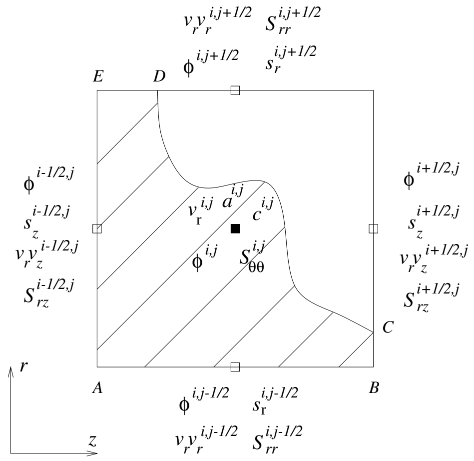


FIG. 1.15.: Élément de volume fini contenant une surface libre.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v_r r\ dr\ dz + \int_{\partial\Omega} r v_r (v_z - u_z)\ dr - \int_{\partial\Omega} r v_r (v_r - u_r)\ dz = \tag{1.46}$$
$$\int_{\partial\Omega} \phi r\ dz + \int_{\Omega} \phi\ dr\ dz + \int_{\partial\Omega} r S_{zr}\ dr - \int_{\partial\Omega} r S_{rr}\ dz - \int_{\Omega} S_{\theta\theta}\ dr\ dz,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v_z r\ dr\ dz + \int_{\partial\Omega} r v_z (v_z - u_z)\ dr - \int_{\partial\Omega} r v_z (v_r - u_r)\ dz = \tag{1.47}$$
$$-\int_{\partial\Omega} \phi r\ dr + \int_{\partial\Omega} r S_{zz}\ dr - \int_{\partial\Omega} r S_{zr}\ dz.$$

Du fait de la prise en compte du mouvement éventuel $\mathbf{u}$ de la frontière $\partial\Omega$ du domaine considéré, ces expressions sont applicables à un domaine arbitraire.

Nous considérons maintenant une cellule de calcul identique au cas diphasique et traversée par l'interface (figure 1.15). La frontière du domaine Ω est constituée des segments fixes ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) AB, BC, DE et EA, et du morceau d'interface CD de déplaçant à la vitesse du fluide ($\mathbf{u} = \mathbf{v}$). L'équation (1.46) devient ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v_r r\ dr\ dz + \int_{BC\cup EA} r v_r v_z\ dr - \int_{AB\cup DE} r v_r^2\ dz = \tag{1.48}$$
$$\int_{AB\cup DE} \phi r\ dz + \int_{CD} \phi r\ dz + \int_{\Omega} \phi\ dr\ dz +$$
$$\int_{BC\cup EA} r S_{zr}\ dr + \int_{CD} r S_{zr}\ dr -$$
$$\int_{AB\cup DE} r S_{rr}\ dz - \int_{CD} r S_{rr}\ dz - \int_{\Omega} S_{\theta\theta}\ dr\ dz.$$

Si nous supposons que la discrétisation est d'ordre un, les quantités définies au centre de chacune des faces sont considérées comme constantes sur chacune de ces faces ; les quantités définies au centre de la cellule sont considérées comme constantes sur l'ensemble de la cellule. Nous définissons $s_r^{i,j}$ et $s_z^{i,j}$ comme la surface immergée des faces radiales et axiales respectivement. L'aire du domaine Ω est notée $a^{i,j}$ et $c^{i,j} = \int_\Omega r dr dz$. On obtient alors dans le cas général

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[(cv_r)^{i,j}\right] + (s_z v_r v_z)^{i+1/2,j} - (s_z v_r v_z)^{i-1/2,j} + \\
&(s_r v_r^2)^{i,j+1/2} - (s_r v_r^2)^{i,j-1/2} = \\
&(s_r\phi)^{i,j-1/2} - (s_r\phi)^{i,j+1/2} + (a\phi)^{i,j} + \int_{int} \phi r \, dz + \\
&(s_z S_{zr})^{i+1/2,j} - (s_z S_{zr})^{i-1/2,j} + \int_{int} r S_{zr} \, dr + \\
&(s_r S_{rr})^{i,j+1/2} - (s_r S_{rr})^{i,j-1/2} - \int_{int} r S_{rr} \, dz - (aS_{\theta\theta})^{i,j},
\end{aligned} \tag{1.49}$$

où $\int_{int}$ désigne l'intégrale le long du morceau d'interface contenu dans Ω. L'équation pour la composante suivant z est obtenue de manière analogue comme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[(cv_z)^{i,j}\right] + (s_z v_z^2)^{i+1/2,j} - (s_z v_z^2)^{i-1/2,j} + \\
&(s_r v_r v_z)^{i,j+1/2} - (s_r v_r v_z)^{i,j-1/2} = \\
&(s_z\phi)^{i-1/2,j} - (s_z\phi)^{i+1/2,j} - \int_{int} \phi r \, dr + \\
&(s_z S_{zz})^{i+1/2,j} - (s_z S_{zz})^{i-1/2,j} + \int_{int} r S_{zz} \, dr + \\
&(s_r S_{zr})^{i,j+1/2} - (s_r S_{zr})^{i,j-1/2} - \int_{int} r S_{zr} \, dz.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

En utilisant le fait que la variation du volume du domaine Ω peut être obtenue comme

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega r \, dr \, dz = \int_{\partial\Omega} r u_z \, dr - \int_{\partial\Omega} r u_r \, dz, \tag{1.51}$$

l'équation de continuité (1.46) peut être écrite

$$\int_{\partial\Omega} r v_z \, dr - \int_{\partial\Omega} r v_r \, dz = 0. \tag{1.52}$$

On obtient alors la formulation discrète suivante de la condition d'incompressibilité

$$\begin{aligned}(s_z v_z)^{i+1/2,j} - (s_z v_z)^{i-1/2,j} + \int_{int} r v_z \; dr + \\ (s_r v_r)^{i,j+1/2} - (s_r v_r)^{i,j-1/2} - \int_{int} r v_r \; dz = 0.\end{aligned} \tag{1.53}$$

La méthode de projection ne fait pas intervenir directement la condition d'incompressibilité mais nécessite la résolution d'une équation dérivée pour la pression. De manière analogue à la méthode de projection dans le cas diphasique, le champ de vitesse $\mathbf{v}$ au temps $n+1$ est donné par les relations

$$\begin{aligned} v_r^{i,j} &= (v_r^\star)^{i,j} + \frac{\Delta t}{c^{i,j}} \left[(s_r\phi)^{i,j-1/2} - (s_r\phi)^{i,j+1/2} + (a\phi)^{i,j} \right]. \\ v_z^{i,j} &= (v_z^\star)^{i,j} + \frac{\Delta t}{c^{i,j}} \left[(s_z\phi)^{i-1/2,j} - (s_z\phi)^{i+1/2,j} \right]. \end{aligned}$$

Ce champ de vitesse doit vérifier la condition d'incompressibilité (1.53). L'intégration le long de l'interface des deux composantes de la vitesse nécessite de pouvoir exprimer le champ de vitesse à une position quelconque à l'intérieur de la cellule. Pour ce faire, nous supposons que chaque composante de la vitesse varie continûment d'un bord à l'autre de la cellule, soit

$$v_z(z)h = (z - z_{i-1/2}) v_z^{i+1/2,j} - (z - z_{i+1/2}) v_z^{i-1/2,j}, \tag{1.54}$$

$$v_r(r)h = (r - r_{j-1/2}) v_r^{i,j+1/2} - (r - r_{j+1/2}) v_r^{i,j-1/2}. \tag{1.55}$$

Les intégrales intervenant dans (1.53) sont alors obtenues comme

$$\begin{aligned}&\int_{int_{i,j}} r v_z \; dr = \\ &\frac{v_z^{i+1/2,j}}{h} \int_{int_{i,j}} r(z - z_{i-1/2}) \; dr - \frac{v_z^{i-1/2,j}}{h} \int_{int_{i,j}} r(z - z_{i+1/2}) \; dr,\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}&\int_{int_{i,j}} r v_r \; dz = \\ &\frac{v_r^{i,j+1/2}}{h} \int_{int_{i,j}} r(r - r_{j-1/2}) \; dz - \frac{v_r^{i,j-1/2}}{h} \int_{int_{i,j}} r(r - r_{j+1/2}) \; dz.\end{aligned} \tag{1.57}$$

En remplaçant $\mathbf{v}$ par son expression en fonction de $\mathbf{v}^\star$ et en utilisant les relations ci-dessus, la condition d'incompressibilité (1.53) peut être obtenue comme

$$\frac{1}{\Delta t}\Big[(s'_z v_z^\star)^{i+1/2,j} - (s'_z v_z^\star)^{i-1/2,j} + \tag{1.58}$$
$$(s'_r v_r^\star)^{i,j+1/2} - (s'_r v_r^\star)^{i,j-1/2}\Big] +$$
$$\phi^{i,j}\Big[s_z^{i,j}\Big((s'_z/c)^{i+1/2,j} + (s'_z/c)^{i-1/2,j}\Big) +$$
$$s_r^{i,j}\Big((s'_r/c)^{i,j+1/2} + (s'_r/c)^{i,j-1/2}\Big)\Big] +$$
$$\frac{\phi^{i,j}}{2}\Big[(as'_r/c)^{i,j+1/2} - (as'_r/c)^{i,j-1/2}\Big] =$$
$$(s_z\phi)^{i+1,j}(s'_z/c)^{i+1/2,j} +$$
$$(s_z\phi)^{i-1,j}(s'_z/c)^{i-1/2,j} + \phi^{i,j+1}(s'_r/c)^{i,j+1/2}\left(s_r^{i,j+1} - \frac{1}{2}a^{i,j+1/2}\right) +$$
$$\phi^{i,j-1}(s'_r/c)^{i,j-1/2}\left(s_r^{i,j-1} + \frac{1}{2}a^{i,j-1/2}\right),$$

ou s'_z et s'_r sont définis comme

$$(s'_z)^{i\pm1/2,j} = s_z^{i\pm1/2,j} + \frac{1}{h}\int_{int_{i,j}} r(z - z_{i\mp1/2})\, dr, \tag{1.59}$$

$$(s'_r)^{i,j\pm1/2} = s_r^{i,j\pm1/2} - \frac{1}{h}\int_{int_{i,j}} r(r - r_{j\mp1/2})\, dz. \tag{1.60}$$

Cette équation est de la forme

$$\alpha\phi^{i,j} + \beta\phi^{i+1,j} + \gamma\phi^{i-1,j} + \zeta\phi^{i,j+1} + \xi\phi^{i,j-1} = \nabla\cdot\mathbf{v}^\star \tag{1.61}$$

et peut donc être résolue en utilisant les mêmes techniques numériques que la pseudo–équation de Poisson pour les écoulements diphasiques.

1.2.1. Extrapolation du champ de vitesse

Les expressions précédentes, en particulier (1.49) et (1.50), font apparaître la nécessité d'utiliser dans certains cas des valeurs du champ de vitesse définies en dehors du domaine fluide proprement dit. En effet si nous considérons la figure 1.15, dans le cas où BC est vide (l'interface ne coupe pas le bord $i+1/2,j$), il est difficile d'interpréter physiquement les grandeurs $\phi^{i+1/2,j}$, $v_r v_z^{i+1/2,j}$, $S_{rz}^{i+1/2,j}$. De même, si nous retenons une procédure d'interpolation bilinéaire, l'advection des marqueurs situés dans une cellule peut nécessiter l'utilisation de vitesses définies en des points situés en dehors du domaine fluide (figure 1.16).

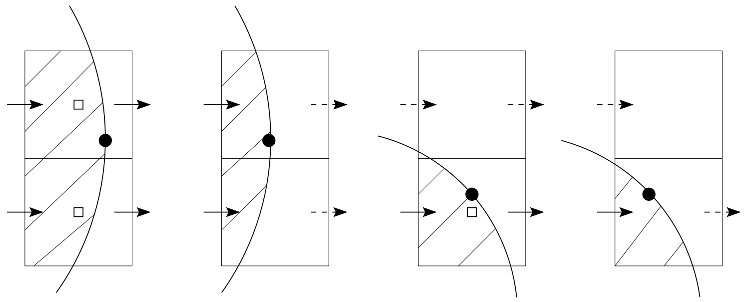


FIG. 1.16.: Différents cas pour l'interpolation bilinéaire de la vitesse des marqueurs. Les carrés indiquent l'emplacement des noeuds de pression résolus. Les flèches en pointillés correspondent à une valeur extrapolée du champ de vitesse.

Il s'agit du problème principal lié à l'utilisation de maillages fixes où les frontières des cellules (et donc les points où sont définis les grandeurs physiques) ne correspondent pas avec l'interface. Dans tous les cas, il sera nécessaire d'extrapoler les champs de grandeurs physiques jusqu'à la limite du domaine pour lequel elles sont définies. Il est ainsi nécessaire de choisir dans quelles cellules nous cherchons à résoudre les équations pour la vitesse et pour la pression et dans quelles cellules ces grandeurs seront seulement extrapolées. Nous avons choisi de ne résoudre l'équation pour la pression (1.58) que lorsque la fraction surfacique $a^{i,j}/h^2$ est supérieure à $1/2$. Ce choix permet d'éviter toute singularité des coefficients de l'équation pour la pression (1.58) et assure que tous les noeuds de pressions résolus se trouvent à l'intérieur du domaine fluide. De même les composantes radiales et axiales de la vitesse ne sont résolues que si elles sont adjacentes (radialement ou axialement respectivement) à un noeud de pression résolu ; ce choix correspond toujours à des cellules de vitesse pour lesquelles $c^{i,j}$ est strictement non–nul, ce qui assure la cohérence des équations (1.49) et (1.50). Un exemple illustrant les champs de vitesse résolus et extrapolés est donné figure 1.17.

L'extrapolation du champ de vitesse doit être effectuée tout en assurant le respect des conditions aux limites sur l'interface. La condition aux limites sur le champ de vitesse peut s'écrire comme

$$\mathbf{t}.\mathbf{D}.\mathbf{n} = 0, \tag{1.62}$$

exprimant la nullité de la contrainte tangentielle sur la surface libre. Il est important d'insister sur le fait que l'application de cette condition

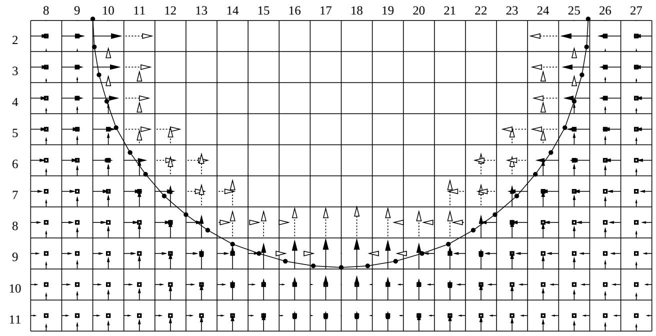


FIG. 1.17.: Exemple de maillage utilisé par le code de surface libre. Les marqueurs ainsi que les splines sont représentés. Les flèches claires indiquent les valeurs extrapolées du champ de vitesse.

est essentielle pour l'obtention d'une solution correcte non seulement au voisinage de l'interface mais dans l'ensemble du domaine. De plus, cette condition implique un couplage des deux composantes de la vitesse au voisinage de l'interface. Il n'est donc pas possible d'utiliser une procédure d'extrapolation indépendamment pour chaque composante. En ce sens, nous supposons que le champ de vitesse au voisinage d'un point P proche de l'interface peut être exprimé comme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0^P + \mathbf{A}^P \cdot \mathbf{x}, \tag{1.63}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur position, $\mathbf{v}_0^P$ un vecteur et $\mathbf{A}^P$ une matrice. Nous proposons de calculer $\mathbf{A}^P$ et $\mathbf{v}_0^P$ par une approche de moindre carrés contrainte par la condition (1.62). Nous avons choisi de ne pas utiliser la condition d'incompressibilité. Pour ce champ de vitesse cette condition peut s'écrire comme $e_{ij} t_i n_j = 0$ avec

$$e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = A_{ij}^P + A_{ji}^P. \tag{1.64}$$

Étant donné N points au voisinage de P, $\mathbf{v}_0^P$ et $\mathbf{A}^P$ peuvent être obtenus par minimisation de la fonction

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{v}_0^P + \mathbf{A}^P \cdot \mathbf{x}_n - \mathbf{v}_n)^2 + \lambda e_{ij} t_i n_j, \tag{1.65}$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. Dans la pratique, le nombre de points est de l'ordre de cinq ou six et ceux-ci sont choisis comme indiqué

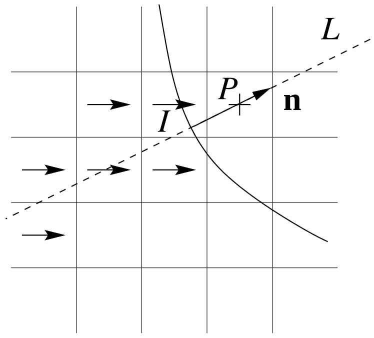


FIG. 1.18.: Exemple de sélection de points pour la composante axiale de la vitesse lors de l'extrapolation.

figure 1.18. La direction normale retenue est représentée par la droite L passant par P et I, point de l'interface le plus proche de P. Les points sont choisis autour de L de manière à minimiser la fonction de coût

$$\sum \mathrm{d}(P_i, L)^2 + \zeta \mathrm{d}(P_i, P)^2, \tag{1.66}$$

où d est la fonction distance et ζ est un facteur géométrique (en général 1/2). À cause du décalage dans la position des deux composantes de la vitesse dû à la discrétisation MAC, deux jeux de points sont nécessaires et cette minimisation est donc effectuée deux fois.

Le champ de pression ne nécessite pas d'extrapolation du fait des facteurs de pondération apparaissant dans (1.58). Ceux-ci dépendent des fractions surfaciques et assurent que seuls les noeuds de pression situés dans le domaine fluide (et pour lesquels $a^{i,j}/h^2 > 1/2$) interviennent. Seul les termes d'intégration $\int \phi r dz$ et $\int \phi r dr$ apparaissant dans (1.49) et (1.50) font intervenir la pression sur l'interface. Celle-ci peut être obtenue à partir de la condition aux limites

$$p = p_i + \sigma\kappa + \mu \mathbf{n}.\mathbf{D}.\mathbf{n}. \tag{1.67}$$

La courbure κ est obtenue directement à partir de la discrétisation de l'interface de même que la normale $\mathbf{n}$. Le tenseur des déformations $\mathbf{D}$ est obtenu localement par la procédure d'extrapolation décrite précédemment. Ceci permet de réécrire (1.67) sous la forme

$$p = p_i + \sigma\kappa + \mu e_{i,j} n_i n_j. \tag{1.68}$$

La pression est calculée de cette manière pour chaque marqueur. Une interpolation linéaire entre marqueurs permet alors le calcul des termes intégraux le long de l'interface.

1.2.2. Technique de raffinement dynamique des maillages

Un des problèmes auquel nous avons été confronté concerne les effets de confinement dus aux conditions aux limites sur les bords du domaine. Il s'agit d'un effet connu et souvent important lorsque l'on veut comparer les résultats des simulations numériques à des résultats théoriques imposant des conditions aux limites à l'infini [Magnaudet et al., 1998].

De même, lors de l'étude des oscillations radiales des bulles, le rapport des rayons maximum et minimum peut être très important. Si l'on veut résoudre correctement les plus petites échelles, il est nécessaire d'utiliser des maillages très fins qui ne s'avèrent réellement utiles que pendant une fraction du cycle complet d'oscillation.

Une technique classique consiste à effectuer une série de simulations en augmentant progressivement la taille du domaine (et la finesse du maillage). On vérifie ensuite que les résultats obtenus convergent. Cette approche a le mérite d'être simple mais les coûts de calcul associés sont souvent prohibitifs. Dans notre cas, du fait de l'utilisation de maillages cartésiens à résolution fixe, ce problème est encore accru. De plus nous désirions effectuer un certain nombre d'études paramétriques nécessitant un grand nombre de calculs différents.

L'idéal serait de pouvoir utiliser un maillage fin dans les zones critiques (en particulier prés de l'interface) et un maillage grossier ailleurs. Ce raffinement doit également être dynamique afin de s'adapter à l'évolution de l'interface. Un certain nombre de techniques différentes existent : remaillages périodiques pour les méthodes de type éléments finis, utilisation de quadtree ou octree pour les méthodes level-set et volumes finis...

Nous avons choisi une solution simple qui n'implique pas de modification fondamentale des algorithmes utilisés. En particulier nous conservons la structure cartésienne régulière des maillages. Un schéma illustrant la technique utilisée est donné figure 1.19. Une hiérarchie de maillages imbriqués les uns dans les autres est construite dynamiquement autour de l'interface. Dans tous les cas l'interface est contenue dans un seul maillage. Toutes les grilles ont la même résolution (nombre de mailles) mais ont une taille égale à la moitié de celle de la grille précédente. La solution sur chaque grille est reliée à la solution sur les grilles adjacentes par l'intermédiaire des conditions aux limites. Lors de l'évolution de l'interface un critère basé sur le confinement de l'interface dans la grille qui la contient permet de déterminer si il est nécessaire de supprimer un niveau de la hiérarchie ou au contraire d'en rajouter un. Lors de la création d'un niveau de raffinement, les champs de vitesses et de pression sont interpolés

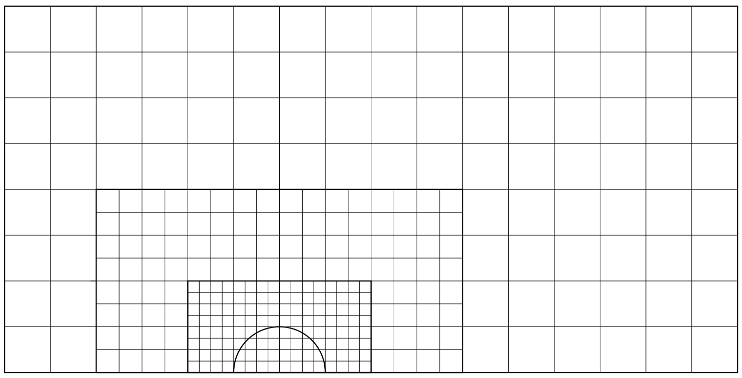


FIG. 1.19.: Schéma de la hiérarchie de grilles utilisées pour le raffinement dynamique.

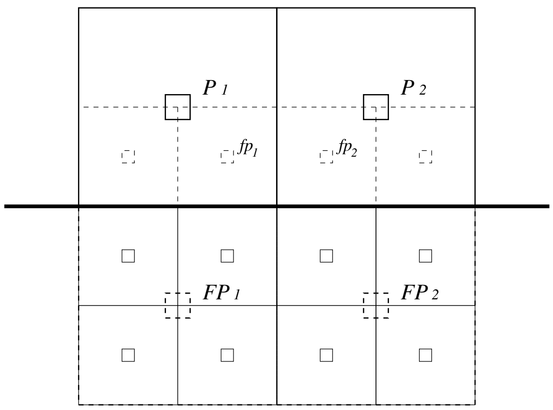


FIG. 1.20.: Connexion entre deux grilles de niveaux différents.

à partir du niveau précédent.

La figure 1.20 schématise la technique utilisée pour connecter les frontières de deux grilles de niveaux différents. Les lignes pointillées représentent les cellules *fantômes* utilisées pour appliquer les conditions aux limites. La ligne épaisse horizontales constitue la frontière commune aux deux domaines. Les valeurs fantômes FP_1 et FP_2 sont obtenues comme la moyenne des quatre valeurs les plus proches sur la grille fine ; les valeurs fantômes fp_1 et fp_2 sont obtenues par interpolation bilinéaire des valeurs P_1, P_2, FP_1 et FP_2 :

$$\begin{aligned} fp_1 &= (9P_1 + 3(FP_1 + P_2) + FP_2)/16, \\ fp_2 &= (9P_2 + 3(FP_2 + P_1) + FP_1)/16. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Pas de temps adaptatif

Ce raffinement dynamique implique le changement dans le temps de l'échelle spatiale associée à la définition des critères de stabilité des schémas de résolution. Suivant le type d'écoulement étudié, essentiellement défini par le nombre de Reynolds, mais également par le nombre capillaire (lié à la tension de surface), différents critères peuvent être contraignants. Le plus classique est le nombre CFL (Courant–Friedrichs–Levy) lié au schéma explicite en temps :

$$|\mathbf{u}|\frac{\Delta t}{\delta x} < 1, \tag{1.70}$$

un autre critère classique concerne la stabilité de la discrétisation spatiale explicite des termes d'advection par un schéma centré [Peyret et al., 1983] :

$$\frac{|\mathbf{u}|^2 \Delta t}{2\nu} \leq 1. \tag{1.71}$$

Cette condition est particulièrement contraignante pour les écoulements à grands Reynolds. Un dernier exemple concerne la résolution temporelle des ondes capillaires sur l'interface qui nécessite la vérification de la contrainte suivante

$$\Delta t < \sqrt{\frac{(\delta x)^3}{\sigma}}, \tag{1.72}$$

que l'on peut interpréter comme le pas de temps minimum nécessaire à la résolution temporelle (et donc à la stabilité) des ondes capillaires de longueur d'onde comparable à la taille de la maille.

L'ensemble de ces contraintes nécessitent l'adaptation du pas de temps lorsque la résolution spatiale varie. Plusieurs solutions sont envisageables.

De manière générale, les limites théoriques de stabilité données ci-dessus ne sont strictement applicables qu'à des cas particuliers (équations unidimensionnelles par exemple) et leur utilisation directe n'est pas aisée dans la pratique. Après un certain nombre d'essais nous avons retenu une technique simple qui donne de bons résultats.

Une des manifestations de la proximité de la limite de stabilité numérique est la difficulté croissante de résolution de l'équation de pression. Ceci est en général dû à l'initiation d'oscillations numériques à haute fréquence du champ de vitesse souvent découplées dans les deux directions spatiales. La non–divergence de l'écoulement est donc fortement perturbée localement et le champ de pression doit s'adapter en conséquence. Un bon indicateur d'un pas de temps trop élevé est ainsi un accroissement du nombre de relaxations nécessaires à la convergence de l'équation de pression pour une tolérance donnée sur la divergence du champ de vitesse. Partant de ce constat, nous fixons une borne supérieure i_M et inférieure i_m sur le nombre d'itérations de l'algorithme multigrille. Lorsque le nombre d'itérations nécessaires est supérieur à i_M le pas de temps est multiplié par un facteur constant $\alpha < 1$, inversement lorsqu'il est inférieur à i_m il est multiplié par $\beta > 1$. Dans la pratique : $i_m = 2$, $i_M = 5$, $\alpha = 0.3$ et $\beta = 1.2$ permettent de contrôler le pas de temps correctement dans la majorité des cas.

Cette technique permet d'adapter simplement le pas de temps lorsqu'un niveau de raffinement est rajouté ou supprimé mais également lorsque le phénomène étudié fait intervenir des échelles temporelles diverses. Dans le cas de la sonoluminescence en particulier, des échelles de temps variant de 1 (période du forçage acoustique) à 10^{-4} ("largeur" du pic de pression correspondant à l'effondrement) sont traitées correctement.

1.3. Quelques tests préliminaires de validation

Cette section est consacrée à la validation du code de résolution des équations de Navier–Stokes avec surface libre présenté dans la section précédente.

1.3.1. Modes d'oscillation d'une bulle

Un test simple permettant de vérifier la précision des conditions aux limites imposées sur l'interface consiste à simuler les oscillations d'une bulle légèrement déformée. Sous l'effet de la tension de surface, la bulle oscille autour de sa forme sphérique. Le taux d'amortissement visqueux des oscillations dépend quant à lui fortement des conditions aux limites sur l'interface pour le tenseur des contraintes.

Les oscillations de faible amplitude peuvent être comparées aux prédictions de théories linéaires. Une théorie classique [Lamb, 1932] décrit les modes normaux d'oscillation d'une bulle. Cette théorie suppose un régime d'oscillation établi et stationnaire. Dans le cas des oscillations amorties d'une bulle dans un liquide initialement au repos, il convient de tenir compte de la diffusion progressive de la vorticité générée par l'interface dans le fluide. Une solution analytique relativement complexe a été obtenue par Prosperetti (1980) sous la forme de la transformée de Laplace de la solution :

$$\tilde{a}(p) = \frac{1}{p}\left(a_0 + \frac{p\dot{a}_0 - \omega_0^2 a_0}{p^2 + 2b_0 p + \omega_0^2 + 2\beta b_0 p \tilde{Q}(p)}\right), \qquad (1.73)$$

où $\tilde{a}$ est la transformée de Laplace de l'amplitude, a_0 est l'amplitude initiale, $\dot{a}_0$ sa dérivée temporelle, ω_0 la pulsation propre, b_0 le taux d'amortissement et $\tilde{Q}$ une fonction donnée par

$$\tilde{Q}(p) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\Gamma(R\sqrt{p/\nu})}, \qquad (1.74)$$

où R est le rayon de la bulle et ν la viscosité cinématique. La fonction géométrique Γ est donnée en terme de la fonction de Bessel de deuxième espèce κ et du mode n de déformation comme

$$\Gamma(q) = q\frac{\kappa(n+1/2, q)}{\kappa(n-1/2, q)}. \qquad (1.75)$$

Les pulsation ω_0 et taux d'amortissement b_0 sont donnés classiquement comme

$$b_0 = (n+2)(2n+1)\frac{\nu}{R^2}, \qquad (1.76)$$

$$\omega_0^2 = (n-1)(n+1)(n+2)\frac{\sigma}{\rho R^3}, \qquad (1.77)$$

avec σ le coefficient de tension de surface et ρ la masse volumique du liquide.

La figure 1.21 donne une comparaison entre les résultats obtenus par simulation numérique directe et par inversion numérique de l'équation (1.73) pour le mode 2 de déformation. Les paramètres sont les suivants : $R = 5 \times 10^{-4}$ m, $\sigma = 0.07$ kg/s^2, $\nu = 5 \times 10^{-6}$ m^2/s, $\rho = 1000$

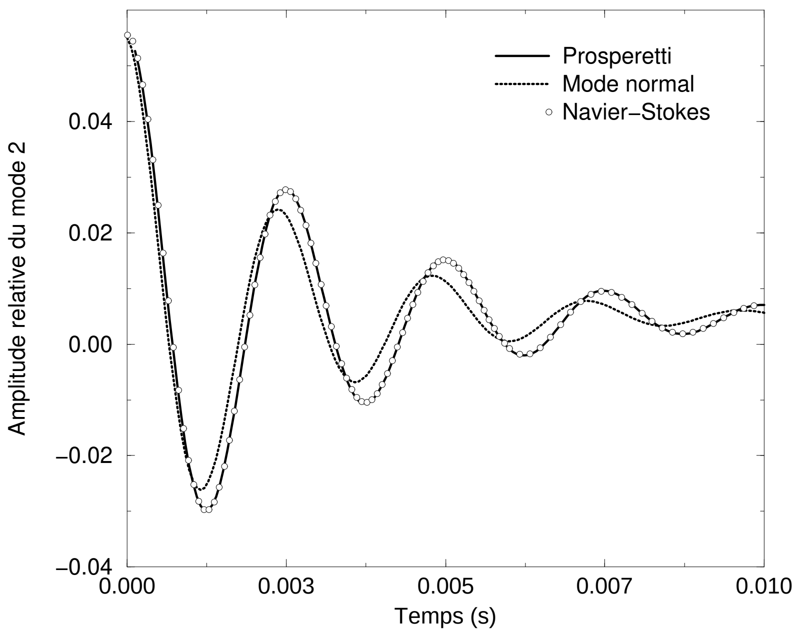


FIG. 1.21.: Évolution temporelle du mode 2 de déformation d'une bulle initialement au repos.

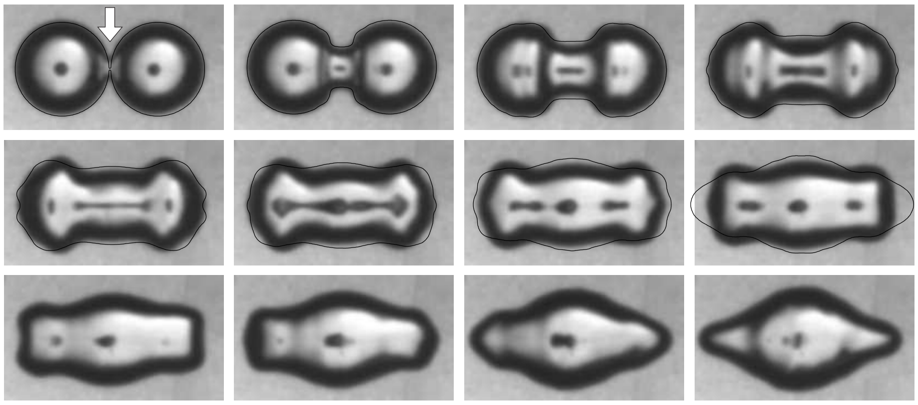


FIG. 1.22.: Fusion de deux gouttes de mercure : série photographique obtenue par Menchaca et son équipe. L'intervalle de temps entre chaque image est 3.5 millisecondes.

kg/m^3. L'amplitude relative est définie par rapport à R. La bulle est initialement placée dans un champ de vitesse nulle, dans une boîte fermée (vitesse et gradient de pression nuls sur les bords du domaine). Afin de limiter les effets dûs au confinement (la théorie suppose un domaine infiniment vaste), le rapport de la taille du domaine au diamètre de la bulle est de 240. Pour limiter le temps de calcul, nous utilisons la technique de maillages imbriqués décrite section 1.2.2 avec 7 niveaux de maillages de taille 256×128 (le diamètre de la bulle est de 128 points de grille). L'erreur quadratique relative entre la simulation numérique directe et la théorie est de 0.0039 sur 8 périodes d'oscillation.

