THÈSE DE DOCTORAT DE
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
(PARIS VI)

Spécialité : Mécanique

présentée par

Denis Gueyffier

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

Etude de l'impact de gouttes sur un film liquide mince. Développement de la corolle et formation de projections.

Soutenue le 14 Avril 2000 devant le jury composé de :

R. Bec	Examinateur
J.P Caltagirone	Rapporteur
F. Feuillebois	Président
M. Lance	Examinateur
G. Lavergne	Examinateur
E. Villermeaux	Rapporteur
S. Zaleski	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à remercier Stéphane Zaleski qui a encadré ce travail. Il m'a beaucoup soutenu et encouragé au cours de ces années. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je remercie Stéphane Popinet, Jie Li, Ruben Scardovelli, Maurice Rossi, Phil Yecko, Ali Nadim, Pierre Carles et Pierre-Yves Lagree avec qui j'ai beaucoup échangé.

J'exprime ma reconnaissance à Michael Brenner ainsi qu'à Jens Eggers et Irina Ginzburg avec qui j'ai collaboré au cours de visites dans leurs départements de recherche. Je remercie Cesar Dopazo, Howard Stone, Martine Benamar, Sergio Rica et Sarahoui Chaieb.

Je remercie tous les membres du LMM et tous les membres du MIT à Boston qui m'ont soutenu au cours de ce travail.

Merci enfin à mes amis et proches qui ont enduré mes expériences virtuelles ou tout à fait réelles sur les gouttes, bulles, "splash" et autres phénomènes mouillants.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Phénomènes aux interfaces

Les interfaces entre fluides sont le sige de phénomènes complexes. Elles sont soumises aux effets capillaires, à l'accumulation de surfactants, et peuvent être le siège de transferts de chaleur, de changements de phases ou de transferts de masse. Dans certains écoulements violents, elles subissent fréquemment des déformations importantes. Lors des impacts de gouttes, par exemple, on peut observer des phénomènes d'éclaboussures spectaculaires qui mettent en jeu des ruptures d'interfaces. On assiste, au cours de l'impact, à la formation de filaments ou de doigts liquides qui se brisent sous l'action des forces de surface en gouttes plus petites. Certaines déformations au niveau des interfaces peuvent aussi résulter de phénomènes d'instabilité comme celle, étudiée par Taylor [100], qui se produit lorsque deux fluides séparés par une interface sont soumis à un champ de gravité dirigé du fluide lourd vers le fluide léger.

Les écoulements avec interfaces font intervenir une multitude d'échelles. Ainsi, les ondes de gravité comme les vagues de mer peuvent avoir des amplitudes et des longueurs d'onde de l'ordre de 10 mètres. Les ondes capillaires de surface, les gouttes et les bulles ont des échelles associées aux phénomènes capillaires qui sont comprises entre quelques centimètres et quelques dizaines de microns. Enfin, sont comprises entre le nanomètre (l'échelle d'une molécule) et le micron, les échelles de longueur associées aux interactions intermoléculaires responsables de l'excès d'énergie aux interfaces (i.e. de la tension de surface). Ces forces sont à l'origine de la rupture des films minces lorsque, par exemple, une bulle vient crever la surface libre d'un liquide [30] ou de la formation de films précurseurs à l'avant des gouttes s'étalant sur un substrat [27].

Parmi les déformations les plus catastrophiques que peuvent subir les interfaces, on peut citer les phénomènes de reconnexion qui sont souvent causés par les forces de surface.

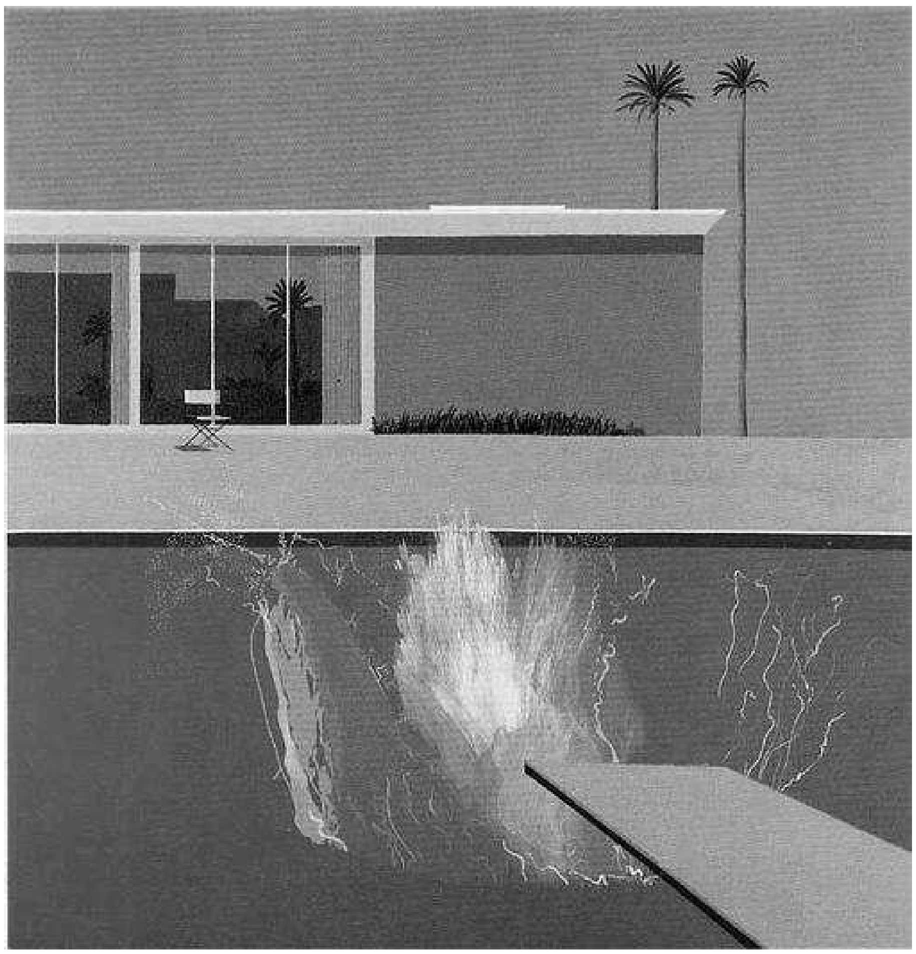


Fig. 1.1 – “A Bigger Splash”, David Hockney, Californie, 1967.

1.2 À propos de la rupture des interfaces et de la formation de gouttes

Les mécanismes de formation des gouttes liquides ont été étudiés vers 1830 par Savart [89] qui s'est intéressé à la rupture des jets liquides en gouttes. Il s'est étonné du fait que la formation des gouttes secondaires suit de très près l'apparition de perturbations au niveau de l'interface du jet, mais n'a pas réussi à déterminer le mécanisme responsable de la formation des gouttes. Plus tard, ce sont Plateau [73] en 1849 et Rayleigh [80] en 1879 qui découvriront le mécanisme de l'instabilité linéaire conduisant au pincement du jet qui porte classiquement le nom d'instabilité de Plateau-Rayleigh.

Ensuite, le travail expérimental de Worthington [107, 108, 109], vers 1880, a révélé la complexité des phénomènes qui se produisent au cours de l'impact d'une goutte sur une surface solide comme la formation de doigts liquides et de gouttelettes secondaires sur le pourtour de la lamelle qui se forme au cours du phénomène (voir Fig.1.2). Les photographies rapides d'Edgerton de 1957 [51] montrant l'impact d'une goutte sur un film liquide mince révèlent clairement la formation, dans la configuration expérimentale utilisée, de structures similaires sur le pourtour de la corolle, conférant à celle-ci un aspect de couronne. Il semble clair que, dans un bon nombre d'expériences d'impacts, ce sont ces doigts liquides qui donnent naissance aux gouttelettes secondaires. De nombreux mécanismes, dont certains seront discutés dans ce travail, ont été proposés pour expliquer la formation de ces doigts.

Plus récemment, on a cherché à comprendre les mécanismes non-linéaires conduisant au pincement des jets, i.e. le prolongement non-linéaire de l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Ces études ont permis de mieux comprendre la singularité au moment du pincement qui dépend localement des non-linéarités dans les équations du mouvement et non de la géométrie du problème macroscopique, celle d'une goutte pendante ou d'un jet liquide par exemple. Une solution "universelle" auto-similaire au pincement des colonnes liquides est décrite dans [34, 33, 32]. Cette solution théorique est la plus stable des solutions étudiées dans [10] et donc la plus fréquemment observée. Elle est en excellent accord avec les résultats expérimentaux de Peregrine [70] qui s'est interessé au pincement des gouttes d'eau pendantes et ceux de Nagel et al. [94] qui ont effectué des expériences similaires, cette fois en utilisant des fluides visqueux.

Si la singularité associée au pincement d'une colonne liquide axisymétrique est maintenant mieux connue, les mécanismes de rupture et de fusion des nappes liquides sont en revanche moins bien compris. Ainsi, les équations de l'hydrodynamique prédisent qu'une nappe purement bidimensionnelle *au repos* est stable. En effet, la composante purement bidimensionnelle de la tension de surface, contrairement à la composante axisymmétrique, a un effet stabilisant. Par contre, la rupture est possible dans le cas de films liquides d'épaisseur microscopique, inférieure à quelques nanomètres [37, 28], échelle à partir de laquelle l'effet destabilisant des forces de van der Waals l'emporte sur l'effet stabilisant des forces de tension de surface à condition que les forces de répulsion entre molécules de surfactants ne stabilisent pas les films. Dans certains cas *dynamiques*, les nappes liquides

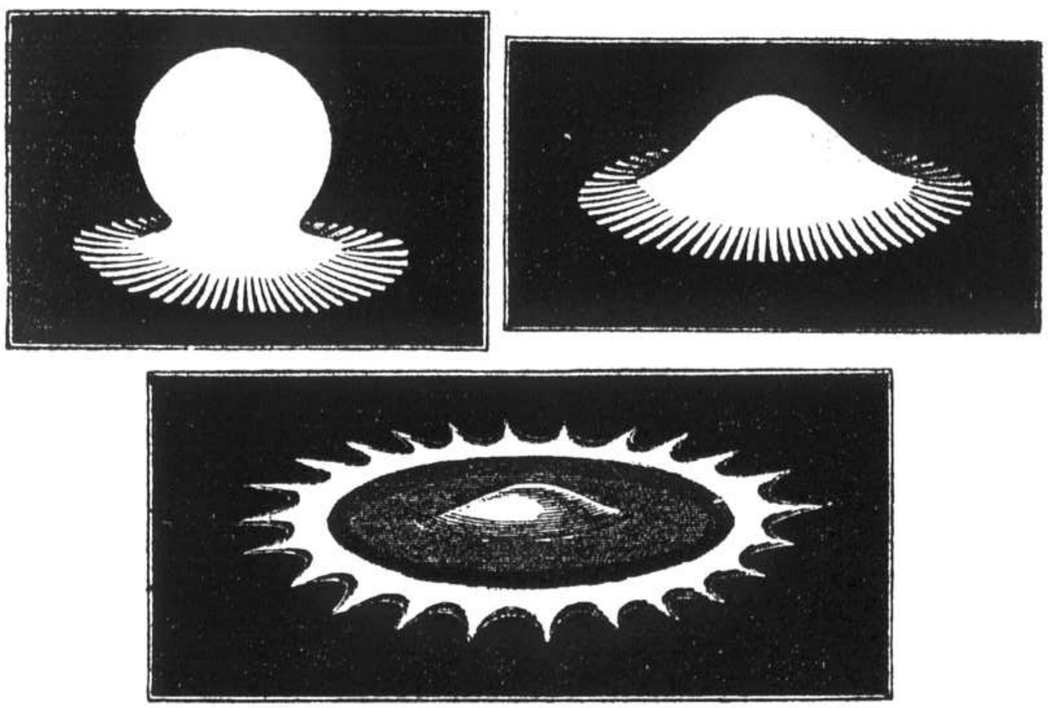


FIG. 1.2 – Planches extraites de [107]. La morphologie des structures observées sur le pourtour de la lamelle change au cours du phénomène d'impact. De petites digitations liquides apparaissent aux temps courts (en haut). De plus grosses structures sont observées à des temps plus longs (en bas).

peuvent s'amincir suffisamment pour atteindre des épaisseurs microscopiques et se rompre. Ainsi, une nappe liquide se trouvant dans une région hyperbolique de l'écoulement peut subir un amincissement continu [92]. Dans ce cas, la rupture de la nappe n'interviendra en un temps fini qu'avec l'intervention des interactions intermoléculaires. Un phénomène de rupture d'une nappe bidimensionnelle a été prédit récemment par Hou, Lowengrub et Shelley [49] dans un cas dynamique, celui de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz à nombre de Weber fini entre deux fluides non visqueux de densités égales. Le mécanisme que ceux-ci décrivent pour expliquer une telle rupture est le fort couplage entre les circulations de signes opposés au niveau des interfaces supérieures et inférieures de la nappe, dont il résulte un amincissement continu de cette dernière, conduisant cette fois à une singularité en un temps fini. Dans ce cas, l'instant de la singularité ne dépend pas des phénomènes microscopiques.

Cependant, dans le cas de l'instabilité de Kelvin-Helmoltz en présence de fluides de densités différentes, on observe généralement expérimentalement que l'atomisation des nappes liquides se produit par l'intermédiaire d'une tridimensionnalisation des nappes en doigts liquides [81] qui se rompent ensuite, par le mécanisme plus classique de pincement des colonnes liquides [80, 32]. Ce type de tridimensionnalisation est également observé dans certaines simulations numériques [60]. Malgré tout, il est possible que des reconnexions bidimensionnelles précèdent la formation des doigts et des gouttes secondaires.

Les phénomènes qui ont lieu après la rupture d'une nappe bidimensionnelle sont par contre mieux connus. Des solutions auto-similaires pour la rétraction d'un bourrelet capillaire dans les instants qui suivent la singularité ont été obtenues dans le cas de la rupture d'une nappe infinie en deux demi-nappes semi-infinies anguleuses [55], ou en deux demi-nappes d'épaisseur constante [53, 54, 103]. Dans ce dernier cas, les solutions obtenues prédisent la rétraction d'un bourrelet en extrémité de nappe à la vitesse de Taylor [101] et Culick [24] $V_0 = (2\gamma/\rho e)^{1/2}$ avec γ la tension de surface, ρ et e la densité et l'épaisseur de la nappe.

D'autres phénomènes conduisent à la formation de gouttes par l'intermédiaire de la projection d'éclaboussures[1], comme l'impact d'une vague sur une jetée ou au contraire d'un corps solide sur une surface liquide, le déferlement d'une vague sur le rivage, l'impact d'un jet sur une surface solide, le rebond d'un jet en aval d'une cascade de rivière. La formation des gouttes peut résulter de phénomènes d'instabilité au niveau des surfaces libres, mais aussi d'interactions entre une turbulence préexistant dans le liquide et la surface libre. Une revue de ces phénomènes a été effectuée par Peregrine [69] et des solutions analytiques dans certaines configurations bidimensionnelles simples sont décrites dans [20]. Malheureusement les mécanismes qui conduisent à la tridimensionnalisation de ces écoulements et à la formation des projections liquides sont encore mal compris.

En revanche, des progrés importants dans la compréhension des écoulements en présence d'interfaces ont pu avoir lieu ces dernières décennies grâce aux simulations numériques. Ces méthodes tirent partie de la puissance de calcul des ordinateurs pour résoudre des problèmes par itération d'algorithmes simples. Elles ont évolué et se sont adaptées à

[1]le terme anglais "splash" résume l'ensemble de ces phénomènes. En français, cet anglicisme fait maintenant pratiquement partie du langage courant.

l'augmentation rapide des capacités de calcul, permettant graduellement de résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Certaines méthodes de simulation directe sont développées et utilisées depuis quelques années dans l'équipe de Stéphane Zaleski. Ces méthodes ont prouvé leur capacité à simuler des phénomènes aussi divers que la déformation et l'atomisation de gouttes [112], nappes et jets liquides [60], le déferlement de vagues [14], les éclaboussures formées lors des impacts de gouttes [42], l'oscillation des bulles, la sonoluminescence [75], la rupture des ponts liquides et certains problèmes de chute de gouttes ou de montée de bulles [41]. L'essentiel des résultats présentés dans ce travail est obtenu à l'aide d'une approche numérique.

1.3 Bulles, gouttes et leurs applications technologiques

Bien des écoulements en présence d'interfaces et de tension de surface mettent en jeu des gouttes ou des bulles. On les observe dans la nature, dans les phénomènes atmosphériques comme la pluie, les nuages, dans les phénomènes océaniques comme le déferlement des vagues mais aussi dans certains domaines technologiques.

Les écoulements à bulles sont présents dans bon nombre de procédés de l'industrie chimique ou métallurgique. Dans le domaine maritime, on étudie les phénomènes de cavitation au niveau des hélices, ou le comportement des bulles créées par les mélanges entre l'eau et l'atmosphère dans le sillage des navires. On tente aussi de contrôler leur taille et leur taux dans les processus de fabrication du champagne. Comprendre la dynamique de la formation, de la coalescence et de l'éclatement des bulles est fondamental pour maitriser la fabrication des mousses industrielles comme, par exemple, le polystyrène expansé.

Les écoulements de gouttes ont aussi une grande importance technologique. Leur étude est souvent étroitement liée à celle des phénomènes d'atomisation. Mieux prédire la dynamique de ces écoulements permet d'améliorer la compréhension des mécanismes de combustion des brouillards de gouttes dans les moteurs diesel ou les moteurs fusée.

L'étude des atomiseurs dont disposent les moteurs fusée comme le moteur Vulcain pour assurer la propulsion, intéresse à la fois chercheurs et industriels. Ces atomiseurs sont constitués de deux injecteurs coaxiaux, de l'oxygène liquide s'écoulant au centre et de l'hydrogène gazeux autour. Le cisaillement à l'interface liquide-gaz provoque une atomisation primaire, la rupture du jet en gouttes, puis une atomisation secondaire, la rupture des gouttes en gouttelettes plus petites. Les phénomènes d'instabilité conduisant à la tridimensionnalisation de l'écoulement ne sont pas encore parfaitement compris [60, 81] et plusieurs mécanismes ont été proposés. Mieux comprendre ces mécanismes permettrait de mieux contrôler la taille des gouttes issues de l'atomisation du jet liquide et par conséquent d'améliorer la combustion du mélange liquide-gaz.

Les écoulements de gouttes sont utilisés dans bien d'autres applications parmi lesquelles on peut citer, de façon non exhaustive, le contrôle de l'impression jet d'encre ou la fabrication de composants électroniques comme les puces silicones par dépôt de micro-gouttes.

L'une des motivations de cette thèse est d'aider les ingénieurs à mieux comprendre les interactions entre gouttes et parois à l'intérieur des propulseurs à poudre (du type MPS P230) de la fusée Ariane V. Ces moteurs à propergol solide utilisent des compositions à base de perchlorate d'ammonium qui contiennent par ailleurs de l'aluminium permettant d'améliorer les performances en augmentant considérablement la température des gaz de combustion. L'aluminium présent dans le propergol solide, sous forme de particules de diamètre compris entre 1 et 100 μm, réagit pour former des gouttes d'alumine liquide de diamètre moyen 50 μm qui sont entrainées dans l'écoulement aérodynamique et viennent interagir avec les parois internes du propulseur. Au cours du programme ASSM, il a été démontré qu'une flaque d'alumine liquide se forme dans le fond arrière (FAR) du propulseur assez rapidement après le début du tir, ainsi qu'un film liquide ruisselant le long des parois. Ces films liquides sont vraisemblablement turbulents et partiellement atomisés par un fort cisaillement aérodynamique et se trouvent continuellement alimentés par l'impact de nouvelles gouttes sous différents angles d'incidence. La figure 1.3 présente de façon schématique la géométrie de l'écoulement dans le fond arrière du propulseur à poudre. Pour mieux comprendre ces phénomènes nous considérerons des configurations simplifiées d'impacts de gouttes isolées sur une surface liquide recouvrant une paroi solide. Les résultats présentés dans cette thèse pourront, nous l'espérons, servir à élaborer des modèles statistiques pour un nuage de gouttes interagissant avec les parois du fond arrière du propulseur.

1.4 Phénomènes d'impact de gouttes

1.4.1 Nombres sans dimension

La durée totale d'un impact dominé par les effets inertiels est de l'ordre de $\tau_0 = D/U$, où D est le diamètre de la goutte et U sa vitesse avant l'impact. Par exemple, la durée de l'impact d'une goutte d'eau de $1\,mm$ tombant avec une vitesse de $1\,m.s^{-1}$, est d'environ $1\,ms$. La formation de la lamelle ou de la corolle et dans certains cas des doigts liquides se produit à des temps plus courts encore.

Soient ρ et μ la densité et la viscosité du liquide et ρ' et μ' celles du fluide environnant. Le coefficient de tension de surface est noté σ. Plusieurs nombres sans dimension permettent de caractériser les phénomènes d'impact. Le nombre de Weber $We = \rho U^2\, D/\sigma$, permet de comparer les effets capillaires aux effets inertiels et le nombre de Reynolds $Re = \rho U\, D/\mu$, les effets visqueux aux effets inertiels. L'influence du fluide environnant est mesurée à l'aide des rapports de densité ρ/ρ' et de viscosité μ/μ'. L'épaisseur adimensionnée $\delta = h/D$ compare, dans le cas d'un impact sur une couche de liquide, l'épaisseur h de la couche au diamètre de la goutte. Dans le cas d'un impact sur une surface solide, h est l'amplitude des rugosités à la paroi. Il peut aussi s'avérer nécessaire de définir le nombre sans dimension λ/D où λ est la longueur d'onde caractéristique des rugosités. En présence de gravité, le nombre de Bond $Bo = \rho\, g\, D^2/\sigma$ permet de mesurer l'influence de la gravité par rapport à celle des effets capillaires.

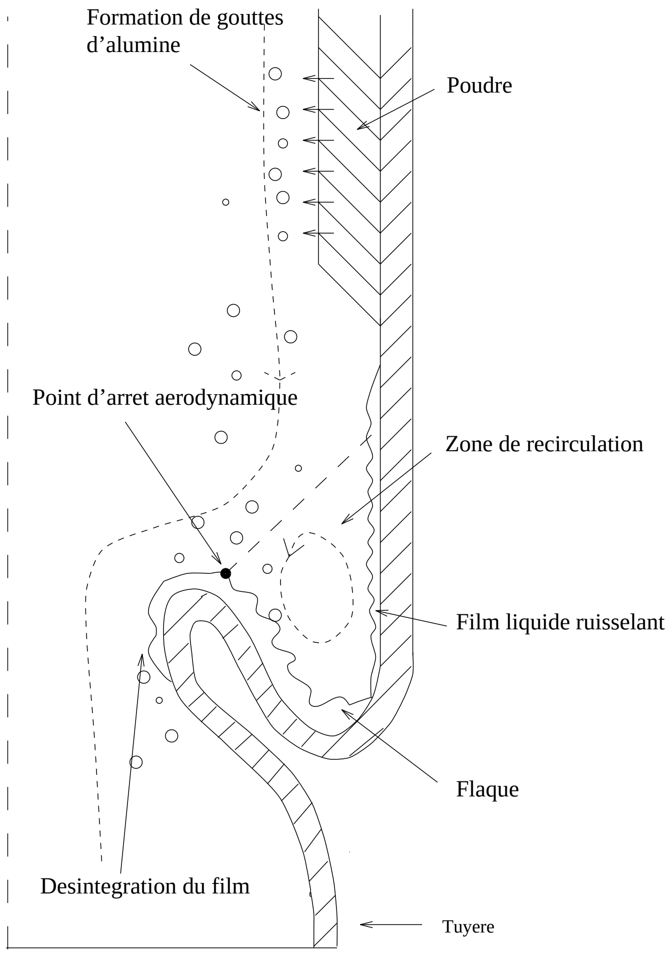


FIG. 1.3 – Vue simplifiée de la géométrie de l'écoulement dans le fond arrière du propulseur à poudre.

1.4.2 Impact sur une paroi solide

L'impact sur une paroi solide sèche a été plus étudié par le passé que l'impact sur une surface liquide. Ces deux phénomènes présentent par ailleurs un certain nombre de similitudes. Worthington [109] s'est intéressé au développement de la lamelle, issue de l'impact d'une goutte, s'étalant sur une paroi solide ainsi qu'aux digitations qui apparaissent sur son pourtour. La phase d'expansion rapide, au cours de laquelle une partie de l'énergie cinétique et de l'énergie de surface est dissipée par des processus visqueux, est suivie d'une phase de contraction pendant laquelle le bourrelet à l'extrémité de la lamelle se rétracte sous l'effet des forces capillaires.

Les expériences montrent que la vitesse initiale de la lamelle est beaucoup plus élevée que la vitesse de la goutte avant l'impact ([36], [22]). En effet la solution irrotationnelle est singulière au moment du contact, et la plupart des quantités comme la vitesse ou la pression divergent au point de contact. Bien que les phénomènes à petite échelle comme la dissipation visqueuse ou la tension de surface puissent retarder la formation de la lamelle, celle-ci apparait très tôt et elle est animée d'une vitesse élevée qui reste encore difficile à mesurer expérimentalement. Il est même possible qu'un choc soit formé aux temps courts de l'impact [82]. En supposant que la goutte conserve une forme de calotte sphérique tout au long de la phase d'étalement, Savic et Boult [90] dérivent une solution potentielle, singulière au moment du contact, qui décrit l'écoulement à l'intérieur de la goutte. Ceux-ci obtiennent la distribution de vitesse et de pression dans la goutte, et leurs prédictions concernant la variation au cours du temps de la hauteur d'apex sont confirmées expérimentalement [90, 62, 96, 2] et numériquement [44]. Comme Engel [35] l'a constaté expérimentalement, la déformation de l'apex de la goutte se produit en retard par rapport à l'instant du contact : au début de l'impact, la paroi n'a pas d'influence sur le mouvement de la partie supérieure de la goutte.

Parfois, la lamelle créée au moment de l'impact rebondit en se détachant de la paroi, et forme une corolle similaire à celle que l'on observe dans les impacts sur des surfaces liquides. L'apparition de ce phénomène dépend, entre autres, des propiétés de rugosité de la surface solide [96, 18]. La rugosité de la surface influe aussi sur la formation des digitations liquides. En particulier, le phénomène de "prompt splash" (éclaboussure rapide) peut se produire sur des surfaces rugueuses. Les doigts liquides et les gouttelettes secondaires apparaissent alors dès les premiers instants de l'impact [22, 96].

Le nombre sans dimension $K = Oh \cdot Re^{5/4}$, appelé parfois paramètre de Sommerfeld, est introduit fréquemment pour étudier la transition entre le régime de dépôt et le régime d'éclaboussure [96, 19]. Si à paramètres physiques donnés, on fait varier uniquement la vitesse d'impact, la transition entre ces deux régimes se produit lorsque K atteint une valeur critique K_c bien déterminée. En revanche, lorsqu'un autre fluide est utilisé, la transition peut se produire pour une valeur critique K_c différente. Le paramètre K_c dépend des propriétés de surface de la paroi et aussi de celles de la goutte.

Les phénomènes microscopiques ont donc une influence sur la dynamique de l'impact sur une surface solide. Ainsi, l'angle de contact dépend de la mouillabilité et des propriétés physico-chimiques de la paroi. L'angle de contact dynamique peut être différent de l'angle statique et être fonction de la vitesse d'étalement de la lamelle ([31]). Ces effets d'angle de contact dynamique sont pris en compte dans les simulations numériques de Fukai et al. ([38]) mais l'utilisation d'un maillage mobile entraine que seuls les impacts au cours desquels la goutte se déforme modérement peuvent être simulés. Ceci interdit d'étudier le phénomène d'éclaboussure. Une autre difficulté est liée à l'existence d'une singularité au niveau de l'angle de contact liquide-solide, qui est associée à la condition de non-glissement à la paroi. Cette singularité est levée dans [50] en supposant l'existence, à l'avant de la lamelle, d'un film précurseur microscopique qui assure un raccordement entre les grandes échelles et l'échelle des interactions de van der Waals liquide-solide. La formation de ce film précurseur au cours du phénomène d'étalement d'une goutte sans vitesse initiale sur une surface solide, est confirmée par les expériences de Heslot et al. [45] et par des simulations numériques de dynamique moléculaire comme celles de [63]. Cependant la durée du phénomène d'impact à grand nombre de Weber et de Reynolds est bien plus courte que la durée d'étalement d'une goutte, dominé aux temps longs par les phénomènes microscopiques, qui est de l'ordre de la centaine d'heures. Dans certaines études numériques ([38]), la singularité au niveau de l'angle de contact est levée en relaxant localement la condition de non-glissement. Néanmoins, des difficultés subsistent encore dans le traitement numérique de ces phénomènes à la paroi.