Il est intéressant de noter que la différence entre la solution de Prosperetti et la solution de mode normal (obtenue comme $a_0 \exp(-b_0 t) \cos \omega_0 t$) est importante.

1.3.2. Fusion de deux gouttes de mercure

La coalescence de gouttes liquides est un phénomène courant dans la nature, par exemple lors de la formation de gouttes de pluie dans les nuages. De plus, un ensemble de processus très variés peuvent être décrits par des équations analogues : la fusion à basse énergie de noyaux atomiques ou de paquets de molécules sont des exemples frappants. Malgré ce large champ d'applications potentielles, ce phénomène reste largement inexploré.

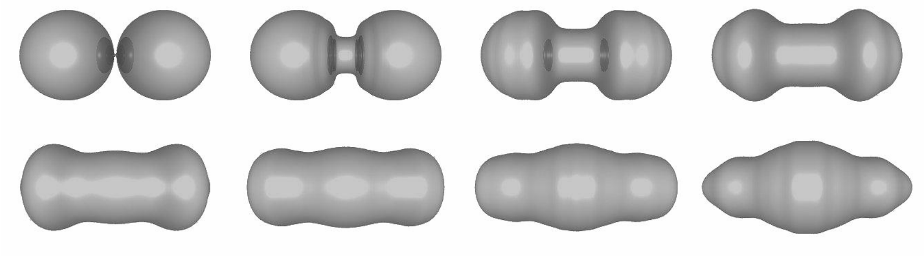


FIG. 1.23.: Fusion de deux gouttes de mercure : simulation numérique.

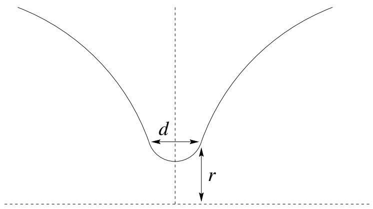


FIG. 1.24.: Géométrie initiale au point de contact.

Nous considérons ici la coalescence de deux gouttes de mercure. La figure 1.22 est une série de photographies à grande vitesse de ce phénomène obtenue par Menchaca-Roca et son équipe [Menchaca-Roca et al., 1997]. Les deux gouttes de un gramme chacune (soit un diamètre de 5.2 mm) sont posées sur une surface rugueuse permettant de minimiser les frottements. Du fait de la tension de surface importante pour une interface mercure/air ($\sigma = 0.435$ kg/s^2), les gouttes sont quasiment sphériques. Elles sont ensuite mises en contact tout en assurant que leur vitesse de déplacement est suffisamment faible pour pouvoir négliger l'énergie cinétique par rapport à l'énergie due à la tension de surface. Un col mince se forme et se rétracte rapidement sous l'effet de la tension de surface, précédé par un train d'ondes capillaires.

La figure 1.23 est un montage d'images de synthèse obtenues à partir des profils axisymétriques pour une simulation sur un maillage de résolution 512×128. L'intervalle de temps entre chaque image est identique à celui utilisé pour l'expérience. Les profils axisymétriques sont représentés également sur la figure 1.22 pour faciliter la comparaison.

Une des difficultés de cette simulation concerne le choix de la forme initiale des interfaces, en particulier à proximité du point de contact. Nous avons choisi arbitrairement la configuration illustrée figure 1.24.

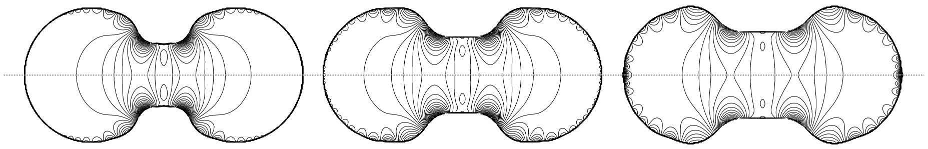


FIG. 1.25.: Champ de pression illustrant la propagation du train d'ondes capillaires.

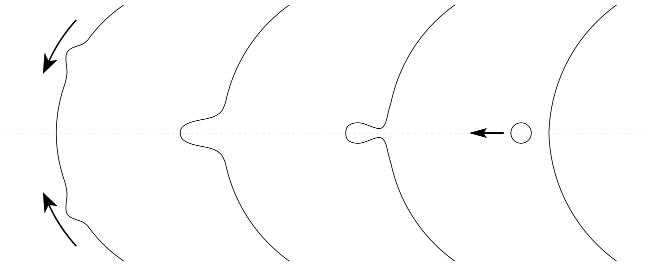


FIG. 1.26.: Formation et éjection de gouttelettes par focalisation d'une onde capillaire.

Les distances r et d sont fixées à 3 et 6 mailles respectivement, et ce quel que soit le rayon des gouttes. Les conditions initiales sont ainsi rendues dépendantes de la résolution numérique.

L'accord entre la simulation numérique et les quatre premières photographies est bon mais la simulation s'écarte de l'expérience pour les séquences suivantes. Un certain nombre d'observations peuvent expliquer cet écart. Les premières sont liées à la nature de l'expérience : les gouttes reposent sur un plan et ne sont pas parfaitement sphériques (le diamètre initial projeté n'est pas de 5.2 mm mais de 6.5 mm). Une explication plus convaincante fait intervenir les ondes capillaires créées par la reconnexion initiale. Ces ondes, dont certaines sont visibles sur les photographies, apparaissent clairement lorsque l'on regarde les variations de pression associées (figure 1.25). Se propageant sur chaque sphère, elles finissent par se focaliser sur l'axe de symétrie causant la surpression illustrée sur la dernière image de la figure 1.25.

Dans les expériences, une partie de l'énergie de ces ondes capillaires est probablement dissipée par la viscosité à des échelles spatiales très petites aux extrémités des gouttes. D'autre part, les survitesses créées aux extrémités des deux gouttes peuvent causer la formation de jets liquides de très petite taille qui peuvent éventuellement se briser et entraîner la formation de gouttelettes éjectées à grande vitesse [Menchaca-Roca et al., 1997, Richard, 2000] (figure 1.26). L'ensemble de ces phénomènes, qui conduit à une dissipation de l'énergie des ondes capillaires, se produit à des échelles inférieures à la résolution spatiale des simulations numériques. Ceci peut expliquer l'accord très correct entre la simulation et l'expérience pour les instants initiaux où les ondes capillaires n'ont pas encore atteint les extrémités des gouttes. Pour les instants suivants (deuxième rangée d'images), les ondes capillaires qui ont rebondi avec une faible dissipation dans la simulation perturbent la solution numérique.

Les conditions initiales sont un autre facteur important pouvant expliquer les différences entre simulation et expérience. Une simulation détaillée devrait *a priori* débuter à l'instant précis de la reconnexion. Les échelles spatiales correspondantes sont de l'ordre de l'épaisseur de l'interface. À ces échelles, la matière ne peut plus être considérée comme continue et les équations de Navier–Stokes ne sont donc plus valables. Les premiers instants de la reconnexion ne sont donc pas accessibles avec notre modèle, quelle que soit la résolution spatiale utilisée. En choisissant une géométrie initiale pour l'interface dépendante de la résolution, nous espérons voir converger la solution lorsqu'un maillage de plus en plus fin est utilisé. Cette convergence serait le signe d'un comportement simple de la solution des équations de Navier–Stokes au voisinage de la singularité se produisant lors de la reconnexion. Ce comportement serait ainsi analogue au cas “inverse” de rupture de cordons liquides étudié par Eggers (1993).

La figure 1.27 représente l'évolution temporelle du rayon au point de reconnexion (R_y sur la figure 1.28) obtenue expérimentalement (points blancs) et numériquement pour deux résolutions spatiales différentes. Le détail des instants initiaux est représenté figure 1.27.(b). Il est clair que la valeur initiale de R_y influe sur la valeur initiale du rayon de courbure au point de reconnexion. La vitesse initiale de rétraction est donc différente pour les deux simulations. Expérimentalement, la vitesse initiale de rétraction est nettement plus importante. Ces éléments tendent à montrer qu'une résolution spatiale plus élevée est nécessaire.

Une autre dimension géométrique intéressante est la position R_x de l'extrémité de l'une des gouttes. La figure 1.29 illustre clairement l'arrivée du train d'ondes sur l'extrémité. Il est intéressant de noter que la position de l'extrémité ne change que lors de l'arrivée des premières ondes capillaires (à partir de 6.5 millisecondes). Ces ondes définissent ainsi la vitesse limite de propagation de l'information dans le système discrétisé.

Ces résultats ne sont que préliminaires mais illustrent bien l'intérêt

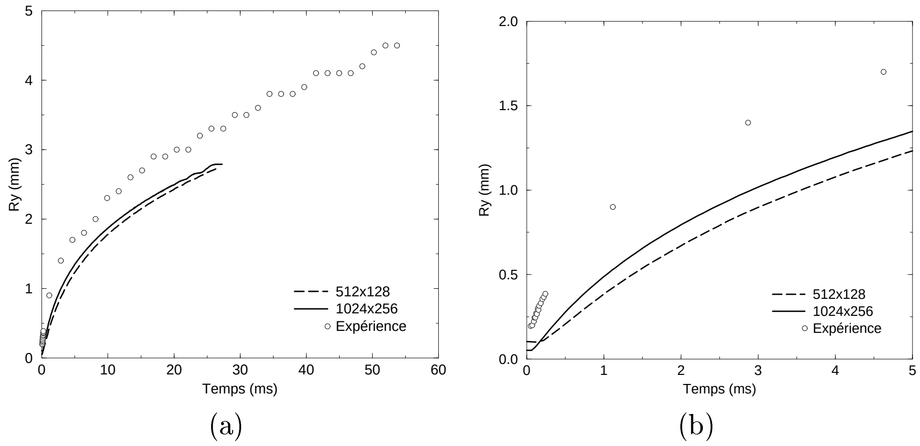


FIG. 1.27.: Évolution temporelle du rayon au point de reconnexion. (a) Ensemble de la simulation. (b) Détail aux temps courts.

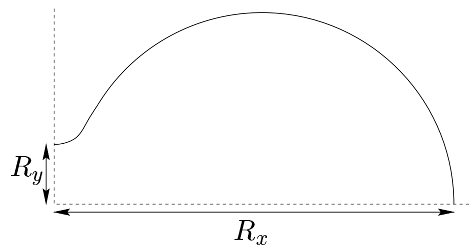


FIG. 1.28.: Définition des mesures géométriques.

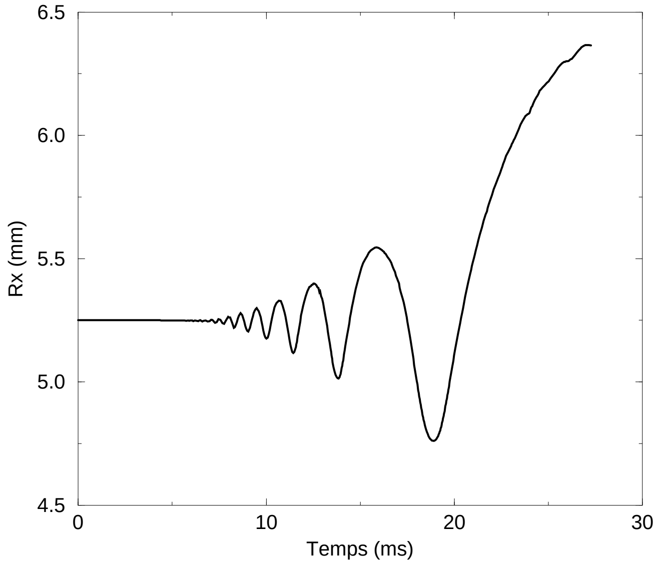


Fig. 1.29.: Évolution temporelle de la position de l'extrémité de l'une des gouttes.

d'un code de résolution numérique pour ces problèmes de reconnexion.

1.3.3. Ascension de bulles gazeuses dans un liquide

Le calcul de la vitesse terminale de bulles gazeuses se déplaçant dans un liquide est un problème classique abordé en mécanique des fluides. Cette question est en effet importante pour un grand nombre de phénomènes physiques courants dans la nature. En particulier, la modélisation des écoulements dispersés : interaction océan/atmosphère, écoulements multiphasiques dans l'industrie pétrolière nécessitent une compréhension détaillée de la dynamique des bulles isolées. De plus, la géométrie simple du problème peut laisser espérer un traitement analytique. Dans le cas de bulles sphériques et pour les limites très visqueuses (régime de Stokes) ou de fluide parfait (inviscides) un tel traitement est possible.

Dans le cas de bulles d'air dans l'eau, ou dans un liquide équivalent, l'évolution de bulles de petite taille (de l'ordre du dixième de millimètre de diamètre) est décrite correctement par la théorie. Ces bulles restent essentiellement sphériques sous l'effet de la tension de surface et les nombres de Reynolds associés sont compatibles avec un régime de Stokes.

Pour des bulles de taille plus importante, les théories doivent prendre en compte deux effets : l'influence d'une viscosité finie et la déviation par rapport à la forme sphérique. L'influence de la viscosité est généralement modélisée à travers une hypothèse de couche limite et un développement de la solution en terme de l'inverse du nombre de Reynolds [Moore, 1963]. La déformation de la bulle est obtenue par l'équilibre entre les termes de pression associée à un écoulement potentiel et la tension de surface. Afin de simplifier une analyse déjà complexe, les déformations sont supposées de faible amplitude et de type ellipsoïdal [Moore, 1965].

Malgré la simplicité apparente du problème, les expériences permettant de valider les théories sont délicates à mettre en oeuvre. En particulier, la pureté des liquides utilisés est un point très important. Les théories supposent des interfaces parfaites qui assurent la nullité de la contrainte tangentielle. Une concentration volumique très faible d'impuretés dans le liquide peut conduire à une concentration surfacique importante sur l'interface. Celle-ci peut alors se comporter comme une coque semi–rigide capable de supporter une contrainte tangentielle non–nulle. La dynamique de la bulle tend alors vers celle d'une particule solide [Haberman et al., 1954].

Dans ce cadre, les simulations numériques peuvent apporter des mesures précieuses pour l'établissement de modèles. Notre code de surface libre est bien adapté à l'étude de bulles gazeuses de densité négligeable par rapport au fluide environnant.

Naïvement, une approche simple pour mesurer la vitesse terminale d'une bulle montant dans un liquide est d'utiliser un réservoir suffisamment haut, de lâcher une bulle à la base et de mesurer sa vitesse lors de son passage à différentes hauteurs. Il est évident que cette technique ne donnera pas le résultat escompté. La pression hydrostatique variant dans la colonne liquide entraîne une variation correspondante du volume de la bulle et il est impossible d'obtenir un régime stationnaire pour une bulle de volume donné.

Un point de vue différent consiste à utiliser une colonne de liquide en écoulement continu du haut vers le bas. Une bulle libérée dans cet écoulement peut être maintenue immobile dans le référentiel de l'observateur en ajustant le débit de manière à ce que les forces de traînée agissant sur la bulle compensent la poussée d'Archimède. Lorsque le régime stationnaire est obtenu, la vitesse du liquide correspond à la vitesse finale de montée d'une bulle de même volume dans un liquide au repos.

Nous avons choisi cette approche pour nos simulations numériques. Le domaine de calcul est un tube vertical ouvert aux deux extrémités, avec une condition de glissement libre sur la paroi. La longueur du tube et son

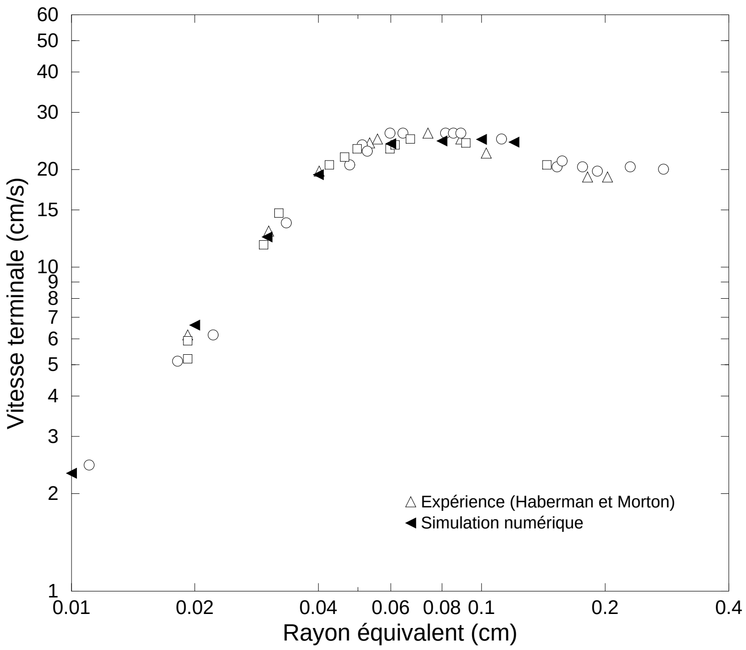


Fig. 1.30.: Vitesses terminales obtenues expérimentalement et par simulation numérique pour des bulles d'air se déplaçant dans du *Varsol*.

diamètre sont dix et cinq fois le diamètre de la bulle respectivement. Les gradients de vitesse à l'entrée et à la sortie du tube sont nuls. Un gradient de pression variable est imposé entre l'entrée et la sortie. Ce gradient est ajusté en permanence (à chaque pas de temps) au moyen d'une boucle de contrôle de type PID (prédicteur–intégrateur–dérivateur) asservie à la position du centre de gravité de la bulle. Le but est de maintenir la bulle fixe en ajustant la vitesse d'écoulement du fluide. Les constantes de temps du schéma de contrôle sont très petites et les variations de la position du centre de gravité sont en conséquence très faibles (moins de 10^{-4} %).

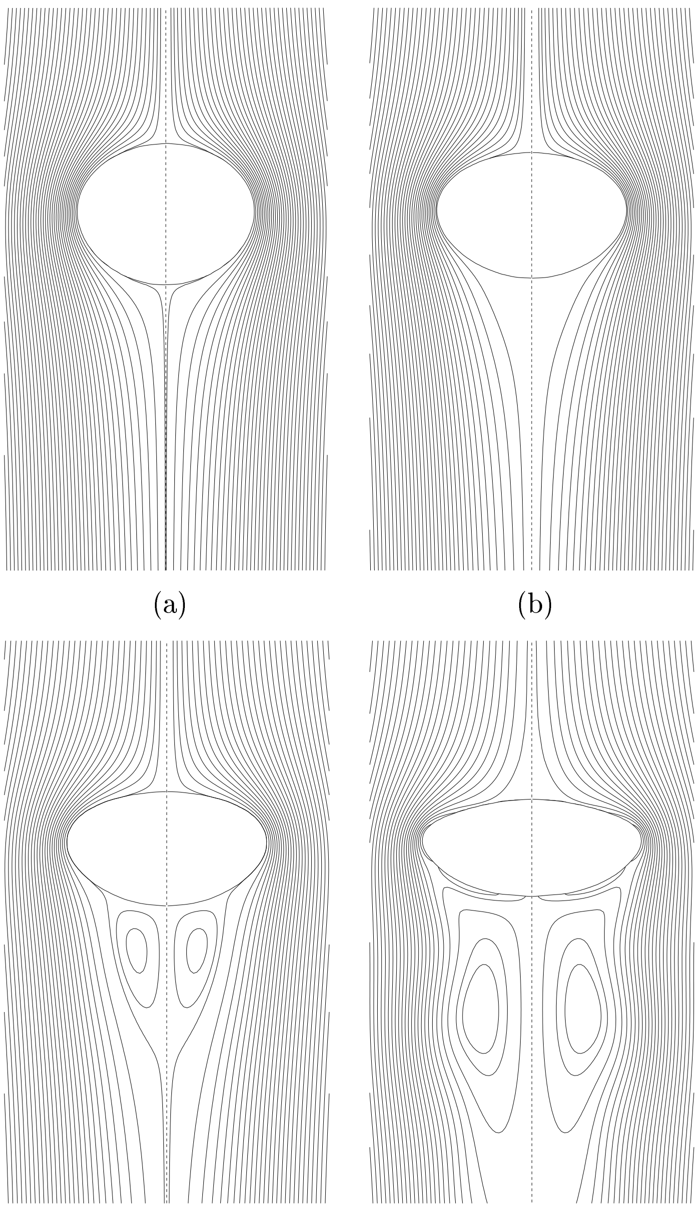
Afin de valider les résultats obtenus par simulation numérique, nous les avons comparés avec les résultats expérimentaux de Haberman et Morton (1954) obtenus pour différentes tailles de bulles d'air se déplaçant dans du *Varsol*. Les vitesses terminales obtenues sont illustrées sur la figure 1.30. Ces mêmes données expérimentales ont été utilisées par Moore (1965) pour valider sa théorie dans le cas de bulles non–sphériques. Les paramètres physiques du *Varsol* sont les suivants : $\mu = 8.5 \times 10^{-4}$ kg/ms, $\rho = 782$ kg/m^3, $\sigma = 0.0245$ kg/s^2.

La forme générale de cette courbe peut être interprétée de la manière suivante : les bulles de petite taille (rayon inférieur à 0.4 mm) restent sphériques et la poussée d'Archimède croit plus vite que la traînée entraînant une augmentation de la vitesse terminale ; la déformation augmente rapidement avec la taille des bulles et entraîne une augmentation importante du coefficient de traînée qui se traduit par un plafonnement de la vitesse terminale. La partie décroissante de la courbe expérimentale est interprétée par Moore comme le prolongement de cette même tendance. Nous verrons plus tard qu'à la lumière des simulations une autre interprétation peut être proposée.

Il est intéressant d'examiner plus en détail le type d'écoulement obtenu pour différentes tailles de bulles. La figure 1.31 représente les lignes de courant des régimes stationnaires[3] pour des bulles de 0.06, 0.08, 0.1 et 0.12 cm de rayon. De manière concordante avec la théorie de Moore, la déformation augmente rapidement avec la taille de la bulle. Cependant, un changement plus intéressant se produit aux alentours du maximum de vitesse terminale (pour un rayon compris entre 0.08 et 0.1 cm). La structure de l'écoulement change et une zone de recirculation apparaît et croît avec la taille de la bulle. Cette modification de la structure de l'écoulement n'est pas prise en compte par la théorie de Moore. L'étude analytique du détachement et du développement de la zone de recirculation est en effet délicate. Les simulations numériques effectuées par Dandy et Leal (1986) et Blanco et Magnaudet (1995) de l'écoulement autour d'ellipsoïdes confirment cependant l'existence de cette zone de recirculation pour un espace de paramètres (rapport d'aspect et nombre de Reynolds) donné.

L'accord entre simulation numérique et expérience est globalement bon, excepté pour les grandes valeurs du rayon pour lesquelles les simulations ne reproduisent pas la décroissance de la vitesse terminale. Une observation intéressante peut expliquer ces différences. La figure 1.32 représente l'évolution temporelle de la vitesse du liquide loin de la bulle pour différents rayons. Pour des bulles de rayon inférieur à 0.08 cm, on observe une convergence de la vitesse et l'établissement d'un régime stationnaire. Lorsque le rayon dépasse un certain seuil (compris entre 0.08 et 0.1 cm), des oscillations périodiques de la vitesse associées à des déformations de l'interface se manifestent. La période et l'amplitude croissent avec le rayon. L'évolution de la forme d'une bulle de 0.12 cm de rayon est représentée figure 1.33 pour une période d'oscillation. Les déformations de la bulle sont associées aux fluctuations périodiques de l'intensité du

[3] Dans le cas de la bulle de 0.12 cm de rayon le régime est périodique et les lignes de courant sont représentées pour un instant particulier du cycle.



(a) (b) (c) (d)

FIG. 1.31.: Lignes de courants autour de bulles se déplaçant dans un liquide (*Varsol*). Les rayons équivalents sont : (a) 0.06 cm, (b) 0.08 cm, (c) 0.1 cm, (d) 0.12 cm.

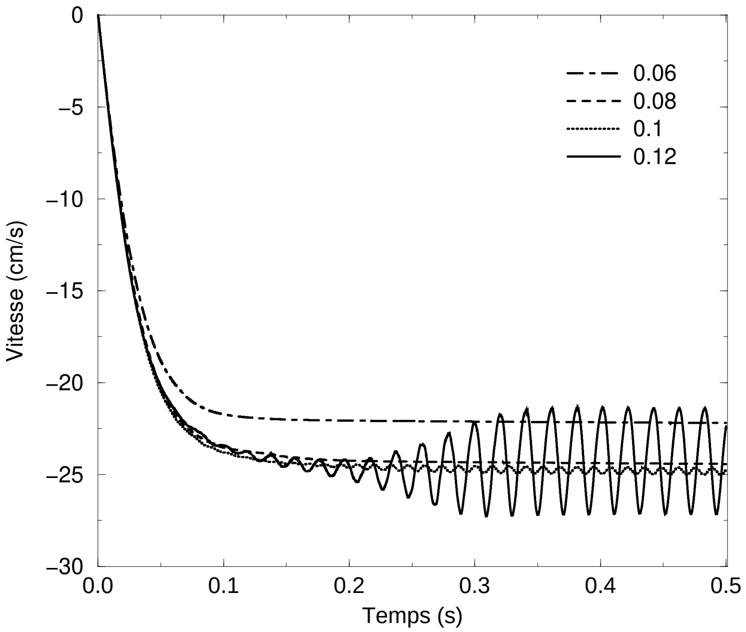


FIG. 1.32.: Évolution temporelle de la vitesse du fluide loin de la bulle pour les différentes valeurs du rayon indiquées dans la légende (en cm).

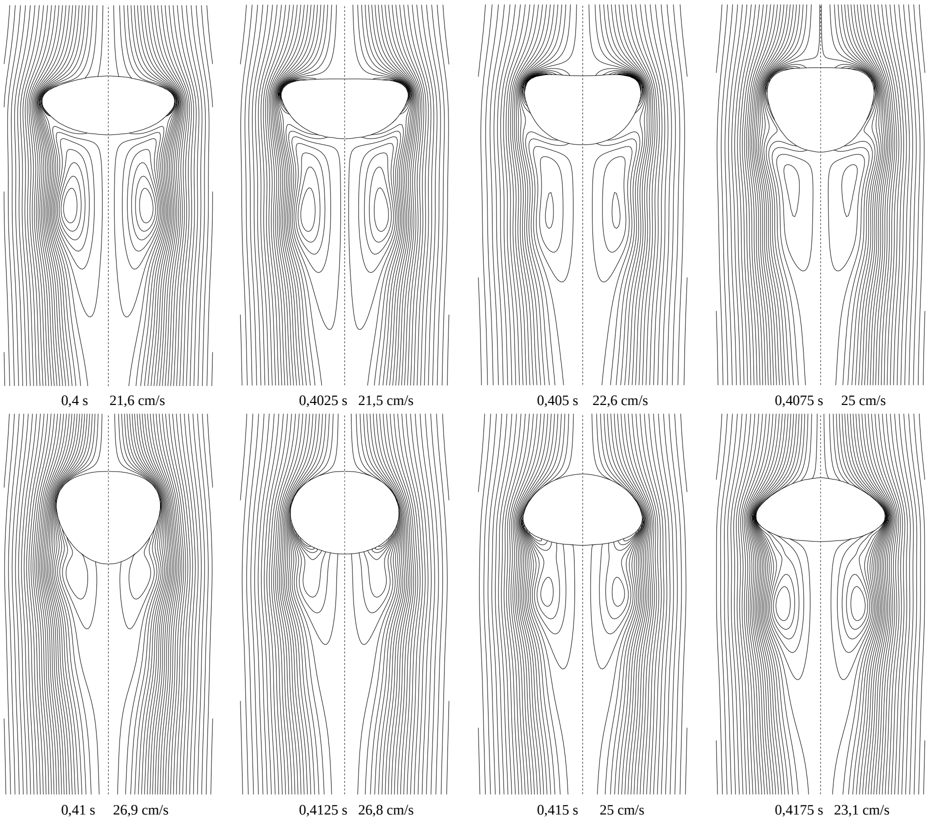


FIG. 1.33.: Évolution temporelle de la forme d'une bulle de 0.12 cm de rayon équivalent pour une période d'oscillation.

vortex torique illustré figure 1.31.(d).

Le seuil de déclenchement de ces oscillations correspond au maximum expérimental de la vitesse terminale. Haberman et Morton indiquent de plus avoir observé pour les bulles de taille importante une transition entre un régime de montée rectiligne et une ascension tridimensionnelle de type hélicoïdal. Ce type de transition est bien connu expérimentalement mais n'a pas été étudié théoriquement. Une explication plausible des différences entre les simulations et les expériences fait ainsi intervenir la transition entre un régime axisymétrique stable et un régime tridimensionnel stable. Cette transition 2D/3D aurait lieu approximativement au moment de la déstabilisation (observée dans les simulations) du régime 2D axisymétrique. La décroissance observée de la vitesse terminale serait donc due à un processus physique distinct lié à un changement de régime.

1.4. Récapitulatif

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche de type volume fini permettant le traitement des interfaces comme de réelles discontinuités. Le principe a été introduit par une première application aux écoulements diphasiques avec tension de surface. Cette technique permet d'obtenir l'équilibre numérique exact entre les termes de gradient de pression et le terme de tension de surface. Nous avons montré que les *courants parasites* — classiquement rencontrés avec les méthodes utilisant une formulation continue pour la tension de surface — étaient dus à l'absence de cet équilibre numérique. L'utilisation de notre méthode permet de réduire l'amplitude de ces courants à la précision machine.

L'intégration des termes de surface nécessite une représentation géométrique précise. Nous avons présenté une technique de suivi de front basée sur l'utilisation de marqueurs connectés par des splines cubiques. La technique précédente a été généralisée et formalisée dans le cas d'écoulements avec surface libre, où la densité de l'une des phases est négligeable. Une technique d'extrapolation du champ de vitesse permet une prise en compte précise des conditions aux limites sur la surface libre.

Ces méthodes ont été validées dans le cas de faibles déformations par les théories linéaires décrivant les oscillations d'ondes capillaires planes et de gouttes liquides. Des écarts inférieurs à un pour cent ont été obtenus.

Plusieurs applications plus complètes ont illustré le potentiel du code de surface libre pour l'étude de phénomènes complexes combinant de grandes déformations et une influence importante des effets surfaciques (tension de surface et dissipation visqueuse au voisinage de l'interface).

2. Sonoluminescence

Un grand nombre des études analytiques et numériques du phénomène de sonoluminescence supposent la symétrie sphérique de l'ensemble des grandeurs physiques. Les modèles les plus simples ne traitent que l'évolution temporelle du rayon de la bulle associée à une modélisation plus ou moins fine des autres grandeurs physiques (pression, température) généralement considérées comme spatialement uniformes. Les modèles les plus complexes utilisent une discrétisation spatiale unidimensionnelle des propriétés locales. On peut citer en particulier le modèle très complet de Moss et al. (1997) incluant les effets thermodynamiques et une description de l'ionisation du gaz contenu dans la bulle. Ces modèles complexes permettent de décrire la formation d'ondes de choc sphériques. Ils ont généralement été utilisés pour tenter de vérifier la théorie selon laquelle l'onde de choc est responsable de l'ionisation du gaz et de l'émission lumineuse résultante.

Une première objection peut être formulée : une solution auto–similaire [Witham, 1974] existe pour la focalisation d'une onde de choc sphérique. Cette concentration d'énergie au centre de l'onde se manifeste par une singularité permettant en théorie d'atteindre des pressions (ou températures) arbitraires. En réalité, l'efficacité de cette focalisation est limitée par les déviations par rapport à la symétrie sphérique [Evans, 1996]. Ces déformations sont amplifiées au cours de l'effondrement de l'onde sur elle-même (formation de "caustiques") et peuvent être déclenchées par des instabilités dynamiques. Ces instabilités sont bien connues dans le domaine de la fusion nucléaire par confinement inertiel, car elles limitent fortement l'efficacité de ces dispositifs. Ces effets n'étant pas pris en compte dans les modèles unidimensionnels ceux-ci prédisent souvent des températures extrêmement élevées (de l'ordre de 10^6 K) qui ne semblent pas réalistes.

Un autre point important en faveur d'une étude plus réaliste de la dynamique des bulles sonoluminescentes concerne le domaine de stabilité de ce phénomène. Deux processus essentiels semblent déterminer la forme de l'espace de paramètres (p_a, R_0) pour lequel des bulles sonoluminescentes stables peuvent être observées (p_a est l'amplitude du forçage acoustique et R_0 le rayon à l'équilibre).

Le premier concerne l'équilibre du contenu de la bulle lié à la diffusion gazeuse dans le liquide environnant. Il est bien connu [Leighton, 1997] qu'une bulle placée dans un liquide pur (sans surfactants) tend à se dissoudre sous l'effet de la tension de surface. Le processus de *diffusion rectifiée* s'oppose à cette tendance de la manière suivante. Lorsque le rayon de la bulle est supérieur au rayon à l'équilibre, la pression partielle de gaz dissous dans le liquide est supérieure à la pression du gaz contenu dans la bulle et la diffusion s'effectuent du liquide vers le gaz. Inversement lorsque la bulle est comprimée la diffusion s'effectue du gaz vers le liquide. Cette diffusion dépend également de la surface de contact et donc du rayon de la bulle. Si les oscillations radiales s'effectuent de manière symétrique par rapport au rayon à l'équilibre, la surface de contact étant plus grande lors de la phase d'absorption, le flux net de gaz est positif au cours d'un cycle et la bulle grossit. Dans le cas général, le signe du flux de gaz dépend de la dynamique du rayon et de la valeur de la pression partielle du gaz dissous dans le liquide. Les valeurs des paramètres (p_a, R_0) pour lesquelles ce flux est nul déterminent une partie de l'espace de stabilité.