1.4.3 Impact sur une surface liquide

En étudiant le phénomène d'impact d'une goutte sur une surface liquide, on s'affranchit des problèmes complexes d'angle de contact dynamique, ou des propriétés de mouillabilité et de rugosité de la paroi. Au cours de ce type d'impact, si la vitesse est suffisamment élevée, une lamelle en forme de corolle est créée juste après le contact entre la goutte et la couche liquide, puis celle-ci se développe rapidemment dans les directions verticale et radiale. Dans la théorie de Yarin et Weiss [110], la corolle résulte de la formation, juste après l'impact, d'une discontinuité cinématique similaire à un choc. Un terme de puit de quantité de mouvement est introduit dans les équations du mouvement du film liquide dans la direction radiale, pour tenir compte du fait qu'une partie de la quantité de mouvement dans la direction radiale est prélevée par le fluide éjecté dans la corolle. Par ailleurs, la corolle est surmontée d'un bourrelet liquide se rétractant sous l'effet de la tension de surface, à l'intérieur duquel s'accumule le liquide de la corolle. Au niveau du bourrelet, à l'extrémité de la corolle, se forment parfois des digitations liquides et des gouttelettes secondaires. Ces structures, parfaitement visibles sur les célèbres photographies d'Edgerton [51], confèrent à l'ensemble un aspect de couronne. Comme dans certains impacts sur une surface solide, les digitations liquides apparaissent parfois très rapidemment (fig. 1.4.a), en même temps que la corolle, et donnent naissance à de très petites gouttelettes secondaires [19, 18]. Au cours de l'impact, ces doigts liquides grossissent en même temps que le bourrelet capillaire et se brisent, par le mécanisme de pincement des colonnes liquides [80, 34], en gouttelettes de plus en plus grosses (fig. 1.4.b–c). Aux temps longs, la lamelle retombe sous l'action conjuguée de la gravité et de la rétraction du bourrelet (fig. 1.4.d).

En revanche, à petit nombre de Weber, l'inertie de la corolle n'est pas suffisante pour

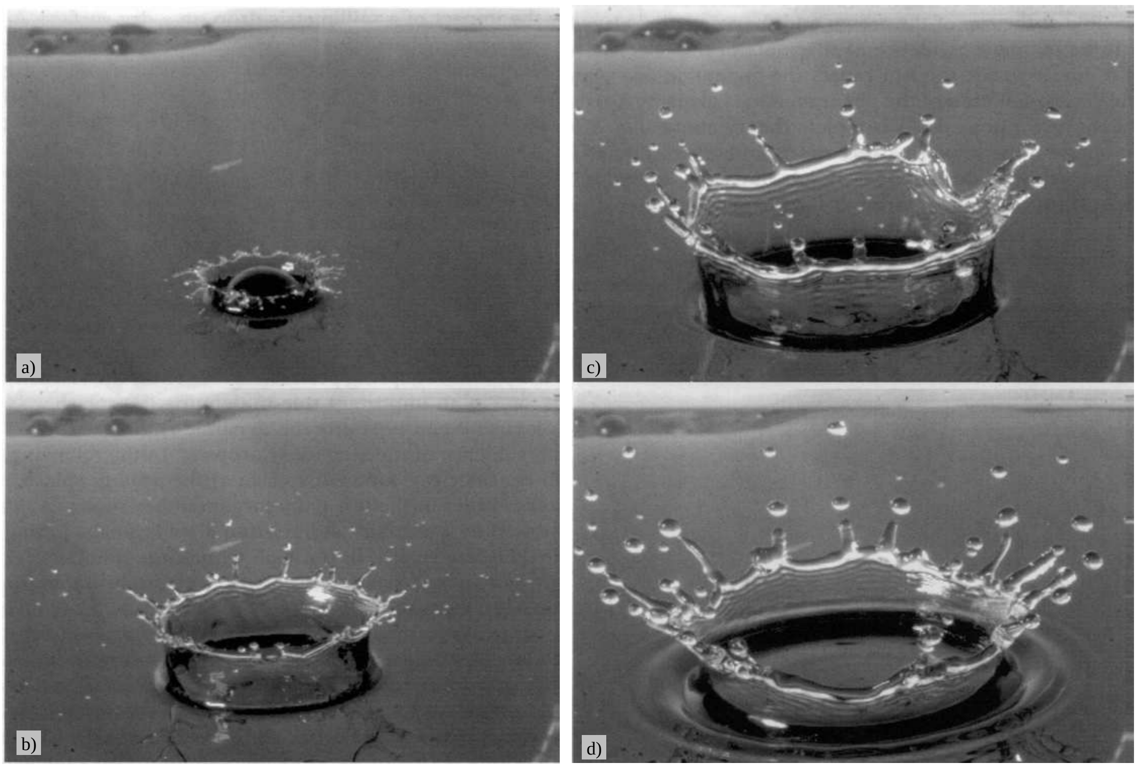


FIG. 1.4 – Photographies extraites de [22] montrant l'impact d'une goutte sur un film liquide à différents instants. a) $t = 0.4\,ms$. Des doigts liquides horizontaux sont déja visibles aux temps courts du phénomène. b) $t = 2.4\,ms$, croissance des doigts et du bourrelet capillaire. Les doigts liquides se sont redressés. Plusieurs trains de gouttes secondaires sont visibles. Les gouttes les plus éloignées, qui sont plus petites, sont issues de la rupture des doigts formés aux temps courts. c) $t = 6.4\,ms$. On observe des ondes capillaires à l'arrière du bourrelet. d) $t = 12.4\,ms$. La corolle retombe.

vaincre les effets de tension de surface et celle-ci ne peut se former. La goutte coalesce alors avec la surface liquide et un train d'ondes capillaires est créé [110]. Si la couche liquide est suffisamment profonde ($h/D > 1$), la coalescence de la goutte est suivie de la formation d'un anneau de vorticité sous la surface liquide. À plus grand nombre de Weber, l'impact d'une goutte sur une couche liquide profonde est suivi de la formation d'un cratère dans le liquide. Le rayon de ce cratère augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale, calculée dans [65], puis la cavité se referme et un jet central, communément appelé jet de Rayleigh, rebondit.

Les simulations numériques permettent de mieux comprendre la formation et l'évolution de la corolle ainsi que l'apparition des digitations qui est encore difficile à observer expérimentalement. Depuis les premières simulations d'impact d'une goutte sur un film liquide à l'aide d'une méthode MAC [43] dans lesquelles ni la viscosité des fluides ni la tension de surface n'étaient prises en compte, d'autres méthodes numériques sont utilisées pour étudier ce phènomène. Des simulations axisymétriques utilisant une méthode d'éléments de frontière (Yarin et Weiss 2), permettent d'étudier l'influence de la tension de surface sur la formation de la corolle. Cependant, dans ces simulations, il n'est pas tenu compte des effets visqueux, qui peuvent retarder la formation de la corolle. Le problème tridimensionnel complet est simulé à l'aide de méthodes de Volume de Fluide dans [42, 85] et le problème axisymmétrique à l'aide d'une méthode de ligne de niveau utilisant une adaptation locale du maillage dans la région de la corolle, dans [97].

1.4.4 Mécanismes de formation des digitations liquides

Les photographies de la "goutte de lait" d'Edgerton ont longtemps intrigué les chercheurs qui se sont interessé à l'origine de la couronne et des éclaboussures liquides. Mais, depuis les photographies d'Edgerton, aucun mécanisme n'a encore été proposé qui soit parfaitement satisfaisant. Dans la suite, nous décrivons un certain nombre des mécanismes qui ont été proposés par le passé et en présentons de nouveaux.

Des projections liquides sont formées au cours de l'impact de toutes sortes de corps solides ou liquides sur différents types de surfaces. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder sur le sol les projections issues de l'impact d'un corps liquide ou bien de jeter un gros objet solide dans l'eau. Ce faisant, on constate que les projections liquides résultant de l'impact ont souvent une longueur beaucoup plus importante que la taille caractéristique du corps solide ou liquide. On peut raisonnablement déduire de cette observation que l'inertie joue un rôle important dans le phénomène.

Nous distinguons les impacts sur une paroi solide de ceux qui se produisent sur une surface liquide, car certaines de leurs caractéristiques sont différentes. Ainsi, la lamelle formée au cours de l'impact d'une goutte sur une paroi solide subit une décélération liée à la dissipation visqueuse. En revanche, au cours d'un impact sur une surface liquide la lame ou la corolle est libre juste après sa formation. De plus, les phénomènes à petite échelle au niveau de l'angle de contact entre le liquide et une paroi solide peuvent jouer un rôle dans la formation des digitations.

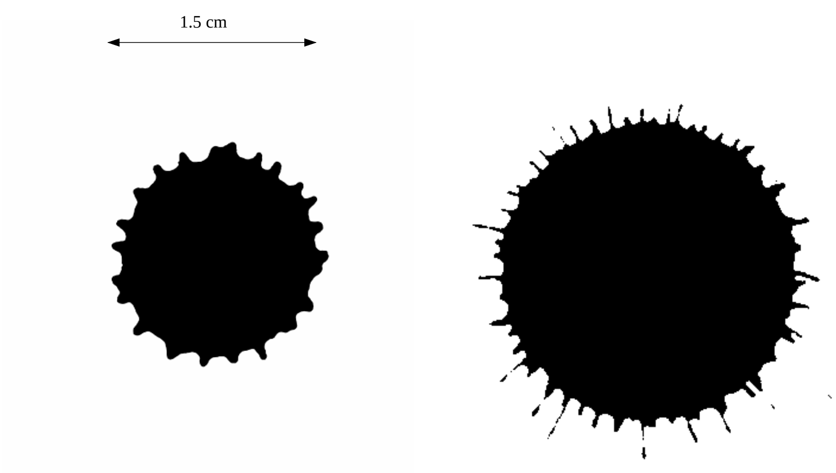


FIG. 1.5 – Projections formées au cours de l'impact d'une goutte d'encre sur une feuille de papier. $D \simeq 5\,mm$. La hauteur de chute est de l'ordre de $1\,m$ (gauche) et $1.70\,m$ (droite).

A- Impact sur une paroi solide

La structure des digitations liquides dépend de la vitesse initiale de la goutte qui heurte la paroi. Pour des caractéristiques de la goutte et de la paroi données, les doigts liquides sont d'autant plus nombreux, fins et allongés que la vitesse d'impact est élevée. Lorsque la vitesse d'impact est supérieure à une valeur critique, des goutelettes secondaires sont formées (figure 1.5). Celles-ci sont probablement issues de la rupture de doigts liquides qui ont rebondi et se sont séparés de la paroi au cours de l'impact.

Adler et al. distinguent les digitations observées dans leurs expériences aux temps courts de celles qui apparaissent lorsque la lamelle est à son maximum d'étalement. Ces auteurs suggérent que les digitations observées aux temps longs pourraient être causées par une instabilité de la ligne de contact. Celle-ci se produit classiquement lorsqu'un film liquide s'écoule le long d'un plan incliné sous l'effet de la gravité. Cette instabilité, étudiée dans [6], donne naissance à des doigts liquides au niveau de l'angle de contact à condition que l'épaisseur H du film soit inférieure à la longueur capillaire $\kappa^{-1} = (\sigma/\rho g)^{1/2}$. Le mode le plus instable a une longueur d'onde $\lambda \simeq HCa^{-1/3}$.

Néanmoins, dans ces analyses, l'inertie est supposée être négligeable ($Ca << 1$). Si cette instabilité est un mécanisme possible pour la formation des digitations aux temps longs, l'inertie doit jouer un rôle important dans la formation des digitations aux temps courts. De plus, il est possible que les digitations formées dès les premiers instants soient à l'origine des digitations qui sont observées plus tard.

Ainsi, l'inertie joue un rôle prépondérant dans le mécanisme proposé par Allen [1] qui prédit que les doigts liquides résultent d'une instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette instabilité serait dûe aux fortes décélérations occasionnées par la dissipation visqueuse à la paroi. Cette théorie prédit que la longueur d'onde des doigts est de l'ordre de la longueur capillaire $\kappa^{-1} = (\sigma/\rho|\gamma|)^{1/2}$ où $|\gamma|$ est le module de l'accélération, supposée constante au cours de l'impact. Thoroddsen et al. [102] proposent un mécanisme similaire, mais suggérent que la décélération a lieu juste avant le contact entre la goutte et la paroi. Cependant, comme dans le système que nous étudions, les accélérations sont singulières au moment du contact entre la goutte et la surface solide, et, à cet instant, elles sont dirigées du fluide lourd vers le fluide léger. Dans la suite, nous présentons un mécanisme similaire, lié aux accélérations impulsives subies par la corolle au moment de sa formation.

B- Impact sur une surface liquide

Contrairement au cas de l'impact sur une paroi solide, la corolle crée au moment du contact entre la goutte et le film liquide a son extrémité libre. Si la vitesse d'impact est suffisante, on observe au niveau du bourrelet capillaire les digitations constituant la couronne. Comme dans certains impacts sur une paroi solide, la formation de ces doigts peut se produire aux temps courts, parfois même avant l'apparition de la corolle [18, 19]. Il semble que pour un liquide donné il existe une vitesse critique au dessus de laquelle se produit le phénomène de "prompt splash". Au cours de la croissance de la corolle et du bourrelet capillaire, on assiste à une augmentation du diamètre des doigts et à une diminution de leur nombre [19]. Par ailleurs, le nombre de doigts augmente avec le nombre de Weber [19, 22]. Si l'augmentation du diamètre des doigts est sans doute directement liée à la croissance du bourrelet, la diminution de leur nombre pourrait être liée à un mécanisme de saturation non-linéaire des modes de petite longueur d'onde au profit des modes de plus grande longueur d'onde.

La possibilité évoquée le plus souvent est qu'un mécanisme de perturbation et d'instabilité de la corolle est à l'origine de la formation des digitations. Les mécanismes candidats sont présentés en détail.

B.1- Formation de singularités géométriques

Le mécanisme proposé par Yarin et Weiss [110] est la formation de singularités géométriques lors du mouvement de rétraction du bourrelet à vitesse constante $V_0 = (2\sigma/\rho e)^{1/2}$ (où e est l'épaisseur de la corolle à l'arrière du bourrelet). Ces singularités sont analogues aux caustiques formés au cours du mouvement des fronts de flamme [113]. En supposant que la forme de l'interface de la corolle est décrite à l'aide de l'équation $z = Y(x,t)$, Yarin et Weiss prédisent que l'évolution de la perturbation est régie par l'équation eikonale

$$\partial_t Y = V_0 \left(1 + (\partial_x Y)^2\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Cette équation traduit le fait que le bourrelet se propage dans la direction normale à sa configuration instantannée à vitesse V_0 constante égale à la vitesse de Culick-Taylor. La solution de cette équation fait apparaitre des singularités géométriques qui seraient à l'origine des digitations.

Bien que ce mécanisme soit un candidat possible, les simulations effectées dans une analyse de stabilité du bourrelet en rétraction [39], n'ont pas permis d'observer la forma-

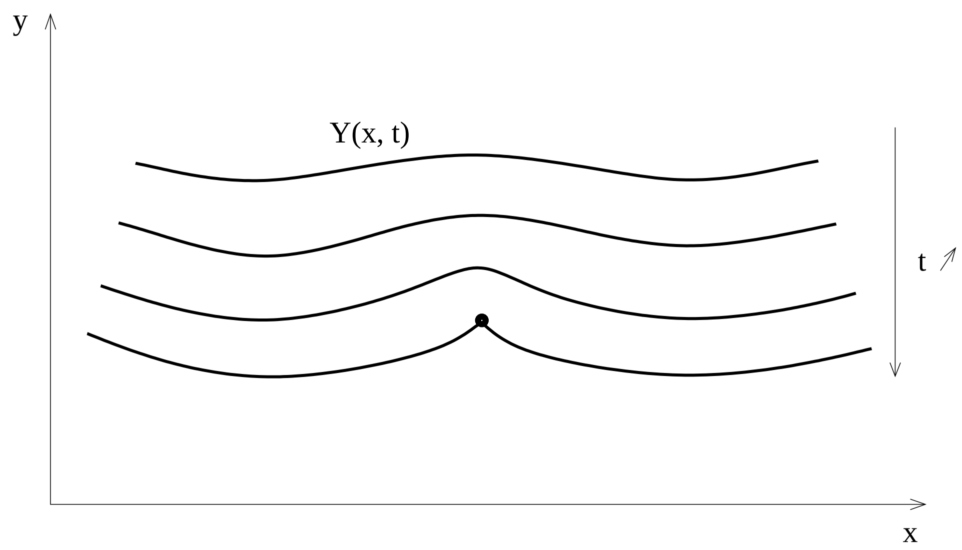


FIG. 1.6 – Les solutions de l'équation (1.1) font apparaitre des points de rebroussement. Figure adaptée de [110].

tion de ces singularités.

B.2- Instabilité capillaire du bourrelet

L'instabilité de Rayleigh est souvent considérée comme étant à l'origine de la formation des digitations [69]. En principe, un bourrelet liquide situé à l'extrémité d'un film mince peut être sujet à l'instabilité capillaire des cylindres liquides, à condition que le rayon du bourrelet soit plus grand que l'épaisseur e du film liquide.

Cependant, une étude de stabilité du bourrelet [39] montre qu'il existe une compétition entre la croissance des perturbations et la croissance du bourrelet au cours de sa rétraction. Il en résulte une saturation de l'instabilité, le taux de croissance $s(k,t)$ s'annulant au bout d'un temps critique $t_c \sim k^{-2}$ (le temps étant normalisé par $(\rho e^3/\sigma)^{1/2}$). Néanmoins, pour les grandes longueurs d'ondes ($k << e$), le facteur d'amplification

$$\beta = exp \int_0^{t_c(k)} s(k,t)\, dt \sim exp(k^{-1/2}) \tag{1.2}$$

diverge. D'après (1.2) il faut atteindre des temps très longs ($t \simeq t_c \sim k^{-2}$) pour que la perturbation soit amplifiée de façon significative. Fullana et Zaleski prédisent que pour obtenir une amplification d'un facteur 100 de l'amplitude de la perturbation, sa longueur d'onde doit être plus de 100 fois plus grande que épaisseur e du film liquide. Des longueurs d'ondes aussi importantes ne correspondent certainement pas à celle du mode que l'on observe dans le cas des digitations de la corolle. Malgré tout, la configuration étudiée dans [39] est celle d'un film d'épaisseur uniforme et d'un bourrelet se rétractant à vitesse constante. Dans le cas de la corolle, l'épaisseur à l'arrière du bourrelet varie au cours du temps et il existe de plus une composante d'étirement axisymétrique. Ces éléments,

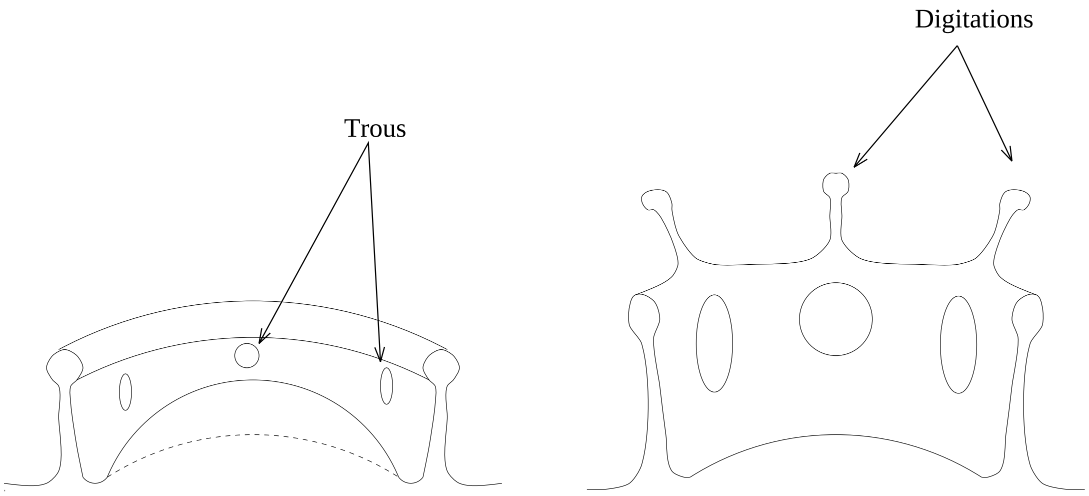


Fig. 1.7 – La formation de trous à l'arrière du bourrelet peut provoquer la formation de digitations liquides.

qui doivent être pris en compte dans l'analyse de stabilité du bourrelet en extrémité de corolle, pourraient modifier les conclusions de [39].

B.3– Formation de trous dans la corolle

L'apparition de trous dans la corolle peut entraîner la formation de digitations. En effet, la formation d'un trou à l'arrière du bourrelet capillaire supprime localement la tension capilaire de ligne, ce qui a pour conséquence de freiner localement la rétraction du bourrelet. Un doigt liquide peut alors se développer au niveau du bourrelet à l'avant du trou. A faible nombre de Ohnesorge, des reconnexions peuvent se produire dans la région de faible épaisseur au niveau des ondes capillaires se propageant à l'arrière du bourrelet (voir l'annexe **??**). Si l'épaisseur de la corolle est suffisamment faible ($e << 1\,\mu m$) l'effet destabilisant des forces de van Der Waals l'emporte sur l'effet stabilisant de la tension de surface et un pincement se produit.

Ainsi, la formation de trous dans la corolle est observée dans certaines photographies de Loehr [62]. Cependant, dans ces expériences, les trous apparaissent en retard par rapport aux digitations.

B.4- Démarrage impulsif de Richtmyer-Meshkov

Nos simulations montrent qu'au moment de sa formation, la corolle est accélérée de manière impulsive par des forts gradients de pression. Les accélérations singulières à $t = 0$ peuvent s'écrire sous la forme $\gamma = V_c\delta(t)$ où V_c est la vitesse de la corolle au moment de sa formation (§5.3.2). Une interface accélérée est par ailleurs sujette à une instabilité. Lorsque l'accélération est constante au cours du temps, la configuration instable est celle où l'accélération est dirigée du fluide léger vers le fluide lourd (i.e, la gravité est dirigée

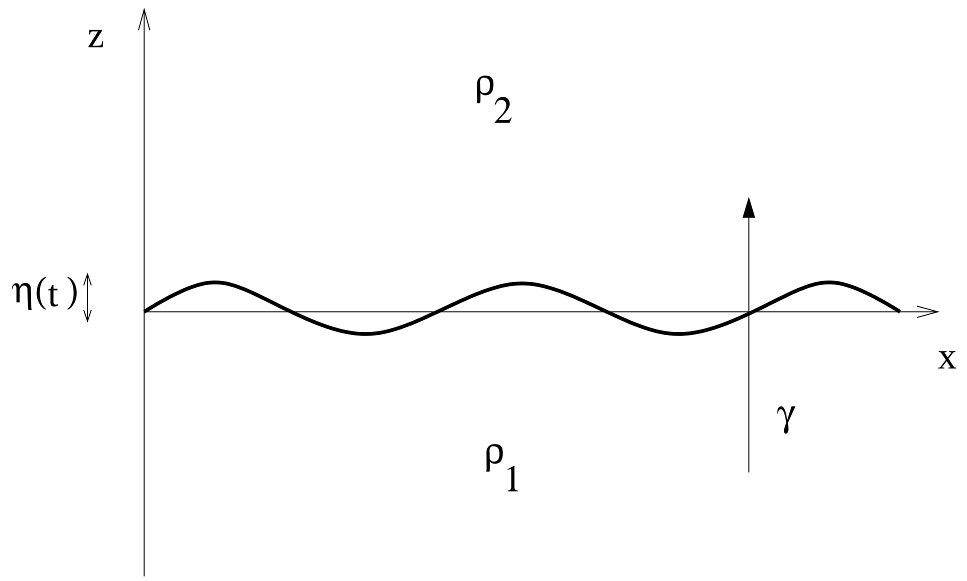


FIG. 1.8 – Configuration utilisée dans l'analyse de stabilité linéaire.

du fluide lourd vers le fluide léger). C'est l'instabilité dite de Rayleigh-Taylor [100]. En présence de tension de surface, il existe une longueur de coupure égale à la longueur capillaire $\kappa^{-1} = (\sigma/\rho g)^{1/2}$ et le mode le plus instable a une longueur d'onde de l'ordre de κ^{-1}. Par contre, si l'accélération constante est dirigée du fluide lourd vers le fluide léger, l'interface est stable. Un fait remarquable est que lorsque l'accélération est impulsive, l'instabilité se produit que l'accélération soit dirigée du fluide léger vers le fluide lourd ou inversement.

Richtmyer [83] est le premier à supposer l'existence de cette instabilité et à effectuer une analyse théorique. Ses prédictions sont confirmées plus tard grâce aux expériences de Meshkov.

Initialement, Richtmyer [83] analyse la croissance de petites perturbations à l'interface séparant deux fluides de densités différentes lorsque celle-ci est accélérée par un choc. Son modèle s'applique aussi au cas où l'écoulement est incompressible, comme dans la situation où un liquide contenu dans un récipient est accéléré impulsivement. Une expérience simple consiste à laisser tomber sur le sol une bassine remplie d'eau. Il est fort probable que les nombreuses projections observées sont produites par une instabilité de ce type.

La théorie linéaire de Richtmyer découle directement de celle de Taylor [100]. L'écoulement est supposé potentiel, et les deux fluides incompressibles de densités ρ_1 et ρ_2 avec $\rho_1 > \rho_2$. Par convention, nous décidons que l'acc'elération est positive lorsqu'elle est dirigée du fluide lourd vers le fluide léger. Une petite perturbation harmonique $h(x,t) = \eta(t)cos(kx)$ de la forme de l'interface autour de sa position d'équilibre est imposée. L'équation de Bernouilli à l'interface en l'absence d'effets visqueux s'écrit

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2}(\Delta\Phi)^2 = \gamma h \tag{1.3}$$

où Φ est la fonction de courant. Les perturbations de la vitesse au niveau de l'interface sont simplement dûes aux gradients de pression hydrostatique et sont donc du même ordre que la perturbation initiale de la surface ($\epsilon = k\eta(0)$). En décomposant le potentiel des vitesses sur la même base d'harmoniques et en ne conservant que les termes du premier ordre (les termes non linéaires et de tension de surface sont tous deux proportionnels à k^2), on déduit l'équation d'évolution de l'harmonique k

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -k\gamma\mathcal{A}\eta \tag{1.4}$$

où $\mathcal{A} = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ est le nombre d'Atwood. Ici, les deux fluides sont de densités très différentes, et donc $\mathcal{A} \sim 1$. Lorsque l'accélération peut s'écrire sous la forme $\gamma = V_c\delta(t)$, l'équation (1.4) intégrée une fois en temps devient

$$\frac{d\eta}{dt} = -kV_c\eta(0). \tag{1.5}$$

Une seconde intégration permet d'obtenir l'équation d'évolution de l'amplitude de la perturbation

$$\eta(t) = \eta(0)(1 - kV_c t) \tag{1.6}$$

La perturbation augmente en proportion du temps, et, si l'accélération est dirigée du fluide lourd vers le fluide léger, il se produit une inversion de la courbure de l'interface.

La solution linéaire (1.6) correspond au premier ordre du développement de la solution du problème non-linéaire complet, dans lequel il est tenu compte des effets capillaires et visqueux, en puissance du petit paramètre $\epsilon = k\eta_0$ (Carles, rapport interne LMM). Les effets visqueux et capillaires n'interviennent qu'au niveau de la solution au second ordre. Ainsi, la théorie *linéaire* prédit que la croissance d'une perturbation est d'autant plus rapide que sa longueur d'onde est petite. Donc, contrairement à la théorie linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (qui prédit que la longueur d'onde du mode le plus instable est de l'ordre de la longueur capillaire $\kappa^{-1} = (\sigma/\rho g)^{1/2}$), cette théorie ne permet pas de prédire la sélection d'un mode particulier. Dans la suite, nous verrons que ce sont les effets de couplages *non-linéaires* qui provoquent une saturation des modes de petites longueur d'onde dont il peut résulter la sélection d'un mode plus instable sur l'échelle de temps de l'impact.

Une analyse asymptotique simplifiée utilisant les résultats de la théorie linéaire permet d'obtenir une première approximation pour l'amplification du mode N. Ainsi, la vitesse de la corolle au moment de sa formation à l'instant t_0 s'écrit

$$V_c = We(UD/t_0)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Dans ce calcul, le nombre de digitations sur le périmètre de la corolle est supposé constant au cours du temps égal à N dès l'instant t_0 et donc

$$k = N/r_c(t_0). \tag{1.8}$$

D'autre part, aux temps longs

$$\eta(t) \sim \eta(0)kV_c t. \tag{1.9}$$

Finalement, à l'aide des équations (1.7) et (1.8), l'équation (1.9) devient

$$\eta(t) \sim \eta(0)\, N\, We\, (t/t_0). \tag{1.10}$$

Déterminer le taux d'amplification des perturbations par ce mécanisme revient à comparer le temps caractéristique macroscopique $t = \tau = D/U$ au temps $t_0 << \tau$ associé aux effets microscopiques. Si maintenant nous écrivons que η_0 est une longueur caractéristique de ces mêmes phénomènes microscopiques et si de plus nous supposons que la séparation entre les temps caractéristiques macroscopiques et microscopiques est du même ordre que la séparation entre les échelles spatiales ($\tau/t_0 \simeq D/\eta(0)$) alors $\eta(\tau) \simeq \mathcal{O}(D)$. Il est donc possible que des perturbations à l'échelle microscopique soient amplifiées par ce mécanisme et qu'il en résulte la formation de digitations dont la longueur est de l'ordre du diamètre de la goutte. Cependant cette analyse reste qualitative, et, pour conclure à sa validité, il est nécessaire de mieux comprendre les mécanismes qui provoquent un retard dans la formation de la corolle.

1.5 Organisation du manuscrit

La première partie de ce manuscrit traite des méthodes numériques de simulation directe des écoulements diphasiques en présence de tension de surface. Dans un premier chapitre, nous présentons différentes formulations des équations qui régissent la dynamique des fluides et des conditions qui s'appliquent aux interfaces, puis un certain nombre de méthodes numériques de suivi d'interfaces, leurs caractéristiques respectives ainsi que leurs applications.

Dans le second chapitre, nous décrivons une méthode de Volume de Fluide permettant de simuler des écoulements diphasiques tridimensionnels. Nous examinons en particulier le cas des écoulements présentant une symétrie de révolution autour d'un axe fixe.

Dans le troisième chapitre nous présentons des tests de validation de la méthode numérique. Ces tests permettent d'une part de mesurer la précision des différents algorithmes utilisés dans la méthode et d'autre part d'apprécier la capacité de l'ensemble de la méthode à simuler des écoulements complexes comme par exemple ceux qui mettent en jeu des reconnexions d'interfaces.

Dans la deuxième partie, nous étudions numériquement et analytiquement le phénomène d'impact d'une goutte sur un film liquide.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du développement de la corolle issue de l'impact. Les prédictions de nos analyses asymptotiques sont comparées aux résultats de nos simulations axisymmétriques.

Dans le second chapitre nous nous intéressons à la formation des digitations liquides constituant la couronne. Plusieurs mécanismes possibles sont présentés. Les résultats des simulations pour les temps courts de l'impact semblent corroborer l'un d'entre eux.

Le troisième chapitre psente l'tude numérique de l'impact d'une goutte sur un film liquide en incidence oblique. Les résultats des calculs sont comparés aux expriences.

Première partie

Méthode de Volume de Fluide pour la simulation des écoulements diphasiques

Chapitre 2

Méthodes numériques de suivi d'interfaces

Dans la résolution des problèmes diphasiques en présence de fluides immiscibles, il survient un certain nombre de problèmes liés directement à la présence d'une interface séparant les fluides. D'une part, la position de l'interface est une inconnue du problème à résoudre ; par ailleurs, il faut déterminer le mouvement des fluides pour connaître son évolution. Ainsi, pour déterminer entièrement l'écoulement, il est nécessaire :
(i) de résoudre les équations du mouvement dans les deux phases,
(ii) de représenter l'interface dans l'espace,
(iii) de caractériser le mouvement de l'interface, sachant que sa dynamique est étroitement liée à celle des fluides environnants.

Nous présentons tout d'abord les équations qui régissent la dynamique des fluides et les conditions qui s'appliquent aux interfaces avant de présenter les approches utilisées dans les différentes méthodes numériques de suivi d'interface pour satisfaire à ces différentes exigences.

2.1 Conditions aux interfaces et différentes formulations des équations du mouvement

2.1.1 Hypothèses

On sait que les interfaces entre fluides immiscibles ont une épaisseur finie. Dans ces régions, le profil de concentration entre les espèces minimise l'énergie libre de van der Waals et Cahn-Hilliard [86]. Dans les méthodes dites de champ de phase ("phase fields") [106] on considère que les interfaces sont des régions d'épaisseur finie de transition entre deux fluides. Ces méthodes sont utilisées pour étudier les transitions de phase comme la solidification ou la croissance de dendrites [56, 78]. Cependant, la transition entre deux fluides immiscibles se réalise sur des échelles microscopiques, de l'ordre du libre parcours moyen, si bien qu'en hydrodynamique on considère classiquement qu'une interface est une surface singulière, d'épaisseur nulle, séparant des fluides aux propriétés physiques différentes.

Dans la suite, nous considérons des écoulements sans transfert de chaleur ni de masse et sans changement de phase. Les fluides sont supposés immiscibles, newtoniens, de viscosité et de densité différentes, et séparés par une interface d'épaisseur nulle soumise à une tension de surface uniforme. Par ailleurs, l'écoulement est supposé incompressible.

2.1.2 Conditions aux interfaces

Pour déterminer la position d'une interface, on utilise souvent la notion de fonction caractéristique. Cette fonction, notée χ, vaut 1 dans un fluide et 0 dans l'autre. L'interface se situe au niveau de la discontinuité de χ. En l'abscence de changement de phase et de transfert de masse, la fonction caractéristique est advectée par l'écoulement comme un scalaire passif :

$$\partial_t \chi + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = 0. \tag{2.1}$$

avec $\mathbf{u}$ la vitesse locale du fluide. On note respectivement $\mathbf{u}_1$ la vitesse du fluide 1 et $\mathbf{u}_2$ la vitesse du fluide 2. L'équation (2.1), en permettant de déterminer l'évolution du champ $\chi(\mathbf{x}, t)$, permet ainsi d'identifier le mouvement de la discontinuité de χ, c'est-à-dire de l'interface.
On peut traduire de façon équivalente le fait que l'interface suit le mouvement du fluide environnant à l'aide de conditions cinématiques. Ainsi, la vitesse de l'interface dans la direction de sa normale est égale à la vitesse du fluide de part et d'autre de l'interface dans cette même direction. Cette condition s'écrit

$$\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}, \tag{2.2}$$

avec $\mathbf{n}$ la normale à l'interface.

La condition de non glissement entre les deux fluides au niveau de l'interface impose l'égalité des vitesses tangentielles de part et d'autre de l'interface, ce qui se traduit par

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{t}. \tag{2.3}$$

La condition dynamique à l'interface s'écrit

$$[p\mathbf{n} + 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}]_S = \sigma \kappa \mathbf{n}, \tag{2.4}$$

avec σ le coefficient de tension de surface, κ la courbure locale de l'interface définie par

$$\kappa = -\nabla_S \cdot \mathbf{n} \tag{2.5}$$

où ∇_S est l'opérateur gradient restreint à la surface S. On note $\mathbf{D}$ le tenseur des vitesses de déformation défini par

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \tag{2.6}$$

et $[.]_S$ le saut d'une quantité à travers l'interface. En prenant le produit scalaire de chacun des membres de (2.4) respectivement avec la normale $\mathbf{n}$ et la tangente $\mathbf{t}$ locale à l'interface, on obtient

$$[2\mu\mathbf{n}\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}]_S = \sigma\kappa\mathbf{n}, \tag{2.7}$$

qui traduit le fait que la tension de surface équilibre exactement le saut de la contrainte normale de part et d'autre de l'interface, et

$$[2\mu\mathbf{t}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}]_S = 0 \tag{2.8}$$

qui traduit la continuité à travers l'interface de la contrainte tangentielle. Dans un cas statique, la condition (2.7) permet de retrouver la loi de Laplace

$$p_2 - p_1 = \sigma\kappa. \tag{2.9}$$

La tension de surface équilibre le saut de pression à travers l'interface.

2.1.3 Différentes formulations des équations du mouvement

Le mouvement de chacun des fluides est régi par l'équation de Navier-Stokes qui s'écrit

$$\rho(\partial_t\mathbf{u} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})) = -\nabla p + \nabla\cdot(2\mu\mathbf{D}) + \mathbf{f_v} \tag{2.10}$$

et la condition d'incompressibilité

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{2.11}$$

dans lesquelles on note $\mathbf{u}$ la vitesse, p la pression, ρ la densité, μ la viscosité, $\mathbf{f_v}$ les forces de volume. Ces équations locales sont écrites dans chacun des fluides et même si les quantités physiques sont notées sans indice, on sous entend qu'elles sont affectées à l'un ou l'autre des deux fluides considérés.

Si l'équation (2.10) est valable dans chacun des sous-domaines de l'espace occupé par un seul fluide, il existe une formulation de l'équation de Navier-Stokes valable partout. Elle s'écrit

$$\rho(\partial_t\mathbf{u} + \nabla\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})) = -\nabla p + \nabla\cdot(2\mu\mathbf{D}) + \mathbf{f_v} + \sigma\kappa\delta_S\mathbf{n}, \tag{2.12}$$

avec $\mathbf{f}_{cap} = \sigma\kappa\delta_S\mathbf{n}$ la force de tension de surface, δ_S étant la distribution de Dirac concentrée sur l'interface S.

Le système constitué par les équations (2.10,2.11) et la condition aux limites à l'interface (2.4) est strictement équivalent au système d'équations (2.12,2.11) [92]. On peut retrouver la condition aux limites (2.4) en intégrant l'équation (2.12) sur un volume de contrôle élémentaire contenant une portion interface.

Dans les différentes méthodes numériques, l'une ou l'autre de ces formulations des équations du mouvement sera utilisée.

2.2 Méthodes de suivi d'interfaces

Le choix d'une méthode numérique dépend étroitement du type de problème considéré. Certains problèmes complexes comme, par exemple, ceux qui font intervenir des changements de topologie, nécessitent des méthodes robustes qui sont parfois moins précises que les méthodes utilisées pour simuler des problèmes plus simples. Une plus grande précision dans le calcul s'obtient aussi souvent aux dépends d'une plus grande complexité des méthodes. Bien évidemment, l'objectif est d'aboutir à des algorithmes précis, robustes comme facilement généralisables en trois dimensions d'espace.

Nous présentons les méthodes les plus employées pour simuler les écoulements diphasiques en présence d'interfaces. Le point commun des méthodes dont nous discutons dans la suite est qu'elles ont recours à une discrétisation des équations du mouvement sur un maillage. On effectue souvent une classification des méthodes suivant le type de maillage qu'elles utilisent. Du choix de ce dernier dépendra non seulement la méthode de représentation et de suivi de l'interface mais aussi la manière dont seront résolues les équations du mouvement et dont seront imposées les conditions à l'interface. L'interface peut être décrite de façon :
(i) *explicite*, comme une frontière entre chaque sous-domaine ne contenant qu'un seul fluide. Dans ce cas, les conditions aux limites (2.2,2.3,2.4) sont souvent appliquées explicitement à l'interface traitée comme une surface singulière et les équations (2.10,2.11) sont résolues dans chaque sous domaine contenant un seul fluide, dont les frontières sont parfaitement déterminées.
(ii) *implicite*, à l'aide d'une fonction de phase comme la fraction volumique. Les équations (2.12,2.11), et (2.1) sont utilisées dans tout l'espace et une régularisation des termes singuliers ou discontinus qu'elles contiennent est employée dans la zone interfaciale artificiellement épaissie.

2.2.1 Méthodes à maillage mobile

Ces méthodes, dites lagrangiennes, utilisent un maillage (ou grille) qui s'adapte aux contours de l'interface. Interface et frontières du maillage sont confondues. Ainsi, il est nécessaire d'avoir recours à des éléments de maillage aux frontières régulières se conformant à la surface de l'interface, l'utilisation de frontières irrégulières pouvant engendrer des erreurs numériques. Un autre problème délicat est qu'un remaillage est nécessaire pour suivre les mouvements de l'interface au cours du temps. La complexité des algorithmes de remaillage est telle qu'il est difficile de simuler des écoulements dans lesquels ont lieu de forts changements de topologie de l'interface comme les reconnexions ou coalescences. En revanche, ce sont des méthodes précises, bien adaptées aux problèmes dans lesquels l'interface se déforme peu. En effet, puisque interface et frontière du maillage sont confondues, la topologie de chaque sous domaine ne contenant que l'un des fluides est parfaitement déterminée. Il est alors possible d'employer une approche de type (i). On peut, à l'aide de méthode d'éléments finis ou de volumes finis, évaluer de façon précise les contraintes dans chacun des fluides et appliquer les conditions aux limites (2.2,2.3,2.4) directement à l'in-

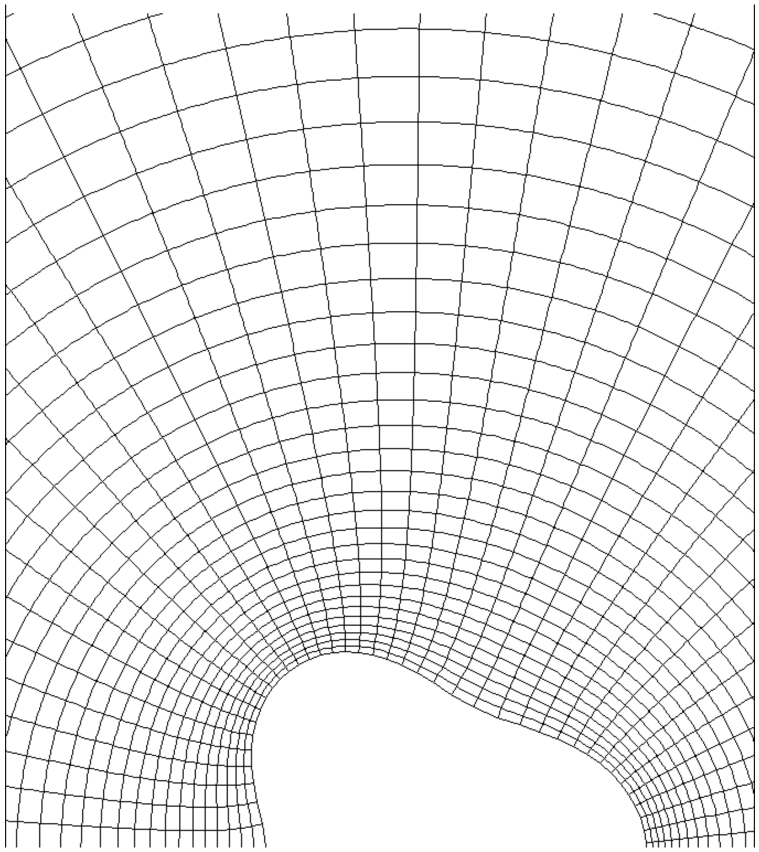


FIG. 2.1 – Maillage adaptatif et mobile utilisé dans l'équipe de J. Magnaudet pour simuler les déformations de bulles.

terface. Ce type de méthode est utilisé pour étudier des écoulements à surface libre comme la montée ou les oscillations de bulles [7], voir fig.2.1 ou les phénomènes de solidification et de croissance cristalline [95].

2.2.2 Méthodes à maillage fixe

Certaines méthodes emploient un maillage fixe mais utilisent une adaptation locale du maillage dans chaque cellule contenant une portion d'interface [40]. Cependant, dans la plupart des méthodes, l'utilisation d'une grille fixe permet de s'affranchir des problèmes de remaillage. Cette fois, c'est l'interface qui est en mouvement dans une grille immobile qui peut être structurée, ou non-structurée.

On distingue parmi ces différentes approches, dites euleriennes, les méthodes de marqueurs de surface (dite méthodes de suivi de front) et les méthodes de suivi de volume. Même si les méthodes de marqueurs de volume font partie des méthodes de suivi de volume, nous les présentons séparément car elles ont inspiré la plupart des méthodes modernes. Nous exposons les principes de ces différentes méthodes ainsi que certaines questions qu'elles suscitent actuellement.

A– Marqueurs de volume

Dans la méthode MAC ("Marker and Cells") introduite par Harlow et Welch [44], on utilise des particules virtuelles pour marquer toute une région ne contenant qu'un seul fluide. Dans le cas d'un écoulement à surface libre, une cellule contenant des particules marqueurs est supposée contenir du fluide. Plus précisément, on considère que la surface libre coupe une cellule qui contient des marqueurs mais dont au moins une des voisines n'en contient aucun. Les particules marqueurs sont transportées de façon passive par l'écoulement, en général à l'aide d'une méthode lagrangienne.

Les méthodes de type MAC sont les premières à avoir permis d'étudier des écoulements à surface libre complexes comme l'impact d'une onde solitaire sur un mur vertical [13] ou l'impact d'une goutte sur un film liquide [43]. Une méthode permettant de simuler des écoulements diphasiques a été introduite par Daly [25] et utilisée pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Taylor entre deux fluides de densité différente.

Cependant, avec ces méthodes, il est nécessaire de stocker les coordonnées de chacun des points marqueurs, ce qui en limite le nombre. Une autre difficulté réside dans le fait que, pour conserver une bonne précision dans le calcul, il faut constamment redistribuer les points marqueurs dans les régions où l'écoulement a provoqué leur dispersion.

Des méthodes de marqueurs de volume, les méthodes de marqueurs de surface ont conservé le principe qui consiste à représenter les interfaces à l'aide de particules convectées par l'écoulement mais en n'utilisant des points marqueurs qu'au niveau des interfaces et pas à l'intérieur des fluides eux-mêmes. Cette approche est introduite par Daly [26] qui propose de connecter les marqueurs par des "splines" cubiques. Les méthodes de suivi de volume ont conservé l'idée de caractériser les interfaces de façon implicite, en ne représentant pas l'interface comme une surface régulière traversant le maillage mais en utilisant une quantité scalaire transportée passivement par l'écoulement.

B– Marqueurs de surface

Dans les méthodes de marqueurs de surface pour les écoulements bidimensionnels [76, 95], on représente l'interface à l'aide de points connectés par des courbes polynomiales, dites "splines". Les points marqueurs sont déplacés au cours du temps à l'aide du méthode lagrangienne. Comme ces points ne sont en général pas confondus avec les noeuds du maillage, il est nécessaire de calculer leur vitesse par interpolation à partir des vitesses des noeuds voisins. Contrairement aux méthodes de suivi de volume, il n'existe pas d'ambiguïté sur la position de l'interface. Ces méthodes permettent de représenter des interfaces régulières, de calculer leur pente et leur courbure et de suivre leur mouvement de façon précise. Connaissant exactement la position de l'interface par rapport au maillage, il est alors possible d'évaluer très précisément par une méthode de type volumes finis les contraintes dans chacun des volumes de contrôle séparés par l'interface [91, 95]. En utilisant une approche de ce type pour évaluer les termes de tension de surface comme décrit dans [76], on peut réduire considérablement les erreurs numériques dans le calcul

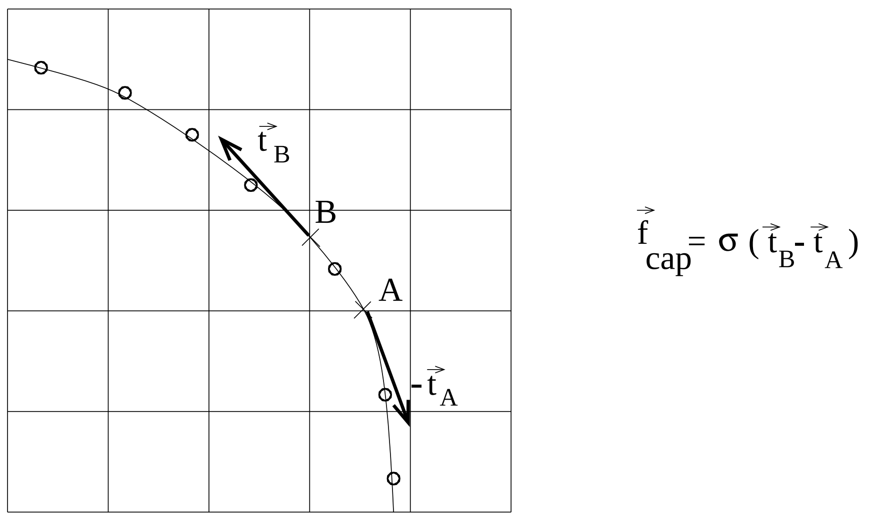


FIG. 2.2 – Représentation d'un interface par une méthode de marqueurs. Cette méthode permet de calculer précisemment la contribution des forces de tension de surface à l'interface. Dans la méthode décrite dans [76], la force de surface est calculée explicitement à l'interface à l'aide de l'expression $\mathbf{f}_{cap} = \sigma(\mathbf{t}_B - \mathbf{t}_A)$.

des sauts de contraintes à travers l'interface. Ceci permet de diminuer de façon importante l'intensité des courants parasites artificiels qui apparaissent fréquemment dans la région de l'interface avec certaines méthodes numériques [86, 57].

Avec ces méthodes, comme avec les méthodes de marqueurs en volume, il est nécessaire, pour conserver une précision suffisante dans le calcul, de réinitialiser les points marqueurs dans les zones dans lesquelles ils se sont dispersés. Ce type de réinitialisation permet de conserver une densité de marqueurs quasi-uniforme le long de l'interface au cours du calcul.

Contrairement aux méthodes de suivi de volume, il est difficile avec les méthodes de marqueurs de surface de reconnecter les interfaces de façon automatique. Les algorithmes de redistribution des points marqueurs qui assurent la rupture ou la coalescence des interfaces peuvent être complexes. Par ailleurs, il peut s'avérer difficile de calculer la quantité de mouvement impartie à chaque sous-domaine de fluide issu de la rupture d'une nappe liquide [74], voir Fig.2.3. Néanmoins, interdire les reconnexions bidimensionnelles peut être un avantage si on veut éviter qu'elles aient lieu de façon trop précoce, voire non physique, comme cela peut se produire avec une méthode de suivi de volume lorsque le maillage manque de résolution. Il faudrait atteindre des tailles de mailles correspondant à des échelles physiques de l'ordre de quelques centaines de nanomètres à partir desquelles les forces intermoléculaires attractives se font sentir, pour résoudre l'instant de la reconnexion avec précision. Mais il est encore difficile, à l'heure actuelle, de résoudre dans une même simulation numérique toutes les échelles de l'écoulement, des échelles microscopiques aux grandes échelles.

Les méthodes de marqueurs de surface pour les écoulements tridimensionnels comme

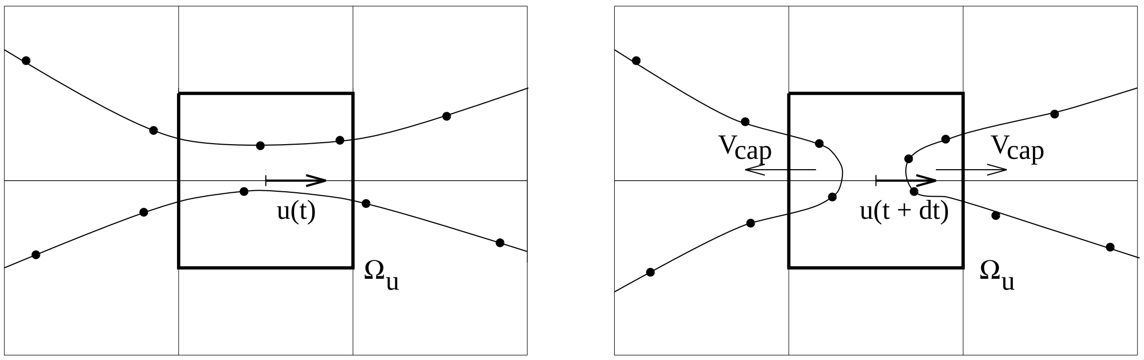


FIG. 2.3 – Exemple de reconnection d'interfaces avec une méthode de marqueurs. Ici, la reconnexion se produit dans une cellule de vitesse notée Ω_u. Après la reconnexion, les vitesses des deux sous domaines de fluide contenus dans la cellule Ω_u sont identiques ce qui interdit la rétraction des deux bourrelets liquides qui devrait se produire physiquement en présence de tension de surface ou en présence d'un champ d'étirement local.

celles utilisées par le groupe de Tryggvason [104], font aussi appel à des points marqueurs connectés. Cette fois, les éléments de surface sont des triangles contigus permettant de représenter des variétés bidimensionnelles dans un espace tridimensionnel. Les algorithmes de gestion des listes chaînées de marqueurs et de triangles et les algorithmes de redistribution sont complexes. Cependant, ce type de méthode n'est pas directement la généralisation au cas tridimensionnel des méthodes bidimensionnelles utilisant des splines cubiques. Les interfaces représentées sont moins régulières que celles qui seraient obtenues à l'aide de splines tridimensionnels mais des algorithmes d'interpolation d'ordre élevé permettent d'obtenir une bonne précision dans le calcul des contraintes de part et d'autre de l'interface. Par ailleurs, l'approche employée dans la méthode tridimensionnelle du groupe de Tryggvason pour évaluer les termes de surface est tout à fait opposée à celle qu'on utilise dans les méthodes de marqueurs bidimensionnelles utilisant des splines. En effet c'est une approche de type (i) qui est utilisée, l'interface étant artificiellement épaissie et une régularisation des termes de surface singuliers étant utilisée dans cette zone interfaciale. Cette approche consistant à épaissir l'interface permet aussi à ces méthodes de marqueurs tridimensionnelles de traiter les changements de topologie des interfaces plus facilement qu'avec une méthode qui aurait recours à des splines tridimensionnels.

C– Méthodes de suivi de volume

Les méthodes de suivi de volume utilisent une description implicite de l'interface (type (ii)). En effet, au lieu de représenter l'interface explicitement comme une surface qui traverse le maillage, on préfère la caractériser à l'aide d'une fonction de phase. En calculant l'évolution de cette fonction, on peut suivre l'interface au cours du temps. Dans les méthodes de Volume de Fluide (Volume of Fluid ou VOF en anglais) et dans les méthodes de ligne de niveau ("level set" en anglais), les fonctions de phase utilisées sont respectivement la fraction volumique d'un fluide par rapport à l'autre et la distance par rapport à l'interface.

C.1 – Méthodes de ligne de niveau ("level set")

Soit D la dimension de l'espace. Dans les méthodes de ligne de niveau, introduites par Osher et Sethian [67], on représente l'interface comme une ligne de niveau d'une fonction $\Phi(\mathbf{x}, t)$ paramétrant une variété de dimension D définie dans un espace de dimension $D + 1$.

Soit $\mathbf{u}$ la vitesse du fluide. L'évolution au cours du temps de la fonction Φ est régie par l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi = 0. \tag{2.13}$$

On peut choisir Φ par exemple comme la distance à l'interface. L'interface $\Gamma(t)$ est alors définie de façon évidente comme

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} / \Phi(\mathbf{x}, t) = 0\}. \tag{2.14}$$

Ces méthodes ont l'avantage d'être facilement généralisables au cas tridimensionnel. Par ailleurs, comme dans les autres méthodes de suivi de volume, les changements de topologie et les reconnexions d'interfaces s'effectuent de façon automatique, voir fig.2.4.

Puisque les interfaces sont définies comme l'intersection d'une variété de dimension D et d'un plan, leur épaisseur est nulle. Cependant, on choisit de les épaissir artificiellement pour régulariser les termes singuliers dans l'équation (2.12) ou pour éviter les difficultés numériques liées aux variations brutales de densité à travers les interfaces. Par ailleurs, l'absence de fortes discontinuités de ϕ permet d'utiliser des shémas numériques conservatifs classiques pour résoudre l'équation d'advection (2.13). Les méthodes de ligne de niveau sont utilisées pour étudier différents types de problèmes comme la solidification, la croissance de dendrites [15], certains problèmes de montée de bulles ou d'impact de gouttes [97]. A l'origine, ces méthodes conservaient difficilement la masse mais de nouveaux algorithmes de réinitialisation de ϕ ont permis d'améliorer ce défaut [99].

C.2 – Méthodes de Volume de Fluide ("Volume of Fluid" ou "VOF")

Pour repérer les interfaces, les méthodes de volume de fluide utilisent traditionnellement le champ de fraction volumique, noté C, d'un fluide par rapport à l'autre. Le champ C est l'équivalent discret de la fonction caractéristique χ définie au paragraphe 2.1.2. Ainsi, on définit la fraction volumique dans la cellule (i, j) comme

$$C_{i,j} = (\frac{1}{h})^2 \int_0^h \int_0^h \chi(x, y)\, dx\, dy\ . \tag{2.15}$$

Dans chacune des cellules contenant uniquement du fluide 1 ou uniquement du fluide 2, la fraction volumique vaut respectivemment un et zéro. Dans les cellules traversées par l'interface, la fraction volumique est strictement comprise entre zéro et un. A chaque

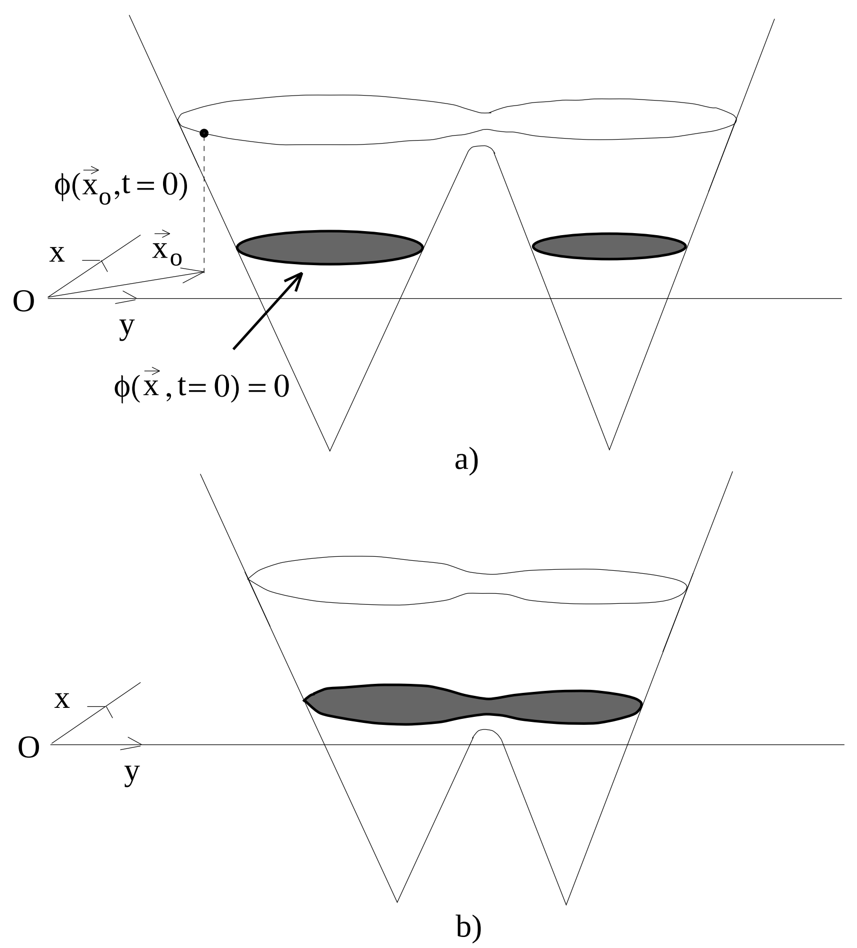


Fig. 2.4 – Changement de topologie de l'interface dans une méthode de ligne de niveau. Quelle que soit la topologie, les interfaces sont définies à l'aide d'une unique fonction $\Phi(\mathbf{x}, t)$ comme le lieu des points qui vérifient $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$. a) $t = 0$. En gris, deux sous-domaines non connexes. b) Plus tard, la topologie a changé. Il n'existe plus qu'une seule interface et un seul domaine connexe.

instant du calcul, la position de l'interface n'est pas connue et il faut la déterminer à partir du champ de fraction volumique pendant l'étape de *reconstruction* de l'interface. Pendant l'étape d'*advection*, cette interface reconstruite est transportée et les flux volumiques entre les différentes cellules du maillage sont évalués, ce qui permet de réactualiser le champ de fraction volumique.