Le second phénomène définissant le domaine de stabilité est le couplage entre l'oscillation radiale et les modes de déformation de la bulle. On observe expérimentalement que pour un rayon à l'équilibre donné les bulles disparaissent brusquement lorsque l'amplitude de forçage excède une certaine valeur. Ce seuil peut être interprété comme la limite pour laquelle les modes de déformation non–sphériques provoquent la rupture de la bulle [Brenner et al., 1995]. Il peut être déterminé théoriquement à partir des analyses de stabilité linéaire dont nous rappelons les principaux résultats section 2.1.1.

Si la modélisation du processus de diffusion rectifiée n'impose pas la prise en compte des déviations par rapport à la symétrie sphérique, la limite de stabilité liée aux modes de déformation contredit clairement l'hypothèse de symétrie. De plus, à notre connaissance, aucune modélisation complète incluant les effets non–linéaires d'interaction entre modes de déformation n'a été effectuée. Une telle modélisation permettrait de vérifier la validité de la théorie linéaire dans le cadre de la sonoluminescence.

Un autre effet non–linéaire potentiellement intéressant est le couplage entre le déplacement du centre de gravité de la bulle et ses déformations. Ce couplage peut s'effectuer dans les deux directions. Un déplacement du centre de gravité couplé avec l'oscillation radiale peut entraîner la formation de jets invoquée par Prosperetti dans sa théorie. Inversement, les couplages entre modes de déformation peuvent éventuellement causer un déplacement du centre de gravité.

Dans ce chapitre, nous proposons d'appliquer à ces problèmes le code de résolution des équations de Navier–Stokes avec surface libre présenté dans le chapitre précédent. Peu de simulations bidimensionnelles ont été effectuées jusqu'à maintenant [Prosperetti, 1997, Round, 1997]. Elles reposaient sur une technique d'intégrale de frontière appliquée à un liquide inviscide. La viscosité ne pouvant jouer son rôle stabilisateur, il est apparemment difficile d'obtenir plusieurs cycles d'oscillations avec de tels schémas [Round, 1997]. De plus, étant donné la petite taille des bulles sonoluminescentes, la viscosité joue probablement un rôle important. Un code résolvant les équations de Navier–Stokes semble ainsi bien adapté.

Après un rappel des principaux résultats théoriques et une validation de la méthode de résolution, nous déterminerons numériquement le diagramme de stabilité des modes de déformation. Une seconde partie sera consacrée à la modélisation des déplacements du centre de gravité dus au gradient de pression acoustique. Ceci afin d'étudier la formation éventuelle des jets prédits par Prosperetti. Dans la dernière partie nous reviendrons plus en détail sur l'initiation des instabilités de forme.

2.1. Équation de Rayleigh–Plesset

Nous considérons tout d'abord l'écoulement incompressible à symétrie sphérique autour d'une cavité définie par son rayon R. Du fait de l'incompressibilité, le champ de vitesse $u(r,t)$ s'écrit nécessairement sous la forme

$$u(r,t) = \frac{R^2}{r^2}\dot{R}, \tag{2.1}$$

où r est la coordonnée radiale et t est le temps. Ce champ de vitesse dérive d'un potentiel ϕ tel que $u(r,t) = \partial\phi/\partial r$ soit

$$\phi(r,t) = -\frac{R^2\dot{R}}{r}. \tag{2.2}$$

À partir de l'équation de Bernoulli

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho u^2 + p = \text{constante}, \tag{2.3}$$

on obtient

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p(R) - p_\infty}{\rho}, \tag{2.4}$$

où ρ est la masse volumique du fluide. Le saut de contrainte normale à travers l'interface dû à la tension de surface et à la viscosité permet d'écrire

$$p(R) = p_i - 2\frac{\sigma}{R} - 4\mu\frac{\dot{R}}{R}, \tag{2.5}$$

où μ est la viscosité dynamique, σ le coefficient de tension de surface et p_i la pression à l'intérieur de la cavité. On obtient ainsi une généralisation de l'équation de Rayleigh, l'équation dite de Rayleigh–Plesset

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}(p_i - p_\infty) - \frac{4\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{\rho}\frac{1}{R}. \tag{2.6}$$

Les conditions aux limites pour cette équation dépendent du type d'écoulement considéré. La pression p_∞ peut être constante dans le cas d'un écoulement non–forcé ou dépendante du temps comme c'est le cas pour la sonoluminescence. Dans tous les cas il est nécessaire d'exprimer la pression dans le gaz p_i. Dans la pratique deux cas sont considérés : soit la cavité contient un gaz condensable (en général la phase vapeur du liquide) et la pression p_i peut être considérée comme constante, soit le gaz est non–condensable. Dans tous les cas qui nous intéressent ici (que ce soit la sonoluminescence ou la cavitation de bulles prés de parois), nous supposerons que le gaz est non–condensable et que la pression p_i est donnée par une équation d'état de la forme

$$p_i = p_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa}, \tag{2.7}$$

où κ est un exposant polytropique. Deux limites classiques sont simples à définir : lorsque le processus est isotherme $\kappa = 1$, lorsque le processus est adiabatique $\kappa = \gamma$. Dans la pratique des régimes intermédiaires sont souvent rencontrés suivant les échelles de temps des processus étudiés. Dans le cas de la dynamique forcée des oscillations radiales de grande amplitude, la phase d'expansion est relativement longue par rapport aux échelles de temps liées à la diffusion thermique et peut être considérée comme isotherme. La phase finale d'effondrement est extrêmement courte et essentiellement adiabatique. Un exposant polytropique variable peut être utilisé pour modéliser la transition entre ces régimes [Prosperetti, 1977]. Ces modèles sont complexes et ils subsiste un certain nombre d'interrogations quant à leur validité dans le cadre de la sonoluminescence.

Les oscillations de bulles sonoluminescentes sont de grande amplitude et dans la phase finale de l'effondrement, les vitesses atteintes par l'interface peuvent être comparables à la vitesse du son dans le liquide. Il est clair que dans ce cas, l'hypothèse d'incompressibilité du liquide n'est plus vérifiée. Plusieurs approches prennent en compte la compressibilité du liquide de manière plus ou moins précise. La plus simple est *l'approximation acoustique* qui considère constante la vitesse du son dans le liquide. Le modèle de Keller et Miksis (1980) introduit une description détaillée des effets thermodynamiques et acoustiques. Le modèle acoustique a l'avantage de ne nécessiter qu'une modification simple de l'équation de Rayleigh–Plesset sous la forme

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}(p_i - p_\infty) - \frac{4\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{\rho}\frac{1}{R} + \frac{R}{\rho c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(p(R,t) - p_\infty), \quad (2.8)$$

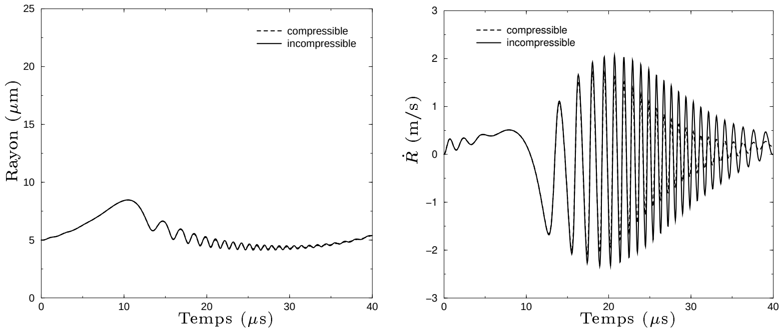
où c est la vitesse du son dans le liquide (l'approximation acoustique complète comprend d'autres termes que nous négligeons). Le but de notre étude n'étant pas une modélisation détaillée des effets compressibles (notre code de surface libre suppose fondamentalement l'incompressibilité du liquide) nous nous contenterons de ce modèle pour illustrer l'influence de ces effets.

Cette prise en compte de la compressibilité du liquide s'avère nécessaire si l'on veut obtenir une modélisation correcte des résultats expérimentaux [Löfstedt et al., 1993]. Une part importante de la dissipation énergétique provient en effet de l'émission d'ondes de chocs et d'ondes acoustiques dans le liquide. La figure 2.1 illustre les différences entre les solutions numériques des équations (2.6) et (2.8) pour des paramètres caractéristiques de la sonoluminescence ($R_0 = 5$ μm, $\mu = 0.001$ kg/ms, $\sigma = 0.07$ kg/s^2, $\rho = 1000$ kg/m^3, $\gamma = 1.4$, $p_\infty = 100\ 000$ Pa, $f = 26\ 400$ Hz, $c = 1481$ m/s). L'amplitude du forçage acoustique p_a est de 100 000 (a), 110 000 (b) et 120 000 (c) Pa. Les solutions sont proches dans tous les cas pour la phase d'expansion et la première phase d'effondrement. Lorsque l'amplitude du forçage est faible, la compressibilité du liquide joue peu et les résultats sont proches (figure 2.1.(a)) mais lorsque l'amplitude augmente une grande part de l'énergie est dissipée dans les phases d'effondrement violent.

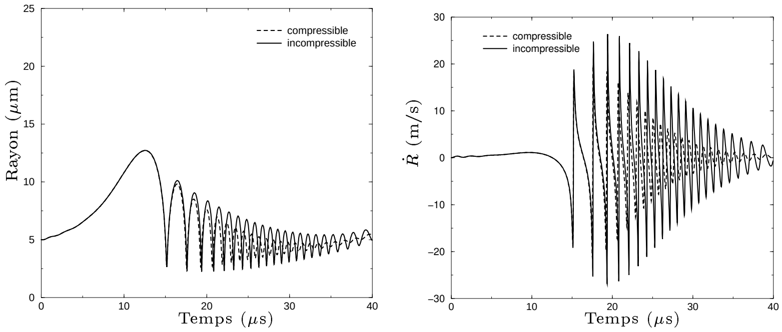
2.1.1. Stabilité géométrique et dynamique

En utilisant une décomposition en harmoniques sphériques de la forme de la bulle, il est possible d'étudier la stabilité des modes de déformation [Plesset et al., 1956]. La forme de la bulle peut être décrite comme

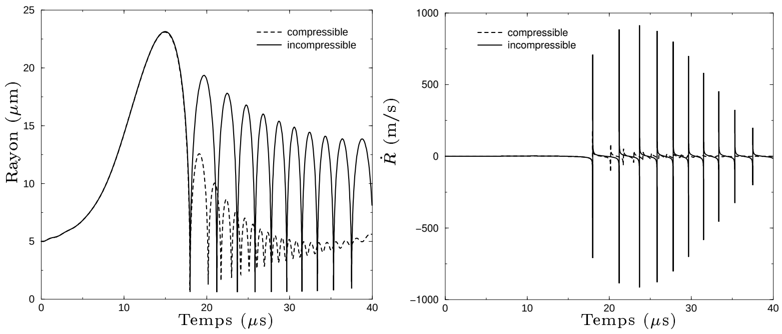
$$R = R(t) + \sum_{n,m} a_{nm}(t) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.9)$$



(a)



(b)



(c)

FIG. 2.1.: Solutions numériques des équations de Rayleigh–Plesset avec ou sans prise en compte de la compressibilité du liquide. (a) $p_a = 100\ 000$ Pa, (b) $p_a = 110\ 000$ Pa, (c) $p_a = 120\ 000$ Pa.

où $Y_n^m(\theta, \varphi)$ est une harmonique sphérique d'ordre n et de degré m et d'amplitude a_{nm}. En supposant que l'amplitude des déformations est faible soit $|a_{nm}| \ll R$, les équations pour chacun des modes sont découplées. Plesset et Mitchell obtiennent ainsi dans le cas où la densité du gaz peut être négligée

$$\ddot{a}_n + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a}_n + (n-1)\left[(n+1)(n+2)\frac{\sigma}{\rho}R^3 - \frac{\ddot{R}}{R}\right]a_n = 0. \tag{2.10}$$

L'indice m disparaît du fait de la dégénérescence des modes zonaux des harmoniques sphériques pour une bulle initialement sphérique. La viscosité modifie de manière importante la structure de ces équations en faisant apparaître des termes intégraux liés à la diffusion de vorticité dans le liquide [Prosperetti, 1980]. Dans le cas où la longueur de diffusion de vorticité est très inférieure au rayon de la bulle, ces expressions se simplifient en

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n + \left[3\frac{\dot{R}}{R} + 2(n+2)(2n+1)\frac{\nu}{R^2}\right]\dot{a}_n + \\ (n-1)\left[(n+1)(n+2)\frac{\sigma}{\rho}R^3 + 2(n+2)\nu\frac{\dot{R}}{R^3} - \frac{\ddot{R}}{R}\right]a_n = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Une approximation moins drastique des équations complètes est envisagée par Brenner et al. (1995) qui supposent l'existence d'une couche limite d'épaisseur δ autour de la bulle correspondant à la longueur de diffusion de la vorticité. Cette échelle spatiale peut être approchée comme le minimum de $\sqrt{\nu/\omega}$ et $R/2n$, où ω est la pulsation de forçage acoustique. La solution approchée s'écrit alors

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n + \left\{3\frac{\dot{R}}{R} + \left[(n+2)(2n+1) - 2n(n+2)^2\frac{\delta}{R}\right]\frac{2\nu}{R^2}\right\}\dot{a}_n - \\ \left\{(n-1)\frac{\ddot{R}}{R} - (n-1)(n+1)(n+2)\frac{\sigma}{\rho R^3} - \right. \\ \left.\left[(n-1)(n+2) + 2n(n+2)(n-1)\frac{\delta}{R}\right]\frac{2\nu\dot{R}}{R^3}\right\}a_n = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Contrairement au cas plan décrit par le mécanisme de l'instabilité de Rayleigh–Taylor, la stabilité de l'interface ne dépend pas uniquement de son accélération mais également de sa vitesse. C'est une conséquence directe de la géométrie de l'interface. La divergence des lignes de courant lors de l'expansion stabilise cinématiquement les perturbations. Lors de la contraction l'effet inverse se produit. Dans le cas de l'expansion il existe une compétition entre l'effet déstabilisateur de type Rayleigh–Taylor du à l'accélération et l'effet stabilisateur du à l'expansion. Dans le cas d'une bulle en expansion sous l'effet d'une différence de pression constante, l'effet stabilisateur l'emporte et l'on peut montrer [Plesset et al., 1956] que $a_n \to$ cte lorsque $R \to \infty$.

Dans le cas de la compression, une approximation de type WKB [Plesset et al., 1956] permet d'obtenir

$$a_n \simeq R^{-1/4} \exp\left(\pm icn^{1/2} \int R^{-5/2} dt\right), \tag{2.13}$$

où c est une constante. La perturbation a_n croît comme $R^{-1/4}$ et oscille avec une fréquence croissante lorsque R tend vers zéro.

2.1.2. Taux de compression

Dans le cas d'une bulle contenant un gaz vérifiant une loi d'état polytropique de la forme (2.7) et s'effondrant sous l'effet d'une pression extérieure p_∞ constante, il est possible de prédire à partir de l'équation de Rayleigh le rapport entre le rayon initial et le rayon minimum. En choisissant R_0 comme échelle spatiale et $\sqrt{\rho R_0^2/p_\infty}$ comme échelle de temps, (2.4) peut être exprimée sous forme non–dimensionnelle comme

$$R_\star \ddot{R}_\star + \frac{3}{2}\dot{R}_\star^2 = R_\star^{-3\kappa} - 1, \tag{2.14}$$

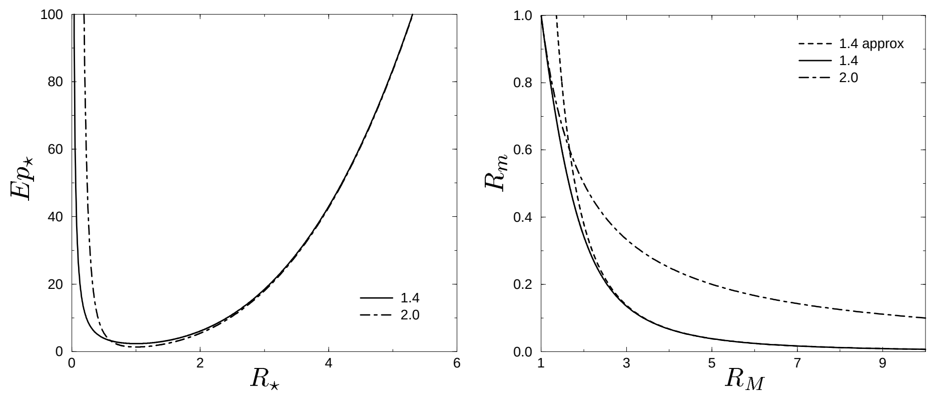
où l'étoile indique une quantité adimensionnée. En multipliant cette équation par $2R_\star^2 \dot{R}_\star$ on obtient

$$2R^3 \dot{R}\ddot{R} + 3R^2 \dot{R}^3 = 2R^2 \dot{R}(R^{-3\kappa} - 1), \tag{2.15}$$

où les étoiles ont été omises pour alléger la notation. En intégrant par rapport au temps il vient

$$R^3 \dot{R}^2 - \frac{2}{3 - 3\kappa} R^{3-3\kappa} + \frac{2}{3} R^3 = \text{cte}. \tag{2.16}$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du liquide entourant la bulle et le second l'énergie potentielle $Ep_\star$ du gaz contenu dans la bulle. Cette énergie est représentée figure 2.2.(a) pour les différentes valeurs de κ indiquées dans la légende.



(a) (b)

FIG. 2.2.: Énergie potentielle et relation entre les rayons maximum et minimum pour une bulle s'effondrant sous l'effet d'une pression extérieure constante. (a) Énergie potentielle $Ep_\star$ du gaz pour différentes valeurs de κ. (b) Relation entre le rayon maximum R_M et minimum R_m pour différentes valeurs de κ.

Le liquide étant initialement au repos l'énergie initiale du système est l'énergie potentielle du gaz. De même lorsque la bulle atteint son rayon minimum R_m l'énergie cinétique s'annule. Les courbes figure 2.2.(b) ont été obtenues par résolution numérique des racines de l'équation $Ep_\star = \text{cte}$ pour différentes valeurs de κ. Dans le cas où $R_M \gg 1$ et $R_m \ll 1$, un des deux termes d'énergie potentielle peut être négligé, on obtient alors la relation simplifiée

$$R_M^3 \simeq \frac{1}{\kappa - 1} R_m^{3-3\kappa}, \tag{2.17}$$

représentée en pointillés sur la figure 2.2.(b) pour $\kappa = 1.4$.

2.2. Simulations numériques

Une première comparaison entre les solutions numériques de l'équation de Rayleigh–Plesset et des équations de Navier–Stokes en coordonnées axisymétriques est illustrée figure 2.3. Il s'agit de l'oscillation radiale d'une bulle initialement hors–équilibre. La pression sur les bords du domaine est maintenue constante à la valeur p_∞, le gradient de vitesse étant supposé nul. Les paramètres sont représentatifs des conditions requises pour des bulles sonoluminescentes : $R_0 = 5\ \mu\text{m}$, $\mu = 0.001$ kg/ms, $\sigma = 0.07\ \text{kg/s}^2$, $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, $\gamma = 1.4$, $p_\infty = 100\,000$ Pa, $p_0 = 128\,000$

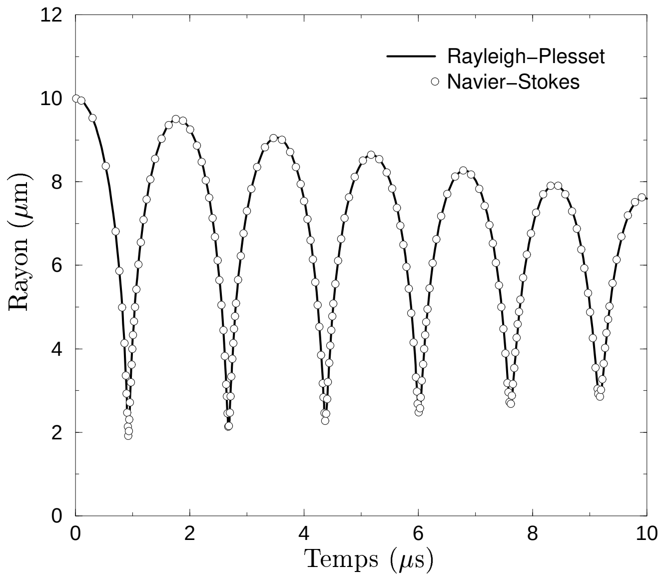


FIG. 2.3.: Oscillations radiales libres d'une bulle initialement hors–équilibre.

Pa. La bulle oscille radialement en conservant sa forme sphérique, l'amplitude des oscillations décroît du fait de l'amortissement visqueux. L'accord obtenu est très satisfaisant. Il est toutefois important de noter que les conditions aux limites jouent un rôle primordial. Afin d'obtenir un bon accord entre les simulations numériques et la solution de Rayleigh–Plesset il est nécessaire d'utiliser de très grands domaines afin de limiter les effets de confinement. Pour la simulation illustrée figure 2.3, le rapport entre la taille du domaine et le diamètre initial de la bulle (rapport de confinement) est de 160. Grâce à la technique de maillages imbriqués présentée section 1.2.2, ce calcul est relativement rapide (environ une heure pour un maillage de base 128×64 sur un PC 350 MHz). La hiérarchie de maillages correspondant à ce calcul est illustrée figure 2.4. Sept maillages sont initialement nécessaires, huit puis neuf maillages lorsque la bulle atteint les valeurs minimales de son rayon. La figure 2.5 présente l'effet du confinement sur la convergence de la solution. On constate que le taux d'amortissement est relativement peu modifié. Par contre, la fréquence d'oscillation augmente avec le confinement. Le taux d'amortissement visqueux ne dépend en effet que des conditions aux limites sur la surface libre qui sont peu influencées par la présence des bords du domaine. La fréquence d'oscillation est quant à elle contrôlée par l'inertie du domaine

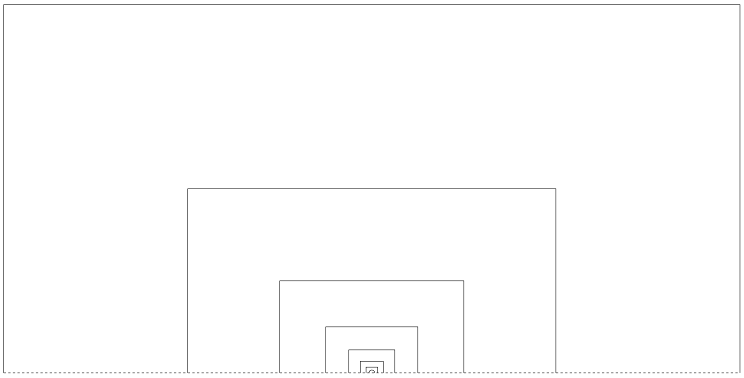


FIG. 2.4.: Hiérarchie de maillages utilisée pour la simulation figure 2.3.

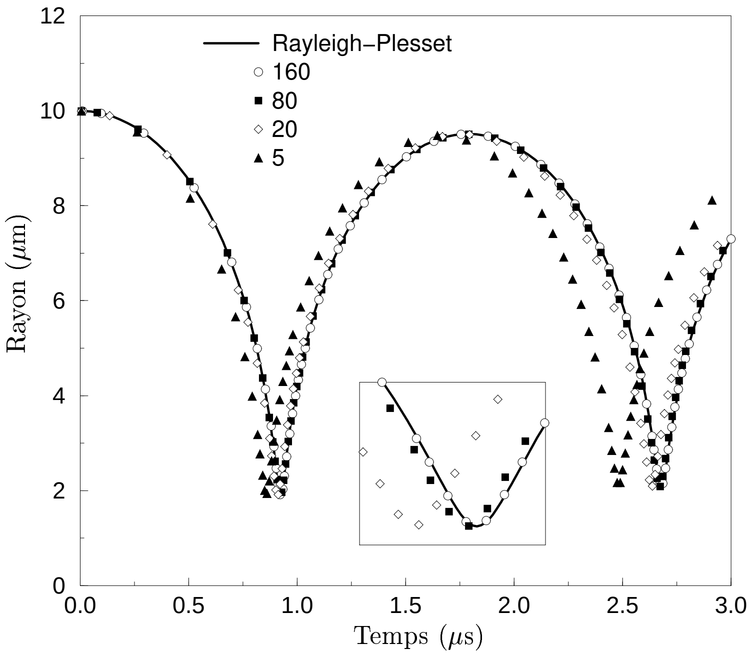


FIG. 2.5.: Effet du confinement sur la convergence vers la solution de Rayleigh–Plesset. La légende donne le rapport de confinement pour chaque simulation.

fluide entourant la bulle ; toute réduction de celui-ci entraîne ainsi une augmentation de la fréquence d'oscillation.

La table 2.1 résume l'évolution de l'erreur quadratique moyenne relative entre les solutions de Navier–Stokes et de Rayleigh–Plesset. Ces grandeurs sont obtenues en prenant la racine carrée de la moyenne des carrés des différences entre les solutions pour t variant entre 0 et 10 μs et en les divisant par le rayon à l'équilibre $R_0 = 5$ μm.

Rapport de confinement	Erreur relative
160	0.0097
80	0.037
20	0.192
5	0.564

TAB. 2.1.: Évolution de l'erreur quadratique moyenne relative.

Nous avons également testé une autre solution qui évite d'avoir recours à de très grands domaines. La pression sur les bords est imposée en utilisant une équation pour la pression dérivée de (2.6) avec des valeurs de R et de $\dot{R}$ obtenues à partir de la simulation. Cette méthode donne des résultats satisfaisants avec des domaines plus petits mais elle est quelque peu artificielle dans la mesure où une partie de la solution recherchée est injectée dans la simulation. De plus il est difficile de généraliser cette approche lorsque la bulle n'est plus sphérique. Nous ne l'utilisons donc pas dans la suite de cet exposé.

Cette simulation constitue une bonne validation de la méthode d'extrapolation présentée section 1.2.1. En effet le saut de pression sur l'interface $4\mu\dot{R}/R$ a une influence importante sur la solution de l'équation de Rayleigh–Plesset. Une variation de 2 % de la viscosité donne deux solutions de l'équation de Rayleigh–Plesset qui diffèrent de 1.3 % (erreur quadratique relative). On peut en conclure, étant donnée l'erreur de 1 % que nous obtenons, que les dérivées du champ de vitesse (correspondant à $\dot{R}$) obtenues avec notre méthode d'extrapolation sont entachées d'une erreur inférieure à 2 %.

Un second test est illustré figure 2.6. Il s'agit des oscillations radiales d'une bulle, forcées par une pression à l'infini de la forme

$$p_\infty(t) = p_{\mathrm{ext}} - p_a \sin \omega t. \tag{2.18}$$

Les paramètres sont identiques au cas précédent. La fréquence f est de 26.4 kHz, l'amplitude p_a et la pression ambiante p_{ext} de 100 000 Pa. Le

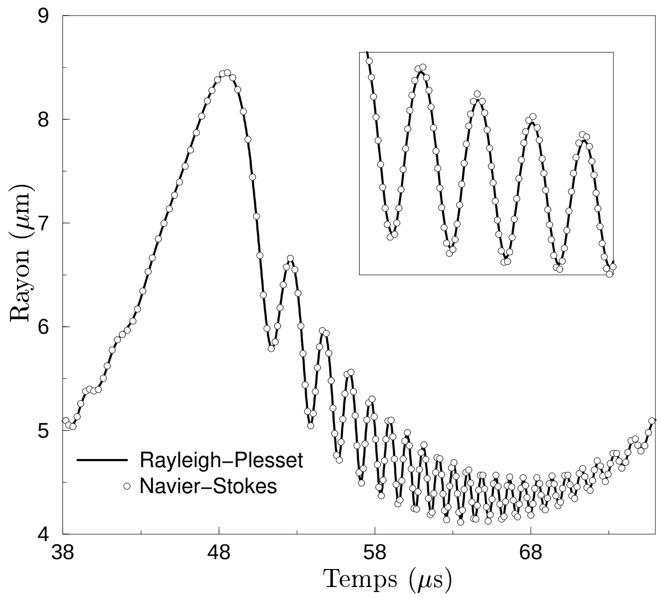


FIG. 2.6.: Oscillations forcées d'une bulle initialement en équilibre.

rapport de confinement est de 160. Nous avons utilisé ici un maillage hiérarchique de taille de base 128×64 contenant jusqu'à huit niveaux de raffinement. Seule une période du cycle est illustrée par souci de clarté. L'erreur quadratique relative est de 0.0034 sur trois périodes.

2.2.1. Stabilité des modes de déformation

Dans le cadre de cette thèse, nous sommes particulièrement intéressés par les modes de déformation des bulles excitées acoustiquement. Un des principaux points soulevés par Prosperetti est la naïve simplicité des modèles initialement utilisés pour tenter de comprendre le phénomène de sonoluminescence. En effet, un grand nombre des études initiales supposaient que la symétrie sphérique étaient préservée pendant tout le cycle. Notre méthode peut donc se révéler utile seulement dans la mesure où elle sera capable de prédire précisément quelles sont les limites du domaine de stabilité.

En particulier, il est primordial de s'assurer que les instabilités d'origine numérique sont négligeables devant les instabilités d'origine physique. Un exemple de ce qui peut se produire lorsque des schémas peu précis sont utilisés est illustré figure 2.7. Une bulle initialement hors équi-

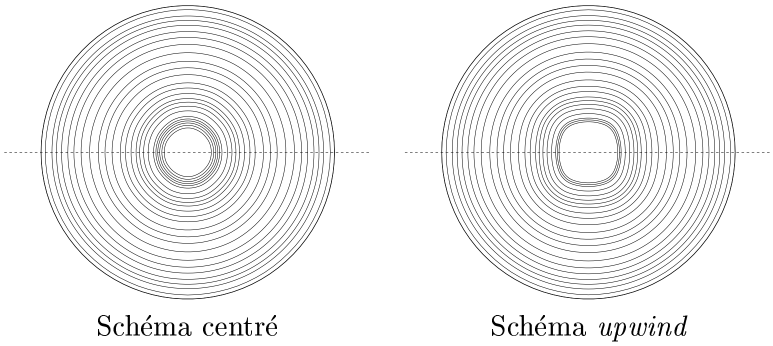


FIG. 2.7.: Exemple d'instabilité d'origine numérique causée par l'utilisation d'un schéma d'advection peu précis.

libre se contracte. La seule différence entre les deux calculs est l'utilisation de deux schémas différents pour la discrétisation des termes d'advection dans l'équation de Navier–Stokes : un schéma *upwind* du premier ordre pour la figure de droite et un schéma centré du second ordre pour la figure de gauche. L'effet est ici accentué par l'utilisation d'un maillage très grossier.

Il est à noter que la source de l'instabilité n'est pas uniquement dynamique mais également cinématique. Il est donc important de s'assurer également de la précision de l'advection des marqueurs de surface, elle-même liée à la précision de la procédure d'extrapolation.

Dans le cas des oscillations forcées, lorsque l'amplitude du forçage croît la bulle devient instable. Cet effet est représenté figure 2.8.(a) pour des paramètres identiques à ceux de la figure 2.6 mais avec une amplitude de forçage de 110 000 Pa. L'effondrement est beaucoup plus violent et la bulle n'effectue que quelques oscillations secondaires avant de perdre complètement sa forme sphérique (figure 2.9). Le mode de déformation le plus instable est le mode deux. L'évolution temporelle du carré de son amplitude est représentée figure 2.8.(b).

On peut ainsi définir un seuil pour l'amplitude de forçage au-delà duquel l'hypothèse de sphéricité n'est plus vérifiée. Ce seuil dépend de l'ensemble des paramètres physiques et délimite un sous–espace de ces paramètres pour lequel les oscillations sont essentiellement à symétrie sphérique. Dans le cas de la sonoluminescence, on peut restreindre cet espace en fixant les propriétés physiques du liquide ainsi que la fréquence de forçage. On peut alors étudier la forme de la limite de stabilité dans l'espace de paramètres (p_a, R_0).

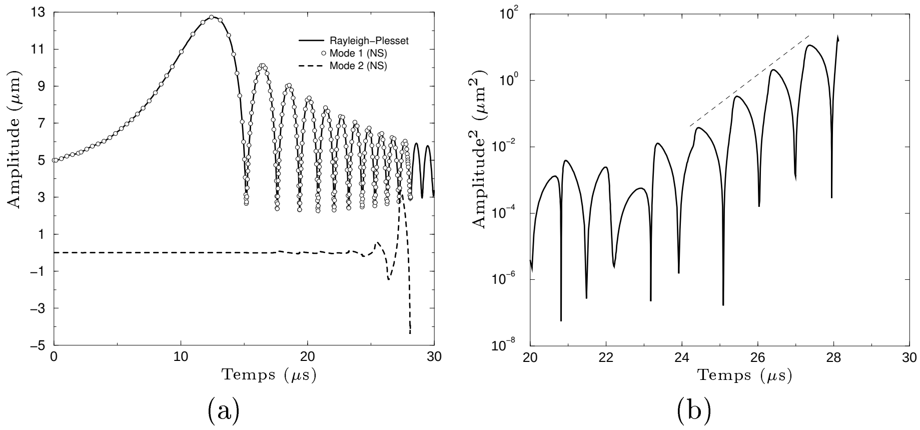


FIG. 2.8.: (a) Évolution temporelle du rayon (mode 1) et du mode 2 de déformation d'une bulle forcée acoustiquement. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 2.6 mais avec une amplitude de forçage de 110 000 Pa. (b) Évolution temporelle du carré de l'amplitude du mode 2 de déformation.