Les différentes méthodes de type VOF ont connu de nombreuses évolutions depuis leur introduction dans les années 70. Les trois premières méthodes sont la méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation) de Noh et Woodward [64] utilisant des segments de droite alignés avec l'une des directions du maillage (figure 2.5.b), la méthode VOF de Hirt et Nichols [46] qui utilise une recontruction en escalier de l'interface (figure 2.5.c), la méthode de De Bar [29] qui utilise pour la première fois une reconstruction de l'interface à l'aide de segments affines, non parallèles aux directions du maillage (figure 2.5.d). Cette dernière approche est nommée PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) en anglais ou CIAM (Calcul d'Interface Affine par Morceaux) en français. Les méthodes de type PLIC sont davantage utilisées de nos jours, mais la méthode introduite par De Bar comportait des imprécisions dans le calcul de la normale à l'interface. En effet, seule la distribution de fraction volumique dans la direction du balayage en cours était prise en compte pour calculer la normale. Ces imprécisions dans la première méthode PLIC ont avantagé le développement des méthodes moins précises comme la méthode VOF originelle ou la méthode SLIC. Ces dernières présentent par ailleurs le défaut de générer des "débris" non physiques, plus petits que la taille de la maille, qui apparaissent au niveau des interfaces et sont éjectés de la phase liquide dans le reste de l'écoulement, voir [57]. Il faudra attendre les améliorations apportées par Youngs [111] dans le calcul de la normale à l'interface pour que les méthodes de type PLIC soient de nouveau utilisées. Plus tard, d'autres méthodes de ce type ont été développées [61, 79]. L'une des approches originales est la méthode FLAIR [3] dans laquelle des segments affines connectés au niveau des faces des cellules sont utilisés, ce qui permet de reconstruire une interface plus régulière qu'avec les autres méthodes de type PLIC (figure 2.5.e). Cependant, imposer la continuité de l'interface d'une cellule à l'autre peut introduire des contraintes dans la méthode de reconstruction non compatibles avec la contrainte de conservation du volume.

Dans les méthodes de type PLIC les plus récentes, on cherche à améliorer la précision des algorithmes de reconstruction et d'advection de l'interface. Ainsi, une méthode capable de reconstruire de façon exacte une droite à partir du champ de fraction volumique associé, est nécessairement précise au second ordre. La précision des méthodes de reconstruction d'interface est discutée dans [72] et des algorithmes précis au second ordre sont présentés.

La plupart des méthodes modernes utilisent des algorithmes géométriques pour advecter l'interface au cours du temps [84, 72, 61, 41]. L'équation de l'interface reconstruite est directement utilisée pour calculer les flux volumiques traversant les faces des cellules du maillage. Dans le cas des méthodes de type PLIC, il existe deux types d'approches dans le traitement de l'étape d'advection. Soit l'étape d'advection est effectuée à l'aide de plusieurs pas fractionnaires, au cours desquels l'interface est advectée dans une seule direction de l'espace, soit à l'aide d'un pas unique. Si les algorithmes à pas fractionnaires sont généralement moins précis que les algorithmes à pas unique, ils sont plus simples à

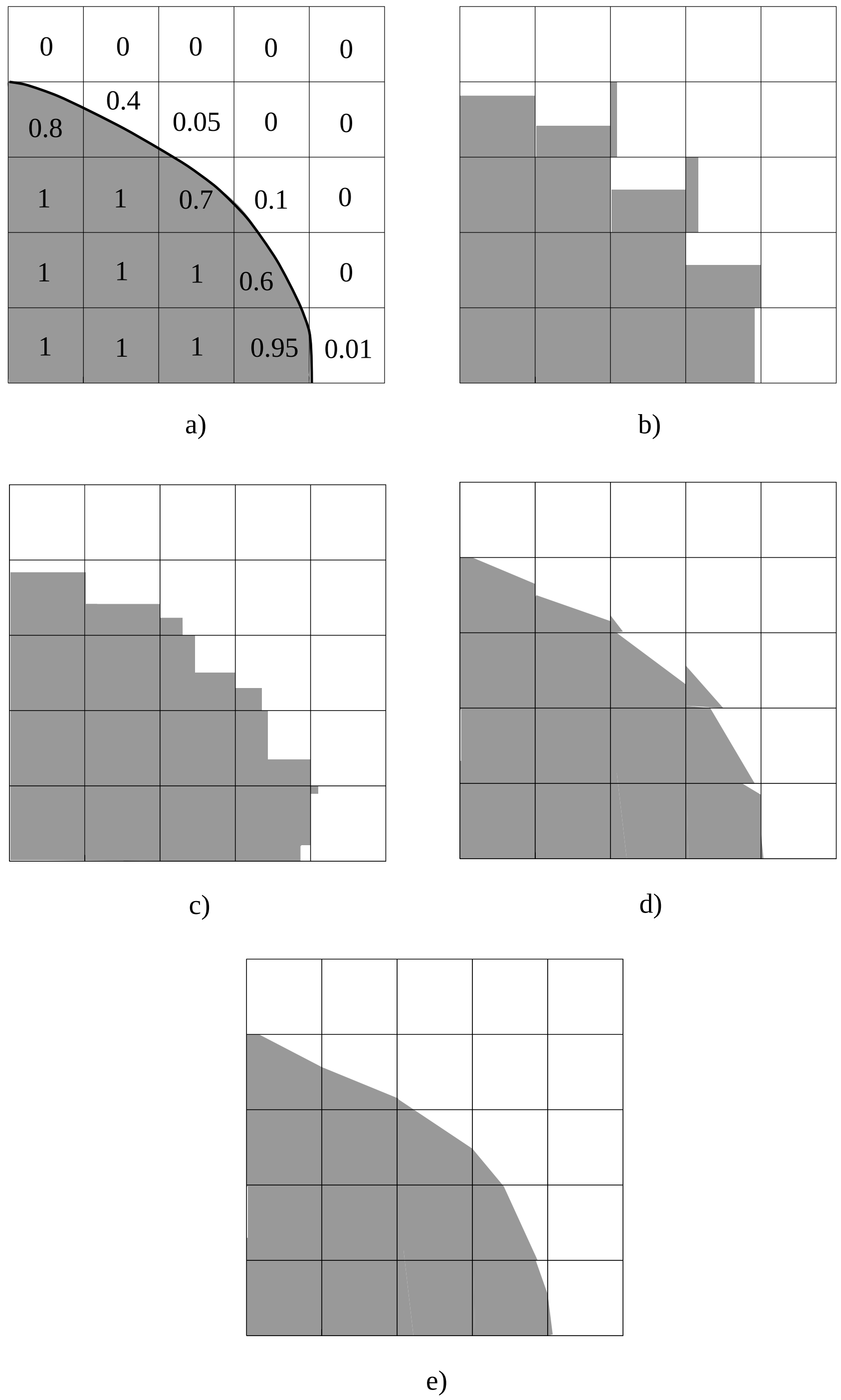


FIG. 2.5 – a) Interface coupant un maillage et champ de fraction volumique associé. b) L'interface est reconstruite à l'aide de segments de droite alignés avec l'une des directions du maillage, méthode de type SLIC. c) Reconstruction en escalier. d) Reconstruction affine par morceau, méthode de type PLIC. e) Méthode FLAIR.

mettre en oeuvre, en particulier dans les cas tridimensionnels.

Chapitre 3

Méthode de Volume de Fluide tridimensionnelle

Nous présentons une méthode de Volume de Fluide pour les écoulements tridimensionnels. La méthode de reconstruction est précise au premier ordre, mais pour des résolutions faibles sa précision est similaire à celle des méthodes de second ordre. Nous utilisons une méthode d'advection lagrangienne à pas fractionnaires qui tient compte des variations de la pente de l'interface au cours de son mouvement. Les équations du mouvement sont écrites dans des systèmes de coordonnées cartésiennes ou cylindriques. La méthode utilise un algorithme de projection et une discrétisation explicite du premier ordre des dérivées temporelles ainsi qu'une discrétisation du second ordre des dérivées spatiales sur un maillage MAC ("Marker And Cells"). Une équation de Poisson pour la pression est inversée à l'aide d'une méthode multigrille.

3.1 Méthode tridimensionnelle de reconstruction et d'advection de l'interface

Pour suivre l'interface au cours du temps, la méthode de volume de fluide procède en plusieurs étapes. Pendant l'étape de reconstruction, le vecteur normal à l'interface est d'abord calculé à partir du champ de fraction volumique, puis un plan ayant même normale est construit dans chaque cellule. La position du plan est ajustée pour que dans chaque cellule, le volume imparti à chacun des fluides de part et d'autre du plan corresponde exactement à la fraction volumique dans la cellule. Un plan unique est ainsi défini dans chacune des cellules. Chaque plan est ensuite advecté de façon lagrangienne et les flux volumiques à travers les faces des cellules sont calculés, ce qui permet de réactualiser le champ de fraction volumique.

TAB. 3.1 – norme L_1 de l'erreur entre l'ellipse reconstruite et l'ellipse exacte et ordre de convergence de la méthode, pour la méthode de Parker et Youngs (PY) et la méthode de moindres carrés (MC).

points de maillage	erreur (PY)	ordre (PY)	erreur (MC)	ordre (MC)
10^2	3.86e-3		4.78e-3	
		2.31		2.43
20^2	7.78e-4		8.86e-4	
		1.81		2.38
40^2	2.21e-4		1.79e-4	
		1.40		2.13
80^2	8.40e-5		4.10e-5	
		1.15		2.04
160^2	3.78e-5		1.00e-5	
		1.06		2.00
320^2	1.81e-5		2.49e-6	

3.1.1 Calcul de la normale à l'interface

Une approximation du vecteur normal à l'interface est calculée à l'aide de la formule aux différences finies

$$\mathbf{n}^h = \nabla^h C \tag{3.1}$$

qui est l'équivalent discret de l'expression

$$\nabla \chi = \mathbf{n}\delta_S, \tag{3.2}$$

définie au sens des distributions.

Nous présentons le schéma de Parker et Youngs (PY) [68] à 9 points utilisé pour calculer $\mathbf{n}^h$ dans un cas bidimensionnel. Le schéma à 27 points utilisé dans un cas tridimensionnel en est la généralisation directe [60].

Tout d'abord, un vecteur normal défini au point $(i+1/2, j+1/2)$ est écrit comme

$$\mathbf{n}^h_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} C_{i+1,j} - C_{i,j} + C_{i+1,j+1} - C_{i,j+1} \\ C_{i,j+1} - C_{i,j} + C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

puis la normale au centre de la cellule (i, j) est définie comme

$$\mathbf{n}^h_{i,j} = \frac{1}{4}(\mathbf{n}^h_{i+1/2,j+1/2} + \mathbf{n}^h_{i-1/2,j+1/2} + \mathbf{n}^h_{i+1/2,j-1/2} + \mathbf{n}^h_{i+1/2,j+1/2}) \tag{3.4}$$

La précision de la méthode est fonction de la résolution du maillage. Pour mesurer précisément l'erreur, nous avons effectué un test de reconstruction d'une ellipse pour des résolutions comprises entre 10 et 320 mailles dans chaque direction d'espace. L'erreur est la norme L^1 de la différence entre la courbe reconstruite et la courbe exacte. Nous avons comparé cette erreur à celle obtenue avec notre implémentation d'une méthode de type moindre carré (MC) [72] précise au second ordre. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.1. Nous constatons que le comportement asymptotique, lorsque $h \to 0$, de la méthode (PY) et de la méthode (MC) correspond respectivement à celui d'une méthode du premier ordre et d'une méthode du second ordre. Cependant pour les faibles résolutions, les deux méthodes ont une précision similaire correspondant à celle d'une méthode du second ordre.

3.1.2 Construction du plan

Connaissant la fraction volumique et la normale à l'interface dans chacune des cellules du maillage, il s'agit de construire un plan ayant la même normale et d'ajuster sa position pour que la fraction volumique impartie à chacun des fluides soit respectée.

Examinons tout d'abord le cas bidimensionnel. Dans chaque cellule, l'interface est reconstruite à l'aide d'une droite d'équation

$$n_1 x + n_2 y = \alpha \tag{3.5}$$

avec (n_1, n_2) les composantes du vecteur normal $\mathbf{n}$. On suppose que n_1 et n_2 sont tous deux positifs. Quelle que soit la configuration, on peut toujours se ramener à ce cas à l'aide d'une transformation simple. Pour connaître l'équation de la droite, il est nécessaire d'identifier le paramètre α.

Le paramètre α peut être identifié en inversant une équation de la forme

$$A = \mathcal{F}(\alpha, n_1, n_2, h_1, h_2) \tag{3.6}$$

avec h_1 et h_2 la longueur des faces de la cellule et A l'aire du sous-domaine contenant uniquement du fluide 1 qui doit par ailleurs être égale à l'aire de la région se trouvant en dessous du segment de droite à construire. Pour résoudre le problème "inverse" consistant à identifier α, nous nous plaçons dans le cas particulier où la cellule est rectangulaire, i.e. $h_1 = h_2 = h$. L'aire A est alors égale à $h^2 C$ et il s'agit d'inverser l'équation $h^2 C = \mathcal{F}(\alpha, n_1, n_2, h, h)$. En revanche, pendant l'étape d'advection, nous évaluons les flux volumiques à travers les faces des cellules en calculant l'aire de la région comprise dans une bande de largeur variable et en dessous du plan advecté. Dans ce cas, on a besoin de la formule (3.6) écrite dans un cas général avec h_1 et h_2 quelconques. Ainsi, identifier l'expression de $\mathcal{F}$ permet non seulement d'inverser l'équation (3.6) et de déterminer la valeur de α, mais aussi d'évaluer les flux volumiques qui traversent les faces des cellules au cours de l'étape d'advection.

Une expression pour $\mathcal{F}$ peut être obtenue à l'aide de considérations géométriques. Considérons le triangle AEH de la figure 3.1. L'aire A correspond à l'aire de la région ABFGD. L'aire du triangle AEH vaut

$$\frac{\alpha^2}{2 n_1 n_2}. \tag{3.7}$$

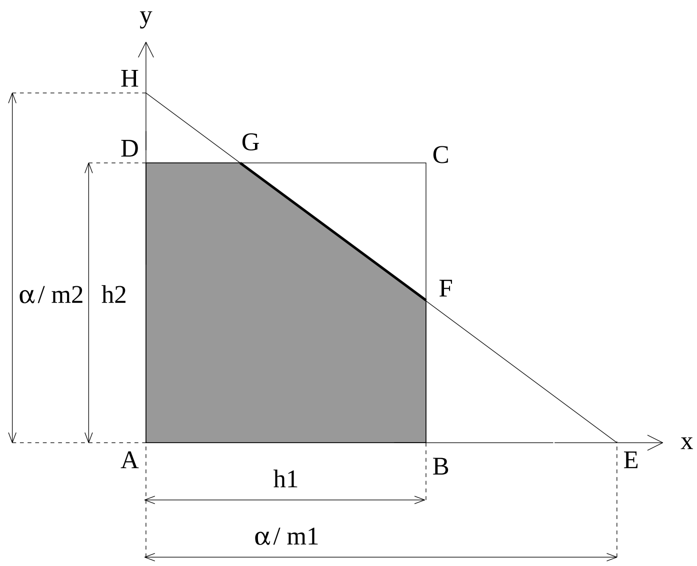


FIG. 3.1 – L'aire A correspond à l'aire de la région grisée sous le segment à construire. Les points d'intersection entre la droite à construire et les axes x et y ont pour coordonnées $(\alpha/n_1, 0)$ et $(0, \alpha/n_2)$.

Les triangles AEH, BEF et DGH sont homothétiques et dans la figure 3.1 l'aire de la région ABFGD s'obtient simplement en soustrayant l'aire des triangles BEF et DGH à l'aire du triangle AEH. Il en résulte que

$$A = \frac{\alpha^2}{2n_1n_2}\left[1 - H(\alpha - h_1\,n_1)(\frac{\alpha - h_1\,n_1}{\alpha})^2 - H(\alpha - h_2\,n_2)(\frac{\alpha - h_2\,n_2}{\alpha})^2\right] \tag{3.8}$$

avec $H(.)$ la fonction de Heaviside.

Si, comme dans la figure 3.1, le point E se trouve à l'extérieur de la cellule, alors $\alpha > h_1\,n_1$ et $H(\alpha - h_1\,n_1) = 1$ et l'aire du triangle BEF est soustraite à l'aire du triangle AEH. Si au contraire, le point E se trouve à l'intérieur de la cellule, i.e $\alpha < h_1\,n_1$, alors $H(\alpha - h_1\,n_1) = 0$ et rien n'est à soustraire. On peut effectuer un raisonnement similaire avec le point H et le triangle DGH. Si les deux points E et H se trouvent tous deux à l'intérieur de la cellule, alors l'aire A est égale à $\alpha^2/2n_1n_2$. Ainsi la formule (3.8) prend en compte tous les cas possibles.

On peut aisément généraliser ce résultat au cas tridimensionnel. Considérons la surface plane IJK de la figure 3.2. L'équation de cette surface s'écrit

$$n_1x + n_2y + n_3z = \alpha \tag{3.9}$$

avec (n_1, n_2, n_3) les composantes du vecteur normal à l'interface.

Il s'agit de calculer le volume du sous domaine contenant uniquement du fluide 1, i.e le volume, noté V du parallélépipède ABGHNMLK (en grisé sur la figure 3.2) en fonction

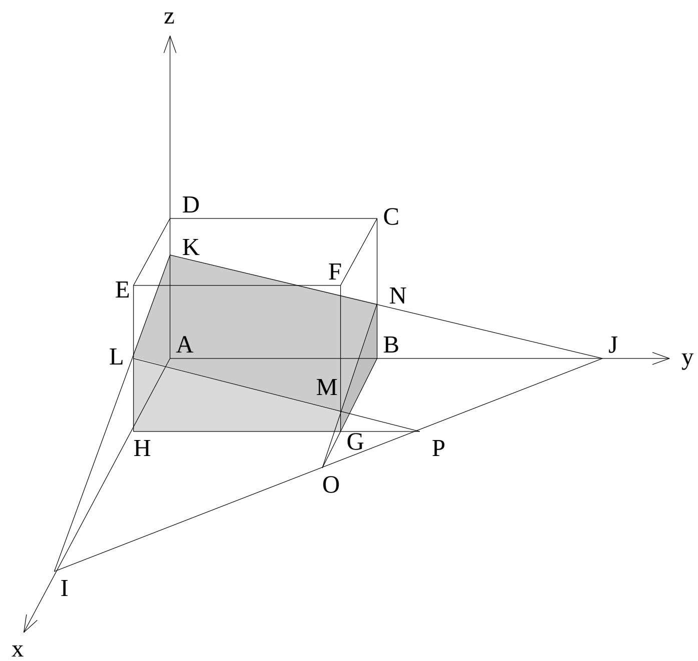


FIG. 3.2 – Le volume V correspond au volume de la région grisée en dessous du plan à construire.

de n_1, n_2, n_3 et de α. On a $AI = \alpha/n_1$, $AJ = \alpha/n_2$, $AK = \alpha/n_3$ et donc le volume du tétraèdre AIJK vaut

$$\frac{\alpha^3}{6n_1n_2n_3}. \tag{3.10}$$

Pour obtenir le volume V, il faut soustraire le volume des tétraèdres BOJN et HIPL à celui du tétraèdre AIJK. Ces trois tétraèdres étant homothétiques, leur volume est facilement calculable. Il faut noter que le volume du petit tétraèdre GOPM étant soustrait deux fois lorsque l'on soustrait le volume des tétraèdres BOJN et HIPL, il est nécessaire d'ajouter une fois ce volume à l'expression de V.

Il vient

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{6n_1n_2n_3}\,[\,\alpha^3 \\ & -\sum_{j=1}^{3} H(\alpha - h_j\,n_j)(\alpha - h_j\,n_j)^3 \\ & +\sum_{j=1}^{3} H(\alpha - (h_1n_1 + h_2n_2 + h_3n_3) + h_j\,n_j)(\alpha - (h_1n_1 + h_2n_2 + h_3n_3) + h_j\,n_j)^3\,] \end{aligned} \tag{3.11}$$

chacun des $H(\alpha - h_j\,n_j)$ valant 0 ou 1 suivant que les points I, J et K se trouvent à l'intérieur ou à l'extérieur de la cellule ABCDEFGH. Les $H(\alpha-(h_1n_1+h_2n_2+h_3n_3)+h_jn_j)$ permettent de tester si les droites IJ, KJ et KI coupent ou non les faces de la cellule et si le volume de chacun des tétradèdres du type OGPM doit être ajouté.

En inversant, à l'aide d'une méthode de Newton, l'équation (3.8) dans le cas bidimensionnel en posant $h_1 = h_2 = h$ ou l'équation (3.11) dans le cas tridimensionnel en posant $h_1 = h_2 = h_3 = h$, on détermine pour chaque cellule (i, j) (resp. (i, j, k)) la valeur de $\alpha_{i,j}$ (resp. $\alpha_{i,j,k}$) telle que $\alpha_{i,j} = \mathcal{F}^{-1}(C_{i,j}h^2, \mathbf{n}_{i,j})$ (resp. $\alpha_{i,j,k} = \mathcal{F}^{-1}(C_{i,j,k}h^3, \mathbf{n}_{i,j,k})$).

3.1.3 Advection de l'interface

L'interface reconstruite est advectée à l'aide d'une méthode lagrangienne à pas fractionnaires. A chaque pas, l'interface reconstruite est propagée dans une seule direction de l'espace.

Considérons, sans perte de généralité, le pas dans la direction x. Le raisonnement qui suit est applicable à n'importe quel autre pas fractionnaire. Soient $\Omega = [0, h]^3$ le domaine de la cellule, u_1 la vitesse en $x = 0$ et u_2 la vitesse en $x = h$. L'équation de l'interface à la fin du pas fractionnaire est obtenue simplement à l'aide de la transformation, définie pour chaque point $M(x, y, z)$ de l'interface, qui s'écrit

$$\begin{aligned} x' &= x + \tau u(x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $u(x)$ est calculé par interpolation linéaire comme

$$u(x) = (1 - \frac{x}{h})u_1 + \frac{x}{h}u_2 \,. \tag{3.13}$$

Le plan advecté dans une direction de l'espace est l'image par la transformation (3.12) du plan reconstruit. Son équation s'écrit

$$n_1'x' + n_2'y' + n_3'z' = \alpha' \tag{3.14}$$

avec

$$n_1' = \frac{n_1}{1 + (u_2 - u_1)\tau/h} \tag{3.15}$$

$$n_2' = n_2 \tag{3.16}$$

$$n_3' = n_3 \tag{3.17}$$

$$\alpha' = \alpha + \frac{n_1 \tau u_1}{1 + (u_2 - u_1)\tau/h} \tag{3.18}$$

Sur l'exemple de la figure 3.3, le point a est transporté d'une distance τu_2 en c. Le point b est transporté d'une distance τu_1 en d et donc image par la transformation (3.12) du segment ab est le segment cd.

L'avantage de cette méthode par rapport à d'autres méthodes à pas fractionnaire, est qu'elle permet de tenir compte de la variation de la pente de l'interface au cours de chacune des étapes d'advection. En effet, l'interface peut subir un étirement ou une compression dans une direction si $u_1 \neq u_2$. Il faut noter que la condition d'incompressibilité entraîne, dans le cas où l'interface est étirée au cours d'une des étapes de l'advection, sa compression au cours d'une des autres étapes au moins.

La position du plan après advection est directement utilisée pour calculer les flux volumiques à travers les bords de la cellule. Ainsi, sur l'exemple de la figure 3.3, l'aire en dessous du plan après advection et contenu dans la bande de largeur $u_2\tau$ est une approximation du flux volumique provenant de la cellule de gauche et entrant dans la cellule de droite. Pour calculer cette aire, on effectue le changement de coordonnées $x'' = x' + h$, $y'' = y'$, $z'' = z$ permettant de ramener l'origine au niveau de la face gauche de la cellule de droite. L'équation du plan advecté devient

$$n'_1 x'' + n'_2 y'' + n'_3 z'' = \alpha' - n'_1 h \tag{3.19}$$

et le flux volumique entrant dans la cellule de droite est calculé en évaluant l'expression $\mathcal{F}(\alpha' - n'_1 h, n'_1, n'_2, n'_3, u_2\tau, h, h)$.

Au total, la fraction volumique $C^{(x)}_{i,j,k}$ dans la cellule (i, j, k) est calculée à partir de trois contributions : les flux Φ^- et Φ^+ entrant dans la cellule (i, j, k) à partir des cellules $(i-1, j, k)$ et $(i+1, j, k)$, et Φ^0 la fraction de volume de fluide qui se trouvait initialement dans la cellule et qui s'y trouve toujours à la fin de l'étape d'advection

$$C^{(x)}_{i,j,k} = \Phi^-_{i,j,k} + \Phi^+_{i,j,k} + \Phi^0_{i,j,k} \tag{3.20}$$

La précision de cette méthode est discutée dans l'Annexe A. Nous montrons que cette méthode géométrique permet d'obtenir une approximation des flux volumiques plus précise que celle obtenue avec les méthodes à pas fractionnaires dans lesquelles les flux sont calculés en utilisant la position de l'interface avant l'étape d'advection [72] (figure 3.4).

3.2 Résolution des équations du mouvement

3.2.1 Formulation des équations du mouvement en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cartésiennes est utilisé pour étudier aussi bien des problèmes bidimensionnels que tridimensionnels. Cependant, un certain nombre de problèmes tridimensionnels possèdent une symétrie de révolution autour d'un axe fixe. Soit cette symétrie existe dans le problème physique étudié, comme c'est par exemple le cas dans les problèmes de montée de bulles, de chute de gouttes à faible nombre capillaire ($Ca = \mu U/\sigma << 1$) ou dans les problèmes de gouttes pendantes, soit l'hypothèse en est faite lorsque la géométrie du problème considéré s'écarte peu d'une géométrie de révolution. Ainsi, nous étudions à l'aide de simulations en coordonnées cylindriques la montée de bulles à nombre capillaire élevé ou le phénomène de formation de la corolle issue de l'impact d'une goutte sur un film liquide. Par contre, des simulations tridimensionnelles sont effectuées pour étudier les mécanismes de tridimensionnalisation de la corolle et la formation des digitations.

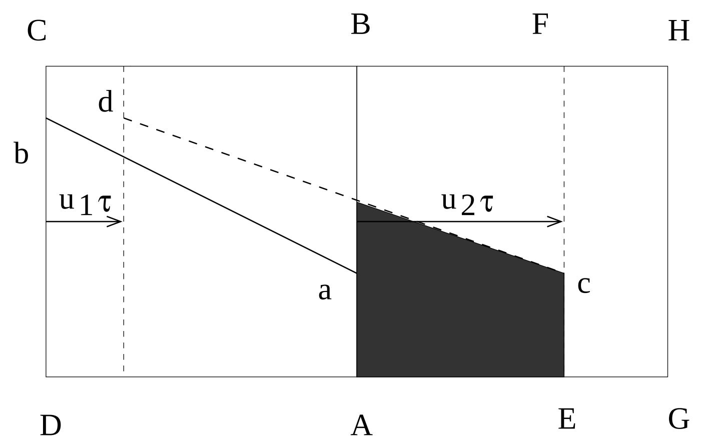


Fig. 3.3 – Une étape de la méthode d'advection lagrangienne à deux dimensions. L'interface est advectée dans une seule direction d'espace. On considère deux cellules adjacentes ABCD et AGHB. Le segment d'interface *ab* est transporté en *cd*. Le volume de fluide entrant dans la cellule AGHB correspond à la surface de la région en gris en dessous du segment *cd*. La pente de l'interface a changé au cours du pas fractionnaire et l'interface a été étirée. La condition d'incompressibilité impose que l'interface subisse une compression au cours d'un des autres pas fractionnaires au moins.

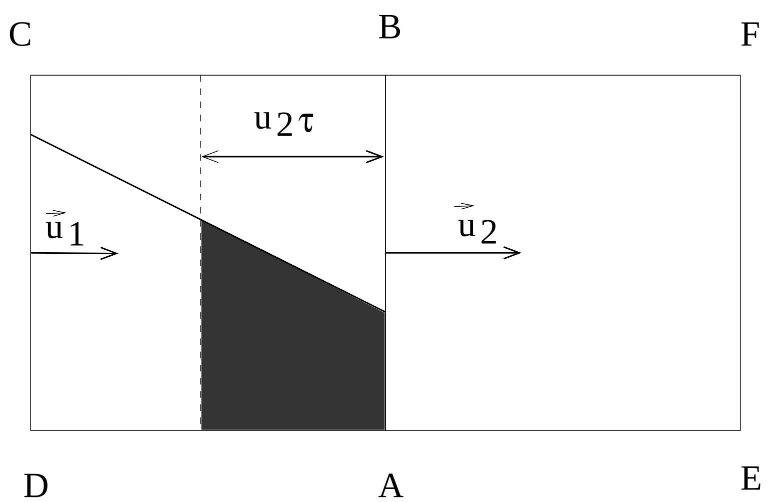


Fig. 3.4 – Méthode à pas fractionnaire classique. Les flux volumiques sont calculés à l'aide de l'équation de l'interface avant advection. La fraction volumique provenant de la cellule ABCD et entrant dans la cellule ABEF correspond à la surface en grisé se trouvant à la fois en dessous de l'interface et dans la bande de largeur $u_2\tau$. Cette méthode ne permet pas de prendre en compte une modification de la pente de l'interface au cours du pas fractionnaire.