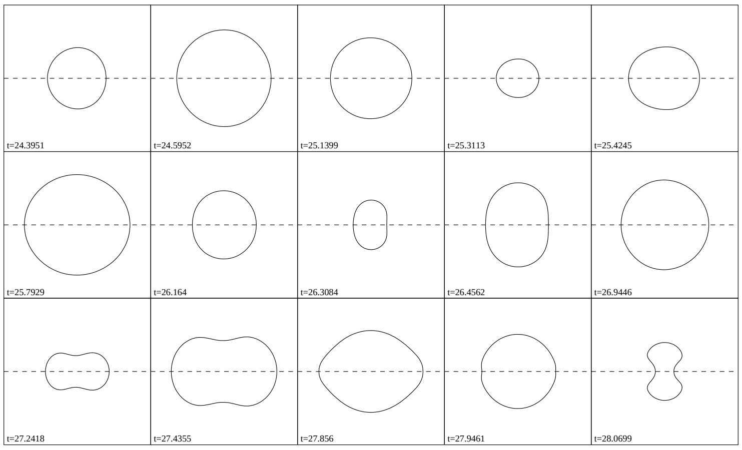


FIG. 2.9.: Évolution temporelle de la forme de la bulle aux derniers instants de la simulation illustrée figure 2.8.

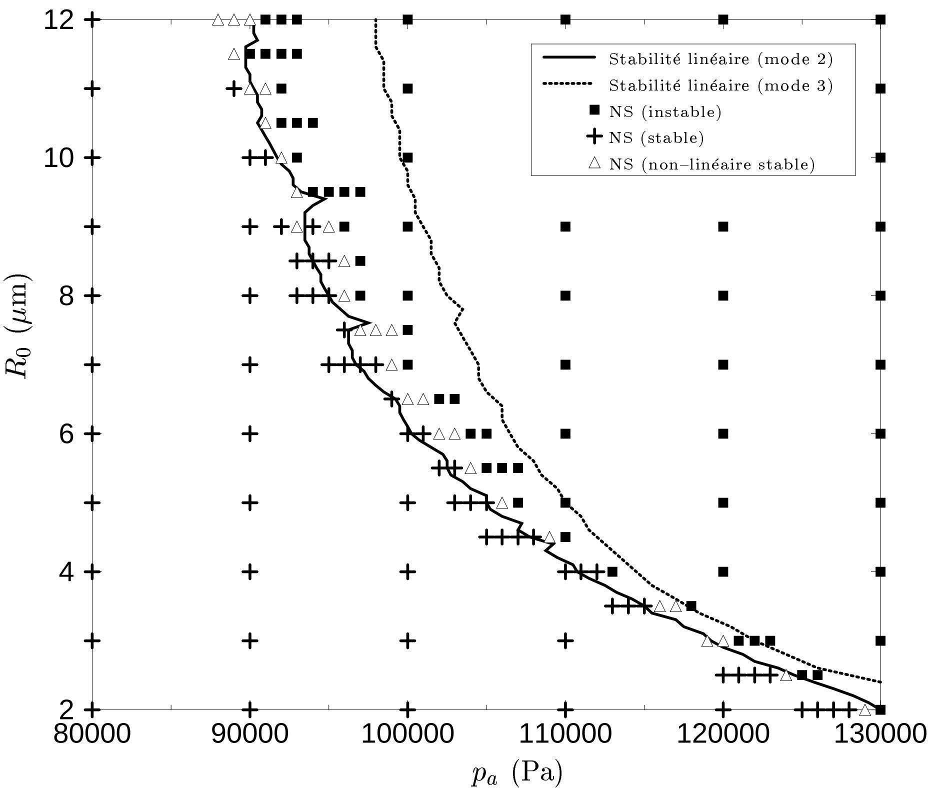


FIG. 2.10.: Diagramme de stabilité pour des paramètres typiques de la sonoluminescence.

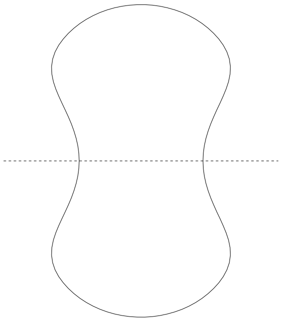


FIG. 2.11.: Exemple de bulle d'indice de sphéricité 1.1 obtenue pour les paramètres instables : $R_0 = 6$ μm, $p_a = 104\ 000$ Pa.

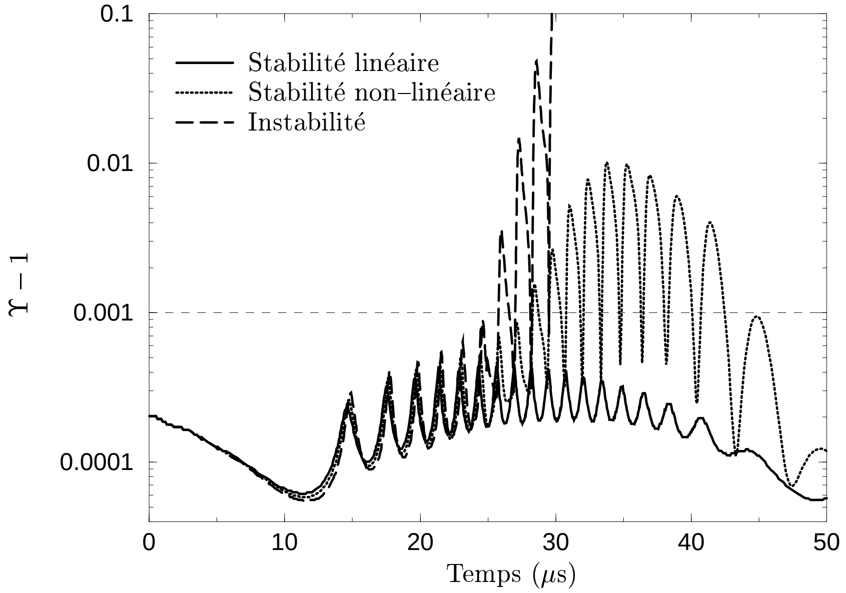


FIG. 2.12.: Évolution de l'indice de sphéricité illustrant les différents régimes pour une bulle de rayon $R_0 = 7$ μm. Stabilité linéaire pour $p_a = 98\ 000$ Pa, stabilité non–linéaire pour $p_a = 99\ 000$ Pa, instabilité pour $p_a = 100\ 000$ Pa.

Nous avons effectué un grand nombre de simulations pour différentes valeurs de ces paramètres. Les résultats sont illustrés figure 2.10. Les paramètres constants sont identiques à ceux des calculs présentés précédemment. Les courbes définissant les limites de stabilité pour les modes 2 et 3 ont été obtenues en résolvant numériquement l'équation de Rayleigh–Plesset couplée avec l'équation de modes sphériques de perturbation associée (2.12). La bulle est considérée stable pour un mode donné lorsque l'amplitude de ce mode est toujours inférieure au rayon.

Le diagramme 2.10 n'est valable que pour la première période de forçage. En effet, la forme du domaine de stabilité est essentiellement gouvernée par l'instabilité paramétrique. L'accumulation progressive de faibles perturbations est responsable de l'instabilité finale (contrairement à une instabilité de type Rayleigh–Taylor). Dans le cas général, l'instabilité paramétrique peut donc nécessiter plusieurs centaines de cycles avant d'être détectable. Pour des raisons pratiques de temps de calcul, nous avons ainsi choisi de restreindre notre étude de stabilité au premier cycle d'oscillation.

La bulle est considérée *instable* lorsque son indice de sphéricité Υ devient supérieur à 1.1. L'indice de sphéricité est défini comme le rapport entre la surface et le volume de la bulle rapporté à ce même rapport pour une sphère de volume équivalent. Une forme caractéristique d'une bulle d'indice de sphéricité $\Upsilon = 1.1$ est illustrée figure 2.11. La bulle est considérée *non–linéairement stable* lorsque $\Upsilon(t) \in [1.001; 1.1[$, et *stable* lorsque $\Upsilon(t) < 1.001$. Ces différents régimes sont illustrés figure 2.12 pour le cas d'une bulle de rayon $R_0 = 7\ \mu$m. Le régime de stabilité linéaire se caractérise par de faibles fluctuations de Υ autour de sa valeur initiale correspondant à l'erreur de résolution numérique (soit Υ de l'ordre de 1.0002). Le régime de stabilité non–linéaire voit Υ croître de manière essentiellement exponentielle puis atteindre une valeur de saturation avant de décroître rapidement.

Le domaine de stabilité obtenu par résolution numérique des équations de Navier–Stokes est légèrement plus étendu que celui obtenu avec les équations de perturbation de l'équation de Rayleigh–Plesset. L'accord entre ces deux approches est toutefois très correct et les différences peuvent être attribuées aux effets de saturation non–linéaires. Les instabilités sont visiblement correctement capturées et surtout les erreurs numériques n'induisent pas une déstabilisation non–physique de l'interface. L'initiation des instabilités sera discutée plus en détail dans la section 2.4.

La zone de stabilité non–linéaire est intéressante dans le cadre de la sonoluminescence. En effet, la plupart des déterminations expérimentales [Holt et al., 1996] de l'espace de paramètres pour lesquels des bulles sonoluminescentes stables peuvent être obtenues montre que la sonoluminescence se produit toujours à proximité ou au-delà de la limite de stabilité linéaire théorique. Nos calculs montrent que le domaine de stabilité non–linéaire est plus étendu, ce qui peut expliquer ces écarts. Plus fondamentalement, on peut se demander si les déformations modérées de la bulle dans le domaine de stabilité non–linéaire diminuent l'efficacité du processus ou au contraire si elles sont nécessaires pour obtenir une émission lumineuse.

2.3. Gradient acoustique et force de Bjerknes

Comme mentionné dans l'introduction, le couplage entre un déplacement du centre de gravité de la bulle et son effondrement peut jouer un rôle important sur le comportement des modes de déformation. Ce couplage — conduisant à une rupture de la symétrie sphérique et à la formation de jets — est l'argument central invoqué par Prosperetti dans sa théorie pour la sonoluminescence. L'étude précédente a montré que la méthode de résolution numérique capturait correctement les modes de déformation et n'induisait pas d'instabilités artificielles de l'interface. Il est donc intéressant d'utiliser cette méthode pour tenter de valider l'hypothèse de formation de jets, avec éventuellement une description du domaine de paramètres correspondant.

L'oscillation verticale de la position de la bulle est causée par les variations du gradient de pression acoustique lors d'un cycle de forçage. Ce gradient doit donc être modélisé dans les simulations. Le premier mode radial du champ de pression acoustique peut s'écrire sous la forme

$$p(r,t) = p_{\text{ext}} - \frac{\sin kr}{kr} p_a \sin \omega t, \tag{2.19}$$

où r est la coordonnée radiale et $k = \omega/c$ est le nombre de d'onde du champ acoustique.

Notre méthode numérique ne permet pas de prendre en compte directement le champ de pression acoustique dans la mesure où seules les équations de Navier–Stokes incompressibles sont résolues. Il est toutefois possible de simuler l'effet d'un gradient de pression local par le biais des conditions aux limites. Les bulles sonoluminescentes se situent très prés d'un ventre du champ acoustique ($kr \ll 1$). En utilisant un développement de sinus au voisinage de zéro, on obtient une approximation du champ de pression acoustique de la forme

$$p(r,t) = p_{\text{ext}} - \left[1 - \frac{(kr)^2}{6}\right] p_a \sin \omega t. \tag{2.20}$$

Le gradient de pression s'exprime alors comme

$$\nabla p = \frac{1}{3} k^2 r p_a \sin \omega t. \tag{2.21}$$

On considère un domaine de calcul centré en r_0 et de hauteur H telle que $H \ll r_0$. Au premier ordre en espace, le gradient de pression peut être considéré comme constant sur l'ensemble du domaine de calcul. Les pressions sur les bords supérieur et inférieur sont alors obtenues comme

$$p(r_0 \pm H/2, t) \simeq p_{\text{ext}} - \left[1 - k r_0 \frac{r_0 \pm H}{6}\right] p_a \sin \omega t. \tag{2.22}$$

Ces conditions aux limites sont utilisées dans la simulation. Une paroi solide avec condition de glissement libre est imposée sur le bord libre du domaine. Les gradients de vitesse à l'entrée et à la sortie du tube ainsi formé sont maintenus à une valeur nulle.

Il est également nécessaire de choisir une valeur pour r_0. Le but étant de simuler un régime établi, r_0 doit correspondre à la position d'équilibre de la bulle. Si l'on suppose que les seules forces agissant sur la bulle sont la poussée d'Archimède et le gradient de pression, la position d'équilibre peut être obtenue en égalant ces deux forces lors d'un cycle d'oscillation. On peut ainsi écrire au voisinage d'un ventre du champ de pression acoustique

$$\rho g \langle V(t) \rangle = \langle -V(t) \nabla p \rangle = -\frac{1}{3} k^2 r p_a \langle V(t) \sin \omega t \rangle, \tag{2.23}$$

où $V(t)$ est le volume de la bulle et l'opérateur $\langle \cdots \rangle$ de moyenne temporelle est défini comme

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \tag{2.24}$$

avec T la période du forçage acoustique. La position d'équilibre s'exprime alors comme

$$r_0 = -\frac{3\rho g}{k^2 p_a} \frac{\langle R^3(t) \rangle}{\langle R^3(t) \sin \omega t \rangle}. \tag{2.25}$$

Les grandeurs moyennes $\langle R^3(t) \rangle$ et $\langle R^3(t) \sin \omega t \rangle$ peuvent être obtenues pour un ensemble de paramètres donnés par résolution numérique de l'équation de Rayleigh–Plesset.

En utilisant ces conditions aux limites, nous avons effectué plusieurs simulations pour des paramètres typiques de la sonoluminescence. Nous nous attendions à observer les formations de jets prédites par Prosperetti (et décrites dans ses calculs par intégrale de frontière). À notre surprise, les résultats obtenus différaient extrêmement peu des solutions présentées dans la section précédente. Les seules variations observables de la position du centre de gravité étant de l'ordre de la précision machine. Après avoir vérifié que le code de calcul était correct nous avons décidé de modéliser analytiquement les déplacements du centre de gravité afin de tenter d'éclaircir cette question.

2.3.1. Modèle pour la quantité de mouvement verticale

Nous désirons dériver un modèle simple décrivant le déplacement vertical du centre de gravité de la bulle. Les forces agissant sur la bulle sont essentiellement la poussée d'Archimède, la traînée induite par le déplacement relatif par rapport au liquide environnant ainsi que les termes inertiels dus à l'entraînement d'une partie du liquide lors du déplacement. Il existe un grand nombre de résultats classiques concernant ce type de problèmes, à la fois théoriques et expérimentaux. Toutefois il est important de tenir compte dans notre cas du fait que le rayon de la bulle varie dans le temps. Ce n'est que récemment que des résultats théoriques ont été obtenus pour ce type de déplacements couplés (radial et translationnel).

Nous basons notre étude sur les résultats de Magnaudet et Legendre (1998). Deux cas limites permettent d'obtenir des expressions relativement simples pour la force exercée sur la bulle. On définit deux nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_U = RU/\nu$ et $\mathrm{Re}_{\dot{R}} = R\dot{R}/\nu$, où U est la vitesse relative du centre de gravité de la bulle. Lorsque Re_U ou $\mathrm{Re}_{\dot{R}}$ sont grands devant un, la force sur la bulle s'exprime comme

$$F = 12\pi\rho\nu RU + \frac{2}{3}\pi\rho(3R^3\dot{U} + 3R^2U\dot{R}) + \frac{4}{3}\pi\rho R^3\dot{V}_0, \tag{2.26}$$

où $U = U_\infty - V_0$ avec V_0 la vitesse du centre de gravité de la bulle et U_∞ la vitesse du liquide loin de la bulle. Lorsque Re_U et $\mathrm{Re}_{\dot{R}}$ sont tous les deux petits devant un, l'expression devient

$$\begin{aligned} F = 4\pi\rho\nu RU + \frac{2}{3}\pi\rho(3R^3\dot{U} + 3R^2U\dot{R}) + \frac{4}{3}\pi\rho R^3\dot{V}_0 + \\ 8\pi\rho\nu\int_0^t \exp\left[9\nu\int_\tau^t R(t')^{-2}dt'\right] \times \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\mathrm{erfc}\left[\sqrt{9\nu\int_{\tau}^{t}R(t')^{-2}dt'}\right]d[R(\tau)U(\tau)].$$

Le terme intégral est souvent appelé *force d'histoire* et rend compte de l'influence de la diffusion de vorticité dans le liquide.

Si nous considérons maintenant une échelle spatiale très petite devant la longueur d'onde de l'excitation acoustique mais très grande devant le rayon de la bulle, le gradient de pression acoustique peut être considéré comme spatialement et localement constant. La vitesse loin de la bulle U_∞ est alors obtenue comme

$$\dot{U}_\infty = \frac{-\nabla p}{\rho} = -\nabla\phi. \tag{2.28}$$

La poussée d'Archimède est simplement $-4/3\pi R^3(\rho - \rho_{\mathrm{gaz}})g$ où g est l'accélération de la pesanteur. Si l'on néglige la masse du gaz contenue dans la bulle, les équations (2.26) et (2.28) donnent une équation de déplacement de la forme

$$\dot{U} + \left(\frac{18\nu}{R^2} + 3\frac{\dot{R}}{R}\right)U - 2\nabla\phi - 2g = 0. \tag{2.29}$$

Cette équation n'est valable que dans le cas de Reynolds grands. Il est possible d'obtenir une équation similaire pour le cas des Reynolds petits en utilisant l'équation (2.27)

$$\begin{aligned}&\dot{U} + \left(\frac{6\nu}{R^2} + 3\frac{\dot{R}}{R}\right)U - 2\nabla\phi - 2g + \qquad (2.30)\\ &\frac{36\nu}{R^3}\int_0^t \exp\left[9\nu\int_\tau^t R(t')^{-2}dt'\right]\\ &\times\mathrm{erfc}\left[\sqrt{9\nu\int_\tau^t R(t')^{-2}dt'}\right]d[R(\tau)U(\tau)] = 0.\end{aligned}$$

Nous présenterons quelques résultats numériques utilisant cette solution. Toutefois les termes d'histoire rendent difficile l'étude analytique de cette solution et nous restreindrons cette étude à l'équation (2.29).

Analyse linéaire

Nous nous intéressons maintenant au cas des oscillations radiales de faible amplitude. Dans ce cas on peut montrer [Plesset et al., 1977] que les solutions de l'équation de Rayleigh–Plesset s'expriment au premier ordre comme

$$R = R_0[1 + \epsilon \cos(\omega t + \theta)], \tag{2.31}$$

où R_0 est le rayon à l'équilibre, ϵ l'amplitude relative des oscillations, ω la pulsation de forçage et θ le déphasage entre le forçage et l'oscillation radiale. Si l'on combine les équations (2.31) et (2.29) on obtient au premier ordre en ϵ

$$\dot{U} + \left[18\frac{\nu}{R_0^2} - 36\frac{\nu}{R_0^2}\epsilon\cos(\omega t + \theta) - 3\epsilon\omega\sin(\omega t + \theta)\right]U - 2|\nabla\phi|\cos\omega t - 2g = 0. \tag{2.32}$$

On cherche une solution de la forme $U = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, ce qui nous donne le système d'équations

$$\omega a + 18\omega\nu^\star b - 2|\nabla\phi| = 0, \tag{2.33}$$

$$18\nu^\star a - b = 0, \tag{2.34}$$

$$18\nu^\star\sin\theta a - \tfrac{3}{2}\cos\theta a - 18\nu^\star\cos\theta b - \tfrac{3}{2}\sin\theta b - \tfrac{2g}{\omega\epsilon} = 0, \tag{2.35}$$

$$\epsilon(12\nu^\star a + b) = 0, \tag{2.36}$$

$$\epsilon(a - 12\nu^\star b) = 0, \tag{2.37}$$

où nous avons introduit la viscosité non–dimensionnelle $\nu^\star = \nu/\omega R_0^2$. Les équations (2.33) et (2.34) correspondent aux termes de pulsation ω et donnent la solution à l'ordre un pour le déplacement de la bulle comme

$$U = 2\frac{|\nabla\phi|}{\omega}\cos(\psi)\sin(\omega t + \psi) \quad \text{avec} \quad \tan\psi = 18\nu^\star. \tag{2.38}$$

Cette expression est simplement la solution de l'équation (2.29) dans le cas où le rayon est constant $R = R_0$ et l'accélération de la gravité est nulle. Dans ce cas l'équation (2.29) est celle d'un oscillateur amorti forcé

$$\dot{U} + \frac{18\nu}{R_0^2}U - 2\nabla\phi = 0. \tag{2.39}$$

L'équation (2.35) exprime la condition pour laquelle les termes séculaires dans (2.32) s'annulent, ce qui définit la position d'équilibre comme

$$\frac{g}{|\nabla\phi|} = -\frac{\epsilon}{1 + (18\nu^\star)^2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta + 9\nu^\star\sin\theta + (18\nu^\star)^2\cos\theta\right). \tag{2.40}$$

Dans le cas d'une viscosité négligeable, l'équation (2.40) se réduit au résultat obtenu par Crum et Prosperetti (1983) : $g/|\nabla\phi| = -3/2\epsilon\cos\theta$.

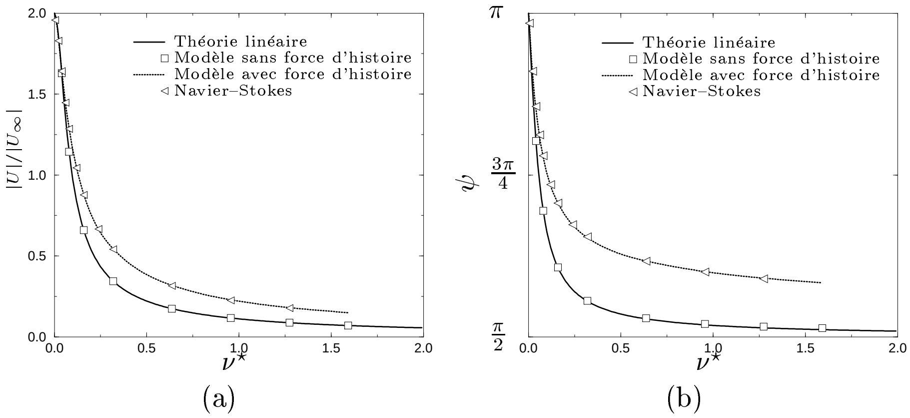


FIG. 2.13.: Résolution numérique des équations de déplacement vertical avec et sans force d'histoire. Comparaison avec la théorie linéaire. (a) Amplitude relative du déplacement. (b) Déphasage entre la vitesse de déplacement du liquide et la vitesse de déplacement relative du centre de gravité de la bulle.

Résolution numérique

Les expressions (2.38) et (2.40) ne sont valables que pour des amplitudes d'oscillations radiales petites mais également dans la limite où le nombre de Reynolds est grand. Lors d'un cycle d'oscillation la vitesse de translation s'annule nécessairement et le nombre de Reynolds Re_U peut donc être arbitrairement petit. Aucune des expressions (2.26) et (2.27) n'est donc valable sur l'ensemble du cycle d'oscillation. Afin de quantifier l'importance des termes d'histoire sur la solution, nous avons résolu numériquement l'équation de Rayleigh–Plesset couplée avec l'équation (2.29) ou avec la forme équivalente incluant les termes d'histoire (2.30). Les figures 2.13.(a) et 2.13.(b) résument les résultats obtenus pour l'amplitude relative $|U|/|U_\infty|$ et pour la phase ψ. L'accord entre la théorie linéaire et la solution numérique sans force d'histoire est très satisfaisant. L'amplitude relative de l'oscillation radiale est $\epsilon = 0.01$. L'accord reste très bon pour les valeurs de ϵ inférieures à 0.1.

Avec quelle précision ces équations modèles (avec ou sans force d'histoire) approchent-elles la solution complète des équations de Navier–Stokes ? Afin de répondre à cette question, nous avons effectué plusieurs simulations numérique directes de bulles de rayon constant placées dans un fluide animé d'un mouvement oscillant. Pour ce faire, les bulles sont placées au centre d'un tube de rayon $20\,R_0$ et de longueur $40\,R_0$. Une

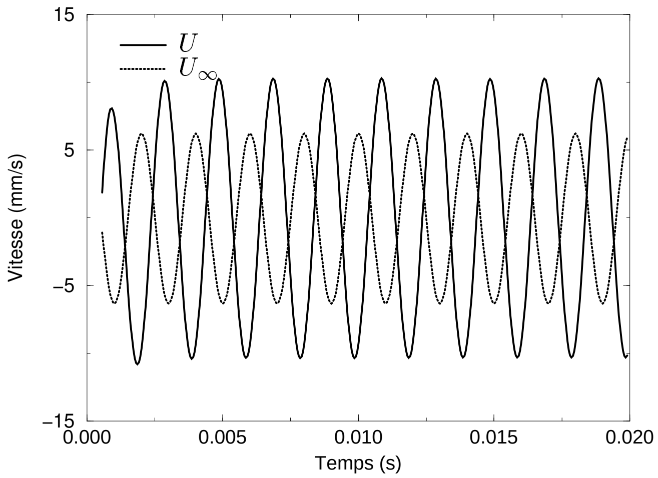


FIG. 2.14.: Évolution temporelle de la vitesse relative U d'une bulle placée dans un écoulement oscillant U_∞.

condition de glissement pur est imposée sur les parois du tube. Le gradient de vitesse à l'entrée et à la sortie du tube est maintenu à une valeur nulle. Les pressions aux deux extrémités varient en opposition de phase avec une pulsation propre ω. En l'absence de bulle, l'ensemble du liquide oscille ainsi avec une amplitude $|U_\infty| = |\nabla\phi|/\omega$.

Les vitesses de déplacement du liquide U_∞ et la vitesse relative du centre de gravité de la bulle $U = U_\infty - V_0$, mesurées lors d'une simulation sont représentées figure 2.14. Les paramètres sont les suivants : $R_0 = 1$ mm, $\rho = 1000$ kg/m^3, $f = 500$ Hz, $|\nabla\phi| = 20$ m/s^2, $\mu = 0.125$ kg/m.s soit $\nu^\star = 4 \times 10^{-2}$. L'amplitude du déplacement du centre de gravité de la bulle est d'environ 5×10^{-3} mm, la bulle reste donc essentiellement sphérique.

Le rapport des amplitudes des vitesses $|U|/|U_\infty|$ peut être simplement obtenu comme le rapport des valeurs quadratiques moyenne des signaux illustrés figure 2.14. De même, le déphasage Ψ peut être obtenu par convolution de ces deux signaux normalisés. En effectuant ces mêmes mesures en faisant varier μ (et donc $\nu^\star$) on obtient les points de la figure 2.13 (labelés "Navier–Stokes"). L'accord entre ces simulations et la résolution numérique de l'équation modèle avec force d'histoire est très bon. En effet, pour ces simulations, les déplacements axiaux du centre de gravité de la bulle sont faibles et le rayon est constant, les hypothèses nécessaires pour la validité de l'équation (2.27) sont donc vérifiées ($\mathrm{Re}_U \ll 1$ et $\mathrm{Re}_{\dot R} \ll 1$).

Si nous voulons étudier l'influence de valeurs finies de Re_U, avec éventuellement la convergence de la solution vers les valeurs données par la théorie linéaire lorsque $\mathrm{Re}_U \gg 1$, nous devons exprimer Re_U en fonction de $\nu^\star$ et $|\nabla\phi|$. Si l'on suppose que $|U| \propto |\nabla\phi|/\omega$, en utilisant la définition de $\nu^\star$ on obtient

$$\mathrm{Re}_U = \frac{|\nabla\phi|}{\omega^2 R_0 \nu^\star}. \tag{2.41}$$

Le nombre de Reynolds lié au mouvement de translation Re_U est donc le rapport entre l'amplitude relative du déplacement du centre de gravité de la bulle $|\nabla\phi|/\omega^2 R_0$ et la viscosité non–dimensionnelle $\nu_\star$. Les solutions illustrées figure 2.13 sont proches les une des autres lorsque $\nu_\star$ est proche de zéro. On considère une valeur de $\nu^\star$ de 0.25 permettant de tester la convergence de la solution avec force d'histoire ($\mathrm{Re}_U \ll 1$) vers la solution linéaire (sans force d'histoire $\mathrm{Re}_U \gg 1$). Selon (2.41), un nombre de Reynolds Re_U de 100 correspond à un déplacement du centre de gravité de 25 fois le rayon R_0. Les équations modèles n'étant valables que pour des bulles sphériques, une tension de surface très importante est nécessaire pour s'opposer aux déformations causées par une telle amplitude de déplacement. Les simulations numériques directes pour ces grands déplacements sont donc délicates et n'ont qu'un intérêt limité dans la mesure où des paramètres physiques courants (bulles d'air dans l'eau par exemple) sont loin de permettre d'assurer la sphéricité de la bulle pour ces régimes.

Dans la majorité des cas, la solution numérique de l'équation modèle avec force d'histoire donne ainsi des valeurs très proches de celles obtenues par simulation numérique directe des équations de Navier–Stokes. Lorsque la valeur de la viscosité adimensionnée est suffisamment petite la théorie linéaire donne une bonne approximation du résultat.

Application au cas de la sonoluminescence

Un résultat simple qui découle de cette étude est le suivant : dans la cas d'oscillations radiales de faible amplitude, l'amplitude de la variation de vitesse relative du centre de gravité de la bulle est au maximum égale à deux fois celle du liquide environnant. Ce résultat est classique et constitue un des exercices sur les fluides parfaits de Landau et Lifschitz [Landau et al., 1959].

Dans le cas de la sonoluminescence, pour des paramètres typiques : $R_0 = 10$ μm, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, $f = 25$ kHz, on obtient $\nu^\star \approx 0.1$ soit une amplitude de la vitesse relative de déplacement égale à celle du fluide environnant (le rapport décroît avec $\nu^\star$ selon la théorie linéaire). L'amplitude de la vitesse de déplacement du fluide loin de la bulle est estimée comme $|\nabla\phi|/\omega$.

L'amplitude de variation du gradient de pression $|\nabla\phi|$ dépend de la position d'équilibre de la bulle par rapport à l'onde sonore stationnaire. Expérimentalement, par mesure directe au moyen d'un microscope, [Matula et al., 1997a] obtiennent des valeurs de l'ordre de 100 μm pour les paramètres utilisés dans leur expérience : $R_0 = 3$ μm, $f = 19.5$ kHz, $p_a = 1.4$ bar. La vitesse du son dans l'eau est d'environ 1490 m/s, ce qui donne un nombre d'onde $k = \omega/c \approx 83$ m^{-1}. L'amplitude du gradient de pression correspondant à une position $r = 0.1$ mm est donc $|\nabla\phi| = k^2 r p_a/3\rho \approx 32$ m/s^2. Cette valeur est — logiquement — du même ordre de grandeur que l'accélération de la gravité. La vitesse du fluide associée est $|\nabla\phi|/\omega = 0.26$ mm/s, soit un déplacement de l'ordre de $|\nabla\phi|/\omega^2 \approx 2.1$ nanomètres.

On peut toutefois contester ce résultat du fait de l'utilisation de la théorie linéaire bien au delà de son cadre de validité. Les oscillations radiales d'une bulle sonoluminescente sont en effet de grande amplitude et les termes de couplage radial/translationnel ne sont pas négligeables. Afin de clarifier ce point, nous avons effectué une résolution numérique directe des équations de quantité de mouvement (2.29) et (2.30) couplées avec l'équation (2.8) prenant en compte partiellement la compressibilité du liquide. Les paramètres sont ceux de Matula et al. soit : $R_0 = 3$ μm, $f = 19.5$ kHz, $\sigma = 0.072$ kg/s^2, $c = 1490$ m/s, $g = -9.81$ m/s^2, $\mu = 0.001$ kg/m.s^2, $\rho = 1000$ kg/m^3, $\gamma = 1.4$.

Le choix de la position d'équilibre pose un problème. En effet, comme souligné dans l'article de Matula et al., il existe un écart très important et difficilement explicable entre les positions d'équilibre théoriques obtenues en utilisant une évaluation numérique de (2.25), et les positions d'équilibre mesurées expérimentalement. Cet écart ne semble pas imputable aux erreurs expérimentales. Pour une amplitude de forçage de 1.4 bar la position d'équilibre théorique obtenue par Matula et al. est de 50 μm pour une position observée de 600 μm... L'explication avancée par ces auteurs est la déformation du champ de pression acoustique provoquée par la présence de la bulle. Des mesures tendent en effet à montrer que la bulle cause une diminution locale de l'amplitude du gradient de pression. Afin de se placer dans une zone où le gradient est suffisant pour compenser la poussée d'Archimède, la bulle doit donc s'éloigner du noeud de pression, ce qui expliquerait l'écart observé.

Dans notre cas, il est possible de déterminer numériquement la po-

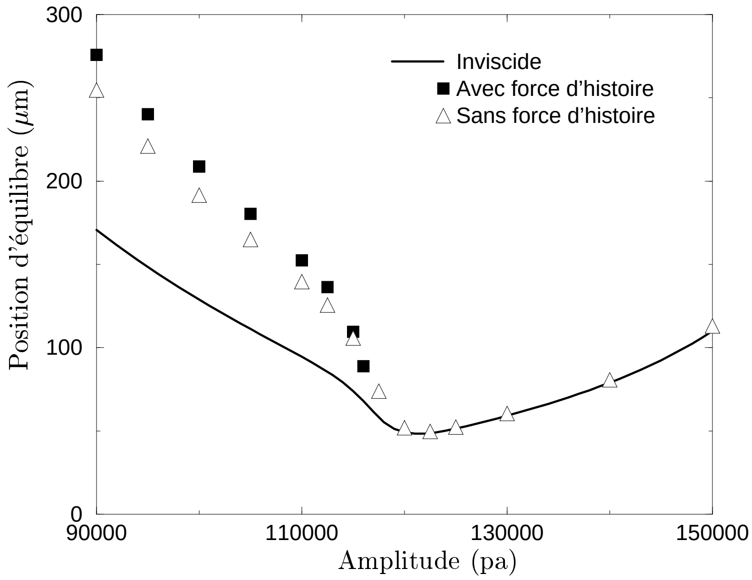


FIG. 2.15.: Positions d'équilibre obtenues avec différents modèles pour une bulle de 3 μm de rayon à l'équilibre.

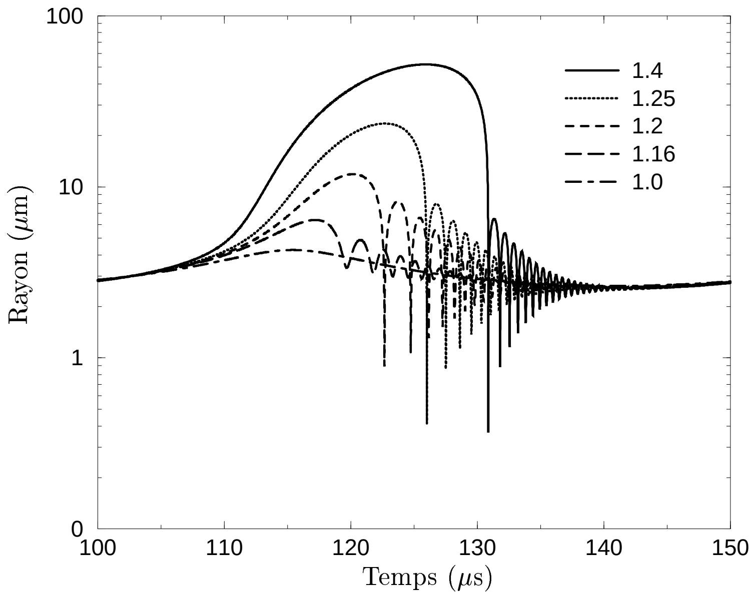


FIG. 2.16.: Évolution temporelle du rayon en fonction de l'amplitude de forçage.

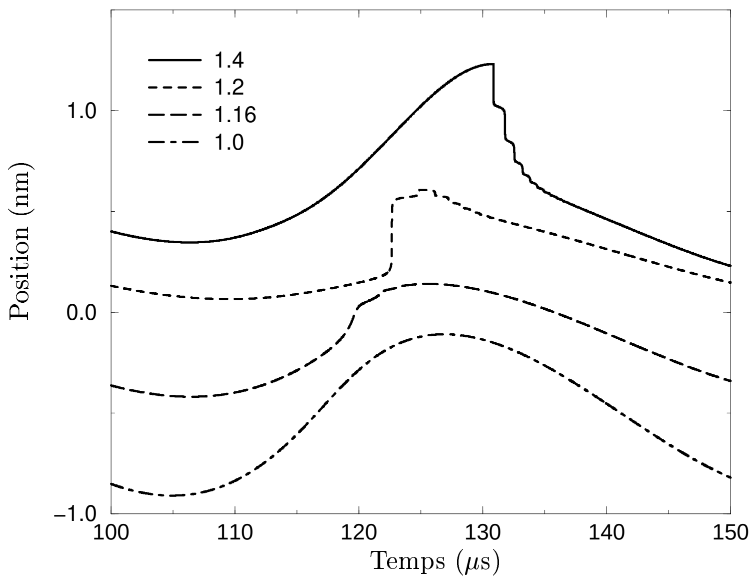


FIG. 2.17.: Évolution temporelle de la position relative du centre de gravité pour différentes amplitudes de forçage.

sition d'équilibre (cf. annexe A) ce qui permet de tenir compte de l'influence des forces visqueuses. Les résultats obtenus en utilisant les modèles sans force d'histoire (2.29) et avec force d'histoire (2.30) sont illustrés figure 2.15. La courbe noire a été obtenue par évaluation numérique de l'équation d'équilibre (2.25). Pour des amplitudes de forçage modérées les forces visqueuses ne sont pas négligeables et l'écart entre la théorie inviscide et nos deux modèles est important.

Lorsque l'amplitude acoustique atteint environ 1.2 bars un changement de régime se produit avec l'apparition des rebonds violents caractéristiques de la sonoluminescence. Cette transition apparaît clairement sur les courbes d'évolution du rayon représentées figure 2.16. Le nombre de Reynolds associé à la vitesse radiale est élevé lors de ces oscillations et les solutions pour la position d'équilibre convergent vers la solution inviscide. Pour des amplitudes de forçage supérieures à 1.16 bars les hypothèses nécessaires à la validité de (2.30) ne sont plus vérifiées lors des rebonds secondaires.

La résolution numérique des équations modèles donne également accès à l'évolution temporelle de la position du centre de gravité de la bulle. Les déplacements relatifs (par rapport à la position d'équilibre) sont illustrés

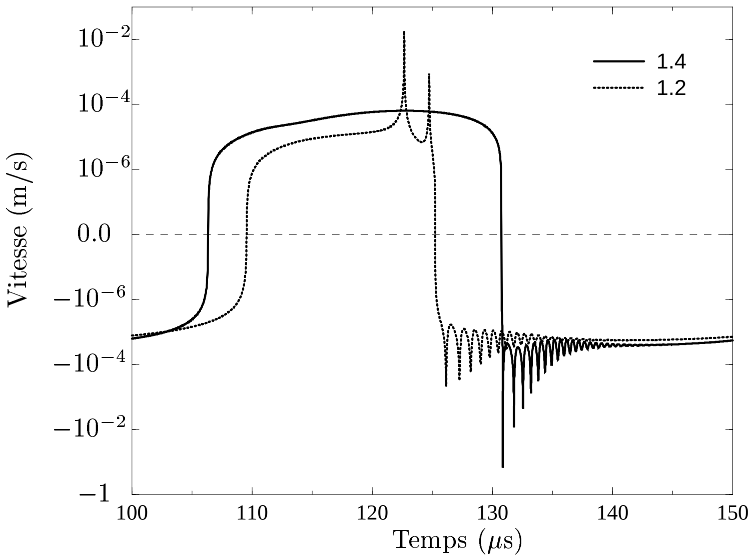


FIG. 2.18.: Vitesse relative du centre de gravité en fonction du temps.

figure 2.17 pour différentes valeurs du forçage.[1] L'amplitude des déplacements est extrêmement faible, dans tous les cas inférieure à un nanomètre. Lorsqu'il est applicable, le modèle incluant les termes d'histoire donne des déplacements légèrement supérieurs (de l'ordre de 1.5 nanomètre) mais qualitativement similaires.

On peut noter une différence qualitative significative entre les régimes "lisses" ($p_a = 1$ bar) et les régimes avec oscillations secondaires. Le terme non–linéaire en $U\dot{R}/R$ de l'équation (2.29) n'est plus négligeable lors des rebonds et induit des accélérations importantes qui se traduisent par les changements rapides de position ("marches d'escalier") visibles pour les forçages de 1.2 et 1.4 bars. Il est intéressant de remarquer que le sens de cette accélération dépend du signe de U. Ceci explique le sens opposé des variations de la première "marche" pour 1.2 et 1.4 bars. Du fait de la variation du déphasage entre le champ de pression acoustique et le rayon, dans un cas (1.2 bars) la bulle se déplace vers le haut lors du premier effondrement ce qui créé une accélération vers le haut ; dans l'autre cas (1.4 bars) elle se déplace vers le bas.

Le signe et l'amplitude des vitesses de déplacement causées par ce terme non–linéaire apparaissent clairement sur la figure 2.18. La largeur des pics de vitesse est de l'ordre de 10 nanosecondes. Dans un domaine de

[1] Les courbes ont été décalées arbitrairement pour faciliter la lecture.

paramètres différent[2] nous avons pu effectuer des simulations numériques directes de ce phénomène. Des pics de vitesse qualitativement similaires ont été obtenus.

Étant donné les déplacements extrêmement faibles obtenus (de l'ordre des échelles moléculaires), il semble très improbable que le gradient de pression acoustique joue un rôle significatif sur la stabilité de forme de la bulle dans le cas de la sonoluminescence. Une estimation dimensionnelle simple permet de s'en persuader. Le gradient de pression causé par un déplacement à une vitesse U du centre de gravité de la bulle est de l'ordre de $\rho U^2/R$. Si l'on considère l'amplitude a d'un mode de déformation, l'accélération $\ddot{a}$ est essentiellement proportionelle à $\nabla p/\rho$. L'amplitude maximum de déformation est alors obtenue comme $a \propto \nabla p \tau^2/\rho \propto U^2\tau^2/R$, où τ est une échelle de temps. La vitesse maximum U est de l'ordre de 1 m/s (figure 2.18) pour une largeur du pic τ de l'ordre de 10 ns, R est de l'ordre de 1 micron. On obtient ainsi $a = U^2\tau^2/R$ de l'ordre de 10^{-10} m.

L'hypothèse selon laquelle la combinaison entre ce déplacement et l'effondrement radial de la bulle pourrait causer la formation de jets paraît ainsi erronée. Cette conclusion basée sur le modèle pour la quantité de mouvement verticale est confirmée par les simulations numériques directes.

2.4. Couplages non–linéaires entre modes de déformation

Comme nous l'avons montré précédemment, dans le cas d'un champ de pression acoustique à symétrie sphérique, les variations du gradient de pression acoustique jouent un rôle négligeable sur les variations de position d'une bulle au voisinage de sa position d'équilibre. Ceci semble confirmer les affirmations initiales de certains expérimentateurs considérant la sonoluminescence à bulle unique comme un phénomène extrêmement stable et robuste [Cordry et al., 1993, Crum, 1994].

Toutefois, plus récemment, de nombreux auteurs reportent avoir fréquemment observé des mouvements désordonnés de bulles sonoluminescentes. Matula et al. (1997a) dans leur article consacré à la mesure de la position d'équilibre font état des problèmes rencontrés pour obtenir des bulles sonoluminescentes stables :

[2] Essentiellement un gradient de pression beaucoup plus fort et une amplitude de forçage beaucoup plus faible.

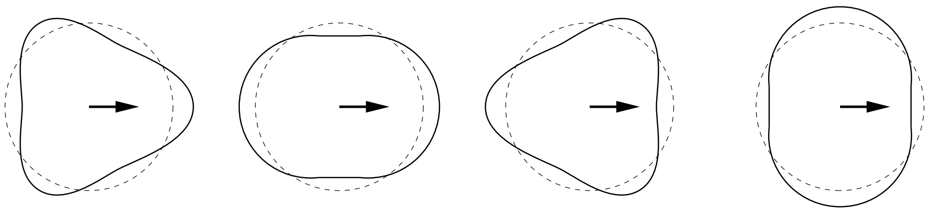


FIG. 2.19.: Bulle "nageant" dans un fluide parfait sous l'effet de l'interaction non–linéaire entre les modes de déformation 2 et 3. D'après Benjamin et Ellis (1990).

> *Parenthetically, we mention that in many experiments, one can generate sonoluminescing bubbles that move in almost any conceivable direction, and over relatively large distances, as the drive pressure is changed. Only after extreme care is taken to fine tune the driving frequency, does the bubble behave as shown here.*

Ces mouvements erratiques sont bien connus dans le cas de bulles de taille millimétrique excitées acoustiquement. Initialement observées par Gaines en 1932, ces "bulles dansantes" ont depuis été reportées par différents auteurs. Une explication a été proposée par Saffman (1967) et revisitée depuis en détail par Benjamin et Ellis (1990) . En considérant les couplages non–linéaires entre modes de déformation d'une bulle dans un fluide parfait, ces auteurs ont montré qu'une force propulsive (correspondant au mode 0) pouvait être générée par l'interaction entre les paires de mode n et $n+1$ (pair–impair). La figure 2.19 illustre cet effet pour une interaction entre les modes 2 et 3. L'orientation de la force propulsive est de plus contrôlée par le déphasage relatif entre paires de modes.

Cette théorie semble rendre compte de manière satisfaisante des observations expérimentales. Benjamin et Ellis illustrent leur article par des photographies de bulles de 0.1 mm de diamètre excitées acoustiquement avec une fréquence de 10 kHz. Une observation directe au microscope de la forme des bulles révèle que tous les modes $2 \leq n \leq 6$ sont excités. Ces déformations sont associées à des déplacements aléatoires de grande amplitude (jusqu'à 10 mm).

Il est tentant d'utiliser ce même mécanisme pour expliquer les déplacements observés pour les bulles sonoluminescentes. Nous avons vu précédemment que le domaine de stabilité de bulles excitées acoustiquement est déterminé par l'initiation des modes de déformation (cf. diagramme figure 2.10). Or, c'est précisément à proximité de cette limite que la sonoluminescence se produit [Holt et al., 1996]. En particulier, les sites indiqués par les symboles $\triangle$ sur le diagramme 2.10 et correspondant au régime de "stabilité non–linéaire", se caractérisent par des amplitudes de déformation finies. Ce sont donc de bons candidats pour le mécanisme d'interaction.

La forme de la bulle est décrite en coordonnées polaires (r, θ) comme

$$r(\theta, t) = R(t) + \sum_n a_n(t) Y_n(\theta), \tag{2.42}$$

où $Y_n(\theta)$ est une harmonique sphérique d'ordre n. Les coefficients $a_n(t)$ représentent l'évolution temporelle de chacun des modes de déformation. Nous disposons d'une description numérique de la forme de l'interface pour chaque instant t_i par l'intermédiaire des coordonnées des marqueurs (x_j, y_j). Ces coordonnées cartésiennes peuvent être transformées en coordonnées polaires (r_j, θ_j) en prenant pour origine le centre de gravité de la bulle. Les coefficients a_n peuvent alors être obtenus pour chaque temps t_i en minimisant la fonction

$$\mathcal{L}(R, a_2, \ldots, a_n) = \sum_j [r_j - R - \sum_n a_n Y_n(\theta_j)]^2. \tag{2.43}$$

Nous considérons ici uniquement les huit premiers modes. Dans tous les cas l'erreur quadratique moyenne sur la décomposition est inférieure à 0.1 %.

La séquence illustrée figure 2.20 est typique de la transition observée entre les régimes stable et instable. Elle a été obtenue pour une bulle de 6 μm de rayon à l'équilibre et pour des amplitudes de forçage de 101 000, 102 000, 103 000 et 104 000 pascals. Comme indiqué sur la figure 2.10, pour 101 000 Pa la bulle reste quasiment sphérique avec une amplitude de déformation maximum de 0.15 μm liée au mode 2. Cette déformation s'accentue pour 102 000 et 103 000 Pa mais sature à des valeurs inférieures à 4 μm. Dans tous les cas, le mode 2 de déformation domine (conformément aux prédictions théoriques, équation (2.12)). De plus, quel que soit le rayon à l'équilibre (entre 2 et 12 μm), seuls les modes de déformation pairs 2, 4 et 6 (illustrés en traits épais sur la figure 2.20) sont excités.[3] Comme indiqué sur le diagramme 2.10, seul le mode 2 est théoriquement linéairement instable pour les cas de stabilité non–linéaire

[3] L'amplitude des modes impairs n'est pas strictement nulle mais dans tous les cas elle est de l'ordre de l'erreur quadratique sur la décomposition.

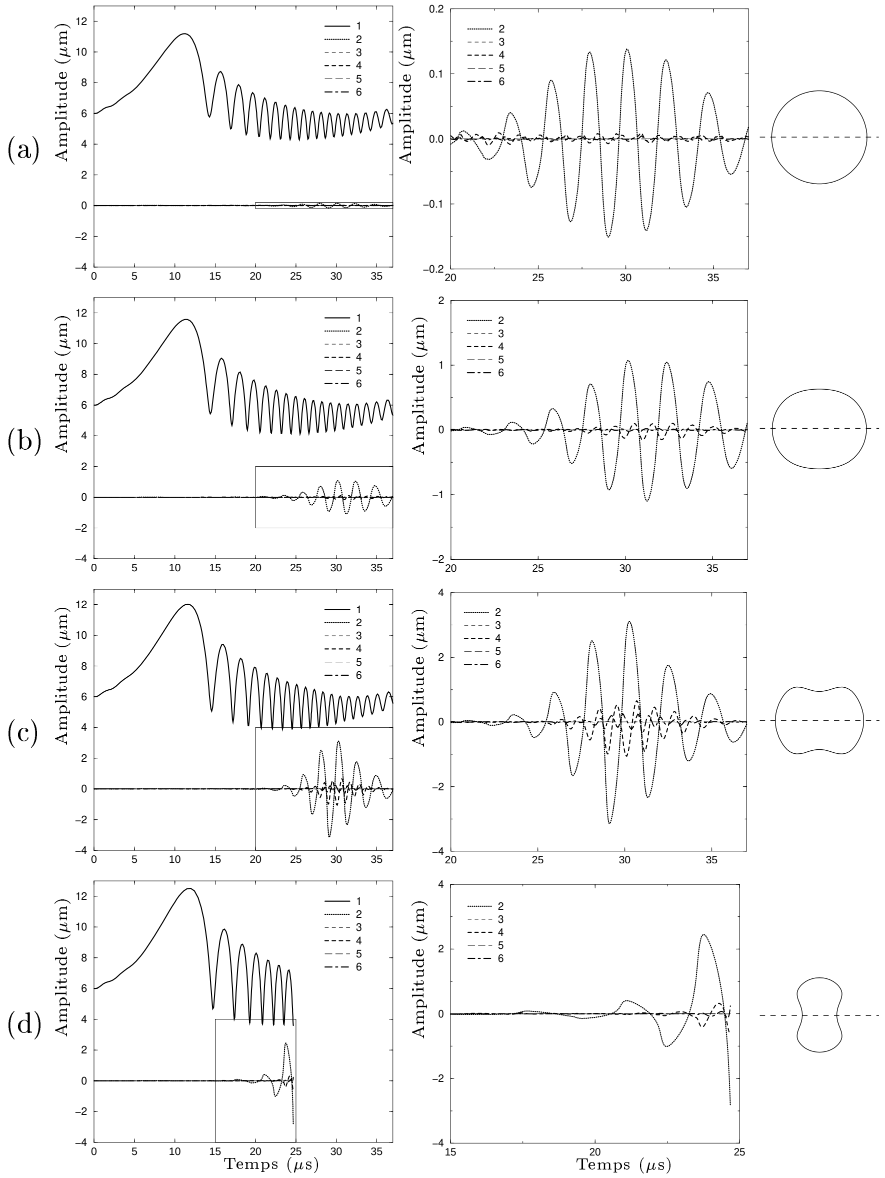


FIG. 2.20.: Séquence illustrant une transition typique entre la stabilité et l'instabilité des modes de déformations pour une bulle de 6 μm de rayon lorsque l'amplitude de forçage varie. (a) $p_a = 101\ 000$ Pa, (b) $p_a = 102\ 000$ Pa, (c) $p_a = 103\ 000$ Pa, (d) $p_a = 104\ 000$ Pa. Les formes des bulles pour l'amplitude de déformation maximum atteinte au cours du cycle sont représentées dans la colonne de droite.

(indiqués par les triangles). On peut donc attribuer la présence des modes 4 et 6 aux couplages non–linéaire avec le mode 2.

Il est clair que dans ces conditions le couplage entre modes pairs et impairs ne peut jouer le rôle décrit précédemment. Il est également important de noter que les conditions de la simulation numérique supposent un champ acoustique "parfait", exempt en particulier de déviations par rapport à la symétrie sphérique. Dans les expériences de nombreux effets peuvent causer une déviation par rapport à cet idéal. On peut citer en particulier : les imperfections géométriques de l'ensemble récipient–transducteurs piézo-électriques, l'excitation simultanée de modes de vibrations multiples du récipient, les réflections des ondes de chocs éventuelles... Ces inhomogénéïtés du champ acoustique peuvent certainement causer l'excitation de modes de déformation impairs, ce qui expliquerait en partie les difficultés expérimentales rencontrées pour l'obtention de bulles stables. On peut citer à ce propos l'étude expérimentale de Seeley (1999), illustrant l'importance des modes et harmoniques acoustiques d'ordre élevé. Il semble cependant difficile de tenir compte de ces effets dans nos simulations numériques. Il n'est pas non plus certain que la complexité accrue d'une telle modélisation permettent d'approfondir notre compréhension du phénomène de sonoluminescence.

2.5. Récapitulatif

Après un rappel des principaux résultats théoriques concernant la dynamique des oscillations de bulles, nous avons utilisé le code de surface libre pour la simulation de bulles dans des conditions proches de la sonoluminescence. Dans le cas où la symétrie sphérique est préservée, un très bon accord a été obtenu entre les simulations axisymétriques et la solution numérique de l'équation de Rayleigh–Plesset. Cet accord souligne la précision du traitement des conditions aux limites sur l'interface obtenu par notre méthode d'extrapolation.

Afin de caractériser les déviations par rapport à la symétrie sphérique, nous avons établi numériquement un diagramme paramétrique de stabilité. Un très bon accord est obtenu par rapport aux prédictions de la théorie linéaire. La simulation directe permet d'accéder aux effets non–linéaires et en particulier au couplages entre modes de déformation. Une décomposition des formes d'interfaces obtenues a révélé que seuls les modes de déformation pairs étaient excités à l'intérieur du domaine de stabilité.

Nous avons effectué une modélisation analytique des effets du gradient de pression acoustique sur la dynamique du centre de gravité de bulles en lévitation. La prise en compte des termes liés à la viscosité a permis une description précise — validée par des simulations directes — de l'amplitude et de la phase des oscillations du centre de gravité. Les résultats classiques concernant la position d'équilibre ne prenant pas en compte les effets visqueux ont été complétés.

Appliqués au cas de la sonoluminescence, ces modèles ont permis de conclure que le gradient de pression acoustique au voisinage de la position d'équilibre ne causait que des déplacements extrêmement faibles du centre de gravité, remettant ainsi en cause la théorie de Prosperetti associant déplacement et formation de jets.

3. Cavitation

La cavitation hydrodynamique dans les liquides est généralement causée par de fortes dépressions qui créent une tension plus importante que les forces de cohésion du fluide. Il est possible d'évaluer théoriquement ce seuil de décohésion en modélisant les forces inter–moléculaires. Dans le cas de l'eau, la prise en compte des liaisons hydrogène permet d'obtenir une valeur théorique de la pression de décohésion de l'ordre de 1000 bars [Kwak et al., 1985]. En réalité, on peut obtenir la cavitation de l'eau avec des dépressions de l'ordre de 1 bar. Deux effets très importants permettent d'expliquer cette différence. Les impuretés souvent présentes dans l'eau créent des sites favorables à la cavitation. De même, la présence de gaz dissous dans le liquide s'accompagne souvent de micro–bulles dispersées dans le fluide. Ces inhomogénéïtés contribuent à diminuer la résistance du milieu.

La dépression est généralement causée par la configuration géométrique des frontières de l'écoulement. Des cavités gazeuses sont créées puis — transportées par l'écoulement dans une zone de pressions plus importantes — elles s'effondrent violemment et disparaissent. Ce phénomène se produisant à une fréquence élevée semble être la cause de l'endommagement rapide observé sur les hélices de navires ou les turbines de centrales hydrauliques. Il est également générateur d'un bruit important. Ce problème pratique est à l'origine des investigations initiales de Rayleigh.

L'explication initialement proposée par Rayleigh (1917) considérait les fortes surpressions causées par l'effondrement comme la source principale de l'endommagement matériel. Cette explication, basée sur l'équation (2.4), suppose que la symétrie sphérique de l'effondrement est préservée. Or, il est clair que même dans le cadre de cette hypothèse, les bulles responsables de l'endommagement doivent s'effondrer à proximité des parois solides. De plus, la configuration géométrique étant responsable de la création des basses pressions nécessaires à la cavitation, les cavités ont tendance à se créer et à disparaître à proximité des frontières de l'écoulement.

Se fondant sur cette observation, Kornfeld et Suvorov (1944) pro-

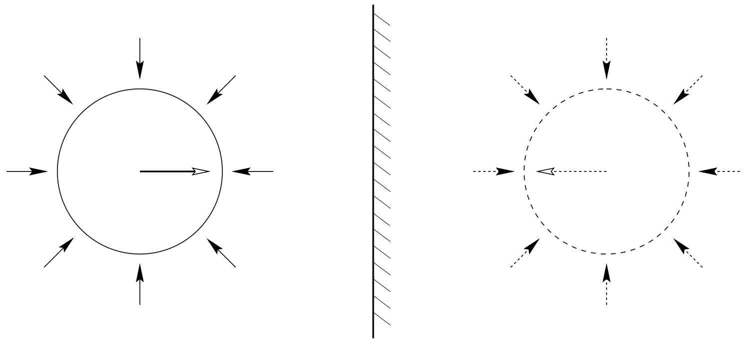


Fig. 3.1.: Effondrement d'une bulle prés d'une paroi solide : interprétation en terme de bulle image.

posèrent une explication se basant sur la création de jets liquides à haute vitesse, dont les impacts répétés seraient les responsables principaux de l'endommagement. Une première confirmation expérimentale de ce phénomène fut donnée par Naudé et Ellis (1961). Ces auteurs conclurent que la formation et l'impact de jets à haute vitesse était bien la cause principale de l'endommagement.

En quoi la dissymétrie de l'écoulement causée par une paroi solide cause-t-elle la formation d'un jet ? Une explication simple illustre la relation étroite entre ce phénomène et la théorie de Prosperetti pour la sonoluminescence. Nous considérons le cas d'une paroi solide à glissement libre (pas de contrainte sur la composante tangentielle de la vitesse). Dans ce cas la paroi solide peut être considérée comme un plan de symétrie et le problème est strictement équivalent à celui de deux bulles s'effondrant simultanément : la bulle considérée et son *image* par rapport au plan de symétrie (figure 3.1). Chacune des bulles ne s'effondre donc plus dans un fluide au repos mais à proximité d'un puits de fluide créé par la bulle image. Ces puits attirent les bulles l'une vers l'autre et elles se rapprochent ainsi du plan de symétrie tout en s'effondrant. L'argument de conservation de la quantité de mouvement translationnelle utilisé dans le cas de la sonoluminescence peut alors être invoqué pour prédire la formation d'un jet.

Comme nous l'avons vu précédemment, cet argument n'est valable que si la quantité de mouvement translationnelle est suffisamment importante. Est-ce le cas pour une bulle s'effondrant à proximité d'une paroi solide ? Dans le cas de la sonoluminescence, le déplacement axial était causé par le gradient de pression acoustique, trop faible au voisinage d'un ventre.

Dans le cas qui nous intéresse ici, le déplacement du centre de gravité de la bulle est également causé par un gradient de pression. Ce gradient est associé au champ de pression lié à l'effondrement de la bulle image. Il peut être exprimé à partir de l'équation de Rayleigh comme

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\chi^2 \left[\ddot{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R}(1-\chi^3)\right], \tag{3.1}$$

où l'on a introduit $\chi = R/z$ avec z la distance au centre de la bulle image. À partir de l'équation (2.4) on peut exprimer l'accélération à l'instant t_m où le rayon minimum R_m est atteint comme

$$\ddot{R}_m = \frac{p_\infty}{\rho R_m}\left[\left(\frac{R_0}{R_m}\right)^{3\gamma} - 1\right], \tag{3.2}$$

ce qui donne un gradient de pression

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{t_m} = -\chi^2 \frac{p_\infty}{R_m}\left[\left(\frac{R_0}{R_m}\right)^{3\gamma} - 1\right]. \tag{3.3}$$

Une échelle de temps de l'effondrement est donnée par $t_c = R_0\sqrt{\rho/p_\infty}$ ce qui permet d'évaluer le déplacement relatif du centre de gravité comme

$$\frac{t_c^2}{\rho R_0}\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{t_m} = -\chi^2 \frac{R_0}{R_m}\left[\left(\frac{R_0}{R_m}\right)^{3\gamma} - 1\right]. \tag{3.4}$$

Si l'on considère une bulle de rayon initial $R_M = 2R_0$, l'équation (2.17) permet d'obtenir $R_m \approx R_0/3$ (pour $\gamma = 1.4$). On suppose que la bulle de rayon initial R_M se trouve à une distance de la paroi $z/2 = 2R_M$. Un ordre de grandeur pour χ à l'instant t_m est donné par $R_m/z = 1/24$. En injectant ces estimations dans (3.4), on obtient un déplacement de $0.5R_0$. Ce déplacement non–négligeable tend à montrer que le gradient de pression créé par la bulle image peut effectivement entraîner la formation de jets.

3.1. Expériences et simulations numériques

Les expériences initiales de Naudé et Ellis ont clairement démontré la réalité de la formation de jets lors de l'effondrement de bulles de cavitation. Ces expériences sont toutefois extrêmement délicates à mettre en oeuvre et un grand nombre de résultats quantitatifs n'ont pas encore été obtenus. Il existe encore un vif débat quant à l'importance relative de l'impact du jet ou des surpressions pour le problème de l'endommagement. Le point de vue initial de Benjamin et Ellis (1966) considérant l'impact du jet comme la cause principale de l'endommagement était fondé sur des mesures de la vitesse d'impact obtenues à partir des séries photographiques à grande vitesse de Naudé et Ellis. L'appareillage expérimental ne permettait pas de mesurer les surpressions causées uniquement par l'effondrement. De plus, du fait des difficultés expérimentales, peu de données étaient disponibles. En particulier, une étude systématique de la vitesse d'impact en fonction de la distance par rapport à la paroi solide n'avait pas été effectuée.

Un certain nombre d'études expérimentales récentes menées en particulier par le groupe de Lauterborn [Philipp et al., 1998, Lauterborn et al., 1997] ont remis en cause le rôle de l'impact du jet. Dans ces expériences, des bulles très précisément semblables sont créées de manière répétée à proximité d'échantillons de duretés variables. Ceux-ci sont ensuite examinés au microscope afin de déterminer la position et l'importance des dommages. Pour un grand nombre d'échantillons les dommages sont concentrés sur un cercle et non pas sur l'axe de symétrie comme attendu si le jet était la source principale de l'endommagement. Ces résultats relancent le débat quant à la cause réelle de l'endommagement par cavitation.

Parallèlement à ces efforts expérimentaux, un certain nombre d'auteurs se sont attachés à résoudre numériquement les équations, que ce soit au moyen de différences finies [Plesset et al., 1971] ou de la technique d'intégration de frontière. Cette technique a connu de nombreuses améliorations et a également bénéficié de l'accroissement impressionnant de la puissance de calcul des ordinateurs lors des dernières décennies [Blake et al., 1986, Oğuz et al., 1990, Blake et al., 1997]. Toutefois, comme elle repose sur l'intégration surfacique d'une solution potentielle pour le champ de vitesse, elle est limitée aux cas inviscide (équation d'Euler) et très visqueux (équation de Stokes). De bons résultats sont cependant obtenus lors de comparaisons avec les expériences [Blake et al., 1993]. En effet, pour des raisons pratiques, les bulles utilisées lors des expériences sont de taille importante (de l'ordre du millimètre) et les effets visqueux lors d'effondrements violents sont négligeables. On peut tout de même s'interroger sur la généralisation de ces résultats à des bulles de cavitation qui peuvent souvent être beaucoup plus petites [Mettin et al., 1999].

3.1.1. Comparaison entre expérience et simulation numérique

Afin d'illustrer les capacités de notre méthode de résolution des équations de Navier–Stokes, nous avons effectué une comparaison entre une série photographique décrivant l'effondrement et la formation du jet et une simulation directe. La série reproduite figure 3.2 a été obtenue par Lauterborn et son équipe. Une cavité est créée par une très courte impulsion laser focalisée précisément. Cette bulle grossit, atteint un rayon maximum de deux millimètres puis s'effondre. Un jet se forme aux alentours du rayon minimum. Une partie au moins du gaz contenu dans la bulle n'est pas condensable ce qui provoque une ré-expansion suivie d'un second effondrement. Lors de la ré-expansion, le jet traverse la bulle et impacte le côté opposé, créant une protubérance gazeuse contenant un noyau liquide. Le jet liquide est très fin comme illustré sur l'agrandissement figure 3.3.

Afin d'effectuer une simulation numérique de ce phénomène il est nécessaire d'accéder aux paramètres physiques de l'expérience. Les propriétés physiques du liquide (de l'eau) sont connues. Il semble malheureusement difficile d'obtenir les propriétés du gaz contenu dans la bulle. L'impulsion laser crée probablement une cavité initiale remplie de vapeur d'eau. Lors de l'expansion et de la baisse de pression résultante, l'air dissous dans l'eau environnante pénètre probablement dans la bulle et il semble raisonnable de supposer que lors de la phase d'effondrement la bulle contient essentiellement de l'air. Une modélisation complète nécessiterait donc la prise en compte des changements de phase et des transferts de gaz dissous. En supposant connu le dépôt énergétique initial (ce qui suppose la calibration de l'impulsion laser et la prise en compte des pertes sur le trajet optique), on peut imaginer qu'une simulation gouvernée uniquement par les données expérimentales soit possible.