Les équations du mouvement (2.12) et (2.11) sont tout d'abord écrites sous forme conservative puis projetées sur la base des coordonnées cartésiennes. Nous présentons ensuite les équations écrites dans le repère des coordonnées cylindriques.

Équations de Navier-Stokes sous forme conservative

Il est possible d'écrire l'équation de Navier-Stokes (2.12) sous la forme d'une équation de conservation. Le terme de tension capillaire peut être exprimé à l'aide du tenseur de pression capillaire $\mathbf{T}$ défini par

$$\mathbf{T} = \sigma(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\delta_S, \tag{3.21}$$

avec $\mathbf{1}$ le tenseur identité. A l'aide de (3.2) on peut écrire (3.21) sous la forme

$$\mathbf{T} = \sigma(|\nabla\chi|\mathbf{1} - \frac{\nabla\chi \otimes \nabla\chi}{|\nabla\chi|}). \tag{3.22}$$

Alors, la force de tension de surface $\mathbf{f}_{cap}$ peut être exprimée à l'aide du tenseur $\mathbf{T}$ [57] comme

$$\mathbf{f}_{cap} = \sigma\kappa\delta_S\mathbf{n} = \nabla \cdot \mathbf{T}. \tag{3.23}$$

Nous notons $\mathbf{\Pi}$ le tenseur d'advection défini par

$$\mathbf{\Pi} = \rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \tag{3.24}$$

et $\mathbf{S}$ le tenseur visqueux qui s'écrit

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D}, \tag{3.25}$$

où ρ et μ dépendent implicitement de χ à travers les définitions

$$\rho = \chi\rho_1 + (1-\chi)\rho_2, \tag{3.26}$$

$$\mu = \chi\mu_1 + (1-\chi)\mu_2. \tag{3.27}$$

L'équation (2.12) s'écrit alors sous forme conservative

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{1} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{S} - \mathbf{T}). \tag{3.28}$$

Coordonnées cartésiennes

Soit D la dimension de l'espace. Dans le cas $D = 3$, on peut définir $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base orthonormée. Dans cette base, l'opérateur gradient s'écrit

$$\nabla = \sum_{i=1}^{D} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.29}$$

Notons

$$\mathbf{L} = p\mathbf{1} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{S} - \mathbf{T} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j L_{ij}\,. \tag{3.30}$$

avec

$$L_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j - 2\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) - \sigma(\delta_{ij} - n_i n_j)\delta_S. \tag{3.31}$$

avec δ_{ij} le symbole de kronecker et (n_1, n_2, n_3) les composantes de la normale $\mathbf{n}$ dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
A l'aide de (3.29) on peut exprimer (3.28) dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sous la forme

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{L} = -\sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{D} \mathbf{e}_i \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i} \tag{3.32}$$

Coordonnées cylindriques

Nous considérons ici des configurations d'écoulements diphasiques invariants par rotation autour d'un axe de symétrie noté (Oz). L'angle azimutal est noté θ et la distance à l'axe r. Les vecteurs du repère sont notés $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Toutes les grandeurs scalaires sont invariantes par rotation autour de l'axe. La composante azimutale v_θ de la vitesse est nulle.

a) Équations du mouvement

Dans le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, la vitesse du fluide est définie par

$$\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_z\mathbf{e}_z \tag{3.33}$$

et l'opérateur gradient s'écrit :

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{3.34}$$

Les vecteurs $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ sont tous deux des fonctions de l'angle θ. Leurs dérivées par rapport à θ s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta\,, \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r\,, \tag{3.35}$$

A l'aide de (3.33), (3.34) et (3.35), le tenseur gradient de la vitesse s'écrit sous la forme

$$\nabla\mathbf{u} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \mathbf{e}_r\mathbf{e}_z\frac{\partial u_z}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta\frac{u_r}{r} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_r\frac{\partial u_r}{\partial z} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\,. \tag{3.36}$$

En prenant la trace de ce tenseur, on obtient l'expression de la divergence de la vitesse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\,. \tag{3.37}$$

En coordonnées cylindriques, le tenseur $\mathbf{D}$ s'écrit alors dans le cas d'un fluide incompressible sous la forme

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\right) = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r D_{rr} + \mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta D_{\theta\theta} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z D_{zz} + \mathbf{e}_r\mathbf{e}_z D_{rz} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_r D_{zr}\,, \tag{3.38}$$

avec

$$D_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3.39)$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (3.40)$$

$$D_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.41)$$

$$D_{zr} = D_{rz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z})\,. \quad (3.42)$$

Pour simplifier les notations dans la suite du calcul, notons

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D} \quad (3.43)$$

A l'aide de (3.34), (3.35) et (3.38), on obtient l'expression de la divergence du tenseur $\mathbf{S}$ dans le système de coordonnées cylindriques

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = \mathbf{e}_r[\frac{1}{r}\frac{\partial(rS_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zr}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r}] + \mathbf{e}_z[\frac{1}{r}\frac{\partial(rS_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}]\,. \quad (3.44)$$

Le tenseur $\mathbf{\Pi}$ est défini par

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r\Pi_{rr} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z\Pi_{zz} + \mathbf{e}_r\mathbf{e}_z\Pi_{rz} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_r\Pi_{zr}\,, \quad (3.45)$$

avec

$$\Pi_{rr} = \rho u_r^2 \quad (3.46)$$

$$\Pi_{zz} = \rho u_z^2 \quad (3.47)$$

$$\Pi_{zr} = \Pi_{rz} = \rho u_r u_z\,. \quad (3.48)$$

En effet les termes $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\theta r}$, $\Pi_{r\theta}$, $\Pi_{\theta z}$ et $\Pi_{z\theta}$ sont nuls car $v_\theta = 0$. Le terme d'advection $\nabla\cdot\mathbf{\Pi}$ dans l'équation (3.28) s'écrit en remplaçant dans (3.44) les coordonnées de $\mathbf{S}$ par celles de $\mathbf{\Pi}$. Il en résulte que

$$\nabla\cdot\mathbf{\Pi} = \mathbf{e}_r[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Pi_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\Pi_{zr}}{\partial z}] + \mathbf{e}_z[\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Pi_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\Pi_{zz}}{\partial z}]\,. \quad (3.49)$$

En l'absence de tension de surface, l'équation de continuité et les composantes dans les directions (Or) et (Oz) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent finalement sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0\,, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial(\rho u_r)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r(S_{rr}-\Pi_{rr}))}{\partial r} + \frac{\partial S_{zr}}{\partial z} - \frac{\partial\Pi_{zr}}{\partial z} - \frac{S_{\theta\theta}}{r}\,, \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r(S_{rz}-\Pi_{rz}))}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial\Pi_{zz}}{\partial z}\,. \quad (3.52)$$

b) Termes de tension de surface

On peut remarquer que l'équation (3.51) ne peut pas s'écrire sous forme conservative. Pour s'en convaincre, notons $\mathbf{K}$ n'importe lequel des tenseurs apparaissant dans les équations du mouvement sous la forme $\nabla \cdot \mathbf{K}$. En intégrant sur un élément de volume $rdrdzd\theta$ la quantité

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rK_{rr})}{\partial r} \tag{3.53}$$

qui apparait dans l'équation (3.51) on constate que c'est non pas la quantité K_{rr} mais la quantité rK_{rr} qui est conservée.

Les équations du mouvement ne pouvant pas s'écrire sous forme conservative dans le système de coordonnées cylindriques, nous ne tentons pas d'exprimer le terme de tension de surface sous forme de la divergence d'un tenseur mais utilisons simplement la forme

$$\mathbf{f}_{cap} = \sigma\kappa\delta_S\mathbf{n} \tag{3.54}$$

avec

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{n_r}{r} - \frac{\partial n_r}{\partial r} - \frac{\partial n_z}{\partial z}. \tag{3.55}$$

avec $(n_r, 0, n_z)$ les composantes de la normale $\mathbf{n}$ dans le repère.
Le premier terme de l'équation (3.55) $-n_r/r$ est le terme de courbure cylindrique et le terme $-\partial n_r/\partial r - \partial n_z/\partial z$ est le terme de courbure purement bidimensionnelle, i.e. la courbure de la trace de l'interface dans n'importe quel plan d'équation $\theta = \theta_0$ fixé.

3.2.2 Discrétisation des équations du mouvement

Les équations du mouvement sont discrétisées sur un maillage cartésien de type MAC ("Marker And Cell") utilisé dans les premières méthodes de marqueurs de volume [43], voir fig. 3.5. Dans les cas bidimensionnels, les cellules sont carrées (resp. cubiques dans les cas tridimensionnels) de côté h. Le pas de temps est noté τ. La pression, la fraction volumique et les composantes diagonales des tenseurs sont calculées au centre de la cellule. Les différentes composantes de la vitesse sont calculées sur les faces et les composantes non diagonales des tenseurs au niveau des coins de la cellule.

On calcule la solution $u^{(n+1)}$ au pas de temps $t^{(n+1)} = (n+1)\tau$ à partir de la solution $u^{(n)}$ au temps $t^{(n)}$ en plusieurs étapes.

a) Tenseur visqueux, tenseur d'advection et force capillaire

Un premier pas permet d'obtenir le champ intermédiaire

$$u^* = u^{(n)} - \tau[\nabla^h \cdot \Pi^h + \frac{1}{\rho^h}\nabla^h \cdot (2\mu^h\mathbf{D^h}) + \mathbf{f}^h_{cap}] \tag{3.56}$$

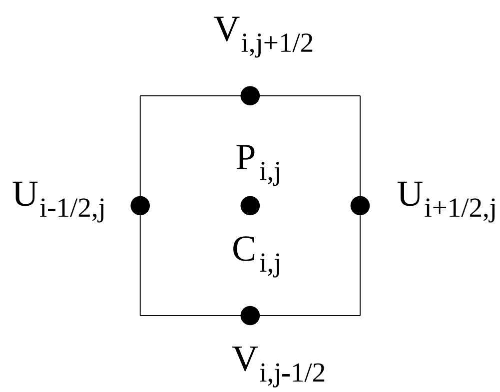


FIG. 3.5 – Cellule MAC utilisée dans un cas bidimensionnel.

où ρ^h et μ^h sont la densité et la viscosité moyennes définies par

$$\rho^h = C\rho_1 + (1-C)\rho_2 \tag{3.57}$$

$$\mu^h = C\mu_1 + (1-C)\mu_2 \tag{3.58}$$

L'équation (3.57) (respectivement (3.58)) est l'équivalent discret de l'équation (3.26) (respectivement (3.27)). Dans le cas des coordonnées cartésiennes, la force capillaire est écrite sous la forme

$$\mathbf{f}^h_{cap} = \sigma\nabla^h \cdot (|\nabla^h C|\mathbf{1} - \frac{\nabla^h C \otimes \nabla^h C}{|\nabla^h C|}). \tag{3.59}$$

qui est la discrétisation de l'équation (3.21). Une formulation tensorielle étant utilisée dans cette méthode, on la nomme méthode CSS (“Continuous Surface Stress”, qui signifie contrainte de surface continue) [57] par opposition à la méthode CSF (“Continuous Surface Force”, qui signifie force de surface continue) [8].

La discrétisation des équations du mouvement sur un maillage MAC dans un système de coordonnées cartésiennes est présentée dans [60].

Nous examinons plus en détail le cas des coordonnées cylindriques.

L'expression du champ intermédiaire $\mathbf{u}^*$ est obtenue en discrétisant les équations (3.51) et (3.52) sous la forme

$$u^*_r = u^{(n)}_r + \frac{\tau}{\rho^h}\left(\frac{1}{r^h}\nabla^h_r(r^h(S^h_{rr} - \Pi^h_{rr})) + \nabla^h_z S^h_{zr} - \nabla^h_z \Pi^h_{zr} - \frac{S^h_{\theta\theta}}{r^h}\right) + \tau f^h_{r,cap}\,, \tag{3.60}$$

$$u^*_z = u^{(n)}_z + \frac{\tau}{\rho^h}\left(\frac{1}{r^h}\nabla^h_r(r^h(S^h_{rz} - \Pi^h_{rz})) + \nabla^h_z S^h_{zz} - \nabla^h_z \Pi^h_{zz}\right) + \tau f^h_{z,cap}\,. \tag{3.61}$$

où ∇^h_z et ∇^h_z sont respectivement les composantes radiales et verticales de l'opérateur aux différences finies ∇^h et r^h est la distance par rapport à l'axe de symétrie. $f^h_{r,cap}$ et $f^h_{z,cap}$ sont les composantes radiales et verticales du vecteur $\mathbf{f}^h_{cap}$, obtenues en discrétisant l'équation (3.54) sous la forme

$$\mathbf{f}^h_{cap} = \sigma\left(-\frac{\nabla^h_r C}{r^h|\nabla^h C|} - \nabla^h_r(\frac{\nabla^h_r C}{|\nabla^h C|}) - \nabla^h_z(\frac{\nabla^h_z C}{|\nabla^h C|})\right)\left(\frac{\nabla^h_r C}{|\nabla^h C|}\mathbf{e}_r + \frac{\nabla^h_z C}{|\nabla^h C|}\mathbf{e}_z\right) \tag{3.62}$$

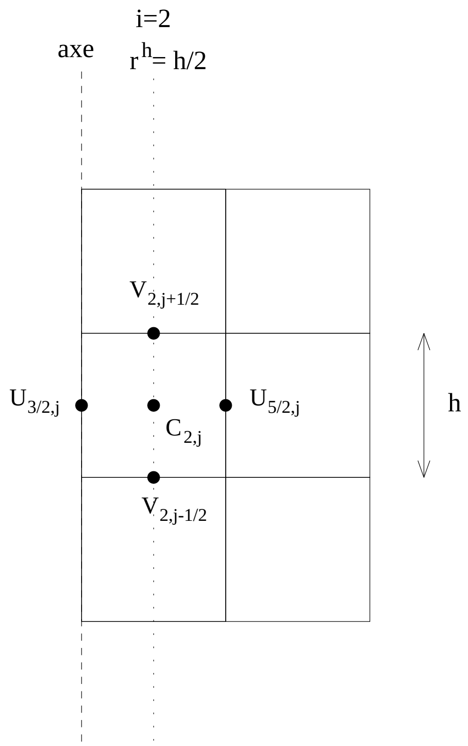


FIG. 3.6 – L'axe de symétrie se situe au niveau des faces gauches des celulles $(2, j)$.

On choisit de placer l'axe de symétrie au niveau de la face gauche des cellules $(2, j)$ (figure 3.6). Les cellules $(1, j)$ sont des cellules fantômes qui permettent d'imposer les conditions aux limites. Au centre de la cellule (i, j), r^h a pour valeur

$$r_i^h = (i - 3/2)h\,. \tag{3.63}$$

Au niveau de la face gauche de la cellule (i, j), r^h vaut

$$r_{i-1/2}^h = (i-1)h\,. \tag{3.64}$$

Avec ces conventions, (3.60) et (3.61) deviennent

$$\begin{aligned} u^*_{r,i-\frac{1}{2},j} &= u^{(n)}_{r,i-\frac{1}{2},j} + \frac{\tau}{\rho^h_{r,i-\frac{1}{2},j}}\,[\,\frac{1}{r^h_{i-\frac{1}{2}}}(\nabla^h_r(r^h S^h_{rr} - r^h \Pi^h_{rr}))_{i-\frac{1}{2},j} \\ &+(\nabla^h_z(S^h_{rz} - \Pi^h_{rz}))_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{(S^h_{\theta\theta})_{i-\frac{1}{2},j}}{r^h_{i-\frac{1}{2}}}\,] + \tau(f^h_{r,cap})_{i-\frac{1}{2},j}\,, \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} u^*_{z,i,j-\frac{1}{2}} &= u^{(n)}_{z,i,j-\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{\rho^h_{z,i,j-\frac{1}{2}}}\,[\,\frac{1}{r^h_i}(\nabla^h_r(r^h S^h_{zr} - r^h_i \Pi^h_{zr}))_{i,j-\frac{1}{2}} \\ &+(\nabla^h_z(S^h_{zz} - \Pi^h_{zz}))_{i,j-\frac{1}{2}}\,] + \tau(f^h_{z,cap})_{i,j-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Dans ces équations les opérateurs aux différences finies ont pour expression

$$(\nabla_r^h \phi)_{i,j} = \frac{1}{h}(\phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j}) \tag{3.66}$$

$$(\nabla_z^h \phi)_{i,j} = \frac{1}{h}(\phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j-\frac{1}{2}}) \tag{3.67}$$

et les différentes composantes du tenseur visqueux s'écrivent

$$\begin{aligned}
(S_{rr}^h)_{i,j} &= \mu_{i,j}^h (\nabla_r^h u_r^{(n)})_{i,j}, \\
(S_{zz}^h)_{i,j} &= \mu_{i,j}^h (\nabla_z^h u_z^{(n)})_{i,j}, \\
(S_{\theta\theta}^h)_{i,j} &= \mu_{i,j}^h \frac{(u_r^{(n)})_{i,j}}{r_i^h}, \\
(S_{rz}^h)_{i,j} &= (S_{zr}^h)_{i,j} = \frac{1}{2}\mu_{i,j}^h (\nabla_z^h u_r^{(n)} + \nabla_z^h u_r^{(n)})_{i,j} \, ,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

et celles du tenseur d'advection

$$\begin{aligned}
(\Pi_{rr}^h)_{i,j} &= \frac{1}{4}\rho_{r,i,j}^h \left((u_r^{(n)})_{i+\frac{1}{2},j} + (u_r^{(n)})_{i-\frac{1}{2},j} \right)^2 , \\
(\Pi_{zz}^h)_{i,j} &= \frac{1}{4}\rho_{z,i,j}^h \left((u_z^{(n)})_{i,j+\frac{1}{2}} + (u_z^{(n)})_{i,j-\frac{1}{2}} \right)^2 , \\
(\Pi_{rz}^h)_{i,j} &= \frac{1}{4}\rho_{r,i,j}^h \left((u_r^{(n)})_{i+\frac{1}{2},j} + (u_r^{(n)})_{i-\frac{1}{2},j} \right) \left((u_z^{(n)})_{i,j+\frac{1}{2}} + (u_z^{(n)})_{i,j-\frac{1}{2}} \right) , \\
(\Pi_{zr}^h)_{i,j} &= \frac{1}{4}\rho_{z,i,j}^h \left((u_r^{(n)})_{i+\frac{1}{2},j} + (u_r^{(n)})_{i-\frac{1}{2},j} \right) \left((u_z^{(n)})_{i,j+\frac{1}{2}} + (u_z^{(n)})_{i,j-\frac{1}{2}} \right) ,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Les expressions utilisées pour la densité et la viscosité sont

$$\rho_{r,i,j}^h = \frac{1}{2}\left(C_{i-\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} \right) \rho_1 + \left(1 - \frac{1}{2}(C_{i-\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j}) \right) \rho_2 \tag{3.70}$$

$$\rho_{z,i,j}^h = \frac{1}{2}\left(C_{i,j-\frac{1}{2}} + C_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \rho_1 + \left(1 - \frac{1}{2}(C_{i,j-\frac{1}{2}} + C_{i,j+\frac{1}{2}}) \right) \rho_2 \tag{3.71}$$

$$\mu_{i,j}^h = C_{i,j}\mu_1 + (1 - C_{i,j})\mu_2 \, , \tag{3.72}$$

et enfin les deux composantes de la force de tension de surface s'écrivent

$$(f_{r,cap}^h)_{i,j} = \sigma \left(-\frac{(\nabla_r^h C)_{i,j}}{r_i^h |(\nabla^h C)_{i,j}|} - (\nabla_r^h (\frac{\nabla_r^h C}{|\nabla^h C|}))_{i,j} - (\nabla_z^h (\frac{\nabla_z^h C}{|\nabla^h C|}))_{i,j} \right) \frac{(\nabla_r^h C)_{i,j}}{|(\nabla^h C)_{i,j}|} \tag{3.73}$$

et

$$(f_{z,cap}^h)_{i,j} = \sigma \left(-\frac{(\nabla_r^h C)_{i,j}}{r_i^h |(\nabla^h C)_{i,j}|} - (\nabla_r^h (\frac{\nabla_r^h C}{|\nabla^h C|}))_{i,j} - (\nabla_z^h (\frac{\nabla_z^h C}{|\nabla^h C|}))_{i,j} \right) \frac{(\nabla_z^h C)_{i,j}}{|(\nabla^h C)_{i,j}|} \tag{3.74}$$

b) Méthode de projection

Le champ u^* ne vérifie pas la condition d'incompressibilité. Pour assurer l'incompressibilité du champ de vitesse $u^{(n+1)}$, on utilise un algorithme de projection [16, 71] particulièrement adapté aux problèmes dans lesquels existent de forts gradients de densité.

Le champ de vitesse au temps $t^{(n+1)}$ est obtenu à l'aide de l'expression

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(*)} - \frac{\tau}{\rho}\nabla p, \tag{3.75}$$

dans laquelle la pression est solution du problème de Poisson avec des conditions aux limites de Neumann s'écrivant

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\dfrac{1}{\rho}\nabla p\right) = \dfrac{1}{\tau}\nabla \cdot \mathbf{u}^{(*)} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla p = -\dfrac{\rho}{\tau}\left(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(*)}\right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.76}$$

où Ω est le domaine de calcul, et $\partial\Omega$ ses frontières. La normale à $\partial\Omega$ est notée $\mathbf{n}$.

Si p est solution du problème (3.76) alors le champ de vitesse $\mathbf{u}^{(n+1)}$ vérifie la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)} = 0 \tag{3.77}$$

b.1) Discrétisation du problème de Poisson dans le système de coordonnées cartésiennes

Dans le système de coordonnées cartésiennes à deux dimensions, l'équation de Poisson discrétisée sur une grille MAC s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho^h_{x,i+\frac{1}{2},j}}(\nabla^h_x p)_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\rho^h_{x,i-\frac{1}{2},j}}(\nabla^h_x p)_{i-\frac{1}{2},j} \\ &+\frac{1}{\rho^h_{z,i,j+\frac{1}{2}}}(\nabla^h_z p)_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho^h_{z,i,j-\frac{1}{2}}}(\nabla^h_z p)_{i,j-\frac{1}{2}} \\ &= u^*_{i+\frac{1}{2},j} - u^*_{i-\frac{1}{2},j} + v^*_{i,j+\frac{1}{2}} - v^*_{i,j-\frac{1}{2}} \ , \end{aligned}$$

où ∇^h_x et ∇^h_z sont définis par

$$(\nabla^h_x \phi)_{i,j} = \frac{1}{h}(\phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j}) \ , \tag{3.78}$$

$$(\nabla^h_z \phi)_{i,j} = \frac{1}{h}(\phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j-\frac{1}{2}}) \ . \tag{3.79}$$

et

$$\rho^h_{x,i,j} = \frac{1}{2}\left(C_{i-\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j}\right)\rho_1 + \left(1 - \frac{1}{2}(C_{i-\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j})\right)\rho_2 \tag{3.80}$$

$$\rho^h_{z,i,j} = \frac{1}{2}(C_{i,j-\frac{1}{2}} + C_{i,j+\frac{1}{2}})\rho_1 + (1 - \frac{1}{2}(C_{i,j-\frac{1}{2}} + C_{i,j+\frac{1}{2}}))\rho_2 \tag{3.81}$$

L'équation (3.78) peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}\mathbf{p} = \mathbf{f}, \tag{3.82}$$

avec

$$(\mathcal{A}\mathbf{p})_{i,j} = a_{i-\frac{1}{2},j}p_{i-1,j} + a_{i+\frac{1}{2},j}p_{i+1,j} + b_{i,j-\frac{1}{2}}p_{i,j-1} + b_{i,j+\frac{1}{2}}p_{i,j+1} - c_{ij}p_{ij}, \tag{3.83}$$

$$\mathbf{f}_{i,j} = \frac{h}{\tau}(u^*_{i+\frac{1}{2},j} - u^*_{i-\frac{1}{2},j} + v^*_{i,j+\frac{1}{2}} - v^*_{i,j-\frac{1}{2}}), \tag{3.84}$$

$$a_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\rho^h_{x,i-\frac{1}{2},j}}, \qquad b_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho^h_{z,i,j-\frac{1}{2}}}, \tag{3.85}$$

$$c_{ij} = a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}} + b_{j-\frac{1}{2}} + b_{j+\frac{1}{2}}. \tag{3.86}$$

ou encore à l'aide de la notation stencil (voir [105]) sous la forme

$$[\mathcal{A}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & b_{i,j+\frac{1}{2}} & 0 \\ a_{i-\frac{1}{2},j} & -c_{i,j} & a_{i+\frac{1}{2},j} \\ 0 & b_{i,j-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.87}$$

b.2) Coordonnées cylindriques

Ecrivons le problème de Poisson dans le système de coordonnées cylindriques. Pour éviter une singularité au niveau de l'axe de symétrie, multiplions les deux membres de (3.76) par r

$$r\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = r\nabla \cdot \mathbf{u}^*. \tag{3.88}$$

L'équation (3.88) est discrétisée sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{\rho_{r,i+\frac{1}{2},j}}(\nabla^h_r p)_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{\rho_{r,i-\frac{1}{2},j}}(\nabla^h_r p)_{i-\frac{1}{2},j} \\
&+r_i\left(\frac{1}{\rho_{z,i,j+\frac{1}{2}}}(\nabla^h_z p)_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho_{z,i,j-\frac{1}{2}}}(\nabla^h_z p)_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \\
&= r_{i+\frac{1}{2}}\,(u^*_r)_{i+\frac{1}{2},j} - r_{i-\frac{1}{2}}\,(u^*_r)_{i-\frac{1}{2},j} + r_i\left((u^*_z)_{i,j+\frac{1}{2}} - (u^*_z)_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \;,
\end{aligned}$$

où r_i, ∇^h_r, ∇^h_z, $\rho_{r,i+\frac{1}{2},j}$ et $\rho_{z,i,j+\frac{1}{2}}$ sont définis respectivement à l'aide des formules (3.63), (3.66), (3.67), (3.70) et (3.71) .

L'équation de Poisson (3.89) peut alors s'écrire à l'aide de la notation stencil sous la forme

$$\mathcal{B}\,\mathbf{p} = \mathbf{g} \tag{3.89}$$

avec

$$[\mathcal{B}]_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & e_{i,j+\frac{1}{2}} & 0 \\ d_{i+\frac{1}{2},j} & k_{i,j} & d_{i-\frac{1}{2},j} \\ 0 & e_{i,j-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

et le second membre

$$g_{i,j} = \frac{h}{\tau}\left(r_{i+\frac{1}{2}}\,(u_r^*)_{i+\frac{1}{2},j} - r_{i-\frac{1}{2}}\,(u_r^*)_{i-\frac{1}{2},j} + r_i(u_z^*)_{i,j+\frac{1}{2}} - r_i(u_z^*)_{i,j-\frac{1}{2}}\right) \tag{3.91}$$

avec

$$d_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{\rho_{i-\frac{1}{2},j}} \tag{3.92}$$

$$e_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{r_i}{\rho_{i,j-\frac{1}{2}}} \tag{3.93}$$

$$k_{i,j} = d_{i+\frac{1}{2},j} + d_{i-\frac{1}{2},j} + e_{i,j+\frac{1}{2}} + e_{i,j-\frac{1}{2}}\,. \tag{3.94}$$

3.2.3 Algorithme multigrille

a) Principes généraux

Parmi les méthodes itératives utilisées pour résoudre un problème elliptique comme le problème (3.82) ou le problème (3.89), on compte les méthodes de gradient conjugué, différentes méthodes de factorisation LU ou de relaxation comme la méthode de Gauss-Seidel ou la méthode de Jacobi. Ces dernières sont simples à mettre en oeuvre mais présentent plusieurs défauts majeurs. D'une part, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence souhaitée augmente avec la résolution du maillage. En effet, avec ces méthodes, le taux de convergence se détériore lorsque $h \to 0$. D'autre part, si l'erreur $\mathbf{e}$ entre la solution $\mathbf{p}$ du problème (3.82) et la solution approchée $\tilde{\mathbf{p}}$ peut être décomposée sur une base de fonctions périodiques comme la base de Fourier, les méthodes de relaxation permettent de réduire les composantes de petite longueur d'onde de l'erreur beaucoup plus efficacement que les composantes de longueur d'onde plus grande que la taille de la maille [105, 12]. En particulier, si le rapport de densité entre les deux fluides est grand, la matrice $\mathcal{A}$ est très mal conditionnée, ce qui entraîne une mauvaise convergence de la méthode de relaxation.