Il semble cependant plus réaliste de simplifier la dynamique du gaz contenu dans la bulle. À cette fin, nous supposons que le gaz est de l'air en évolution adiabatique. Le rayon initial de la bulle est fixé arbitrairement à 0.4 mm. Il est également nécessaire de déterminer la pression initiale à l'intérieur de la bulle. Celle-ci n'est pas connue expérimentalement. Nous avons donc choisi de la déterminer en ajustant la solution numérique de l'équation de Rayleigh–Plesset avec l'évolution du rayon obtenue expérimentalement. Le rayon équivalent est défini comme $(3V/4\pi)^{1/3}$ où V est le volume de la bulle. Nous avons mesuré ce rayon directement à partir d'une version numérisée et filtrée de la série photographique (figure 3.4). Il est calculé à partir de l'aire de la projection de chacune des bulles obtenue directement par comptage des pixels. Ces données sont représentées par

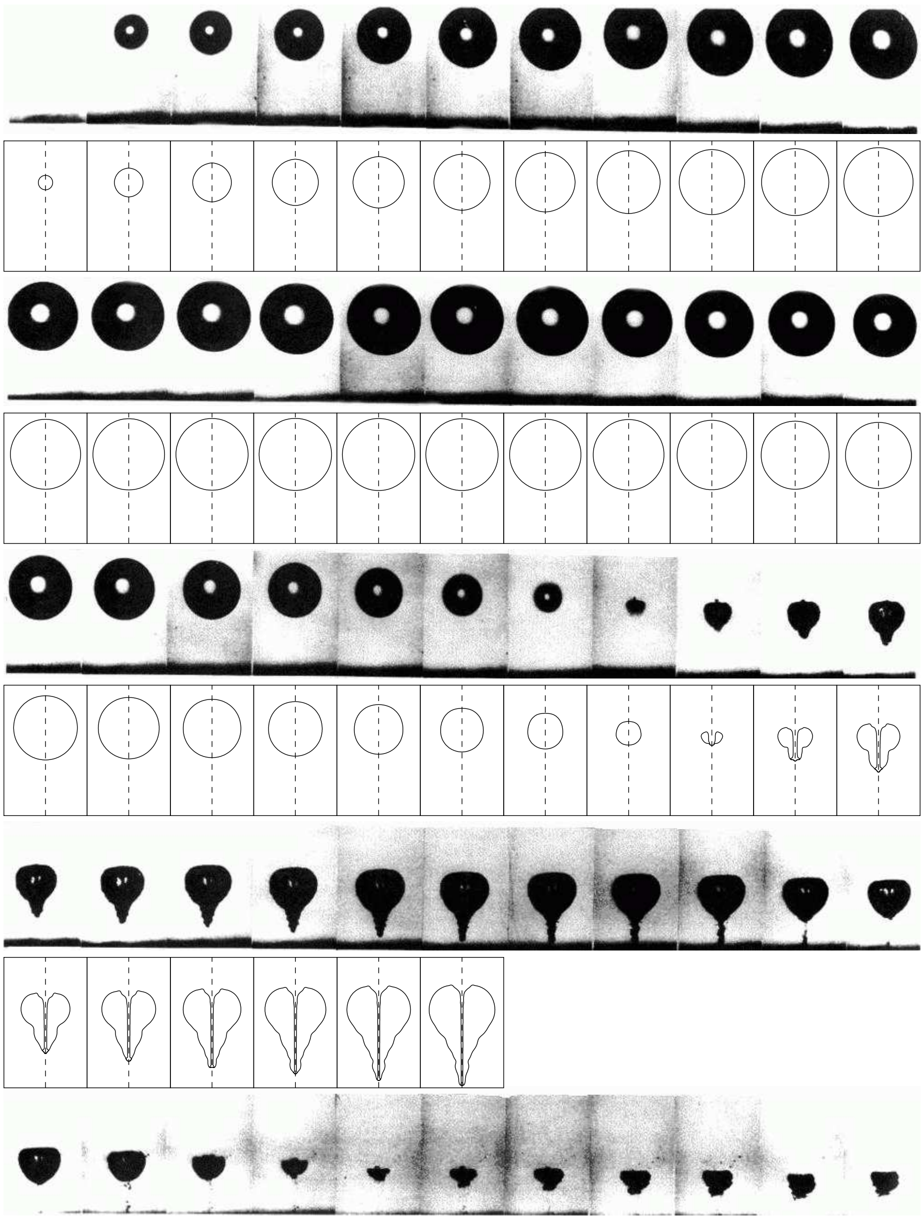


FIG. 3.2.: Comparaison entre une série photographique à grande vitesse d'une bulle s'effondrant près d'une paroi solide obtenue par Lauterborn et Ohl (1997) et une simulation numérique directe. L'échantillonage illustré est de 75 000 images par seconde.

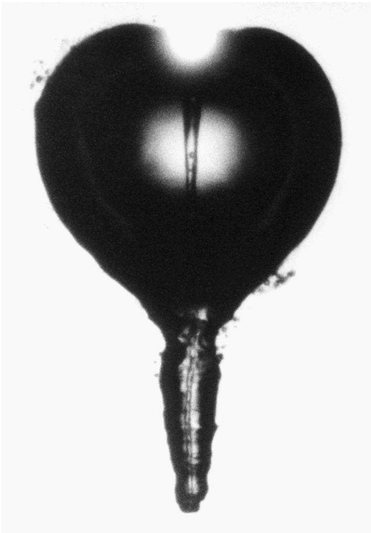


Fig. 3.3.: Détail de la bulle traversée par le jet [Brujan et al., 2000].

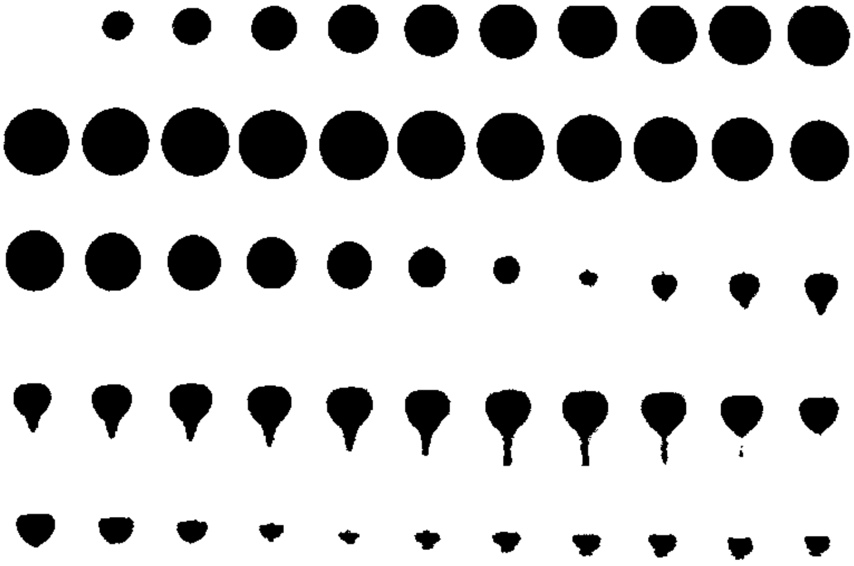


Fig. 3.4.: Version numérisée de la photographie 3.2 utilisée pour l'estimation de l'évolution temporelle du rayon.

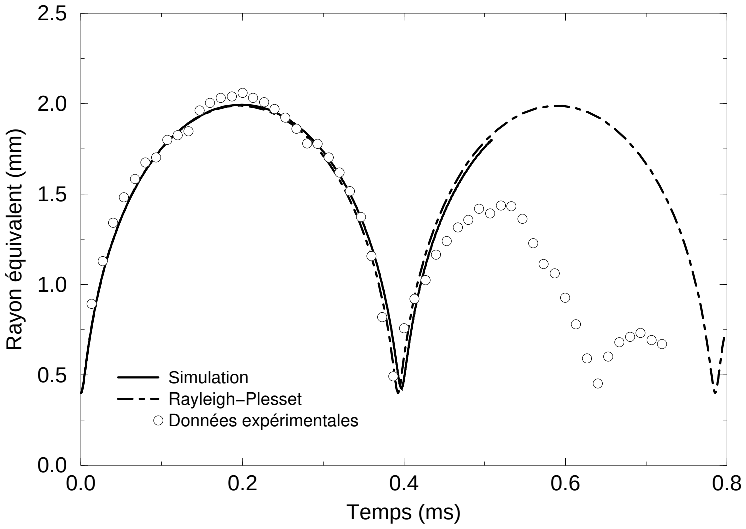


FIG. 3.5.: Évolution du rayon équivalent en fonction du temps.

les cercles de la figure 3.5. La solution numérique ajustée de l'équation de Rayleigh–Plesset est indiquée en traits pointillés. Un rayon à l'équilibre $R_0 = 1.045$ mm a été utilisé, pour une pression à l'équilibre $p_0 = 100\ 072$ Pa.

La simulation numérique utilise ces mêmes paramètres, soit : un exposant polytropique $\gamma = 7/5$, la viscosité dynamique et la densité de l'eau $\mu = 10^{-3}$ kg/m.s, $\rho = 1000$ kg/m^3, un coefficient de tension de surface pour une interface air/eau $\sigma = 0.072$ kg/s^2. L'ensemble du fluide est initialement au repos. Deux cotés du domaine sont bornés par des parois solides avec condition de glissement libre. Une pression constante de 100 000 Pa est imposée sur le troisième côté avec une condition de gradient nul pour la vitesse. Ces conditions aux limites correspondent au cas d'une bulle située sur l'axe de symétrie et s'effondrant à proximité du fond d'une boîte cylindrique remplie d'eau (figure 3.6). La résolution utilisée est de 512×512. Le rayon maximum de la bulle est de 50 points de grille. L'évolution obtenue numériquement est illustrée figure 3.2. L'intervalle de temps entre chaque image correspond à un échantillonage de 75 000 images par seconde. Seule la partie du domaine de calcul correspondant à celle de la série expérimentale est représentée.

L'accord entre simulation et expérience est globalement satisfaisant. En particulier, la forme de la bulle déformée par l'impact du jet est correctement restituée. La vitesse du jet est également correctement prédite

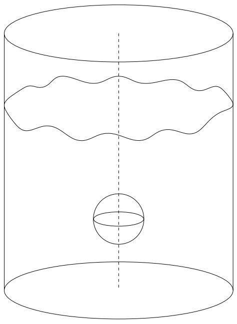


FIG. 3.6.: Configuration équivalente aux conditions aux limites appliquées lors de la simulation illustrée figure 3.2.

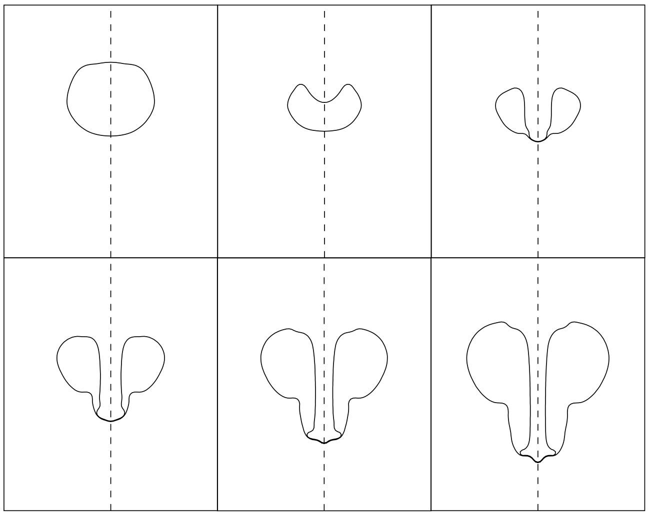


FIG. 3.7.: Détail de la formation et de l'impact du jet.

avec un instant d'impact sur la paroi solide concordant avec l'expérience. Le détail de la formation et de l'impact du jet sur la paroi opposée de la bulle illustré figure 3.7 permet d'obtenir des informations difficilement accessibles expérimentalement. En particulier, la formation au moment de l'impact d'une onde axisymétrique se propageant le long de l'interface. Ce phénomène a également été observé lors de simulations numériques analogues avec une méthode d'intégrale de frontière par Blake et ses collaborateurs [Blake et al., 1997, Blake et al., 1998]. Une différence notable par rapport à l'expérience est l'absence dans la simulation du "contre–jet" dirigé vers le haut visible sur les images 31 et 32. Ce phénomène a été observé dans un grand nombre d'expériences mais n'a pas encore reçu d'explication satisfaisante.

La principale différence entre la simulation et l'expérience concerne l'amplitude de la ré-expansion de la bulle après la formation du jet. Cette différence apparaît clairement sur la figure 3.5. La courbe pleine correspondant à l'évolution du rayon équivalent suit précisément la courbe pointillée obtenue par résolution numérique de l'équation de Rayleigh–Plesset. Le taux d'amortissement de ces deux solutions (uniquement gouverné par la dissipation visqueuse dans le liquide) est clairement très inférieur à celui de l'expérience. Plusieurs sources de dissipation, négligées par la simulation peuvent expliquer cette différence. L'émission d'ondes acoustiques et d'ondes de choc dans le liquide est impossible dans notre modèle incompressible. De plus l'équation d'état très simple choisie pour le gaz ne permet pas de prendre en compte les échanges thermiques et les changements de phase à l'interface entre le liquide et le gaz. La différence importante obtenue tend à montrer que ces effets dissipatifs thermodynamiques et acoustiques sont dominants.

3.2. Effets de la viscosité

Comme noté précédemment la viscosité du liquide a peu d'influence sur l'effondrement de bulles de rayon important. Une simulation de l'expérience précédente effectuée avec un code d'intégrale de frontière résolvant les équations d'Euler aurait probablement donné des résultats comparables. L'apport principal de notre technique de résolution est la possibilité d'étudier les régimes intermédiaires contrôlés par la viscosité. Un question importante pour la compréhension de l'endommagement par cavitation concerne l'influence de la viscosité sur la formation et l'évolution du jet pour des bulles de petite taille.

Nous proposons d'étudier numériquement ces effets. Une première étape est l'identification des paramètres indépendants contrôlant le problème. Nous supposons tout d'abord que la pression dans le gaz est décrite par une loi polytropique de la forme

$$p(R) = p_\infty \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \tag{3.5}$$

où R est le rayon de la bulle, R_0 le rayon à l'équilibre, p_∞ la pression ambiante et γ un exposant polytropique. Nous choisissons R_0 comme échelle spatiale et $\sqrt{\rho R_0^2/p_\infty}$ comme échelle de temps. L'équation de Rayleigh–Plesset peut alors être écrite sous forme adimensionnée comme

$$R_\star \ddot{R}_\star + \frac{3}{2}\dot{R}_\star^2 + 4\nu_\star \frac{\dot{R}_\star}{R_\star} = R_\star^{-3\gamma} - 1 - \frac{2\sigma_\star}{R_\star}, \tag{3.6}$$

où le symbole $\star$ indique une quantité adimensionnée. Les paramètres contrôlant le problème sont ainsi

$$\nu_\star = \frac{\nu}{R_0}\sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}, \tag{3.7}$$

$$\sigma_\star = \frac{\sigma}{R_0 p_\infty}, \tag{3.8}$$

$$\gamma. \tag{3.9}$$

La configuration géométrique et les conditions initiales définissent deux autres paramètres. Le rapport du rayon initial R_M et du rayon à l'équilibre $\alpha = R_M/R_0$ et la distance relative à la paroi solide $\beta = l/R_M$, où l est la distance initiale entre le centre de la bulle et la frontière solide. Nous obtenons ainsi cinq paramètres indépendants : α, β, γ, $\nu_\star$, $\sigma_\star$. Afin de simplifier l'étude, nous négligeons dans un premier temps la tension de surface ($\sigma_\star = 0$) et nous supposons que le gaz est diatomique et en évolution adiabatique ($\gamma = 7/5$). Un nombre de Reynolds est défini comme $Re = 1/\nu_\star$.

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 ont été obtenues pour une configuration similaire à la simulation précédente en faisant varier la viscosité. Pour une faible viscosité (figure 3.8) la vitesse initiale du jet est importante et l'impact avec la paroi opposée de la bulle se produit peu de temps après la formation du jet. Pour une viscosité élevée (figure 3.10) la vitesse initiale du jet est faible et la vitesse de ré-expansion de la bulle est suffisante pour empêcher l'impact. Pour une valeur intermédiaire du nombre de Reynolds (figure 3.9) la vitesse du jet est comparable à la vitesse de déplacement de la paroi opposée, l'impact est retardé et se produit avec une vitesse relative faible. Le jet est fortement étiré par la ré-expansion.

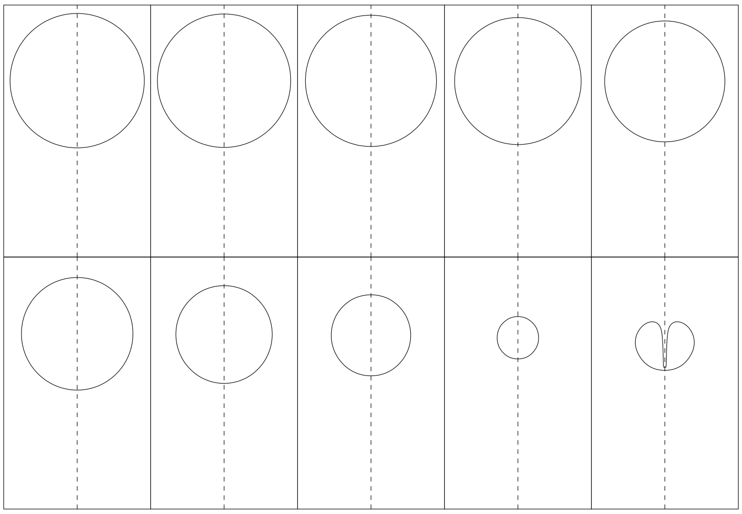


FIG. 3.8.: Évolution temporelle d'une bulle s'effondrant prés d'une paroi solide pour un nombre de Reynolds élevé. La paroi solide correspond à la limite inférieure de chaque boîte. Seule une partie du domaine de calcul est représentée. L'intervalle de temps entre chaque image est 0.243. $Re = 29.906$, $\alpha = 2.023$, $\beta = 2.625$.

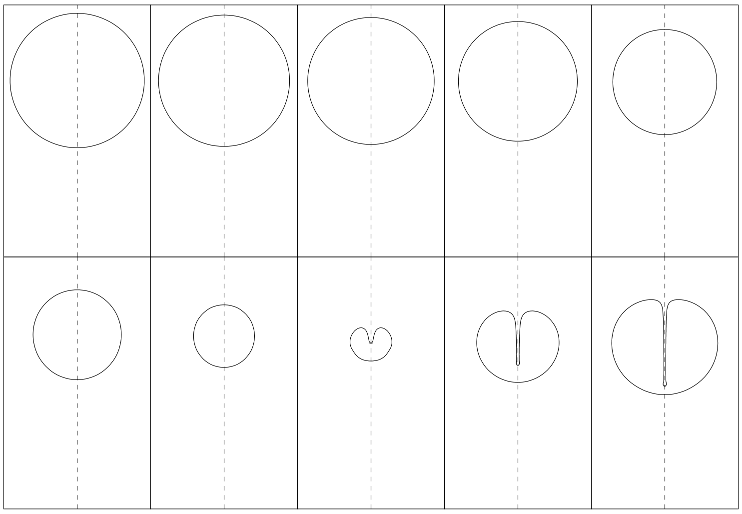


FIG. 3.9.: Évolution temporelle d'une bulle s'effondrant prés d'une paroi solide pour un nombre de Reynolds intermédiaire. L'intervalle de temps entre chaque image est 0.303. $Re = 24.519$, $\alpha = 2.023$, $\beta = 2.625$.

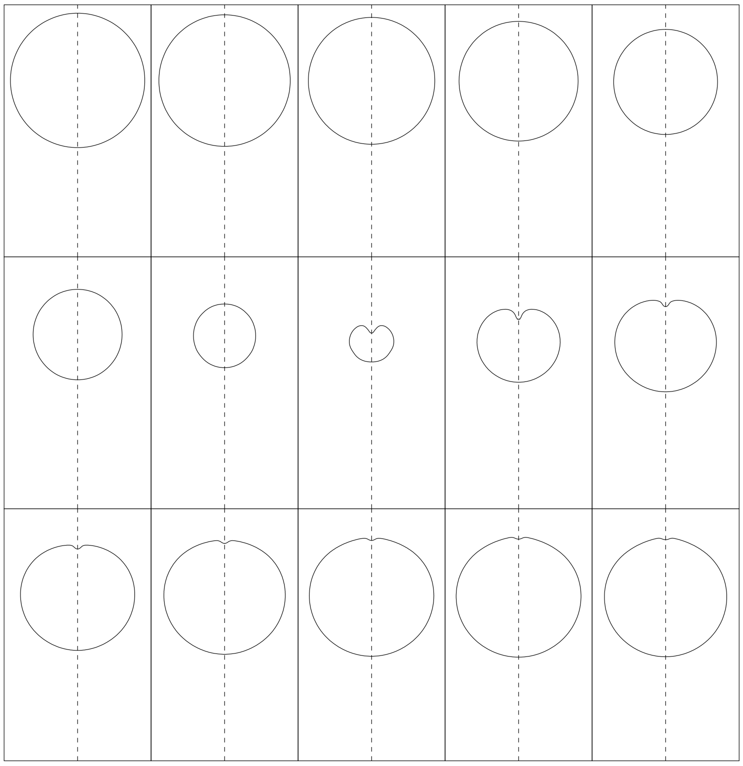


FIG. 3.10.: Évolution temporelle d'une bulle s'effondrant prés d'une paroi solide pour un nombre de Reynolds faible. L'intervalle de temps entre chaque image est 0.303. $Re = 18.413$, $\alpha = 2.023$, $\beta = 2.625$.

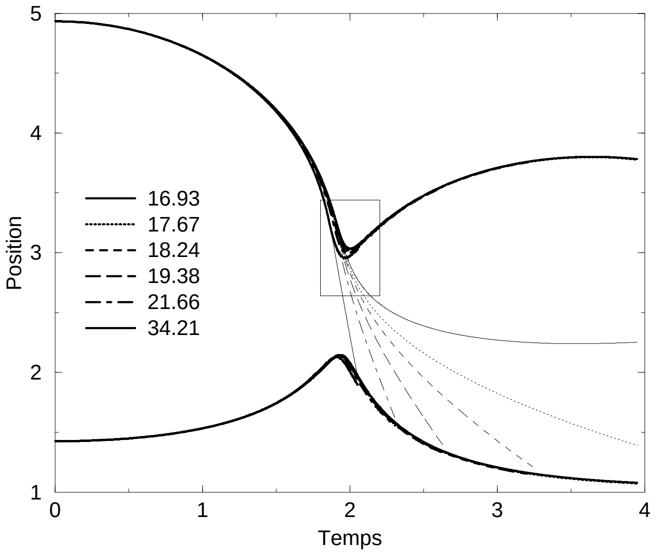


FIG. 3.11.: Évolution temporelle de la position des pôles en fonction du nombre de Reynolds indiqué dans la légende. $\alpha = 1.754$, $\beta = 1.5$.

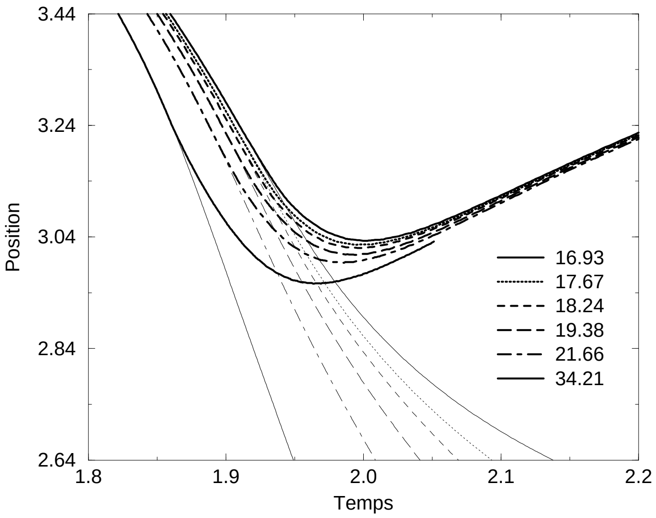


FIG. 3.12.: Détail de la figure 3.11.

Cette transition est illustrée de manière différente sur les figures 3.11 et 3.12. Les courbes inférieures (traits épais) représentent l'évolution temporelle de la position du pôle sud (le plus proche de la paroi) pour les différents nombres de Reynolds indiqués dans la légende. Les courbes en traits fin décrivent la position du pôle nord et les courbes supérieures la position du point de la bulle le plus éloigné de la paroi. Les courbes supérieures et inférieures décrivent la dynamique globale de la bulle : effondrement jusqu'à $t \approx 2$ suivi d'une ré-expansion, accompagnée d'un déplacement du centre de gravité vers la paroi. Les courbes en traits fin décrivent la dynamique du jet. Initialement il n'y a pas de jet et ces courbes sont confondues avec les courbes supérieures. Lors de l'inversion de la courbure se produisant au pôle nord et correspondant à la formation du jet les courbes se séparent (figure 3.12). Le jet poursuit sa progression et vient éventuellement impacter sur la paroi opposée. Si la viscosité est trop élevée, le jet est ralenti au cours de sa progression et n'atteint jamais le pôle sud.

Nous définissons un nombre de Reynolds critique Re_c pour lequel la vitesse relative d'impact est nulle. Si le nombre de Reynolds est inférieur à Re_c l'impact n'a jamais lieu. Nous proposons d'étudier la dépendance entre Re_c et les paramètres indépendants contrôlant le problème.

3.2.1. Étude paramétrique de la valeur critique du nombre de Reynolds

Il est relativement difficile d'évaluer directement la valeur de Re_c. En effet, comme illustré figure 3.9, lorsque le Reynolds est proche de Re_c le jet peut devenir extrêmement fin. Un pas de maille très petit est alors nécessaire pour capturer correctement la dynamique de l'interface et du fluide contenu à l'intérieur du jet. Nous utilisons la technique de hiérarchie de maillages imbriqués ce qui permet de limiter les effets de confinement tout en assurant une bonne résolution de la bulle (figure 3.13). L'étude paramétrique de Re_c en fonction de α et β nécessite cependant la réalisation d'un grand nombre de simulations. Une résolution spatiale très fine conduirait à des temps de calcul peu pratiques. Nous avons donc cherché une définition de Re_c moins contraignante.

L'évolution de la vitesse relative entre les pôles supérieur et inférieur de la bulle est illustrée figure 3.14 pour différentes valeurs du Reynolds. Par convention la vitesse relative est positive lorsque les pôles se rapprochent et négative lorsqu'ils s'éloignent. Les carrés blancs indiquent l'instant de formation du jet (inversion de la courbure au pôle supérieur)

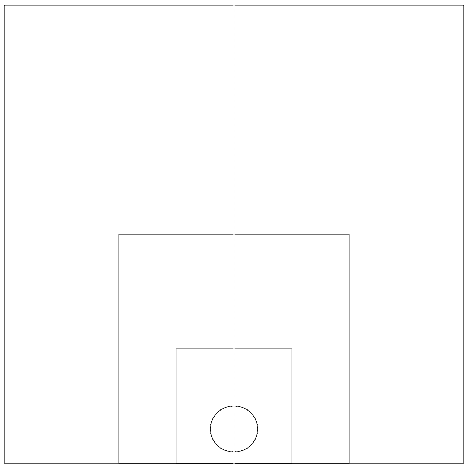


FIG. 3.13.: Configuration typique pour les simulations présentées dans cette section. Chacune des grilles comporte 128×64 cellules.

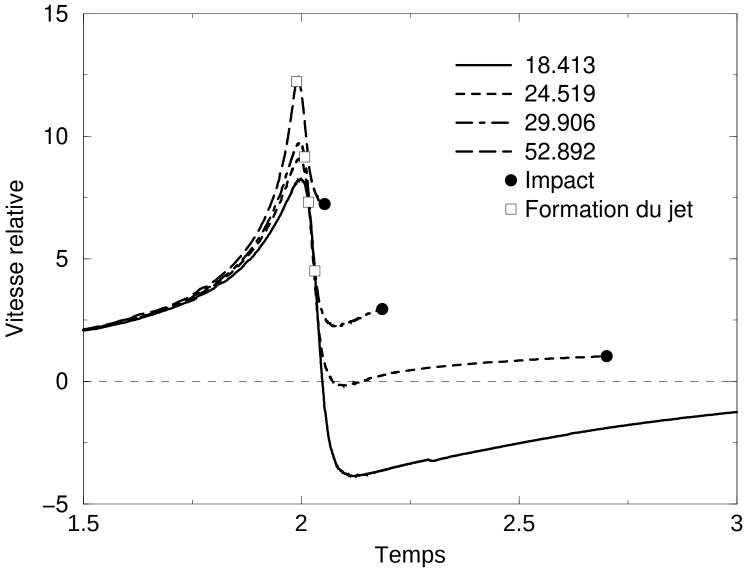


FIG. 3.14.: Vitesse relative entre les pôles supérieur et inférieur de la bulle en fonction du temps pour les différentes valeurs du Reynolds indiquées dans la légende. $\alpha = 2.023$, $\beta = 2.625$.

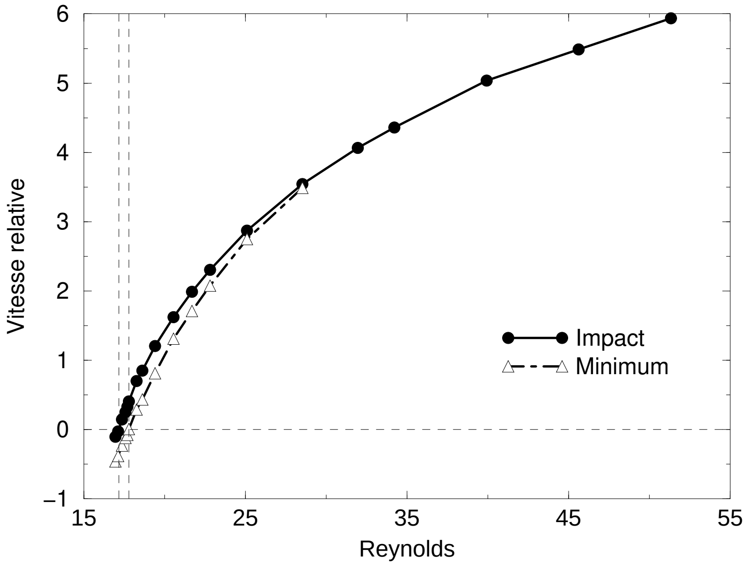


FIG. 3.15.: Vitesse relative d'impact et minimum de la vitesse relative en fonction du nombre de Reynolds. $\alpha = 1.754$, $\beta = 1.5$.

et les disques noirs l'instant d'impact entre les deux pôles. Lorsque le nombre de Reynolds décroît le jet se forme plus tard, l'impact est retardé et la vitesse relative d'impact diminue. À proximité de la valeur critique du Reynolds (≈ 24), la courbe de vitesse relative a deux extrema. Une valeur maximum atteinte pendant l'effondrement, peu de temps avant la formation du jet et une valeur minimum peu de temps après la formation du jet. De plus, à proximité de Re_c après avoir atteint sa valeur minimum, la vitesse relative change peu et la vitesse d'impact est proche de ce minimum. Nous choisissons comme définition alternative de Re_c, la valeur du Reynolds pour laquelle le minimum de vitesse relative est nul. C'est à dire qu'à un moment donné, peu après sa formation le jet pénètre à l'intérieur de la bulle avec une vitesse exactement égale à la vitesse de ré-expansion.

La figure 3.15 confirme que les deux définitions donnent des valeurs proches de Re_c. Chaque paire de points (disque et triangle) correspond à une simulation pour un Reynolds donné. Nous nous sommes assurés que le jet était bien résolu dans tous les cas. La vitesse d'impact s'annule pour $Re_c = 17.15$ et le minimum de la vitesse relative pour $Re_c = 17.77$. De plus, à proximité du Reynolds critique, le minimum de vitesse relative et la vitesse d'impact dépendent fortement du Reynolds. Ce critère est

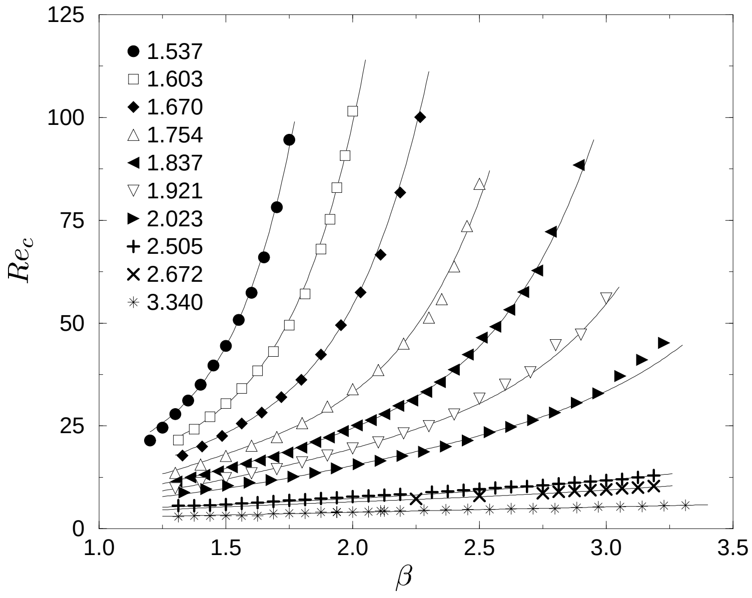


FIG. 3.16.: Valeur du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction de β pour différentes valeurs de α.

beaucoup plus simple à vérifier car la simulation peut s'arrêter dès que le minimum de vitesse relative est atteint. Ceci se produisant peu de temps après la formation du jet, le problème de résolution précise d'un jet très fin ne se pose plus.