Les méthodes multigrilles ont été développées pour corriger ces défauts. Les différentes composantes de l'erreur sont atténuées grâce à l'utilisation d'une hiérarchie de grilles de résolutions différentes. Le principe de la méthode consiste à obtenir une approximation de la composante régulière de l'erreur (les modes de grande longueur d'onde) sur des grilles grossières, et de réduire la composante oscillante (les modes de petite longueur d'onde) sur la grille fine à l'aide d'un petit nombre d'itérations d'une méthode de relaxation. Le nombre d'itérations nécessaires pour réduire la composante oscillante de l'erreur sur la grille fine d'un facteur constant est indépendant de la taille de maille h, ce qui fait que les méthodes multigrille présentent des propriétés de convergence dépendant très peu de la résolution du maillage. Les itérations sur les grilles grossières sont moins coûteuses car le nombre de cellules est divisé par deux dans chaque direction lorsqu'on passe d'un niveau de grille donné au niveau suivant.

Considérons différents niveaux de grilles notées Ω_1, Ω_2..., Ω_N. La grille Ω_1 est la grille la plus fine, correspondant à la grille MAC de départ, et la grille Ω_N la grille la plus grossière. Les algorithmes multigrilles utilisés dans les problèmes faisant intervenir des interfaces [105] sont des algorithmes à cellule centrée. Sur chaque niveau de grille les inconnues sont définies au centre des cellules (figure 3.8).

En définissant la position du centre de chacune des cellules, la grille fine peut être définie comme

$$\Omega_1 = \{(x_i, y_j)/x_i = ih, y_j = jh, i \in \{1, ..., I\}, j \in \{1, ..., J\}\} . \tag{3.95}$$

Alors la grille Ω_k est définie par

$$\Omega_k = \{(x_i, y_j)/x_i = ih_k, y_j = jh_k, i \in \{1, ..., I/2^{k-1}\}, j \in \{1, ..., J/2^{k-1}\}, h_k = 2^{k-1}h\} . \tag{3.96}$$

Ainsi le domaine d'une cellule de la grille Ω_k est la réunion de 2×2 cellules de la grille Ω_{k-1}, voir fig.3.8.

Supposons que sur la grille Ω_k, le problème de Poisson (3.82) puisse s'écrire sous forme discrète comme

$$\mathcal{A}_{kh}\mathbf{p}_k = \mathbf{f}_k \tag{3.97}$$

Soit $\mathbf{e}_k = \mathbf{p}_k - \tilde{\mathbf{p}}_k$ l'erreur entre la solution exacte du problème (3.97) et la solution approchée. Soit $\mathbf{r}_k = \mathcal{A}_{kh}\tilde{\mathbf{p}}_k - \mathbf{f}_k$ le résidu.
Les transferts entre grilles sont réalisés au cours des étapes de restriction et de correction. Au cours d'une étape de restriction, le résidu calculé sur la grille Ω_k, est approximé sur la grille plus grossière Ω_{k+1}. Au cours d'une étape de correction, la solution calculée sur une grille grossière est approximée sur la grille plus fine. L'opérateur de restriction entre la grille Ω_k et la grille Ω_{k+1} est noté $\mathcal{R}_k^{k+1}$ et l'opérateur de prolongation utilisé au cours d'une étape de correction est noté $\mathcal{P}_{k+1}^k$.

b) Algorithme de V-cycle

Une stratégie efficace pour inverser une équation de Poisson dont les coefficients présentent de fortes discontinuités est l'algorithme de V-cycle. Cet algorithme très classique offre à la fois l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre et d'être robuste. L'algorithme consiste à :
a) effectuer plusieurs relaxations sur l'équation $\mathcal{A}_{kh}\tilde{\mathbf{p}}_k = \mathbf{f}_k$,

b) calculer $\mathbf{r}_k = \mathcal{A}_{kh}\tilde{\mathbf{p}}_k - \mathbf{f}_k$,

c) restreindre $\mathbf{r}_k$ sur la grille Ω_{k+1} : $\mathbf{f}_{k+1} = \mathcal{R}_k^{k+1}\mathbf{r}_k$,

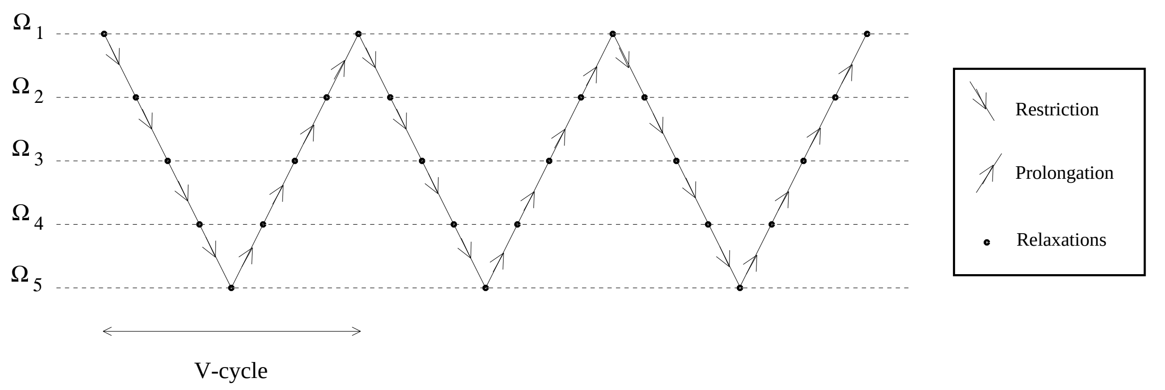


FIG. 3.7 – Algorithme V-cycle sur cinq niveaux de grille. Trois V-cycles sont représentés.

d) répéter la procédure précédente à partir de l'étape a) sur la grille Ω_{k+1} jusqu'à ce que la grille Ω_N soit atteinte,

e) prolonger $\tilde{\mathbf{p}}_{k+1}$ à la grille Ω_k : $\tilde{\mathbf{p}}_k = \tilde{\mathbf{p}}_k + \mathcal{P}_{k+1}^k \tilde{\mathbf{p}}_{k+1}$,

f) effectuer plusieurs relaxations sur l'équation $\mathcal{A}_{kh}\tilde{\mathbf{p}}_k = \mathbf{f}_k$,

g) répéter la procédure précédente à partir de l'étape e) sur la grille Ω_k jusqu'à ce que la grille Ω_1 soit atteinte.

Dans une méthode multigrille, plusieurs cycles comme le V-cycle sont effectués jusqu'à ce qu'un critère de convergence sur l'erreur soit satisfait.

c) Algorithme de V-cycle modifié

Dans notre méthode numérique, l'algorithme multigrille utilise des V-cycles. Cependant au lieu de manipuler directement la solution $\mathbf{p}_k$ de $\mathcal{A}_{kh}\mathbf{p}_k = \mathbf{f}_k$, on préfère manipuler l'erreur $\mathbf{e}_k$ et résoudre le problème

$$\mathcal{A}_{kh}\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_k \, . \tag{3.98}$$

Cet algorithme est plus complexe à mettre en oeuvre que l'algorithme de V-cycle classique mais il est plus performant. En effet, au bout de plusieurs V-cycles classiques, le taux de convergence se détériore beaucoup, ce qui n'est pas le cas avec l'algorithme modifié.

Notre algorithme comporte plusieurs étapes. Tout d'abord, le calcul est initialisé au début du premier V-cycle :

(i) On choisit comme approximation de la solution $\mathbf{p} = \mathbf{p_1}$ sur la grille fine Ω_1 la solution (la pression) au pas de temps précédent $\mathbf{p^{(n)}}$. Le résidu est initialisé à la valeur $\mathbf{r}_1 = \mathcal{A}\mathbf{p}^{(n)} - \mathbf{f}$.

Au cours d'un V-cycle, les opérations suivantes sont effectuées :

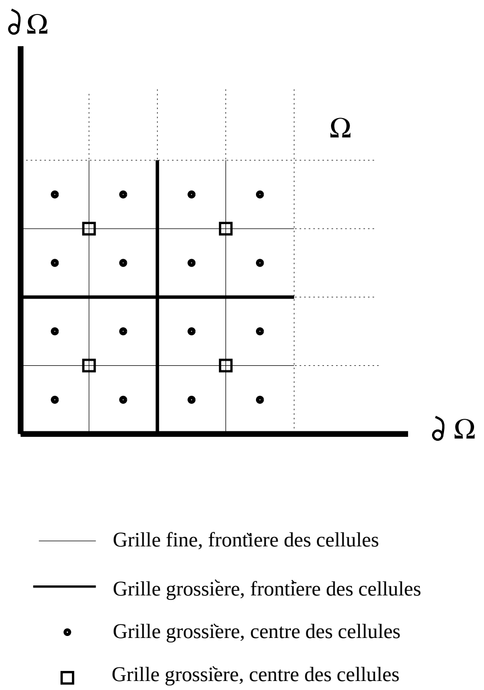


Fig. 3.8 – Deux niveaux de grille utilisés dans l'algorithme multigrille dans un cas bidimensionnel. Les inconnues sont définies au centre des cellules.

(ii) On impose initialement $\mathbf{e}_k = 0$, puis on effectue α_k itérations de la méthode de relaxation sur l'équation $\mathcal{A}_{kh}\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_k$. La valeur finale, notée $\mathbf{e}_k^f$, est obtenue.

(iii) Le résidu final est calculé comme $\mathbf{r}_k^f = \mathcal{A}_{kh}\mathbf{e}_k^f - \mathbf{r}_k$.

(iv) Le résidu $\mathbf{r}_k^f$ est restreint à la grille Ω_{k+1} en effectuant l'opération $\mathbf{r}_{k+1} = \mathcal{R}_k^{k+1}\mathbf{r}_k^f$.

(v) Si $k+1 = N$, l'équation $\mathcal{A}_{Nh}\mathbf{e}_N = \mathbf{r}_N$ est résolue à l'aide de α_N itérations de la méthode de relaxation. Si $k+1 < N$, la procédure précédente est répétée sur la grille Ω_{k+1} à partir de l'étape (ii) jusqu'à ce que la grille Ω_N soit atteinte.

(vi) La correction $\mathbf{e}_{k+1}^f$ est prolongée à Ω_k en effectuant l'opération $\mathbf{e}_k^c = \mathbf{e}_k^f + \mathcal{P}_{k+1}^k\mathbf{e}_{k+1}^f$. Le résidu corrigé est calculé à l'aide de $\mathbf{r}_k^c = \mathbf{r}_k^f - \mathcal{A}_{kh}\mathcal{P}_{k+1}^k\mathbf{e}_{k+1}^f$.

(vii) On impose initialement $\mathbf{e}_k = 0$, puis on effectue β_k itérations de la méthode de relaxation sur l'équation $\mathcal{A}_{kh}\mathbf{e}_k = \mathbf{r}_k^c$. La valeur finale, notée $\mathbf{e}_k^F$, est obtenue.

(viii) Si $k = 1$, la correction $\mathbf{e}_1^F$ est ajoutée à la solution. Si $||\mathbf{e}_1^F|| > \epsilon$, un nouveau V-cycle est commencé à l'étape (ii) après avoir effectué l'opération $\mathbf{r}_1 = \mathcal{A}_{kh}\mathbf{e}_1^F - \mathbf{r}_1^c$. Si $||\mathbf{e}_1^F|| < \epsilon$, le critère de convergence est satisfait et on n'effectue pas de V-cycle supplémentaire. Si $k > 1$, la procédure précédente est répétée à partir de l'étape (vi) jusqu'à ce que la grille Ω_1 soit atteinte.

Le premier V-cycle permet d'obtenir la correction $\mathbf{e}_1^F$, le second la correction $\Delta(\mathbf{e}_1^F)$ à $\mathbf{e}_1^F$ et le troisième la correction $\Delta^2(\mathbf{e}_1^F) = \Delta(\Delta(\mathbf{e}_1^F))$ à $\Delta(\mathbf{e}_1^F)$. Finalement, si le critère de convergence est satisfait à la fin du m-ième V-cycles, la solution $\mathbf{p}^{(n+1)}$ est égale à

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} + \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^i(\mathbf{e}_1^F) \tag{3.99}$$

Il s'agit maintenant de définir le problème (3.98) en identifiant l'opérateur de grille grossière $\mathcal{A}_{kh}$ et de définir les opérateurs de transfert $\mathcal{R}_k^{k+1}$ et $\mathcal{P}_{k+1}^k$, ainsi que la méthode de relaxation.

d) Opérateurs et méthode de relaxation

L'opérateur de grille grossière peut être calculé en discrétisant l'équation de Poisson sur la grille grossière sous une forme analogue à celle de (3.82). Les coefficients $a_{i,j}^{(k)}$, $b_{i,j}^{(k)}$ et $c_{i,j}^{(k)}$ peuvent être obtenus en calculant le champ de fraction volumique C^k dans chaque cellule de la grille Ω_k à partir du champ de fraction volumique dans chaque cellule de la grille Ω_{k-1} grâce à l'équation

$$C_{i,j}^k = \frac{1}{4}(C_{2i-1,2j-1}^{k-1} + C_{2i,2j-1}^{k-1} + C_{2i-1,2j}^{k-1} + C_{2i,2j}^{k-1}) \tag{3.100}$$

Dans notre méthode, nous utilisons une autre alternative nommée approximation de Galerkin [105]. L'opérateur de grille grossière $\mathcal{A}_{(k+1)h}$ est défini à partir de l'opérateur $\mathcal{A}_{kh}$ à l'aide des opérateurs $\mathcal{R}_k^{k+1}$ et $\mathcal{P}_{k+1}^k$ par

$$\mathcal{A}_{(k+1)h} = \mathcal{R}_k^{k+1}\mathcal{A}_{kh}\mathcal{P}_{k+1}^k \tag{3.101}$$

Nous avons choisi des opérateurs de restriction et de prolongation adaptés aux problèmes avec des coefficients présentant de fortes discontinuités [105]. Ces opérateurs sont d'ordre peu élevé et sont indépendants du niveau de grille, ce qui simplifie considérablement le calcul de l'opérateur de grille grossière. Nous n'avons pas amélioré le taux de convergence de la méthode en utilisant des opérateurs d'ordre plus élevé. Par ailleurs, ces opérateurs sont facilement généralisables au cas tridimensionnel. L'opérateur de restriction est défini par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}:\Omega_k & \longrightarrow & \Omega_{k+1} \\ u^k & \longrightarrow & (\mathcal{R}u^k) \quad / \\ (\mathcal{R}u^k)_{i,j} & = & \dfrac{1}{4}(u^k_{2i-1,2j-1} + u^k_{2i,2j-1} + u^k_{2i-1,2j} + u^k_{2i,2j})\,. \end{array} \tag{3.102}$$

Il s'écrit à l'aide de la notation stencil sous la forme

$$[\mathcal{R}]_{ij} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.103}$$

L'opérateur de prolongation est défini par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}:\Omega_{k+1} & \longrightarrow & \Omega_k \\ u^{k+1} & \longrightarrow & (\mathcal{P}u^{k+1}) \quad / \\ (\mathcal{P}u^{k+1})_{2i-1,2j-1} & = & u^{k+1}_{i,j} \\ (\mathcal{P}u^{k+1})_{2i,2j-1} & = & u^{k+1}_{i,j} \\ (\mathcal{P}u^{k+1})_{2i-1,2j} & = & u^{k+1}_{i,j} \\ (\mathcal{P}u^{k+1})_{2i,2j} & = & u^{k+1}_{i,j} \end{array} \tag{3.104}$$

et peut s'écrire à l'aide de la notation stencil comme

$$[\mathcal{P}]_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

Ces opérateurs étant définis, nous pouvons calculer l'opérateur de grille grossière à l'aide de (3.101).

$$(\mathcal{A}_{(k+1)h}\mathbf{p}_{(k+1)})_{ij} = a^{(k+1)}_{i-\frac{1}{2}}p^{k+1}_{i-1} + a^{(k+1)}_{i+\frac{1}{2}}p^{k+1}_{i+1} + b^{(k+1)}_{j-\frac{1}{2}}p^{k+1}_{j-1} + b^{(k+1)}_{j+\frac{1}{2}}p^{k+1}_{j+1} - c^{(k+1)}_{ij}p^{k+1}_{ij} \tag{3.106}$$

où

$$a^{(k+1)}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}(a^{(k)}_{2i-\frac{1}{2},2j-2} + a^{(k)}_{2i-\frac{1}{2},2j-2}) \quad , \; b^{(k+1)}_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(b^{(k)}_{2i-2,2j-\frac{3}{2}} + b^{(k)}_{2i-2,2j-\frac{3}{2}}) \tag{3.107}$$

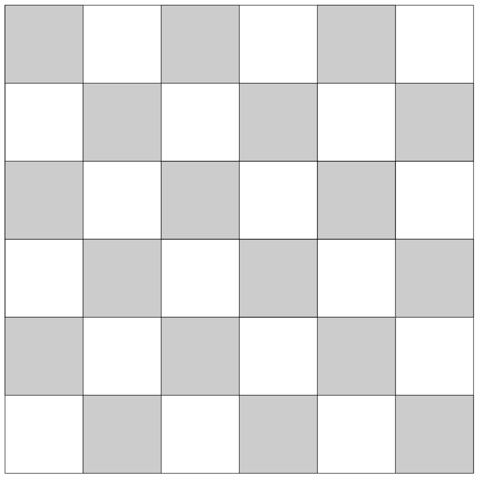


FIG. 3.9 – Principe de la méthode de Gauss-Seidel à deux couleurs. Au cours d'un premier passage, la solution n'est mise à jour que dans les cellules claires. La solution est ensuite mise à jour dans les cellules grisées.

$$c_{ij}^{(k+1)} = a_{i-\frac{1}{2},j}^{(k+1)} + a_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} + b_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k+1)} + b_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} \tag{3.108}$$

On peut écrire $\mathcal{A}^{k+1}$ à l'aide de la notation stencil sous la forme

$$[\mathcal{A}^{k+1}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & b_{i,j+\frac{1}{2}}^{(k+1)} & 0 \\ a_{i-\frac{1}{2},j}^{(k+1)} & -c_{i,j}^{(k+1)} & a_{i+\frac{1}{2},j}^{(k+1)} \\ 0 & b_{i,j-\frac{1}{2}}^{(k+1)} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

Le stencil de l'opérateur de grille grossière a la même forme (mais des coefficients différents) à chaque niveau de grille, ce qui simplifie la mise en oeuvre informatique de son calcul.

La méthode de relaxation utilisée est une méthode de Gauss Seidel à deux couleurs (figure 3.9). Une cellule sur deux est marquée avec une couleur. On effectue un premier balayage de la méthode de relaxation sur les cellules claires, puis un second sur les cellules foncées. Cette méthode a l'avantage d'être facilement vectorisable. D'autres méthodes comme la factorisation LU incomplète (ILU) ont été testées [60] sans qu'une amélioration significative des propriétés de convergence n'ait été obtenue.

e) Performances de la méthode

L'algorithme de V-cycle modifié s'avère être beaucoup plus robuste que notre précédent algorithme FMG ("Full Multigrid Method") [57, 60, 9]. Ainsi, pour n'importe quel rapport de densité inférieur à quelques milliers, le nouvel algorithme permet de diviser la divergence du champ de vitesse et l'erreur d'un facteur 10^4 à 10^5 en quatre ou cinq V-cycles. Les performances ont été améliorées notamment en utilisant comme solution initiale sur la grille fine la solution $p^{(n)}$ au pas de temps précédent, ce qui n'était pas possible avec l'algorithme FMG, et en modifiant la stratégie de relaxation.

Ainsi avec les méthodes de relaxation classiques , il est généralement préférable de réaliser N V-cycles dans lesquels une seule relaxation est effectuée sur chaque niveau de grille plutôt que de réaliser un seul V-cycle dans lequel N relaxations sont effectuées sur chaque niveau. En effet, pour un coût de calcul à peine plus élevé pour la seconde méthode, le taux de convergence obtenu avec la première méthode est de l'ordre de $\gamma/(N+1)$ avec $\gamma < 2$ alors le taux de convergence obtenu avec la seconde est de l'ordre de $(\gamma/2)^N$. Asymptotiquement, la seconde méthode converge beaucoup plus vite.

En revanche, dans le cas où le rapport de densité entre les fluides est grand, dans certaines circonstances (par exemple lorsque les interfaces sont très convoluées ou lorsque de petites structures sont présentes dans l'écoulement), entre 10 et 30 V-cycles doivent être effectués avant que le critère de convergence ne soit satisfait. Dans ce cas particulier, une meilleure stratégie consiste à augmenter le nombre de relaxations pour réduire plus efficacement les composantes de petite longueur d'onde de l'erreur. Ce type de statégie s'avère efficace et permet généralement de réduire le temps de calcul.

Chapitre 4

Validations de la méthode

4.1 Introduction

Même si les schémas aux différences finies utilisés pour discrétiser les équations du mouvement sont du second ordre en espace et du premier ordre en temps, notre méthode utilise une combinaison d'autres techniques de précisions différentes (méthode VOF/PLIC, méthode multigrille, méthode CSS). La convergence de la méthode complète peut être testée en comparant les résultats de simulations à des résultats expérimentaux ou théoriques connus.

Dans certains tests, une configuration d'écoulement simple est choisie pour permettre de tester l'une des composantes de la méthode et de mesurer sa précision. Le test de chute de gouttes en écoulement de Stokes et le test d'oscillations capillaires permettent respectivement de mesurer la précision du traitement des sauts de contraintes visqueuses à travers l'interface et la précision du traitement des effets capillaires. D'autres tests permettent de juger de la capacité de l'ensemble de la méthode à simuler des écoulements complexes. Ainsi, l'objectif du test de goutte pendante est de démonter que la méthode est capable d'effectuer des reconnexions réalistes. Les tests de montée de bulles à fort nombre capillaire ont pour objectif de prouver que la méthode est capable de reproduire de façon satisfaisante des résultats expérimentaux pour des particules qui se déforment beaucoup dans des cas dynamiques. C'est finalement l'ensemble des tests qui apporte une validation générale de la méthode.

4.2 Chute de gouttes en régime de Stokes

Nous présentons un test consistant à simuler la chute dans un champ de pesanteur d'un réseau périodique de gouttes en régime de Stokes ($Re<<1$). Dans ce problème, les effets inertiels sont éliminés et le rôle de la tension de surface est de garder les gouttes sphériques. Ce test permet donc de mesurer la précision du traitement des effets visqueux par notre méthode numérique.

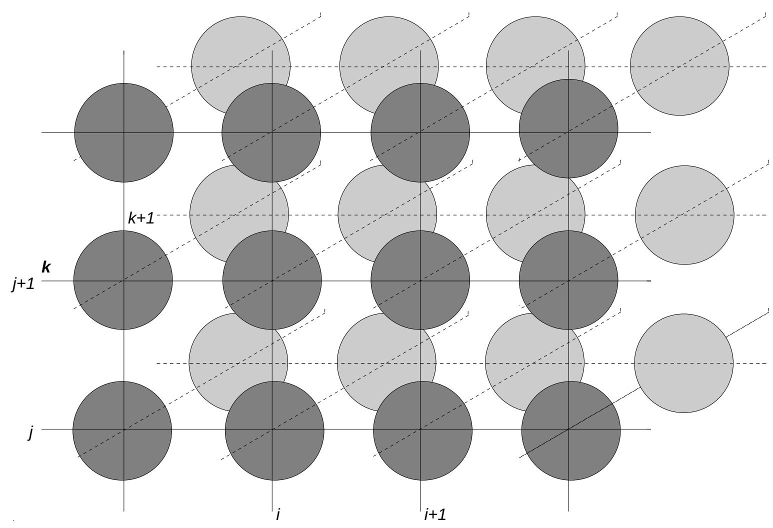


FIG. 4.1 – Réseau périodique de gouttes.

4.2.1 Position du problème

La vitesse terminale de chute d'une particule sphérique rigide en écoulement rampant suit la loi de Stokes [17]. Dans le cas de la chute d'une goutte à très faible nombre capillaire ($Ca = \mu V/\sigma << 1$), il est nécessaire de tenir compte de l'écoulement de recirculation à l'intérieur de la goutte et la vitesse terminale suit la loi de Hadamard-Rybczynski

$$\mathbf{U}_{\mathrm{HR}} = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)a^2}{3\mu_2}\frac{1+K}{2+3K}\mathbf{g}. \tag{4.1}$$

On note avec l'indice 1 toutes les quantités associées au fluide constituant la goutte et avec l'indice 2 les quantités associées au fluide extérieur. Ainsi ρ_1 et μ_1 sont respectivement la densité et la viscosité de la goutte et ρ_2 et μ_2 celles du fluide extérieur. On note K le rapport des viscosités $K = \mu_1/\mu_2$ et a le rayon de la goutte.

Sangani [88] a résolu les équations de Stokes dans le cas d'une couche infinie de gouttes en arrangement périodique, voir figure 4.1. Le rapport entre la vitesse de sédimentation de réseau de gouttes $\mathbf{U}$ et la vitesse $\mathbf{U}_{\mathrm{HR}}$ de chute d'une goutte isolée est fonction uniquement de la fraction volumique globale c entre les gouttes et le fluide extérieur et du rapport des viscosités K

$$\frac{U}{U_{\mathrm{HR}}} = F(c, K) \tag{4.2}$$

L'expression de F est un développement en puissances de c [88].

4.2.2 Traitement numérique

Le problème a une géométrie particulièrement adaptée à un traitement numérique à l'aide de notre méthode tridimensionnelle.

Nous initions une seule goutte de volume V_1 dans un domaine cubique $\Omega = [0, l] \times [0, l] \times [0, l]$ de volume $V_1 + V_2 = l^3$. Les deux sous-domaines de Ω sont le domaine occupé par la goutte Ω_1 et le domaine occupé par le fluide extérieur Ω_2. Alors $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Par ailleurs, nous imposons des conditions périodiques sur les faces supérieure, en $z = l$, et inférieure, en $z = 0$ du domaine Ω et des conditions miroir sur les faces verticales, en $x = 0, l$ et en $y = 0, l$. Ces conditions aux limites imposent des symétries qui permettent bien d'initialiser un réseau de gouttes infiniment périodiques dans toutes les directions.

Les paramètres physiques sont choisis de telle sorte que Re et Ca soient petits devant 1, et que les gouttes restent sphériques.

4.2.3 Terme de pression

Comme on peut l'imaginer intuitivement, avec des conditions aux limites périodiques sur les parois $z = 0$ et $z = l$, imposer un champ de gravité $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ vertical dans tout le fluide a pour conséquence d'accélerer uniformément l'ensemble du fluide. La goutte et le fluide qui l'entoure tombent à même vitesse. Pour éviter cela, il faut imposer que la quantité de mouvement totale ajoutée au système soit nulle.

Pour ce faire, nous décomposons le terme de pression en une partie de gradient constant $\mathbf{A} = - < \nabla p >$ et une partie $\tilde{p}$ à moyenne nulle

$$p = \tilde{p} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \tag{4.3}$$

avec $\mathbf{z} = z\mathbf{e}_z$. La partie constante $\mathbf{A}$ équilibre la trainée moyenne des gouttes et le gradient de pression hydrostatique.

En écoulement de Stokes, le terme d'accélération $D(\rho\mathbf{u})/Dt$ est négligé dans l'équation de Navier-Stokes (2.10) qui s'écrit alors sous la forme

$$\nabla\tilde{p} = \nabla \cdot (2\mu\mathbf{D}) + \rho\mathbf{g} + \mathbf{A} \tag{4.4}$$

En intégrant l'équation précédente sur le domaine Ω, on obtient

$$\mathbf{0} = \int_\Omega \rho\mathbf{g}\,\mathrm{dv} + \int_\Omega \mathbf{A}\,\mathrm{dv}, \tag{4.5}$$

et finalement

$$\mathbf{A} = -\frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}\mathbf{g}. \tag{4.6}$$

4.2.4 Vitesse de sédimentation et référentiel de la simulation

En ajoutant le terme $\mathbf{A}$ dans les équations du mouvement, nous imposons que le référentiel de la simulation est le référentiel du centre de masse, noté $(\mathcal{R}_m)$. Les vitesses calculées dans ce référentiel sont notées $\mathbf{u}'$.

Soit $(\mathcal{R}_d)$ le référentiel lié aux gouttes. Par définition, dans ce référentiel, les gouttes sont immobiles. Les vitesses calculées dans ce référentiel sont notées $\mathbf{u}$. On note par ailleurs $\boldsymbol{\Delta}$ la vitesse du référentiel $(\mathcal{R}_d)$ par rapport au référentiel $(\mathcal{R}_m)$. Alors

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Delta} \tag{4.7}$$

Or la vitesse $\mathbf{U}$ est la vitesse de sédimentation des gouttes par rapport à un référentiel dans lequel le fluide loin des gouttes est au repos. Il s'agit de calculer $\mathbf{U}$ en fonction des vitesses qui sont à notre disposition, c'est-à-dire des vitesse $\mathbf{u}'$ calculées dans les référentiel $(\mathcal{R}_m)$. Pour les besoins du calcul de $\mathbf{U}$, nous faisons l'hypothèse que la couche de gouttes a une épaisseur finie et qu'elle tombe dans un fluide au repos loin à l'avant de la couche.

Par définition de $(\mathcal{R}_m)$, on a

$$\rho_1 V_1 \mathbf{U}'_1 + \rho_2 V_2 \mathbf{U}'_2 = 0 \tag{4.8}$$

où

$$\mathbf{U}'_1 = \frac{1}{V_1} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}' \, dv \tag{4.9}$$

et

$$\mathbf{U}'_2 = \frac{1}{V_2} \int_{\Omega_2} \mathbf{u}' \, dv, \tag{4.10}$$

sont respectivement la vitesse moyenne des gouttes et la vitesse moyenne du fluide extérieur dans le référentiel de la simulation.

Par définition de $(\mathcal{R}_d)$, on a

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{u} \, dv = 0 \tag{4.11}$$

En intégrant l'équation (4.7) sur le domaine Ω_1 et en utilisant l'équation (4.11), on obtient

$$\boldsymbol{\Delta} = -\frac{1}{V_1} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}' \, dv = -\mathbf{U}'_1 \tag{4.12}$$

Par ailleurs, le fluide loin à l'avant de la couche de gouttes a une vitesse $-\mathbf{U}$ dans le référentiel $(\mathcal{R}_d)$. Nous utilisons cette propriété, dans ce qui suit, pour calculer la vitesse $\mathbf{U}$.

Soient S_{-H} une surface carrée de côté l située en $z = -H$ loin à l'avant de la couche de gouttes et $S(z)$ une surface située à l'altitude z dans la couche de gouttes. Soient $S_1(z) = S(z) \cap \Omega_1$ et $S_2(z) = S(z) \cap \Omega_2$ (voir la figure 4.2). Le flux volumique à travers la surface S_{-H} doit être égal au flux volumique à travers la surface $S_2(z)$. Cette condition s'écrit

$$\int_{S_{-H}} \mathbf{u} \, dS = \int_{S_2(z)} \mathbf{u} \, dS. \tag{4.13}$$

Or $\mathbf{u} = -\mathbf{U}$ partout loin à l'avant de la couche de goutte. Par conséquent

$$\int_{S_{-H}} \mathbf{u} \, dS = -\mathbf{U} l^2 \tag{4.14}$$

En intégrant chacun des membres de l'équation (4.13) sur une épaisseur l, on obtient

$$\int_0^l \left(\int_{S_2(z)} \mathbf{u} \, dS \right) dz = -U l^3. \tag{4.15}$$

avec $l^3 = V_1 + V_2$.

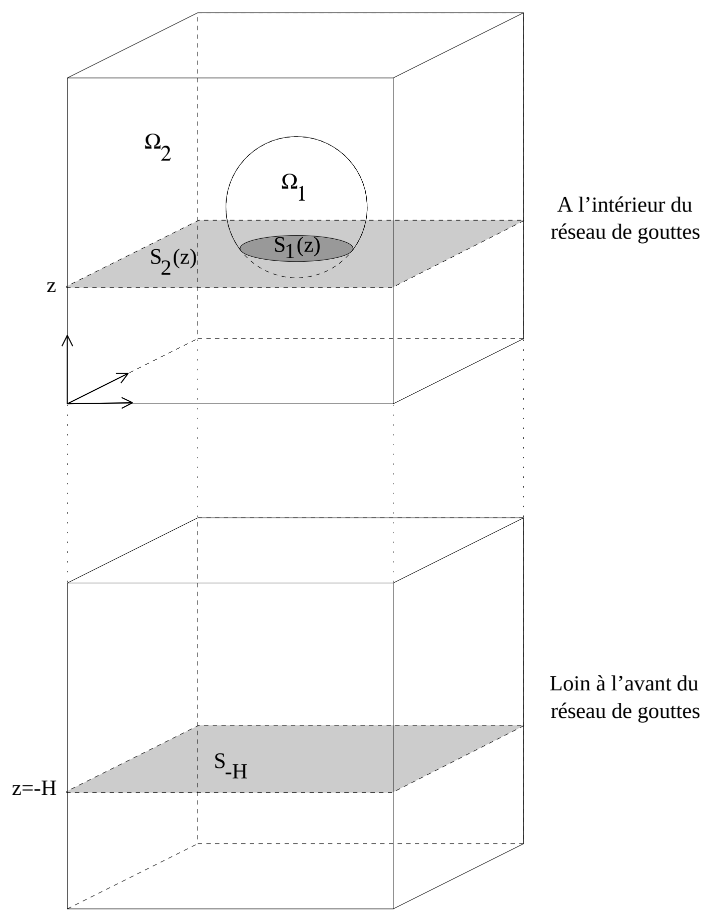


FIG. 4.2 – Les différentes surfaces S_{-H}, $S_1(z)$ et $S_2(z)$ sont représentées sur la figure.

Or, le membre de gauche de l'équation (4.15) est égal à

$$\int_{\Omega_2} \mathbf{u}\, dv. \tag{4.16}$$

Par conséquent

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{V_1 + V_2} \int_{\Omega_2} \mathbf{u}\, dv. \tag{4.17}$$

A l'aide de (4.7) et (4.12), l'équation (4.17) devient

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{V_1 + V_2} \int_{\Omega_2} \mathbf{u}'\, dv + \frac{1}{V_1 + V_2} \frac{V_2}{V_1} \int_{\Omega_1} \mathbf{u}'\, dv\,, \tag{4.18}$$

et finalement

$$\mathbf{U} = \frac{V_2}{V_1 + V_2} (\mathbf{U}'_1 - \mathbf{U}'_2)\,. \tag{4.19}$$

Une autre expression pour la vitesse $\mathbf{U}$, obtenue à l'aide de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.8) et de l'équation (4.19), s'écrit sous la forme

$$\mathbf{U} = \frac{V_2}{V_1 + V_2} (1 + \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}) \mathbf{U}'_1. \tag{4.20}$$

Alors dans le cas particulier où $\rho_1 = \rho_2$ on a

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'_1. \tag{4.21}$$

La vitesse de sédimentation est alors égale à la vitesse moyenne de chute des gouttes dans le référentiel $(\mathcal{R}_m)$.

4.2.5 Comparaison des résultats numériques avec la théorie

Nous calculons numériquement la vitesse de sédimentation des gouttes pour différentes valeurs de la fraction volumique $c = V_1/V_1 + V_2$ et du rapport des viscosités K. Nous observons qu'aux temps longs de la simulation, la vitesse verticale calculée à l'aide de l'expression (4.19) tend bien vers une valeur stationnaire. Nous avons vérifié que les autres composantes de la vitesse de sédimentation sont négligeables et donc que les gouttes tombent verticalement, et que par ailleurs celles-ci sont effectivement peu déformées par rapport à la forme sphérique. Dans le tableau 4.2.5, les résultats obtenus à l'aide de simulations 32^3 sont comparés à la théorie pour différentes valeurs de c et de K. Pour les faibles valeurs de K, $K = 0.2, 1$ et 2 et pour $c \leq 0.25$, l'erreur moyenne normalisée entre les résultats numériques et la théorie est inférieure à 1% et pour $c = 0.35$ l'erreur est de l'ordre de 5%. Si l'erreur augmente lorsque c augmente, elle reste faible pour des petites valeurs de K.

Pour tester la convergence de la méthode lorsque la taille de maille est diminuée, nous nous plaçons dans le cas le plus défavorable, i.e. $K = 10$. Dans le tableau **??**, les résultats des simulations obtenus avec différentes résolutions du maillage sont comparés avec la

TAB. 4.1 – Comparaison entre la théorie de Sangani et les résultats numériques pour différents rapports de viscosité K et différentes fractions volumiques c.

K	c	U_{HR}/U numérique	U_{HR}/U théorique	Re [a]	Ca [b]	erreur normalisée
0.2	0.1131	2.37	2.47	0.036	0.06	4.0 %
-	0.1796	3.05	3.27	0.056	0.03	6.7 %
1	0.05	2.11	2.10	0.055	0.059	$< 1\%$
-	0.1131	2.90	2.88	0.011	0.073	$< 1\%$
-	0.1796	3.86	3.95	0.013	0.075	2.3 %
-	0.25	5.27	5.31	0.112	0.071	$< 1\%$
-	0.35	8.36	8.07	0.013	0.061	3.6 %
2	0.1131	3.2	3.17	0.018	0.061	$< 1\%$
-	0.1796	4.45	4.49	0.021	0.061	$< 1\%$
-	0.25	6.10	6.15	0.021	0.055	$< 1\%$
-	0.35	9.0	9.5	0.02	0.047	5.2 %
10	0.1131	4.16	3.7	0.065	0.044	12.4 %
-	0.1796	6.25	5.52	0.069	0.039	13.3 %
-	0.25	9.15	8.07	0.066	0.034	13.5 %
-	0.35	15.25	13.15	0.002	0.025	16.0 %

[a] Nombre de Reynolds calculé avec les paramètres de la goutte
[b] Nombre Capilaire calculé avec les paramètres du fluide extérieur

TAB. 4.2 – Comparaison entre la théorie de Sangani et les résultats numériques dans le cas défavorable $K = 10$. Influence de la résolution du maillage sur la convergence.

c	U_{HR}/U 16^3	U_{HR}/U 32^3	U_{HR}/U 64^3	U_{HR}/U Theory
0.1796	6.97 (+26%) [a]	6.255 (+13.3%)	5.86 (+6.2%)	5.52
0.25	10.36 (+28.5%)	9.155 (+13.5%)	8.55 (+6%)	8.07
0.35	15.76 (+19.8%)	15.25 (+16%)	14.13 (+7.5%)	13.15

[a] Le pourcentage entre parenthèses est l'erreur normalisée entre la valeur de U_{HR}/U obtenue numériquement et la valeur de U_{HR}/U obtenue par Sangani

théorie. Pour une résolution de 16^3 points de maillage, l'erreur moyenne entre nos résultats et la théorie est de 24.8%. Pour une résolution de 32^3 points, l'erreur moyenne est de 14.3% et enfin pour une résolution de 64^3 points, elle est de 6.6%. On peut noter qu'à chaque fois que la taille de maille h est divisée par deux, l'erreur est aussi approximativement divisée par deux. L'erreur se comporte donc comme $\mathcal{O}(h)$.

Cet écart entre les résultats numériques et la théorie est dû au fait que la viscosité est moyennée dans les cellules coupées par l'interface à l'aide de la formule (3.58). L'utilisation de cette formule crée une erreur dans le calcul du saut de contraintes visqueuses à travers l'interface qui se comporte comme $\mathcal{O}(h)$. Ce type d'imprécision est par ailleurs décrit dans [23] et des améliorations sont proposées dans le cas où l'interface est parallèle à l'une des directions du maillage.

Pour améliorer la précision dans un cas plus général, il peut s'avérer nécessaire d'utiliser une méthode de type volumes finis dans les cellules traversées par l'interface. Avec cette approche, on peut évaluer précisément les contraintes visqueuses dans chacun des volumes de contrôle séparés par l'interface. Pour envisager ce type de stratégie, il faut connaître très précisément la position de l'interface par rapport au maillage. Ce type d'approche est plus adapté à une méthode de marqueurs qu'à une méthode de Volume de Fluide.

Une autre stratégie permettant d'améliorer la précision dans le calcul du saut des contraintes visqueuses consiste à utiliser dans chaque cellule la moyenne harmonique des viscosités plutôt que la moyenne arithmétique. Alors

$$\frac{1}{\mu} = \frac{C}{\mu_1} + \frac{1-C}{\mu_2} \tag{4.22}$$

Nous n'avons malheureusement pas encore testé cette méthode.

4.3 Test d'oscillations capillaires

L'objectif de ce test est d'évaluer la précision du traitement des effets de tension de surface avec la méthode (CSS). Le test consiste à comparer le résultat de simulations bidimensionnelle d'un phénomène d'onde capillaire à des résultats analytiques.

4.3.1 Définition du problème

La relation de dispersion décrivant les oscillations capillaires de petite amplitude ($ka << 1$ o k est le nombre d'onde et a l'amplitude de l'oscillation) de l'interface entre deux couches superposées de fluides non visqueux, s'écrit [58]

$$\omega_0^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho_1 + \rho_2} \tag{4.23}$$

avec ρ_1 et ρ_2 la densité de chacun des fluides.

Dans le cas o les fluides sont visqueux, la fréquence des oscillations est constante et inférieure à la fréquence ω_0 mais leur amplitude diminue au cours du temps par amortissement visqueux.

Différentes théories permettent de prédire la fréquence et l'amortissement des oscillations capillaires. Lamb [58] obtient la solution sous forme de mode normaux. Prosperetti résout le problème aux valeurs initiales linéarisé et trouve une solution exacte dans le cas où les deux couches de fluides sont infinies dans la direction verticale [77] ou bien de dimension finie [21]. Les résultats de simulations obtenus à l'aide d'une méthode de marqueurs de surface sont en meilleur accord avec la solution du problème aux valeurs initiales qu'avec la solution en modes normaux [76]. Ce résultat n'est pas inattendu puisque, comme dans la théorie de Prosperetti, la condition initiale utilisée dans [76] est celle d'une interface perturbée et au repos. Au contraire, dans la théorie des modes normaux, on considère que le régime d'oscillation est déja établi.

Nous utilisons la même condition initiale que dans [76] et comparons les résultats numériques avec la solution du problème aux valeurs initiales. Dans cette théorie, l'amplitude adimensionnée a/a_0 est une fonction du temps adimensionné $\tau = \omega_0 t$, de la viscosité adimensionnée $\epsilon = \nu k^2/\omega_0$ et d'un paramètre adimensionné $\beta = \rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)^2$. L'expression analytique de cette solution peut être trouvée dans [77, 76].

4.3.2 Comparaison entre le calcul numérique et la solution analytique

Considérons le domaine de calcul $\Omega = [0, l] \times [0, l]$. Les conditions aux limites sont périodiques sur les frontières verticales en $x = 0$ et $x = l$ et non glissantes sur les parois horizontales en $z = 0$ et $z = l$. L'interface est une surface horizontale, séparant deux domaines de taille égale, à laquelle on superpose une perturbation sinusoidale d'amplitude initiale a_0 et de longueur d'onde égale à la taille de boîte l, voir figure 4.3. Les paramètres physiques adimensionnés fixés dans les simulations sont la viscosité adimensionnée $\epsilon =$

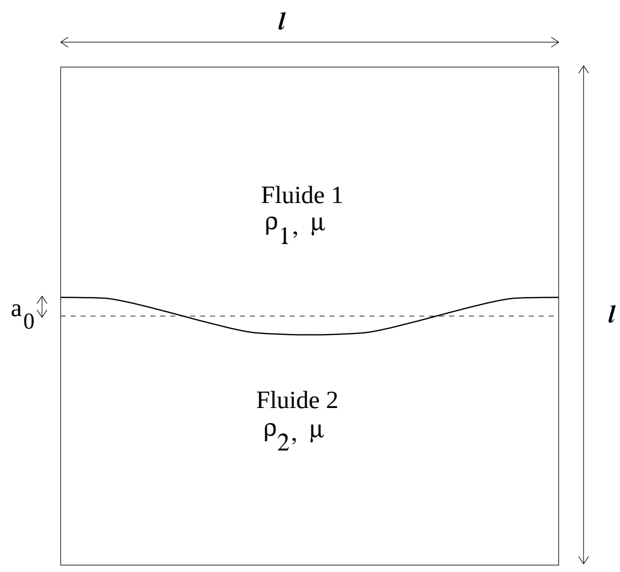


FIG. 4.3 – Conditions initiales utilisées dans les simulations numériques.

6.472 10^{-2}, la fréquence $\omega_0 = 6.778$ et le nombre de Ohnesorge $Oh = \mu/(\rho\sigma r_0)^{1/2} = 1/\sqrt{3000}$.

Dans la figure 4.4 nous présentons l'évolution au cours du temps de l'amplitude de l'onde capillaire pour une boîte de 64^2 points de maillage et une amplitude initiale a_0 telle que $h/a_0 = 25/16 = 1.5625$. Dans la figure 4.5 nous présentons l'évolution au cours du temps de l'erreur relative entre les calculs numériques et la solution analytique pour différentes tailles de maille et un rapport $h/a_0 = 25/16 = 1.5625$ fixé.

Nos simulations montrent que l'erreur est fonction de la taille de maille h et de l'amplitude initiale a_0. Nous étudions la convergence des résultats vers la solution analytique en fonction de h et de h/a_0. Les résultats sont présentés dans la table 4.3.

		$1/h$				
		32	64	128	256	512
h/a_0	0.1953125	–	–	–	–	0.0198
	0.39065	–	–	0.0162	0.0145	0.0118
	0.78125	0.0609	0.0062	0.0143	0.0096	0.0064
	1.5625	0.0564	0.0066	0.0127	0.0096	0.0061
	3.125	0.0544	0.0087	0.0145	0.010	0.0063
	6.25	0.0540	0.0101	0.0166	–	–
	12.5	0.0539	–	–	–	–

TAB. 4.3 – Erreur relative entre la solution analytique et les simulations en fonction de la taille de maille h et du rapport h/a_0. Le rapport de densité vaut $\rho_1/\rho_2 = 1$. L'erreur est la norme L^2 de la différence entre la solution analytique et le calcul numérique, divisé par a_0.

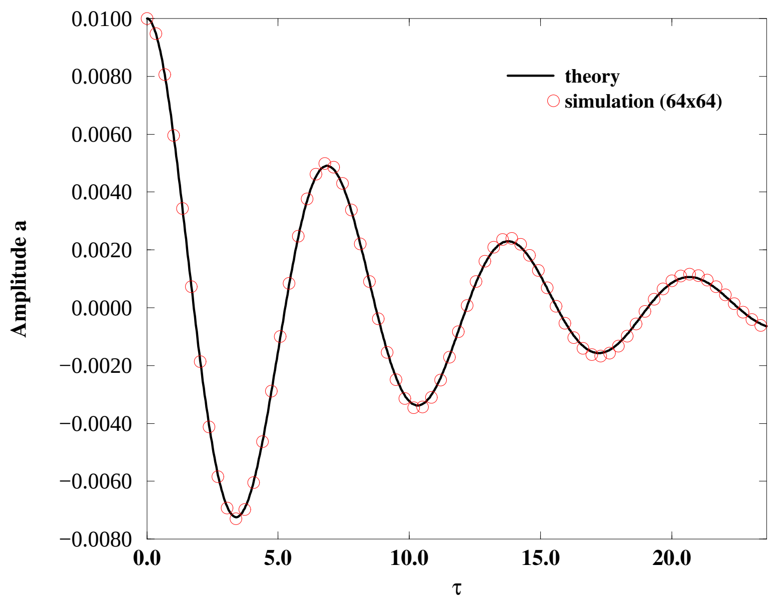


FIG. 4.4 – Evolution de la valeur absolue de l'amplitude de l'onde capillaire en fonction du temps adimensionné $\tau = \omega_0 t$. La solution analytique et le résultat de la simulation numérique pour une taille de boîte 64×64 sont supperposés. Les deux fluides ont la même densité.

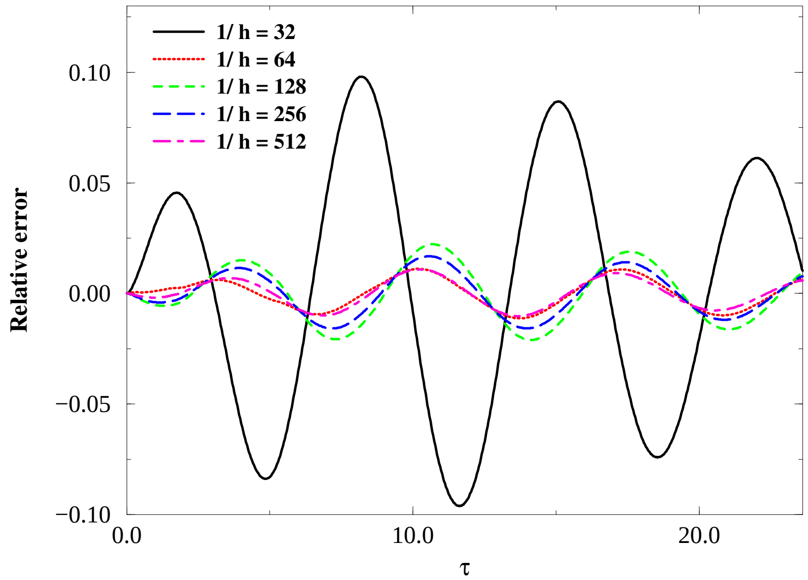


FIG. 4.5 – Evolution de l'erreur $(a_{theorie} - a_{simulation})/a_0$ en fonction du temps adimensionné $\tau = \omega_0 t$ pour $h/a_0 = 1.5625$ fixé. Les deux fluides ont la même densité.

Lorsque le rapport h/a_0 est plus petit que 1, les effets non linéaires sont peu importants et les calculs numériques convergent vers la solution analytique du problème linéarisé. Lorsque h/a_0 est beaucoup plus grand que 1 le maillage ne permet pas de résoudre avec suffisamment de précision l'amplitude de l'onde capillaire et les résultats numériques divergent.

Nous étudions d'autre part le cas de fluides de densité différentes. Le rapport des densités ρ_1/ρ_2 vaut 10 et le rapport $h/a_0 = 1.5625$ est fixé. Les résultats de convergence de la méthode avec la résolution du maillage sont présentés dans la table 4.4.

$1/h$	Erreur simulation/ théorie
32	0.0735
64	0.0139
128	0.0162
256	0.0129
512	0.0081

TAB. 4.4 – Erreur relative pour différentes tailles de maille h. Le rapport de densité vaut $\rho_1/\rho_2 = 10$ et $h/a_0 = 1.5625$. L'erreur est la norme L^2 de la différence entre la solution analytique et le calcul numérique, divisé par a_0.

Nous constatons, comme dans [76], que pour des petites tailles de maille, l'erreur relative est inférieure à 1%. De même, nous observons que la convergence vers la solution

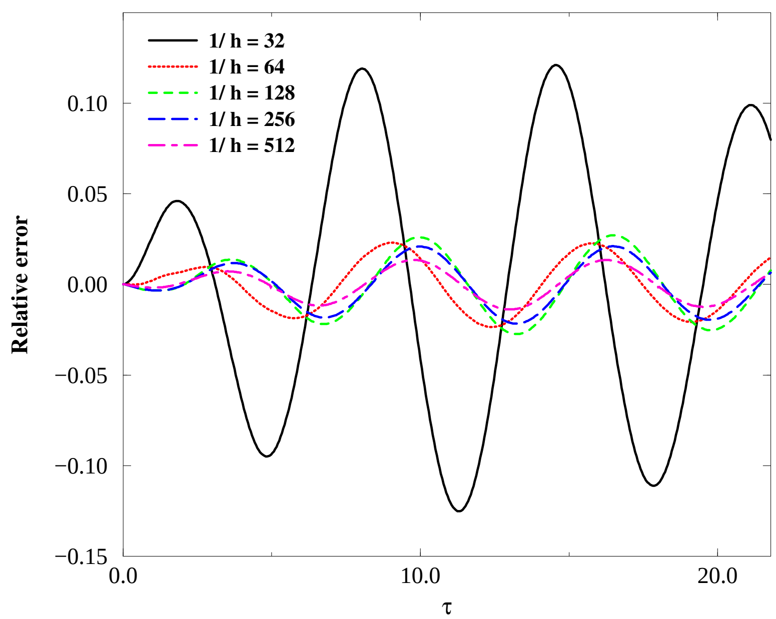


FIG. 4.6 – Evolution de l'erreur $(a_{theorie} - a_{simulation})/a_0$ en fonction du temps adimensionné $\tau = \omega_0 t$ pour $h/a_0 = 1.5625$ fixé et un rapport de densité $\rho_1/\rho_2 = 10$.

analytique est sous-linéaire. Dans l'ensemble, nos résultats sont un peu moins précis que ceux qui sont obtenus à l'aide d'une méthode de marqueurs de surface [76] et nous obtenons une convergence moins rapide. En permettant de calculer les forces de tension de surface directement à l'interface représentée très précisemment, la méthode de marqueurs de surface permet un traitement des effets capillaires plus précis qu'avec notre méthode PLIC couplée à la méthode CSS.

4.4 Simulation du pincement d'une goutte pendante

Dans certaines méthodes numériques, comme dans les méthodes de marqueurs de surface, des algorithmes spécifiques doivent être utilisés pour rompre les interfaces. En revanche, dans les méthodes de Volume de Fluide, les reconnexions d'interfaces se produisent de façon automatique. Si un filament liquide d'épaisseur inférieure à la taille de maille se trouve dans un champ d'étirement axial, une reconnexion peut se produire en un temps fini.

Nous voulons tester l'aptitude de notre méthode numérique à reproduire des résultats expérimentaux dans le cas du pincement d'une colonne axisymétrique sous l'action des forces de tension de surface. Nous testons d'une part notre méthode tridimensionnelle et d'autre part notre méthode axisymétrique.

4.4.1 Position du problème

Le pincement des colonnes axisymétriques a beaucoup été étudié ces dernières années. La singularité au moment du pincement a été étudiée par Eggers et Dupont [33]. Ceux-ci ont dérivé une solution auto-similaire "universelle" des équations de lubrification pour les colonnes liquides permettant de décrire le pincement de façon locale en temps et en espace. Une revue des phénomènes de pincement tridimensionnels est effectuée par Eggers dans [32].

Le phénomène est aussi étudié à l'aide de simulations numériques. Le problème du détachement d'une bulle liquide à l'extrémité d'une seringue est simulé par Oguz et Prosperetti [66]. Schulkes a simulé le pincement de gouttes pendantes, pour différents régimes d'alimentation en liquide, à l'aide d'une méthode d'intégrale de frontière, en négligeant de plus les effets visqueux [93]. De leur côté, Eggers et Dupont [33] ont simulé les équations de lubrification visqueuses. Les simulations de Schulkes comme celles de Eggers et Dupont sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux de Peregrine et al. [70] pour le pincement des gouttes d'eau pendantes.

Nous étudions le pincement d'une goutte pendante alimentée en liquide par un orifice de rayon r_0 et placée dans un champ de gravité $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$. Si on peut complètement négliger les effets du gaz extérieur, alors le problème est entièrement décrit à l'aide de trois nombres sans dimension : le nombre de Ohnesorge $Oh = \mu/(\rho\sigma r_0)^{1/2}$, le nombre de Bond $Bo = \rho g r_0^2/\sigma$ qui compare la gravité aux effets capillaires et le nombre de Weber $We = \rho V^2 r_0/\sigma$ calculé sur la vitesse d'alimentation V à l'orifice.

4.4.2 Traitement numérique

Comme dans [93], nous imposons un profil de vitesse d'alimentation linéaire en r au niveau de l'orifice à la frontière supérieure du domaine de calcul. Pour conserver le volume total, nous imposons le même profil de vitesse sur la frontière inférieure si bien que le flux volumique qui entre dans le domaine est égal au flux volumique qui en sort. Pour les simulations tridimensionnelles, un quart d'orifice est placé dans un coin de la frontière supérieure et des conditions miroir sont imposées sur les frontières verticales. Cette symétrie d'ordre 4 permet de simuler un orifice et une goutte complète. Dans le cas des simulations axisymétriques, l'axe $r = 0$ est un axe de symétrie du problème. Quel que soit le système de coordonnées utilisé, on impose sur la frontière supérieure que

$$\begin{cases} u/V = (1 - r/r_0) \ \text{ et } \ C = 1 & \text{pour } r < r_0, \\ u = 0 \ \text{ et } \ \partial_n C = 0 & \text{pour } r > r_0, \end{cases} \tag{4.24}$$

et sur la frontière inférieure, on a

$$\begin{cases} u/V = (1 - r/r_0) \ \text{ et } \ \partial_n C = 0 & \text{pour } r < r_0, \\ u = 0 \ \text{ et } \ \partial_n C = 0 & \text{pour } r > r_0. \end{cases} \tag{4.25}$$

o r est la coordonnée radiale dans le cas axisymétrique et dans le cas tridimensionnel, r est la distance à l'axe de symmétrie, définie par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.4.3 Comparaison entre simulations numériques et résultats expérimentaux

Comme dans [93, 33], nous comparons les résultats de nos simulations avec les photographies expérimentales de haute résolution de Peregrine et al. [70] montrant les différentes étapes du pincement d'une goutte d'eau pendante. Pour ce faire nous effectuons tout d'abord une simulation tridimensionnelle dans un domaine de $128 \times 64 \times 64$ points de maillage en utilisant pratiquement les mêmes paramètres que dans [33]. Le seul paramètre ajusté par Eggers est le diamètre de l'orifice d'alimentation. Par contre, pour éviter l'apparition de courants parasites, nous imposons que la densité ρ_2 du fluide extérieur soit environs six fois celle de l'air, si bien que le rapport de densité ρ_1/ρ_2 est égal à 133. Les nombres sans dimensions, calculés avec les paramètres physiques du fluide constituant la goutte, sont tels que $Oh = 0.0023$, $Bo = 1$ et $We = 9.216\ 10^{-5}$. Le nombre de Weber est tel que $We << Bo = 1$, si bien que le temps caractéristique nécessaire pour remplir la goutte r_0/V est très petit devant les échelles de temps de chute libre $\sqrt{r_0/g}$ et du pincement $\sqrt{\rho r_0^3/\sigma}$. La goutte se remplit donc très lentement, de façon quasistatique, son évolution pouvant être approximée par une série continue d'états d'équilibre. Lorsque le volume de la goutte atteint une valeur critique, le phénomène s'accélère. Il se produit un rétrécissement de la colonne liquide dont la forme devient conique. La colonne se pince en deux endroits pratiquement au même instant et une grosse goutte principale ainsi qu'un petit filament liquide sont formés. Ce dernier se rétracte très rapidemment sous l'effet des forces capillaires et forme une petite goutte secondaire. Comme dans le cas du pincement d'une colonne liquide en l'absence de gravité, le pincement est disymétrique. Au moment du premier pincement, la pente de l'interface est très grande et la partie supérieure de la goutte détachée est pratiquement plate. Cette dernière subit ensuite des oscillations au cours de sa chute.