En utilisant ce nouveau critère et une technique de dichotomie, la valeur de Re_c peut être étudiée en fonction des paramètres α et β. La famille de courbes représentée figure 3.16 a été obtenue de cette manière pour les différentes valeurs de α indiquées dans la légende. Chaque point représente environ cinq simulations pour une convergence finale sur la valeur de Re_c de 3 %. Chaque simulation prend à peu prés quinze minutes sur un PC/350 MHz.

Deux tendances principales se dégagent de ce graphe. Pour α constant, lorsque β augmente (la bulle est placée plus loin de la paroi solide), la dissymétrie est réduite et il devient plus difficile de former un jet. Il devient donc plus facile de s'opposer à cette formation et une viscosité plus faible est suffisante : Re_c augmente. Pour β constant, lorsque α augmente (la bulle est initialement plus éloignée de son rayon d'équilibre) l'effondrement devient plus violent et le jet plus rapide. Une viscosité plus importante est nécessaire : Re_c diminue.

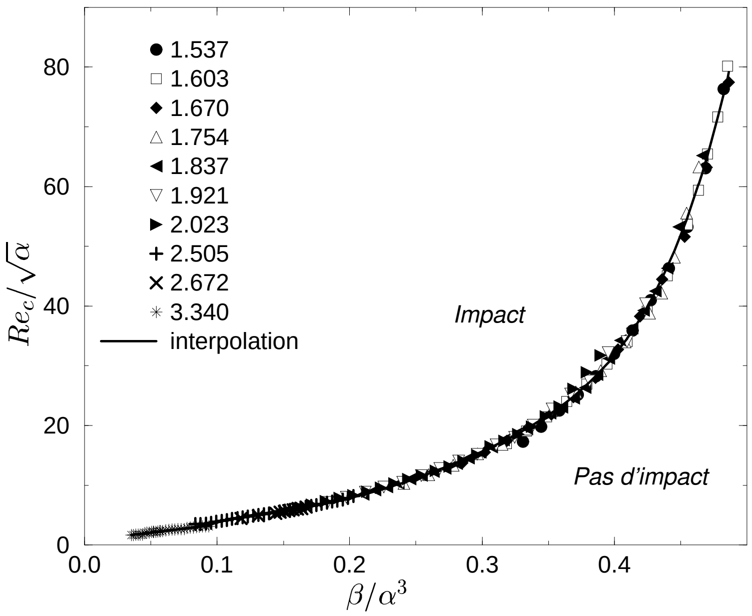


FIG. 3.17.: Représentation redimensionnée de la famille de courbes de la figure 3.16.

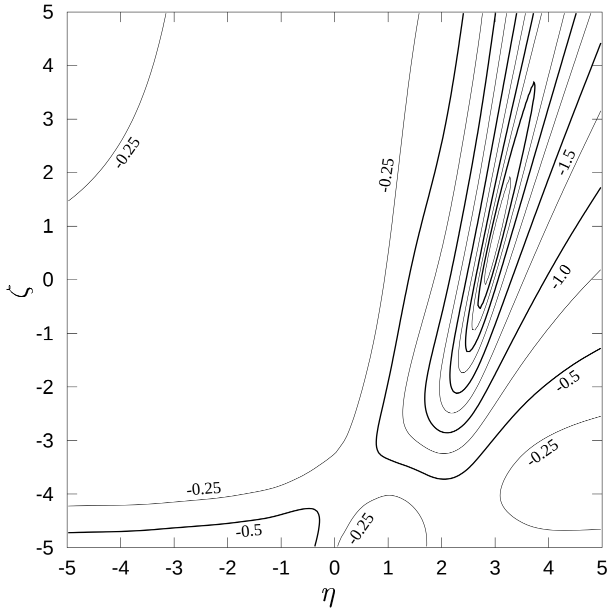
On peut noter également une similitude intéressante entre les différentes courbes. Il est en fait possible de redimensionner chacun des axes afin d'obtenir une courbe unique décrivant l'ensemble de cette famille. La figure 3.17 illustre le résultat obtenu lorsque les axes sont transformés selon

$$\beta \to \beta/\alpha^3,$$

$$Re_c \to Re_c/\sqrt{\alpha}.$$

La concordance et le recouvrement entre les différents jeux de données sont excellents. La courbe pleine est une interpolation polynômiale du nuage de points obtenu. Les versions redimensionnées de cette même courbe sont représentées en trait plein sur la figure 3.16. Les écarts plus importants observés pour les grandes valeurs de β pour $\alpha = 2.023$ et $\alpha = 1.921$ sont dûs à la formation de jet très fins dans cet espace de paramètres, ce qui entraîne des erreurs numériques plus importantes.

Il est possible de montrer empiriquement que ce redimensionnement est optimal pour le type de transformation envisagé, comme illustré figure 3.18. Cette fonction de corrélation a été obtenue comme suit. Étant



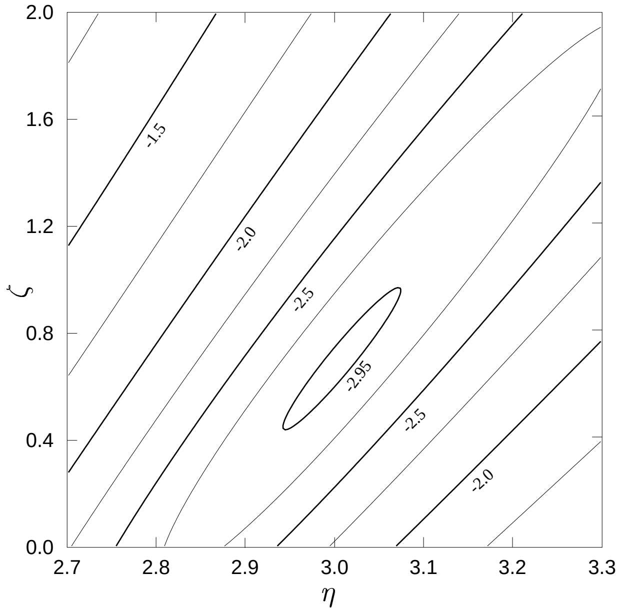


FIG. 3.18.: Évaluation de la corrélation entre les courbes illustrées figure 3.16 en fonction des coefficients de renormalisation η et ζ.

donné les familles de points $(\alpha_i, \beta_i, Re_i)$, pour chaque paire de coefficients (η, ζ) on effectue les opérations suivantes

1. Les coordonnées (x_i, y_i) d'un ensemble de points sont obtenues comme
$$x_i \leftarrow \frac{\beta_i}{\alpha_i^\eta} \quad \text{et} \quad y_i \leftarrow \frac{Re_i}{\alpha_i^\zeta}.$$
2. Ces coordonnées sont normalisées selon
$$x_i \leftarrow \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x} \quad \text{et} \quad y_i \leftarrow \frac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y},$$
où $\overline{x}$, $\overline{y}$ sont les valeurs moyennes des coordonnées et σ_x, σ_y les écarts-types.
3. Un polynôme $p(x)$ d'ordre huit est interpolé à travers ces points par minimisation de la fonction $\mathcal{L} = \sum(p(x_i) - y_i)^2$.
4. La corrélation est alors définie comme $\mathcal{C}(\eta, \zeta) = \log(\mathcal{L}_{\min})$.

Le minimum illustré figure 3.18 (en bas) est bien obtenu pour $\eta \approx 3$. On peut noter qu'une certaine latitude existe pour le choix de ζ ; des valeurs comprises entre 1/2 et 2/3 donnent des résultats comparables.

Nous n'avons pas pour l'instant d'explication théorique qui permettent de justifier ce redimensionnement. Quelques éléments permettent toutefois d'orienter notre investigation. On peut noter en particulier sur les figures 3.11 et 3.12, que la dynamique "globale" de la bulle, définie par la position des extrêmes (en traits épais) dépend relativement peu du nombre de Reynolds.

Cette hypothèse est confirmée en partie si l'on considère les données représentées figure 3.19. L'abscisse indique le nombre de Reynolds de la simulation et l'ordonnée le rapport du rayon initial R_M et du rayon équivalent minimum R_m obtenus. Le rayon équivalent R_m est obtenu classiquement comme $(3V/4\pi)^{1/3}$ où V est le volume de la bulle. L'ensemble des simulations nécessaires à l'obtention de la figure 3.16 sont représentées (soit environ cinq fois plus de points). Les valeurs théoriques du rapport R_M/R_m obtenues à partir de l'équation (2.17) sont représentées pour chaque valeur de α par les lignes horizontales pointillées. Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, on observe la convergence des valeurs numériques vers la valeur théorique (exact dans le cas inviscide). On note également que pour un nombre de Reynolds donné, l'ensemble des points représentés (qui correspondent à des valeurs de β différentes) donnent des valeurs de R_M/R_m proches. La distance à la paroi β semble donc n'avoir que peu d'influence sur la dynamique globale.

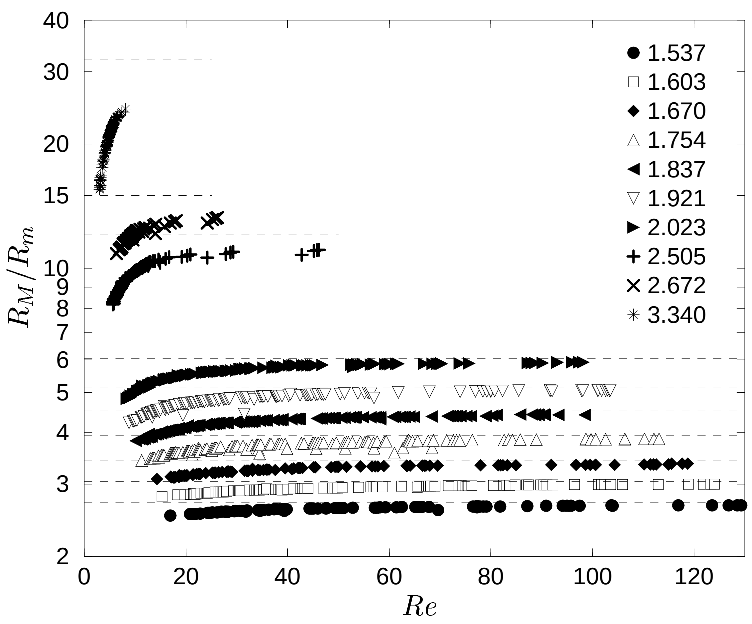


FIG. 3.19.: Valeur du rapport du rayon maximum (initial) R_M et du rayon minimum R_m en fonction du nombre de Reynolds pour les différentes valeurs de α indiquées dans la légende. Les valeurs théoriques sont représentées par les lignes pointillées.

On peut distinguer deux régimes principaux. Pour les valeurs de α élevées (> 2.5), l'ensemble des simulations ont été effectuées pour des Reynolds faibles (< 50) pour lesquels la déviation par rapport à la valeur théorique est importante. Pour les valeurs modérées de α, la partie des courbes correspondant à des valeurs élevées de β est obtenue pour des valeurs élevées du Reynolds. Dans ce cas, la dynamique globale est bien décrite par la théorie inviscide. Pour les valeurs faibles de β correspondant à des Reynolds faibles, les effets visqueux doivent être pris en compte. Ces deux régimes correspondent aux deux parties de la courbe adimensionnée figure 3.17 : un régime linéaire lorsque β/α^3 est petit et un régime non–linéaire lorsque β/α^3 est grand. Le régime non–linéaire n'est pas contrôlé par la dynamique globale (qui est bien décrite par la théorie inviscide) mais probablement par l'influence de la viscosité sur la dynamique du jet. Inversement, le régime linéaire est influencé par la dynamique globale mais peut-être également par la dynamique du jet.

Conclusion

Nous avons développé dans cette thèse deux méthodes permettant de résoudre les équations de Navier–Stokes en présence d'interfaces ou de surfaces libres. Basées sur l'utilisation combinée d'un maillage fixe pour les champs hydrodynamiques et d'un maillage mobile pour l'interface, elles se caractérisent par un traitement original de l'interface comme une discontinuité réelle. Appliquée tout d'abord au cas des écoulements diphasiques, cette technique a permis d'obtenir un équilibre numérique précis entre les termes de tension de surface et de gradient de pression sur l'interface. Ceci a permis de supprimer les courants parasites habituellement présents dans les méthodes utilisant une formulation continue pour la tension de surface. L'origine de ces courants a ainsi été clairement identifiée. Les solutions généralement utilisées pour lutter contre ce problème impliquent un lissage des termes de tension de surface, correspondant à un épaississement numérique de l'interface. Nous avons montré au contraire que le traitement de l'interface comme une véritable discontinuité était justifié physiquement et numériquement et permettait d'éliminer ce déséquilibre.

Cette approche a ensuite été étendue aux cas d'écoulements avec surfaces libres en utilisant une technique de type volume fini qui a permis de formaliser la description des termes surfaciques ébauchée dans le cas diphasique. La discrétisation des termes à proximité d'une surface libre nécessite également l'extension des champs hydrodynamiques. Nous avons développé une méthode d'extrapolation permettant de vérifier précisément les conditions aux limites sur l'interface, liées à la tension de surface et à la viscosité.

Ces méthodes apparaissent en fait comme des hybrides entre les techniques sur maillage fixe, associées à une formulation continue pour les termes surfaciques et les approches sur maillage mobile utilisant directement l'interface comme condition aux limites. En ce sens, elles permettent de combiner une partie de la souplesse des premières avec la précision du traitement de l'interface des secondes. Un autre avantage important est la possibilité — comme dans les méthodes sur maillage mobile —

d'analyser de manière détaillée la cohérence physique et numérique de la discrétisation au voisinage de l'interface. De plus, bien que plus complexes à programmer que les méthodes implicites volume de fluide ou *level set*, ces méthodes s'avèrent pratiquement aussi rapides.

Plusieurs comparaisons avec des données théoriques ou expérimentales ont confirmé la précision des résultats obtenus numériquement. Nous avons en particulier obtenu de très bons accords avec les théories linéaires de Prosperetti pour les oscillations amorties d'ondes capillaires planes ou de bulles initialement faiblement déformées. Les capacités de la méthode dans le cas d'interfaces très déformées ont été illustrées par une comparaison avec les solutions de l'équation de Rayleigh–Plesset dans le cas d'oscillations radiales de grande amplitude.

Appliquée au régime de sonoluminescence, le code de surface libre a permis de confirmer la validité du diagramme de stabilité de forme obtenu par la théorie linéaire. Un domaine de stabilité légèrement étendu a été calculé du fait de la saturation non–linéaire du mode deux de déformation. Par une modélisation de la quantité de mouvement translationnelle d'une bulle, nous avons démontré que l'amplitude du déplacement vertical — du au gradient de pression acoustique — était extrêmement faible dans le cas de la sonoluminescence. La formation de jets dus à ce seul déplacement, invoquée par Prosperetti pour expliquer le phénomène, semble ainsi très improbable. Ce modèle de déplacement est applicable dans le cas général de bulles en lévitation acoustique. Un très bon accord a été obtenu entre ses prédictions et des simulations numériques directes. Il permet également d'étendre les résultats classiques concernant la position d'équilibre aux cas où la viscosité n'est pas négligeable. Dans le cas de bulles de petite taille et d'amplitudes de forçage modérées les écarts entre la position d'équilibre prédite par la théorie inviscide et par notre modèle sont importants.

Nous avons également effectué des simulations directes de l'effondrement de bulles près de parois solides. Les résultats obtenus sont qualitativement et quantitativement similaires aux observations expérimentales de Lauterborn, mais confirment que la dissipation acoustique et thermique doit être prise en compte pour pouvoir décrire tous les aspects de ce phénomène. Les simulations permettent d'accéder au détail de l'impact des jets et de leur évolution ultérieure, données difficilement accessibles expérimentalement. Les simulations numériques de ce phénomène effectuées jusqu'à maintenant utilisaient généralement des méthodes d'intégrale de frontière et ne permettaient pas d'évaluer l'influence de la viscosité sur la formation et l'évolution des jets. Nous avons ainsi utilisé notre code pour effectuer une étude paramétrique, incluant la viscosité, de la vitesse d'impact. Nous avons obtenu un diagramme décrivant la valeur critique du Reynolds en dessous de laquelle la viscosité empêche tout impact du jet. Ce diagramme fait apparaître une relation simple entre les paramètres adimensionnés contrôlant le phénomène.

Cette étude ouvre de nombreuses perspectives, tant sur le plan numérique que sur celui des applications. La formulation de volume fini appliquée au cas de la surface libre devrait être utilisée également dans le cas diphasique. Cela permettrait de traiter précisément l'ensemble des termes présentant une discontinuité au voisinage de l'interface ; en particulier les contraintes visqueuses lorsque la viscosité n'est pas identique dans chacune des phases. Ce saut de viscosité n'est en effet pas correctement traité par les méthodes à formulation continue [Benkenida, 1999]. Un projet plus ambitieux serait de créer une formulation générique permettant de traiter n'importe quel type d'interface : surface libre, interface fluide–fluide, membrane élastique, interface fluide–solide... De nombreux domaines, allant de la biomécanique à l'étude des couplages fluide–structure, bénéficieraient d'une méthode numérique capable d'associer ces différents modèles. Un tel formalisme serait également utile dans le cadre de l'extension à trois dimensions sur laquelle nous avons commencé à travailler.

Comme nous l'avons vu, les reconnexions doivent être traitées implicitement pour les méthodes de suivi de front. Ce contrôle de la topologie est une mauvaise ou une bonne chose suivant le type de problème étudié. Si l'on s'intéresse au détail des reconnexions, il semble important de pouvoir contrôler la manière dont elles s'effectuent. Notre technique pourrait ainsi être utilisée en conjonction avec une modélisation sous–maille détaillée des effets aux petites échelles spatiales : la combinaison d'équations de lubrification et de forces d'interaction de type Van der Waals, résolues le long de l'interface décrite par les marqueurs semble une approche prometteuse.

Sous sa forme actuelle, le code de résolution peut être utilisé pour de nombreux problèmes combinant déformations importantes et nécessité d'une description précise des termes surfaciques. Les différentes études effectuées au moyen de méthodes d'intégrale de frontière pourraient ainsi être étendues au cas visqueux. L'étude de l'influence de la viscosité sur la formation des jets peut également être prolongée en incluant les effets de la tension de surface. L'application des critères d'impact obtenus à l'endommagement par cavitation ainsi que leur vérification expérimentale seraient également intéressants.

Enfin, bien qu'une explication convaincante de la sonoluminescence ait récemment été proposée [Hilgenfeldt et al., 1999], de nombreux aspects de ce phénomène restent obscurs. Aucune théorie ne prédit par exemple correctement la position d'équilibre d'une bulle sonoluminescente [Matula et al., 1997a]. Notre étude de l'influence du gradient de pression acoustique remet également en cause l'interprétation classique des expériences de sonoluminescence effectuées en micro–gravité [Matula et al., 1996, Matula et al., 1997b]. Ces expériences ont montré un accroissement de l'intensité de la lumière émise dans les conditions de gravité réduite. Cet effet est généralement attribué à l'influence réduite de la dissymétrie causée par la gravité et par la force de Bjerknes. La symétrie sphérique étant mieux préservée, l'intensité lumineuse serait plus élevée. Or, nous avons vu que l'influence de la force de Bjerknes est de toute façon négligeable dans le cas de gravité normale...

A. Résolution numérique de l'équation de Rayleigh–Plesset

Une approche simple pour résoudre les équations différentielles ordinaires consiste à utiliser une méthode explicite. Une discrétisation temporelle de type Runge–Kutta donne généralement de bons résultats. Cette approche fonctionne correctement dans le cas de l'équation de Rayleigh–Plesset (2.6) lorsque l'amplitude des oscillations radiales n'est pas trop importante. Lorsque l'amplitude de forçage croît, les oscillations secondaires s'accentuent. Ces oscillations sont accompagnées de fortes accélérations agissant pendant des temps de plus en plus courts. Il est alors nécessaire de réduire le pas de temps pour assurer la stabilité de la méthode de Runge–Kutta. Ce pas de temps très court n'est pas nécessaire sur l'ensemble d'une période de forçage et une bonne approche consiste à utiliser une adaptation dynamique.

Nous avons essayé différentes techniques. Celle qui donne les meilleurs résultats en terme d'efficacité et de robustesse consiste à évaluer numériquement l'erreur sur la solution à chaque pas de temps. Comparée à une tolérance donnée, cette erreur permet l'ajustement du pas de temps. Cette méthode décrite dans *Numerical Recipes* [Press et al., 1989] peut être résumée ainsi :

1. Une solution Λ_1 au temps $t + \delta t$ est évaluée à partir de la solution au temps t en effectuant une itération de Runge–Kutta de pas de temps δt.
2. Une solution Λ_2 est évaluée en effectuant deux itérations de Runge–Kutta de pas de temps $\delta t/2$.
3. Une approximation de l'erreur sur la solution est obtenue comme $\Delta = |\Lambda_1 - \Lambda_2|$.
4. Pour une méthode de Runge–Kutta d'ordre 4, l'erreur sur la solution varie comme $(\delta t)^5$, ce qui permet d'obtenir le nouveau pas de temps comme

$$\delta t \leftarrow \delta t \left(\frac{\epsilon}{\Delta} \right)^{1/5}, \tag{A.1}$$

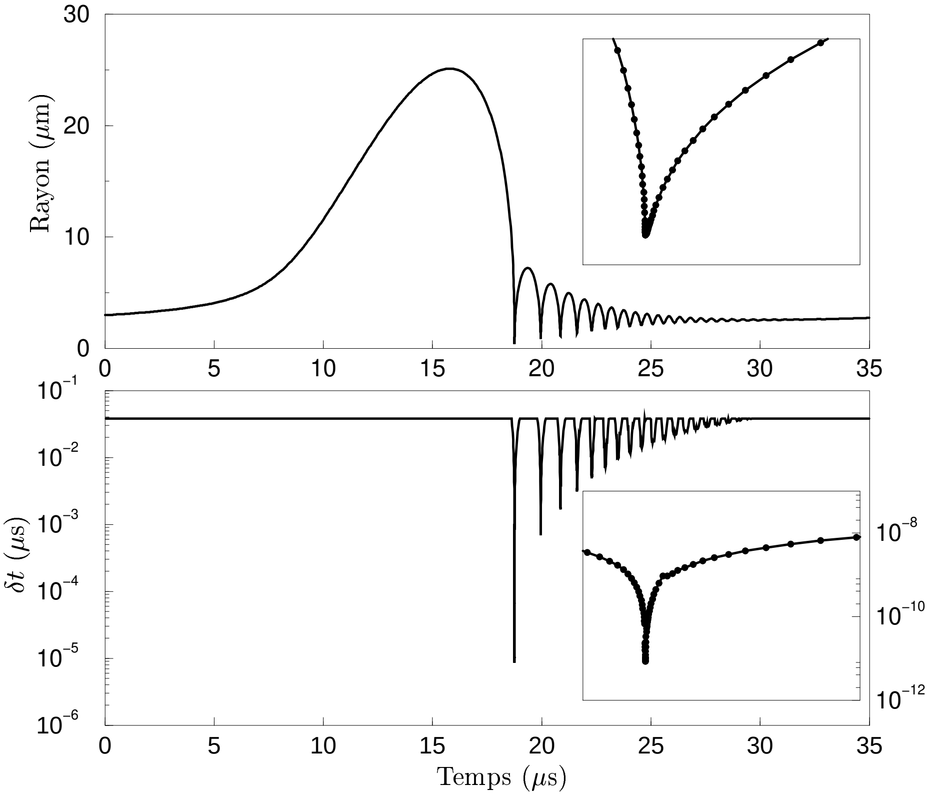


FIG. A.1.: Évolution temporelle du rayon et du pas de temps. Les détails de l'évolution représentés correspondent au premier rebond.

où ϵ est une tolérance définie par l'utilisateur.

5. Si l'erreur Δ est supérieure à ϵ retourner en 1.

Dans la pratique nous considérons une tolérance relative définie par rapport au rayon de la bulle, généralement $|R_1 - R_2|/R_2 < 10^{-5}$. Une borne supérieure sur le pas de temps est également fixée sous la forme $\delta t <= T/n$, où T est la période propre d'oscillation radiale de la bulle et n est le nombre minimum de points désiré. La figure A.1 illustre l'évolution du rayon et du pas de temps pour une bulle de 3 μm de rayon à l'équilibre et une amplitude de forçage de 1.3 bars. L'équation utilisée inclue une prise en compte de la compressibilité du liquide (équation (2.8)). Il est intéressant de noter que lorsque ce terme d'amortissement n'est pas pris en compte, la résolution numérique ne converge pas. À l'instant du premier rebond, le pas de temps décroît très rapidement jusqu'à atteindre les limites de la précision machine sans pouvoir assurer la tolérance prescrite.

Nous utilisons également cette méthode lorsque la résolution d'équations couplées avec la solution de Rayleigh–Plesset est nécessaire. On peut citer en particulier les équations d'évolution de l'amplitude des modes de déformation (2.12) et les équations modèles pour la quantité de mouvement verticale (2.29) et (2.30). Les termes d'histoire de l'équation (2.30) posent un problème particulier. L'intégrale double apparaissant dans ceux-ci ne permet pas d'effectuer une intégration incrémentale où seule la modification de ce terme entre t et $t + \delta t$ devrait être calculée. L'ensemble de l'intégrale entre 0 et t doit être recalculée à chaque pas de temps. Ce calcul peut être très long lorsque de nombreux pas de temps sont nécessaires au cours de la résolution. En particulier, l'intégration du terme d'histoire causé par des oscillations secondaires de grande amplitude aboutit à des temps de calcul rédhibitoires.[1]

Il est parfois nécessaire de déterminer numériquement la position d'équilibre de la bulle par rapport au champ acoustique (cf. section 2.3.1). La première technique qui vient à l'esprit consiste à positionner la bulle à un endroit quelconque du champ acoustique et à faire évoluer sa position en utilisant l'équation (2.29) ou (2.30). Lorsque la vitesse moyenne du centre de gravité est nulle la bulle a atteint sa position d'équilibre. Malheureusement, la vitesse de déplacement de la bulle (sous l'effet de la poussée d'Archimède) est extrêmement faible par rapport à la longueur d'onde du champ acoustique et à la fréquence de forçage. La convergence de la bulle vers sa position d'équilibre nécessite ainsi plusieurs milliers de

[1] En général cependant les régimes correspondant à ces oscillations ne vérifient pas les hypothèses nécessaires à la validité de l'équation (2.30). En particulier l'hypothèse de Reynolds faible.

cycles. Nous utilisons une technique de dichotomie contrôlée par la vitesse moyenne du centre de gravité de la bulle. Celle-ci est placée initialement à mi-chemin entre un noeud et un ventre du champ acoustique. On calcule ensuite son évolution pour une dizaine de périodes de forçage. Le signe de la vitesse moyenne obtenue permet alors de déterminer quelle doit être la prochaine position initiale. La vitesse moyenne du centre de gravité est calculée en appliquant un filtre de largeur T à la courbe de vitesse obtenue par le calcul. La vitesse moyenne est obtenue comme la valeur moyenne de cette courbe. Afin d'éviter de prendre en compte les effets transitoires initiaux les cinq premières périodes ne sont pas retenues.

B. Couplage entre marqueurs et maillage cartésien

La technique de marqueurs de surface ne se restreint pas au cas du maillage cartésien. Cependant les propriétés géométriques d'un tel maillage autorisent un calcul relativement simple des termes intégraux nécessaires pour le couplage dynamique entre le maillage de surface (chaîne de marqueurs) et le maillage de volume (grille cartésienne). Nous présentons ici la technique utilisée pour calculer les termes de tension de surface et la fraction surfacique. Cette technique peut aisément être généralisée à d'autres types de termes intégraux.

La première étape lors du couplage est la détermination des points d'intersection entre les polynômes définissant l'interface et les bords des cellules de la grille de calcul. Afin de pouvoir effectuer cette opération localement et en suivant l'interface, nous supposons que la distance entre deux marqueurs et strictement inférieure à h, la taille du côté d'une cellule. Cette propriété peut être facilement imposée lors de la redistribution. Si l'on considère un segment reliant deux marqueurs vérifiant cette propriété, les bords des cellules potentiellement coupés par l'interface correspondante sont représentés en traits épais sur la figure B.1. Pour chaque paire de marqueurs, il suffit donc de déterminer dans quelle cellule (i, j) se trouve le premier marqueur (en prenant la partie entière de ses coordonnées). La position (x, y) du second marqueur permet alors de déterminer les équations à résoudre, à savoir

$$\begin{array}{ll} \text{aucune} & \text{si } x \in]i, i+1[\text{ et } y \in]j, j+1[, \\ p_x(s) = i & \text{si } x \leq i \\ p_x(s) = i+1 & \text{si } x \geq i+1 \\ p_y(s) = j & \text{si } y \leq j \\ p_y(s) = j+1 & \text{si } y \geq j+1 \end{array} \tag{B.1}$$

Les racines d'un polynôme du troisième ordre peuvent être déterminées en utilisant une expression analytique de la solution. Dans la pratique, il est cependant plus efficace d'utiliser une méthode de Newton couplée

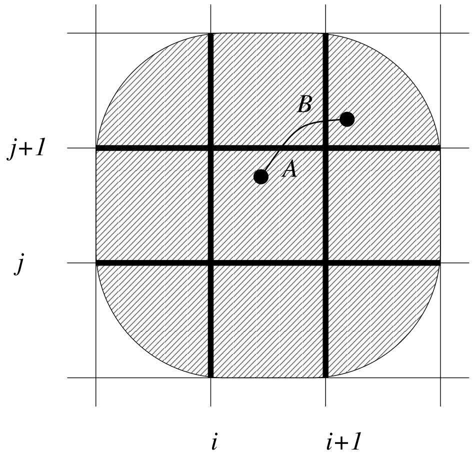


FIG. B.1.: Bords potentiellement coupés par l'interface pour une paire de marqueurs donnée. L'extrémité du segment se trouve nécessairement à l'intérieur de la zone hachurée.

avec la résolution d'une équation quadratique sur la dérivée du polynôme permettant de déterminer les intervalles contenant les racines. Les points d'intersection obtenus permettent de calculer le terme de tension de surface (ainsi que le terme de correction de pression dans le cas diphasique). Ce terme est toujours appliqué à deux cellules contiguës. Dans l'exemple de la figure B.1 le terme de tension de surface évalué au point A comme $\sigma \mathbf{t}(A)$, où $\mathbf{t}(A)|\mathbf{t}(A)| = (p'_x(s_A), p'_y(s_A))$ est ajouté à la cellule (i, j) et soustrait à la cellule $(i, j+1)$. L'orientation de la chaîne de marqueurs garantit une valeur correcte du signe. Une fois cette même opération effectuée pour l'ensemble de la chaîne de marqueurs, le total obtenu dans chaque cellule correspond à la contribution de la tension de surface et ce, quel que soit le détail des intersections (l'interface peut traverser plusieurs fois la même cellule par exemple).

Si les deux fluides ont les mêmes propriétés physiques il n'est pas nécessaire de différencier les deux phases et seul les termes de surface éventuels doivent être évalués. Si les propriétés physiques (viscosités, densités) diffèrent, il est nécessaire d'identifier chacune des phases ce qui nécessite le calcul de la fraction volumique occupée par l'un des deux fluides dans chacune des cellules. Dans une cellule coupée par l'interface, la fraction volumique (surfacique plutôt en deux dimensions) peut être calculée en transformant l'intégrale de surface en intégrale de contour

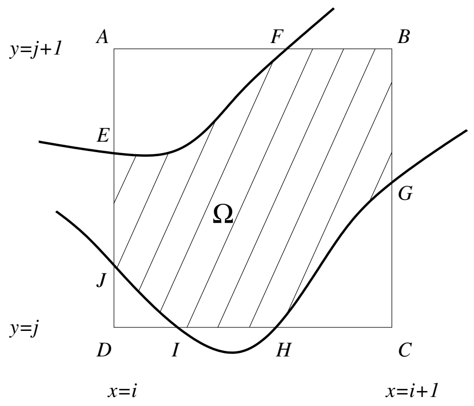


Fig. B.2.: Calcul de la fraction volumique par intégrale de contour.

selon la formule de Stokes

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \tag{B.2}$$

En choisissant $P = 0$ et $Q = x$ on obtient

$$\oint_{\partial\Omega} xdy = \int_{\Omega} dxdy. \tag{B.3}$$

Cette intégrale doit être évaluée sur l'ensemble du contour $\partial\Omega$ délimitant la zone Ω occupée par un des deux fluides (figure B.2). La partie de $\partial\Omega$ correspondant à l'interface est définie par les deux polynômes p_x et p_y

$$\begin{aligned} p_x(s) &= a_x s^3 + b_x s^2 + c_x s + d_x \\ p_y(s) &= a_y s^3 + b_y s^2 + c_y s + d_y. \end{aligned} \tag{B.4}$$

L'intégrale le long de cette partie du contour peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \int x(s)y'(s)ds &= \frac{1}{2}a_x a_y s^6 + \frac{1}{5}(3b_x a_y + 2a_x b_y)s^5 + \\ & \frac{1}{4}(a_x c_y + 2b_x b_y + 3c_x a_y)s^4 + \\ & \frac{1}{3}(b_x c_y + 2c_x b_y + 3d_x a_y)s^3 + \\ & \frac{1}{2}(c_x c_y + 2d_x b_y)s^2 + d_x c_y s. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Les termes restants correspondent aux bords de la cellule éventuellement coupés par l'interface. Seuls les bords verticaux (tels que $dy \neq 0$) sont à prendre en compte (BG et JE sur la figure B.2).

Un simple parcours de l'interface avec détermination des points d'intersection (E, F, G, H, I et J) est suffisant pour obtenir les contributions des intégrales sur les morceaux d'interface contenus dans la cellule (EF, GH et IJ). Le cas des intégrales sur les bords verticaux est plus complexe. Un calcul direct de ces termes nécessite la mémorisation de l'histoire des intersections. En effet au moment où l'intersection E est calculée il n'y a pas a priori de moyen de savoir que l'interface va recouper le bord de la cellule en J. Il serait donc nécessaire de stocker le fait que l'interface traverse le bord AD de la cellule en E et J et dans une seconde phase de traitement, de rajouter le terme intégral sur JE. Un algorithme permettant de traiter de manière générale ce problème (quel que soit le nombre d'intersections avec les bords de la cellule) est relativement lourd à mettre en place.

On peut obtenir une solution beaucoup plus simple à ce problème si l'on prend en compte l'historique du déplacement de l'interface. Pour des raisons de stabilité, nous limitons le nombre CFL de l'écoulement à 1/2. Ceci permet d'écrire la relation suivante entre les valeurs de la fraction volumique c pour une cellule quelconque de la discrétisation entre deux pas de temps successifs n et $n+1$

$$c^n - 1/2 \leq c^{n+1} \leq c^n + 1/2. \tag{B.6}$$

Nous définissons maintenant un algorithme simple (mais a priori faux) de calcul de la fraction volumique comme suit. En suivant l'interface on détermine comme décrit ci-dessus les points d'intersection avec le maillage fixe. Si l'intersection se produit avec un bord vertical on ajoute à la fraction volumique dans cette cellule le terme intégral sur la partie du bord située "à l'intérieur" de l'interface. L'intérieur est déterminé par l'orientation de la chaîne de marqueurs. On rajoute également le terme intégral évalué sur le morceau d'interface contenu dans la cellule entre deux points d'intersection.

Pour l'exemple de la figure B.2 cet algorithme correspond aux opérations suivantes (du point de vue de la cellule (i, j)) :

1. Calcul du point d'intersection E.
2. $c_{i,j} \leftarrow \oint_D^E x dy$.
3. Calcul du point d'intersection F.
4. $c_{i,j} \leftarrow c_{i,j} + \oint_E^F x dy$.
5. Calcul le long de l'interface pour d'autres cellules traversées par l'interface.

6. Calcul du point d'intersection G (retour de l'interface dans la cellule (i, j)).
7. $c_{i,j} \leftarrow c_{i,j} + \oint_B^G xdy$.
8. Calcul du point d'intersection H.
9. $c_{i,j} \leftarrow c_{i,j} + \oint_G^H xdy$.
10. Calcul du point d'intersection I (retour de l'interface dans la cellule).
11. Calcul du point d'intersection J.
12. $c_{i,j} \leftarrow c_{i,j} + \oint_I^J xdy$.
13. $c_{i,j} \leftarrow c_{i,j} + \oint_J^A xdy$.
14. Calcul le long de l'interface pour d'autres cellules traversées par l'interface.

Clairement cet algorithme est incorrect. En effet, les opérations 2 et 13 correspondent à une contribution totale sur le bord vertical AD de

$$2 \oint_J^E xdy + \oint_D^J xdy + \oint_E^A xdy, \tag{B.7}$$

au lieu de $\oint_J^E xdy$, soit une erreur de

$$\oint_J^E xdy + \oint_D^J xdy + \oint_E^A xdy = \oint_D^A xdy = i. \tag{B.8}$$

La valeur i de l'erreur commise est donc nécessairement entière. Il est clair que l'algorithme précédent définit donc la valeur de c à une constante entière k près quel que soit le trajet de l'interface. Cet algorithme est également purement local dans la mesure où il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'historique du trajet de l'interface. Le seul problème restant est la détermination pour chaque cellule traversée par l'interface de la valeur de cette constante. Ce problème est simplement résolu par l'utilisation des inégalités (B.6) qui permettent de déterminer de manière unique la valeur de k.

Nous avons maintenant obtenu les valeurs de c pour chacune des cellules traversées par l'interface. Il est également nécessaire de mettre à jour la fraction volumique des cellules qui ne sont plus traversées par l'interface mais qui l'étaient au pas de temps précédent (avant que l'interface ne se déplace). Évidemment seules deux valeurs sont possibles : zéro ou un. Les inégalités (B.6) donnent la réponse correcte.

L'ensemble de ces opérations (calcul des termes surfaciques et de la fraction volumique) peuvent donc être effectuées au cours du même balayage de la chaîne de marqueurs. Les intersections entre la représentation polynômiale de l'interface et la grille cartésienne sont ainsi calculées et utilisées une seule fois. L'algorithme est purement local et le coût de calcul est donc $\mathcal{O}(N)$ où N est le nombre de marqueurs. Dans le cas général le nombre de marqueurs est de l'ordre de la dimension linéaire L (en deux dimensions) de la grille cartésienne utilisée. Le coût de la résolution des équations de Navier–Stokes sur la grille cartésienne est d'ordre L^2. Le rapport du coût des opérations sur la chaîne de marqueurs au coût de calcul dû à la résolution des équations fluides est donc $\mathcal{O}(1/L)$. Plus le maillage utilisé est fin, plus faible est la part du temps de calcul dû aux marqueurs. Dans la pratique, pour une résolution relativement grossière de 64×64 le coût mesuré dû aux marqueurs est inférieur à 10 % du temps total.

Dans certains cas complexes (très grand nombre de gouttes, interface très convoluée) la dimension fractale de l'interface peut se rapprocher de celle d'une surface. Dans ce cas on s'attend à passer proportionnellement plus de temps dans les opérations de marqueurs. Ceci semble toutefois justifié par la nécessité dans ce cas de résoudre précisément les termes surfaciques qui peuvent représenter une part importante voire prépondérante de l'énergie interne du système.

Bibliographie

[Apfel, 1976] Apfel, R. E. (1976). Technique for measuring the adiabatic compressibility, density, and sound speed of submicroliter liquid samples. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(2):339–343.

[Ashgriz et al., 1991] Ashgriz, N. et Poo, J. Y. (1991). Flair: Flux line-segment model for advection and interface reconstruction. *J. Comp. Phys.*, 93:449–468.

[Barber et al., 1992] Barber, B. P., Hiller, R., Arisaka, K., Fetterman, H., et Putterman, S. (1992). Resolving the picosecond characteristics of synchronous sonoluminescence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91:3061.

[Barber et al., 1994] Barber, B. P., Wu, C. C., Löfstedt, R., Roberts, P. H., et Putterman, S. J. (1994). Sensitivity of sonoluminescence to experimental parameters. *Phys. Rev. Lett.*, 72:1380–1383.

[Benjamin et al., 1966] Benjamin, T. B. et Ellis, A. T. (1966). The collapse of cavitation bubbles and the pressure thereby produced against solid boundaries. *Phil. Trans. Royal Soc. London A*, 260:221–240.

[Benjamin et al., 1990] Benjamin, T. B. et Ellis, A. T. (1990). Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles. *J. Fluid Mech.*, 212:65–80.

[Benkenida, 1999] Benkenida, A. (1999). *Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces. Application à la dy-*

namique des bulles de Taylor. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

[Blake et al., 1997] Blake, J. R., Hooton, M. C., Robinson, P. B., et Tong, R. P. (1997). Collapsing cavities, toroidal bubbles and jet impact. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 355(1724):537–550.

[Blake et al., 1993] Blake, J. R., Robinson, P. B., Shima, A., et Tomita, Y. (1993). Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 255:707–721.

[Blake et al., 1986] Blake, J. R., Taib, B. B., et Doherty, G. (1986). Transient cavities near boundaries. part 1. rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 170:479–497.

[Blake et al., 1998] Blake, J. R., Tomita, Y., et Tong, R. P. (1998). The art, craft and science of modelling jet impact in a collapsing cavitation bubble. *Appl. Sci. Res.*, 58:77–90.

[Blanco et al., 1995] Blanco, A. et Magnaudet, J. (1995). The structure of the axisymmetric high-reynolds number flow around an ellipsoidal bubble of fixed shape. *Phys. Fluids*, 7(6):1265–1274.

[Boris et al., 1973] Boris, J. P. et Book, D. L. (1973). Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comp. Phys.*, 11:38–69.

[Brackbill et al., 1992] Brackbill, J. U., Kothe, D. B., et Zemach, C. (1992). A continuum method for modelling surface tension. *J. Comp. Phys.*, 100:335–354.

[Brandt, 1982] Brandt, A. (1982). *Guide to multigrid development*. Multigrid Methods, Springer Verlag, Berlin.

[Brenner et al., 1995] Brenner, M. P., Lohse, D., et Dupont, T. F. (1995). Bubble shape oscillations and the onset of sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 75:954–957.

[Briggs, 1987] Briggs, W. L. (1987). *A multigrid tutorial.* SIAM Philadelphia.

[Brujan et al., 2000] Brujan, E. A., Nahen, K., Schmidt, P., et Vogel, A. (2000). Dynamics of laser-induced cavitation bubbles near elastic boundaries, part 1. influence of the bubble-boundary distance. *J. Fluid Mech.* Accepted for publication.

[Cordry et al., 1993] Cordry, S. M., Crum, L. A., et Roy, R. A. (1993). Some light emission features of single bubble sonoluminescence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94:1810.

[Crum, 1994] Crum, L. A. (September 1994). Sonoluminescence. *Physics Today*, pages 22–29.

[Crum et al., 1983] Crum, L. A. et Prosperetti, A. (1983). Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: An interpretation of some experimental results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73:121.

[Dandy et al., 1986] Dandy, D. S. et Leal, L. G. (1986). Boundary layer separation from a smooth slip surface. *Phys. Fluids*, 29:1360.

[DeBar, 1974] DeBar, R. (1974). Fundamentals of the KRAKEN code. *Technical Report UCIR-760, LLNL.*

[Dickinson et al., 1984] Dickinson, J. T., Brix, L. B., et Jensen, L. C. (1984). Electron and positive ion emission accompanying fracture of wint-o-green lifesavers and single crystal sucrose. *J. Phys. Chem.*, 88:1698.

[Eggers, 1993] Eggers, J. (1993). Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3458–3461.

[Evans, 1996] Evans, A. K. (1996). Instability of converging shock waves and sonoluminescence. *Phys. Rev. E*, 54:5004–5011.

[Frenzel et al., 1934] Frenzel, H. et Schultes, H. (1934). Lumineszenz im ultraschallbeschikten wasser. *Z. Phys. Chem. Abt. B*, 27:421–424.

[Fukai et al., 1993] Fukai, J., Zhao, Z., Poulikakos, D., Megaridis, C. M., et Miyatake, O. (1993). Modeling of the deformation of a liquid droplet impinging upon a flat surface. *Phys. Fluids*, 5:2588–2599.

[Gaines, 1932] Gaines, N. (1932). Magnetostriction oscillator producing intense audible sound and some effects obtained. *Physics*, 3:209–229.

[Gaitan et al., 1992] Gaitan, D. F., Crum, L. A., Church, C. C., et Roy, R. A. (1992). Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble. *J. Acoust. Soc. Am.*, 91:3166–3183.

[Glimm et al., 1987] Glimm, J., McBryan, O., Menikoff, R., et Sharp, D. H. (1987). Front tracking applied to Rayleigh-Taylor instability. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:230–251.

[Gompf et al., 1997] Gompf, B., Günther, R., Nick, G., Pecha, R., et Eisenmenger, W. (1997). Resolving sonoluminescence pulse width with time-correlated single photon counting. *Phys. Rev. Lett*, 79:1405.

[Greenspan et al., 1993] Greenspan, H. P. et Nadim, A. (1993). On sonoluminescence of an oscillating gas bubble. *Phys. Fluids*, 5:1065–1067.

[Gueyffier et al., 1998] Gueyffier, D., Nadim, A., Li, J., Scardovelli, R., et Zaleski, S. (1998). Volume of fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *J. Comp. Phys.*, 152:423–456.

[Haberman et al., 1954] Haberman, W. L. et Morton, R. K. (1954). An experimental study of bubbles moving in liquids. *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 387:227.

[Hämmerlin et al., 1991] Hämmerlin, G. et Hoffman, K. H. (1991). *Numerical Mathematics*. Springer Verlag, Berlin.

[Harlow et al., 1965] Harlow, F. H. et Welch, J. E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182–2189.

[Hilgenfeldt et al., 1999] Hilgenfeldt, S., Grossman, S., et Lohse, D. (1999). A simple explanation of light emission in sonoluminescence. *Nature*, 398:402–404.

[Hiller et al., 1992] Hiller, R., Putterman, S. J., et Barber, B. P. (1992). Spectrum of synchronous picosecond sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1182–1184.

[Hiller et al., 1994] Hiller, R., Weninger, K., Putterman, S. J., et Barber, B. P. (1994). Effects of noble gas doping in single-bubble sonoluminescence. *Science*, 266:248–250.

[Hiller et al., 1995] Hiller, R. A. et Putterman, S. J. (1995). Observation of isotope effects in sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3549–3551.

[Holt et al., 1996] Holt, R. G. et Gaitan, D. F. (1996). Observation of stability boundaries in the parameter space of single bubble sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3791–3794.

[Holzfuss et al., 1998] Holzfuss, J., Rüggeberg, M., et Billo, A. (1998). Shock wave emissions of a sonoluminescing bubble. *Phys. Rev. Lett.*, 81(24):5434–5437.

[Keller et al., 1980] Keller, J. B. et Miksis, M. (1980). Bubble oscillations of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(2).

[Kornfeld et al., 1944] Kornfeld, M. et Suvorov, L. (1944). On the destructive action of cavitation. *J. Appl. Phys.*, 15:495–506.

[Kwak et al., 1985] Kwak, H. Y. et Panton, R. L. (1985). Tensile strength of simple liquids predicted by a model of molecular interactions. *J. Phys. D*, 17:979–987.

[Lafaurie et al., 1994] Lafaurie, B., Nardone, C., Scardovelli, R., Zaleski, S., et Zanetti, G. (1994). Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer. *J. Comp. Phys.*, 113:134–147.

[Lamb, 1932] Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, 6th edition.

[Landau et al., 1959] Landau, L. D. et Lifchitz, E. M. (1959). *Fluid Mechanics.* Pergamon Press, New York.

[Lauterborn et al., 1997] Lauterborn, W. et Ohl, C. D. (1997). Cavitation bubble dynamics. *Ultrasonics Sonochemistry*, 4:65–75.

[Leighton, 1997] Leighton, T. G. (1997). *The acoustic bubble.* Academic Press, London.

[Li, 1995] Li, J. (1995). Calcul d'interface affine par morceaux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320:391–396.

[Li, 1996] Li, J. (1996). *Résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes avec reconnexion d'interfaces. Méthode de suivi de volume et application à l'atomisation.* Thèse de doctorat, Université Paris VI.

[Lighthill, 1978] Lighthill, J. (1978). Acoustic streaming. *J. Sound Vib.*, 61:391–418.

[Löfstedt et al., 1993] Löfstedt, R., Barber, B. P., et Putterman, S. J. (1993). Toward a hydrodynamic theory of sonoluminescence. *Phys. Fluids*, 5:2911.

[Longuet-Higgins, 1998] Longuet-Higgins, M. S. (1998). Viscous streaming from an oscillating spherical bubble. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 454:725–742.

[Longuet-Higgins et al., 1995] Longuet-Higgins, M. S. et Oğuz, H. N. (1995). Critical microjets in collapsing cavities. *J. Fluid Mech*, 290:183–201.

[Magnaudet et al., 1998] Magnaudet, J. et Legendre, D. (1998). The viscous drag force on a spherical bubble with a time-dependent radius. *Phys. Fluids*, 10(3):550–554.

[Magnaudet et al., 1995] Magnaudet, J., Rivero, M., et Fabre, J. (1995). Accelerated flows around a rigid sphere or a spherical bubble. Part I: Steady straining flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 284:97–136.

[Marinesco et al., 1933] Marinesco, N. et Trillat, J. J. (1933). Action des ultrasons sur les plaques photographiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 196:858–860.

[Matula et al., 1997a] Matula, T. J., Cordry, S. M., Roy, R. A., et Crum, L. A. (1997a). Bjerknes force and bubble levitation under single-bubble sonoluminescence conditions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(3):1522–1527.

[Matula et al., 1996] Matula, T. J., Roy, R. A., Crum, L. A., et Kuhns, D. L. (1996). Preliminary experimental observations of the effects of buoyancy on single-bubble sonoluminescence in microgravity and hypergravity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(4):2717.

[Matula et al., 1997b] Matula, T. J., Swalwell, J. E., Bezzerides, V., Hilmo, P., Chittick, M., et Crum, L. A. (1997b). Single-bubble sonoluminescence in microgravity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(5):3185.

[McHyman, 1984] McHyman, J. (1984). Numerical methods for tracking interfaces. *Physica D*, 12:396–407.

[Menchaca-Roca et al., 1997] Menchaca-Roca, A., Huidobro, F., Martinez-Davalos, A., Michaelian, K., Perez, A., Rodriguez, V., and Cârjan, N. (1997). Coalescence and fragmentation of colliding mercury drops. *J. Fluid Mech.*, 346:291–318.

[Mettin et al., 1999] Mettin, R., Luther, S., et Lauterborn, W. (1999). Bubble size distributions and structures in acoustic cavitation. In *Proceedings of the 2nd conference on ultrasound in processing*, pages 125–129, Toulouse, France.

[Moore, 1963] Moore, D. W. (1963). The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid Mech.*, 16:161.

[Moore, 1965] Moore, D. W. (1965). The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. *J. Fluid Mech.*, 23(4):749–766.

[Moss et al., 1994] Moss, W. C., Clarke, D. B., White, J. W., et Young, D. A. (1994). Hydrodynamic simulations of bubble collapse and picosecond sonoluminescence. *Phys. Fluids*, 6(9):2979–2985.

[Moss et al., 1997] Moss, W. C., Clarke, D. B., et Young, D. A. (1997). Calculated pulse widths and spectra of a single sonoluminescing bubble. *Science*, 276:1398–1401.

[Naudé et al., 1961] Naudé, C. F. et Ellis, A. T. (1961). On the mechanism of cavitation damage by nonhemispherical cavities collapsing in contact with a solid boundary. *Trans. ASME D: Basic Eng.*, 83:648–656.

[Noh et al., 1976] Noh, W. F. et Woodward, P. (1976). SLIC (simple line interface calculation). In *Proc. Fifth Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Berlin.

[Oğuz et al., 1990] Oğuz, H. N. et Prosperetti, A. (1990). Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces. *J. Fluid Mech.*, 203:79–143.

[Pecha et al., 1999] Pecha, R. et Gompf, B. (1999). Microimplosions: Cavitation collapse and shock wave emission on a nanosecond time scale. *Phys. Rev. Lett.*, 84(6):1328–1330.

[Pecha et al., 1998] Pecha, R., Gompf, B., Nick, G., Wang, Z. Q., et Eisenmenger, W. (1998). Resolving the sonoluminescence pulse shape with a streak camera. *Phys. Rev. Lett.*, 81:717–720.

[Peyret et al., 1983] Peyret, R. et Taylor, T. D. (1983). *Computational Methods for Fluid Flow.* Springer Verlag, New York/Berlin.

[Philipp et al., 1998] Philipp, A. et Lauterborn, W. (1998). Cavitation erosion by single laser-produced bubbles. *J. Fluid Mech.*, 361:75–116.

[Plesset et al., 1971] Plesset, M. S. et Chapman, R. B. (1971). Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary. *J. Fluid. Mech.*, 47:283–290.

[Plesset et al., 1956] Plesset, M. S. et Mitchell, T. P. (1956). On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid. *Q. Appl. Math.*, 13(4):419–430.

[Plesset et al., 1977] Plesset, M. S. et Prosperetti, A. (1977). Bubble dynamics and cavitation. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 9:145–185.

[Press et al., 1989] Press, W. H., Flemming, B. P., Teukolsky, S. A., et Vetterling, W. T. (1989). *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press.

[Press et al., 1991] Press, W. H. et Teukolsky, S. A. (sep/oct 1991). Multigrid methods for boundary value problems. *Computers in Physics*, pages 514–519.

[Prosperetti, 1977] Prosperetti, A. (1977). Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(1).

[Prosperetti, 1980] Prosperetti, A. (1980). Free oscillations of drops and bubbles: the initial-value problem. *J. Fluid Mech.*, 100:333–347.

[Prosperetti, 1981] Prosperetti, A. (1981). Motion of two superposed viscous fluids. *Phys. Fluids*, 24:1217–1223.

[Prosperetti, 1997] Prosperetti, A. (1997). A new mechanism for sonoluminescence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101:2003–2007.

[Puckett et al., 1997] Puckett, E. G., Almgren, A. S., Bell, J. B., Marcus, D. L., et Rider, W. J. (1997). A high order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows. *J. Comp. Phys.*, 100:269–282.

[Rayleigh, 1917] Rayleigh, L. (1917). On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, 34:94–98.

[Richard, 2000] Richard, D. (2000). *Situations de mouillage nul*. Thèse de doctorat, Université Paris VI. Figure V.15.

[Round, 1997] Round, C. G. (1997). *Mathematical modelling of sonoluminescence*. Thèse de doctorat, The University of Birmingham.

[Ryskin et al., 1984] Ryskin, G. et Leal, L. G. (1984). Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 2: Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid. *J. Fluid Mech.*, 148:1–18.

[Saffman, 1967] Saffman, P. G. (1967). The self-propulsion of a deformable body in a perfect fluid. *J. Fluid Mech.*, 28:385–389.

[Seeley, 1999] Seeley, F. B. (1999). Effects of higher-order modes and harmonics in single-bubble sonoluminescence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(4):2236–2242.

[Sethian, 1996] Sethian, J. A. (1996). *Level Sets Methods*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

[Shu et al., 1989] Shu, C. W. et Osher, S. (1989). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comp. Phys.*, 83:32–78.

[Stone, 1994] Stone, H. A. (1994). Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26:65–102.

[Suslick, 1988] Suslick, K. S. (1988). *Ultrasound: Its chemical, physical and biological effects.* VCH, New York.

[Sussman et al., 1994] Sussman, M., Smereka, P., et Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comp. Phys.*, 114:146–159.

[Sweby, 1984] Sweby, P. K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21:995–1011.

[Sweeting, 1998] Sweeting, L. M. (1998). Scientific experiments at home: Wintergreen candy and other triboluminescent materials. `http://www.towson.edu/~sweeting/wg/candywww.htm`.

[Tian et al., 1996] Tian, Y., Ketterling, J. A., et Apfel, R. E. (1996). Direct observation of microbubble oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100:3976–3978.

[Tryggvason et al., 1999] Tryggvason, G., Bunner, B., Ebrat, O., et Tauber, W. (1999). Computations of multiphase flows by a finite difference/front tracking method. I. Multi-fluid flows. Technical report, Department of mechanical engineering and applied mechanics, University of Michigan.

[Tryggvason et al., 1990] Tryggvason, G. et Unverdi, S. O. (1990). Computations of three-dimensional Rayleigh-Taylor instability. *Phys. Fluids*, 2:656–659.

[Unverdi et al., 1992] Unverdi, S. O. et Tryggvason, G. (1992). A front-tracking method for viscous incompressible, multi-fluids flows. *J. Comp. Phys.*, 100:25–37.

[Verraes et al., 2000] Verraes, T., Lepoint-Mullie, F., Lepoint, T., et Longuet-Higgins, M. S. (2000). Experimental study of the liquid flow near a single sonoluminescent bubble. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(1):117–125.

[Vogel et al., 1989] Vogel, A., Lauterborn, W., et Timm, R. (1989). Optical and acoustic investigations of the dynamics of laser produced cavitation bubbles near solid boundaries. *J. Fluid Mech.*, 206:299–338.

[Walsh et al., 1962] Walsh, J. L., Ahlberg, J. H., et Nilson, E. N. (1962). Best approximation properties of the spline fit. *Journal of mathematics and mechanics*, 11:2.

[Williams et al., 1998] Williams, M., Kothe, D., et Puckett, E. (1998). Convergence and accuracy of kernel-based continuum surface tension models. In *Proceedings of the Thirteenth U.S. National Congress of Applied Mechanics*, Gainesville, FL.

[Witham, 1974] Witham, G. B. (1974). *Linear and nonlinear waves.* Wiley, London. pp. 196–198.

[Wu et al., 1993] Wu, C. C. et Roberts, P. H. (1993). Shockwave propagation in a sonoluminescing gas bubble. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3424–3427.

[Young et al., 1984] Young, D. A. et Crum, L. A. (1984). An acoustic levitation technique for the study of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 76(4):1269.

[Youngs, 1982] Youngs, D. L. (1982). Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics.*

[Zalesak, 1979] Zalesak, S. T. (1979). Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comp. Phys.*, 31:335.

[Zeff et al., 2000] Zeff, B. W., Kleber, B., Fineberg, J., et Lathrop, D. P. (2000). Singularity dynamics in curvature collapse and jet eruption on a fluid surface. *Nature*, 403(27):401–404.

Table des figures

I.1. Déformation importante du maillage pour une méthode lagrangienne. . . . 3
I.2. Discrétisation des champs hydrodynamiques et de l'interface. 4
I.3. Fusion de deux interfaces par une méthode de marqueurs. 4
I.4. Représentation d'une interface par la méthode VOF sur un maillage cartésien. . . . 5
I.5. Représentation d'une interface par une méthode de ligne de niveau. . . . 5
I.6. Représentation schématique d'une cellule de lévitation utilisée lors des expériences de sonoluminescence. . . . 8
I.7. Évolution temporelle du rayon caractéristique d'une bulle sonoluminescente. . . . 9
I.8. Formation d'un jet pour une cavité s'effondrant tout en se déplaçant. . . . 12

1.1. Discrétisation de type MAC. . . . 19
1.2. Exemple de courants parasites autour d'une bulle au repos obtenus pour un schéma d'advection de type VOF et une formulation continue des termes de tension de surface. . . . 23
1.3. Incompatibilité entre tension de surface et gradient de pression sur une grille MAC. . . . 24
1.4. Volume de contrôle et contribution de la tension de surface. 27
1.5. Cas plus complexes pour la méthode de correction du gradient de pression. . . . 29
1.6. *Stencil* nécessaire pour la résolution de l'équation de pression avec opérateur de gradient corrigé. . . . 29
1.7. Évolution temporelle de l'amplitude des courants parasites. 31
1.8. Évolution de l'amplitude des courants parasites en fonction de la résolution spatiale. . . . 32
1.9. Solutions et erreurs pour le champ de pression autour d'une goutte avec tension de surface. . . . 33

1.10. Instabilité de Rayleigh–Taylor simulée par la méthode de marqueurs. 34
1.11. Instabilité de Rayleigh–Taylor simulée par la méthode CIAM. 35
1.12. Détail de l'interface pour les simulations figures 1.10 et 1.11. 35
1.13. Évolution temporelle de l'amplitude d'une onde capillaire. 39
1.14. Agrandissement de la figure 1.13 illustrant les différences entre la solution de mode normal et la solution de Prosperetti. 39
1.15. Élément de volume fini contenant une surface libre. 43
1.16. Différents cas pour l'interpolation bilinéaire de la vitesse des marqueurs. 47
1.17. Exemple de maillage utilisé par le code de surface libre. . 48
1.18. Exemple de sélection de points lors de l'extrapolation. . . 49
1.19. Schéma de la hiérarchie de grilles utilisées pour le raffinement dynamique. 51
1.20. Connexion entre deux grilles de niveaux différents. 51
1.21. Évolution temporelle du mode 2 de déformation d'une bulle initialement au repos. 55
1.22. Fusion de deux gouttes de mercure : série photographique. 56
1.23. Fusion de deux gouttes de mercure : simulation numérique. 57
1.24. Géométrie initiale au point de contact. 57
1.25. Champ de pression illustrant la propagation du train d'ondes capillaires. 58
1.26. Formation et éjection de gouttelettes par focalisation d'une onde capillaire. 58
1.27. Évolution temporelle du rayon au point de reconnexion. . 60
1.28. Définition des mesures géométriques. 60
1.29. Évolution temporelle de la position de l'extrémité de l'une des gouttes. 61
1.30. Vitesses terminales obtenues expérimentalement et par simulation numérique pour des bulles d'air se déplaçant dans du *Varsol*. 63
1.31. Lignes de courants autour de bulles se déplaçant dans un liquide.. 65
1.32. Évolution temporelle de la vitesse du fluide loin de la bulle pour les différentes valeurs du rayon indiquées dans la légende (en cm). 66
1.33. Évolution temporelle de la forme d'une bulle de 0.12 cm de rayon équivalent pour une période d'oscillation. 67

2.1. Solutions numériques des équations de Rayleigh–Plesset avec ou sans prise en compte de la compressibilité du liquide. 74
2.2. Énergie potentielle et relation entre les rayons maximum et minimum pour une bulle s'effondrant sous l'effet d'une pression extérieure constante. 77
2.3. Oscillations radiales libres d'une bulle initialement hors–équilibre. 78
2.4. Hiérarchie de maillages utilisée pour la simulation figure 2.3. 79
2.5. Effet du confinement sur la convergence vers la solution de Rayleigh–Plesset. 79
2.6. Oscillations forcées d'une bulle initialement en équilibre. . 81
2.7. Exemple d'instabilité d'origine numérique causée par l'utilisation d'un schéma d'advection peu précis. 82
2.8. Évolution temporelle du rayon et du mode 2 d'une bulle forcée acoustiquement. 83
2.9. Évolution temporelle de la forme de la bulle aux derniers instants de la simulation illustrée figure 2.8. 83
2.10. Diagramme de stabilité pour des paramètres typiques de la sonoluminescence. 84
2.11. Exemple de bulle d'indice de sphéricité 1.1. 84
2.12. Évolution de l'indice de sphéricité pour différents régimes. 85
2.13. Résolution numérique des équations de déplacement vertical avec et sans force d'histoire. 92
2.14. Évolution temporelle de la vitesse relative U d'une bulle placée dans un écoulement oscillant U_∞. 93
2.15. Positions d'équilibre obtenues avec différents modèles pour une bulle de 3 μm de rayon à l'équilibre. 96
2.16. Évolution temporelle du rayon en fonction de l'amplitude de forçage. 96
2.17. Évolution temporelle de la position relative du centre de gravité pour différentes amplitudes de forçage. 97
2.18. Vitesse relative du centre de gravité en fonction du temps. 98
2.19. Bulle “nageant” dans un fluide parfait sous l'effet de l'interaction non–linéaire entre les modes de déformation 2 et 3. 100
2.20. Séquence illustrant une transition typique entre la stabilité et l'instabilité des modes de déformations pour une bulle de 6 μm de rayon lorsque l'amplitude de forçage varie . . 102

3.1. Effondrement d'une bulle prés d'une paroi solide : interprétation en terme de bulle image. 106
3.2. Comparaison entre une série photographique à grande vitesse d'une bulle s'effondrant près d'une paroi solide et une simulation numérique directe. 110
3.3. Détail de la bulle traversée par le jet [Brujan et al., 2000]. 111
3.4. Version numérisée de la photographie 3.2 utilisée pour l'estimation de l'évolution temporelle du rayon. 111
3.5. Évolution du rayon équivalent en fonction du temps. . . . 112
3.6. Configuration équivalente aux conditions aux limites appliquées lors de la simulation illustrée figure 3.2. 113
3.7. Détail de la formation et de l'impact du jet. 113
3.8. Évolution temporelle d'une bulle s'effondrant prés d'une paroi solide pour un nombre de Reynolds élevé. 116
3.9. Évolution temporelle d'une bulle s'effondrant prés d'une paroi solide pour un nombre de Reynolds intermédiaire. . 116
3.10. Évolution temporelle d'une bulle s'effondrant prés d'une paroi solide pour un nombre de Reynolds faible. 117
3.11. Évolution temporelle de la position des pôles en fonction du nombre de Reynolds. 118
3.12. Détail de la figure 3.11. 118
3.13. Hiérarchie de grilles utilisée pour les simulations de la section 3.2. 120
3.14. Vitesse relative entre les pôles supérieur et inférieur de la bulle en fonction du temps. 120
3.15. Vitesse relative d'impact et minimum de la vitesse relative en fonction du nombre de Reynolds. 121
3.16. Valeur du nombre de Reynolds critique Re_c en fonction de β pour différentes valeurs de α. 122
3.17. Représentation redimensionnée de la famille de courbes de la figure 3.16. 123
3.18. Évaluation de la corrélation entre les courbes illustrées figure 3.16 en fonction des coefficients de renormalisation η et ζ. 124
3.19. Valeur du rapport du rayon maximum R_M et du rayon minimum R_m en fonction du nombre de Reynolds. 126

A.1. Évolution temporelle du rayon et du pas de temps. 134

B.1. Bords potentiellement coupés par l'interface pour une paire de marqueurs donnée. 138

B.2. Calcul de la fraction volumique par intégrale de contour. . 139