La simulation tridimensionnelle permet de reproduire cette séquence de phénomènes, voir la figure 4.7. Dans la figure 4.8, le profil de l'interface simulée est superposé aux photographies de [70] à deux instants différents, au moment du premier pincement et juste après le second, et un bon accord est obtenu. Par contre, le volume de la goutte principale est légèrement surestimé. La vitesse d'alimentation à l'orifice n'étant pas indiquée de façon précise dans [33], nous avons effectué plusieurs simulations tridimensionnelles avec des valeurs de V plus petites mais comparables à celle qui est imposée dans la première simulation. Au moment du premier pincement, le volume de la goutte principale est en meilleur accord avec l'expérience mais, cette fois, le volume de la partie supérieure de la colonne, qui reste attachée à l'orifice, est surestimé (voir figure 4.9).

Par contre, la simulation numérique axisymétrique dans une boîte de calcul de 128×64 points de maillage utilisant les mêmes paramètres que la première simulation tridimensionnelle, est en excellent accord avec les photographies, voir la figure 4.10. Pour cette résolution du maillage, le code axisymétrique donne de meilleurs résultats que le code tridimensionnel. Par contre, pour cette taille de maille, aucune de nos simulations ne permet d'observer les ondes capillaires visibles sur les photographies au niveau du filament détaché (voir la figure 4.10 (droite)). Ceci est vraissemblablement dû au fait que l'amplitude et la longueur d'onde de ces oscillations sont mal résolues par le maillage. Par ailleurs, nous observons parfois une inversion de la courbure de la partie supérieure de la goutte (voir figure 4.10 (droite)), ce qui est en accord avec certaines simulations mais en désaccord avec la théorie de Eggers pour le pincement d'une colonne de liquide visqueux. Cependant, ce résultat est peut-être dû à un manque de résolution du maillage.

Finalement, sans que la singularité ne soit caractérisée par les exposants des lois d'echelles sur plusieurs décades, nos simulations permettent de prédire les reconnexions axisymétriques de façon réaliste. Notre méthode numérique est capable de traverser la singularité, au cours de laquelle la vitesse devient théoriquement infinie, sans que le calcul ne diverge, tout en conservant un bon accord avec l'expérience. Ceci est vraissemblablement dû au fait que plus on s'approche de l'instant du pincement, plus le phénomène de reconnexion s'accélère. En effet, le temps nécessaire pour pincer une colonne liquide de rayon r est de l'ordre de $t_c = \sqrt{\rho r^3/\sigma}$, et au fur et à mesure que r diminue, t_c diminue. Dans les simulations, l'interface est reconnectée lorsque le rayon de la colonne est inférieur à la taille de maille h et donc l'erreur commise sur l'instant de la singularité est inférieur à $\Delta t_c = \sqrt{\rho(hL)^3/\sigma}$ avec L la taille du domaine de calcul. Cette échelle de temps est courte par rapport au temps convectif hL/V_{max} (où (hL) est une estimation du rayon de la colonne avant le pincement et V_{max} est la vitesse maximale dans la région du pincement), et par rapport au temps $t_0 = \sqrt{\rho r_0^3/\sigma}$ nécessaire pour pincer la colonne. L'erreur Δt_c est petite par rapport aux autres temps caractéristiques et l'instant de la reconnexion est donc déterminé avec précision par la solution à grande échelle. Par contre un raffinement dans la région du pincement serait nécessaire si on voulait s'intéresser à la structure de la singularité, et en particulier si on voulait retrouver les exposants des lois d'échelle pour la vitesse et le rayon de la colonne [32].

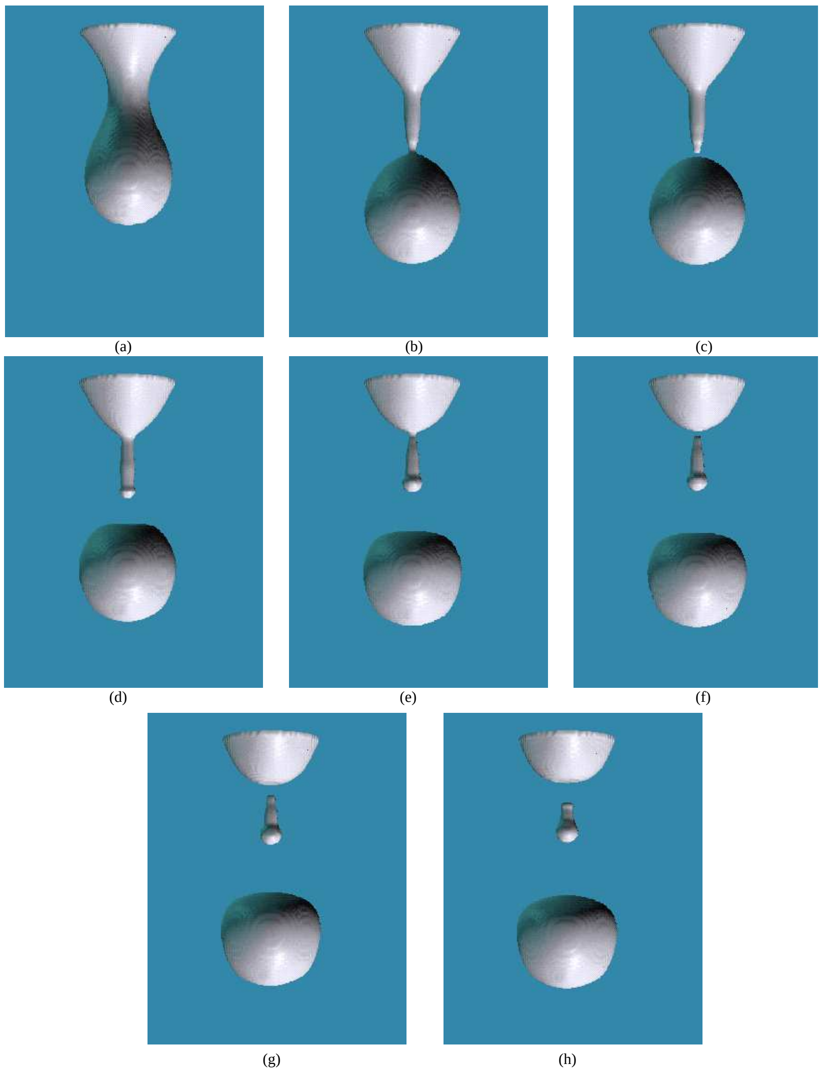


Fig. 4.7 – Simulations tridimensionnelles du pincement d'une goutte pendante montrant différents instants qui précèdent ou qui suivent le pincement.

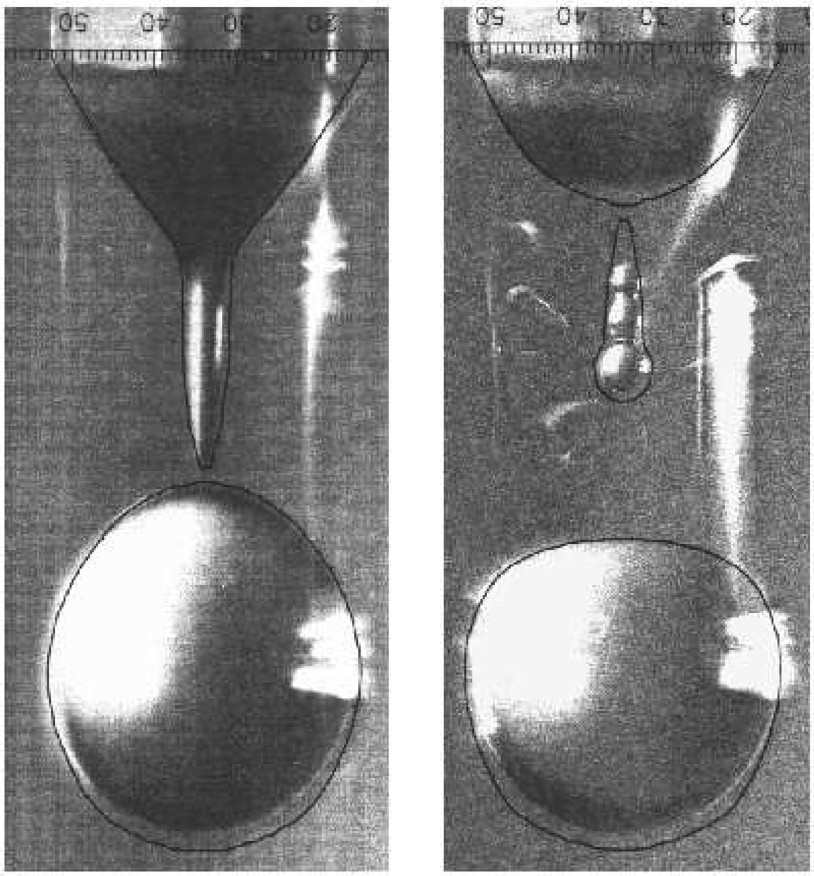


FIG. 4.8 – Superposition des photographies expérimentales de [70] et des simulations tridimensionnelles (trait noir). Gauche : au moment de la première bifurcation. Droite : juste après la seconde bifurcation.

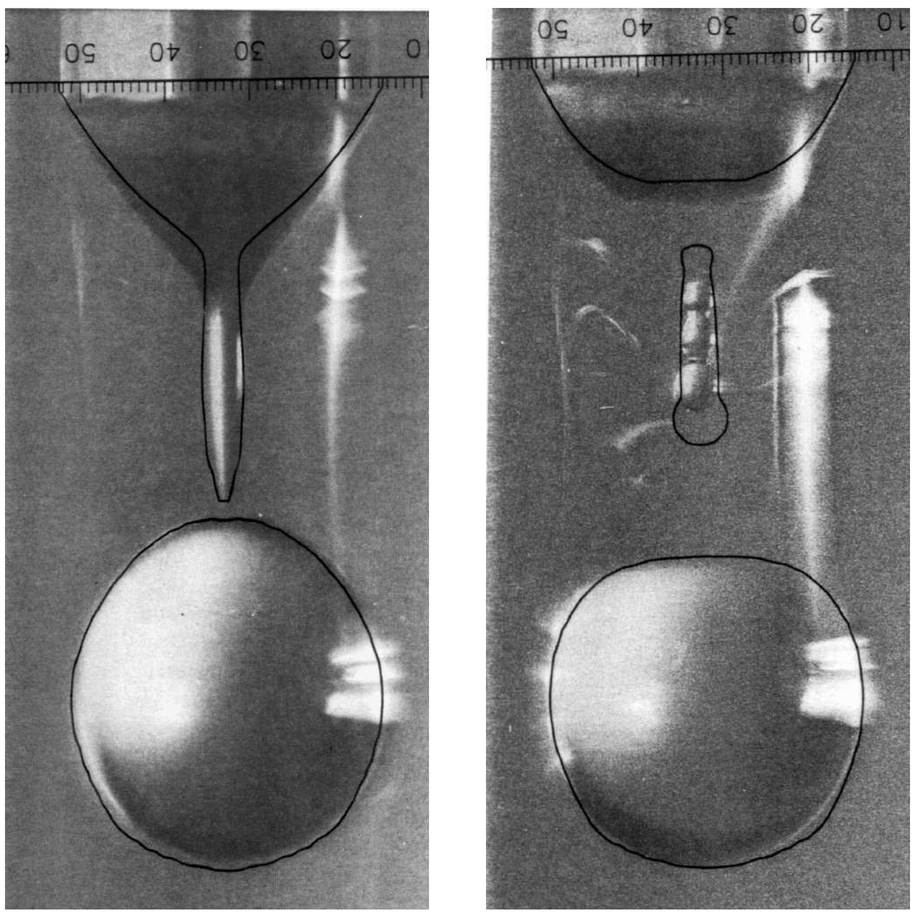


FIG. 4.9 – Superposition des photographies expérimentales de [70] et des simulations tridimensionnelles. Par rapport à la simulation de la figure 4.8, le débit à l'orifice a été diminué. Un meilleur accord est obtenu pour le volume de la goutte principale. Par contre, le volume du liquide qui reste accroché à l'orifice est sous estimé.

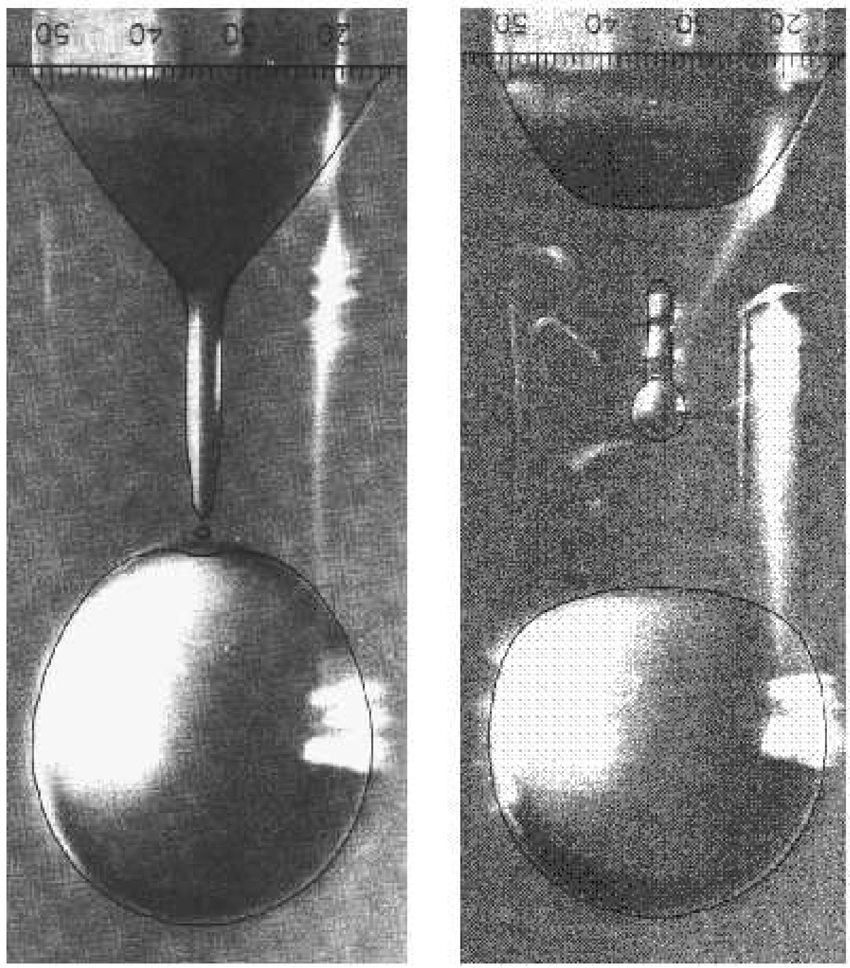


FIG. 4.10 – Idem que fig. 4.8 mais cette fois les simulations sont axisymmétriques.

4.5 Simulation de la montée de bulles dans un fluide visqueux

Dans le test de sédimentation de gouttes en régimes de Stokes à petit nombre de Reynolds et petit nombre capillaire, les particules restent sphériques au cours de leur chute et l'écoulement reste relativement simple. Dans ce nouveau test, nous voulons évaluer la capacité de notre méthode à simuler un écoulement complexe dans lequel les particules se déforment.

4.5.1 Position du problème

Nous étudions la montée de bulles, soumises à la gravité, dans un fluide visqueux à des nombres de Reynolds et des nombres capillaires intermédiaires. Ryskin et Leal [87] ont simulé le régime stationnaire de montée des bulles et ont obtenu un excellent accord entre leurs calculs et les résultats expérimentaux de Hnat et Buckmaster [48, 47]. Sussman et Smereka [98] ont effectué des simulations du même phénomène à l'aide d'une méthode de ligne de niveau et ont eux aussi obtenu un bon accord avec les résultats expérimentaux de Hnat et Buckmaster. Nous comparons nos calculs, utilisant le code axisymétrique, aux résultats du même travail expérimental.

4.5.2 Comparaison entre simulations numériques et résultats expérimentaux

Nous utilisons les mêmes paramètres physiques que dans [98] qui correspondent aux paramètres des expériences de [48, 47]. La densité du liquide vaut $\rho_l = 0.8755\, g.cm{-}3$ et celle du gaz $\rho_g = 0.001\, g.cm^{-3}$. Les viscosités des deux fluides sont réspectivement $\mu_l = 1.18\, P$ et $\mu_g = 0.01\, P$. Le coefficient de tension de surface vaut $\sigma = 32.2\, dyn.cm^{-1}$ et la gravité $g = 980\, cm.s^{-2}$.

Dans un premier temps, nous simulons la montée d'une bulle de rayon équivalent $r = 0.61cm$, qui correspond à la bulle A de la figure 1 et de la table I de [48] . Le maillage est de 128×512 points. Les dimensions verticale H et radiale R du domaine de calcul sont choisies de telle sorte que $H = 12\, r$ et $R = 3\, r$. La vitesse de montée atteint rapidement une valeur stationnaire de $21.5\, cm.s{-}1$ qui correspond précisemment à celle qui est mesurée expérimentalement, voir la figure 4.11. Par ailleurs, la forme stationnaire de la bulle et de la zone de recirculation à l'arrière de la bulle obtenue dans la simulation numérique est en excellent accord avec la photographie expérimentale de la figure 1A de [47], voir la figure 4.12.

Nous simulons ensuite la montée de bulles correspondant à la bulle B et à la bulle C de [48, 47] dont le rayon équivalent est respectivement $r = 0.83\, cm$ et $r = 1.08\, cm$. Pour réduire l'influence des conditions aux limites, nous choisissons des valeurs de R/r et H/r plus importantes que dans la première simulation. Pour les deux simulations, nous avons imposé $H = 22.2\, r$ et $R = 5.5\, r$, tandis que la résolution du maillage est

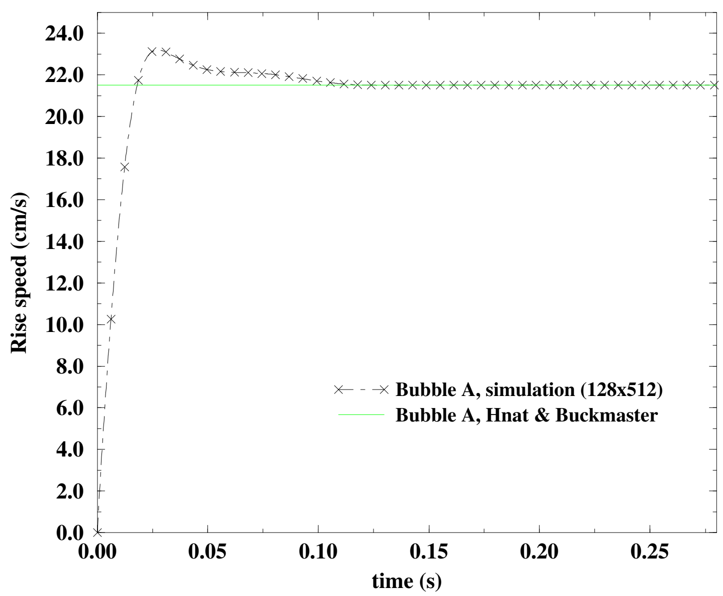


FIG. 4.11 – Evolution temporelle de la vitesse de montée d'une bulle pour des paramètres correspondant à ceux de la bulle A de [48]. La vitesse terminale calculée est en excellent accord avec la vitesse expérimentale.

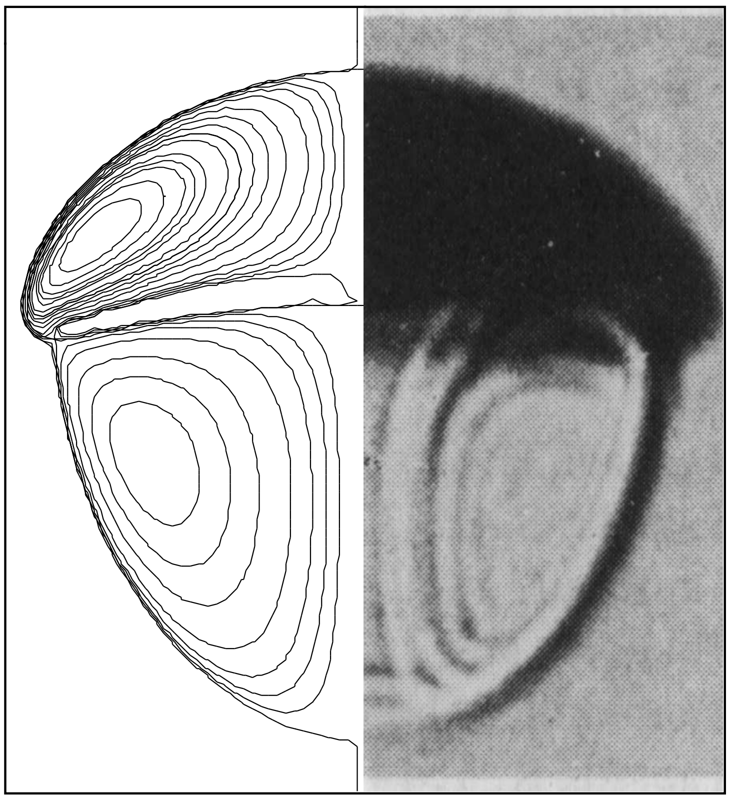


FIG. 4.12 – Comparaison entre la forme de la bulle, les lignes de courant à l'intérieur de la bulle et de la zone de recirculation qui sont obtenues par le calcul (gauche) et la figure 1.A de [47] (droite).

toujours de 128×512 points. Pour la bulle B, nous mesurons une vitesse terminale de montée de $25.8\,cm.s^{-1}$ alors que la valeur expérimentale est de $27\,cm.s^{-1}$. L'erreur entre l'expérience et la simulation est de 4.45%. Pour la bulle C, la vitesse terminale mesurée est de $28.6\,cm.s^{-1}$ alors que la vitesse expérimentale est de $30.5\,cm.s^{-1}$ et cette fois, l'erreur est de 6.23%. Pour la bulle C, la vitesse terminale obtenue dans les simulations de [98] est de $29\,cm.s^{-1}$ qui est elle aussi un peu inférieure à la valeur expérimentale. Cette différence entre les résultats numériques et expérimentaux est peut-être liée à la présence des parois, qui sont plus proches de la bulle dans les simulations que dans les expériences.

Deuxième partie

Étude numérique et théorique de l'impact d'une goutte sur un film liquide

Chapitre 5

Simulations en coordonnées cylindriques de l'impact d'une goutte sur un film liquide

Dans ce chapitre, nous étudions les impacts de gouttes perpendiculaires à la surface du liquide et nous intéressons à la formation de la corolle aux temps courts de l'impact et à son évolution aux temps longs. Nos prédictions sont comparées aux résultats de simulations axisymétriques très résolues.

5.1 Analyse de la formation de la corolle

Nous analysons le développement de la corolle aux temps courts de l'impact ($t << U/D$), le contact entre la goutte et le film liquide se produisant à l'instant $t = 0$. Dans la suite, l'écoulement suffisamment loin de la paroi est supposé potentiel.

Dans la région de tangence, la tension de surface assure un raccordement régulier entre la goutte et le film liquide. Cette région a la forme d'une bulle de rayon $\epsilon(t)$. La position de cette bulle est notée $R(t)$ et sa vitesse de rétraction, qui s'obtient en équilibrant la tension de surface et la force de masse ajoutée, est de l'ordre de la vitesse de Culick-Taylor $V_0 = (2\sigma/\rho\epsilon)^{1/2}$. Ainsi

$$\dot{R} = (2\sigma/\rho\epsilon)^{1/2} \tag{5.1}$$

Le point de tangence, noté I, entre la goutte (en vert sur la figure 5.6) et la surface du film liquide (en rouge sur la figure 5.6), est repéré à l'aide de la coordonnée $r_c(t)$. Pour $t << D/U$, le rayon

$$r_c(t) = (UDt)^{1/2}, \tag{5.2}$$

correspond au rayon de la discontinuité cinématique, c'est à dire au rayon de la base de la corolle. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que

$$\dot{R} = \dot{r}_c. \tag{5.3}$$

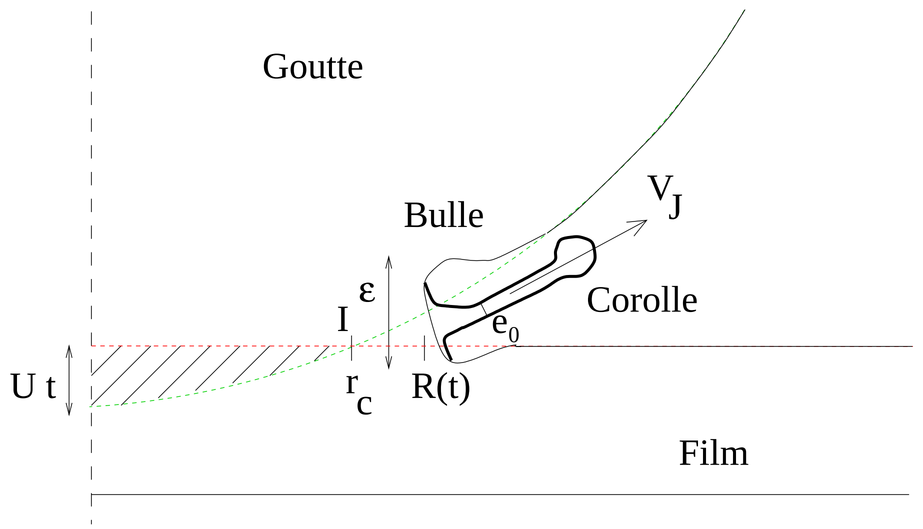


FIG. 5.1 – Formation de la corolle aux temps courts.

En effet, si la vitesse du point de contact était plus faible que la vitesse de la bulle, la corolle ne pourrait se former. Dans la situation contraire, la tension de surface ne permettrait pas d'assurer un raccordement régulier entre la goutte et la surface liquide.

Ainsi, à l'aide des équations (5.1), (5.2) et (5.3), nous obtenons l'équation d'évolution du rayon de la bulle

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{\rho U D} t = We^{-1} U t \tag{5.4}$$

Pour évaluer la vitesse de la corolle, traduisons la conservation du débit volumique. Nous faisons l'hypothèse que le volume éjecté dans la corolle est du même ordre que le volume hachuré sur la figure 5.6 est . Ce volume est environ de

$$V = \pi r_c^2 U t = \pi U^2 D t \tag{5.5}$$

Le débit entrant dans la corolle par unité de ligne est égal à

$$q = \frac{1}{2\pi r_c} \frac{dV}{dt} = (U^3 D t)^{1/2} \tag{5.6}$$

en négligeant les préfacteurs constants. Supposons, de plus, que e_0, l'épaisseur de la base de la corolle, et ϵ sont du même ordre

$$e_0 \sim \epsilon = We^{-1} U t. \tag{5.7}$$

Par ailleurs, on a

$$q = e_0 V_J \tag{5.8}$$

Finalement, à l'aide de (5.8), (5.6), (5.7) et (5.4) nous obtenons que la vitesse de la base de la corolle est de l'ordre de

$$V_J = We\left(\frac{UD}{t}\right)^{1/2} = We\, \dot{r}_c. \tag{5.9}$$

La corolle se forme à condition que sa vitesse soit plus élevée que la vitesse de rétraction du bourrelet son extrémité

$$V_J > V_0 = (\frac{2\sigma}{\rho e_0})^{1/2}. \quad (5.10)$$

Le temps disparait de cette condition qui s'écrit alors

$$We > 1. \quad (5.11)$$

Notre analyse prédit que si $We >> 1$ la corolle est formée dès l'instant du contact. Néanmoins, les phénomènes à petite échelle, comme les effets visqueux ou les effets de compressibilité du liquide, dont nous n'avons pas tenu compte ici, retardent certainement la formation de la corolle qui se produit à un instant t_0 proche de $t = 0$. l'extrémité de la corolle subit une accélération impulsive, et, à $t = t_0$, celle-ci est ejectée à vitesse finie $V_c = V_J(t_0)$. Son mouvement ultérieur est pratiquement balistique. Il faut ajouter à la vitesse $\mathbf{V_c}$ la vitesse de rétraction du bourrelet.

5.2 Evolution de la corolle aux temps longs

Nous nous proposons d'évaluer les transferts de masse et de quantité de mouvement du film liquide vers la corolle aux temps longs de l'impact. Nous déterminons par ailleurs la forme de la corolle et son évolution.

5.2.1 Vitesse de la corolle

Yarin et Weiss [110] résolvent les équations d'évolution du film mince pour des écoulements quasi-parallèles. Les résultats de leur analyse concernent l'évolution de la discontinuité cinématique au niveau de la base de la corolle aux temps longs de l'impact. La solution décrivant l'évolution de l'épaisseur de part et d'autre s'écrit

$$h = \begin{cases} h_- = H/(1+Bt)^2 & \text{pour } r < r_c \\ h_+ = H & \text{pour } r > r_c \end{cases}, \quad (5.12)$$

et

$$u = \begin{cases} u_- = (2A/t)^{1/2} \simeq 2(UD/t)^{1/2} & \text{pour } r < r_c \\ u_+ = 0 & \text{pour } r > r_c \end{cases}. \quad (5.13)$$

La discontinuité est similaire à un choc de Burgers. Ainsi

$$\dot{r}_c = (u_+ + u_-)/2 = (A/2t)^{1/2} \simeq (UD/t)^{1/2} \quad (5.14)$$

Dans la suite, l'écoulement dans la corolle est supposé potentiel. Dans le référentiel lié à la discontinuité, le problème est équivalent à l'impact quasi-stationnaire de deux jets d'épaisseurs différentes, animés respectivement d'une vitesse $\dot{r}_c$ et $-\dot{r}_c$ (figure 5.2). La corolle est issue de l'impact de ces deux jets. On note u_0 la vitesse du fluide à la base de la corolle et θ l'angle entre la verticale et la base de la corolle (la figure est orientée dans le

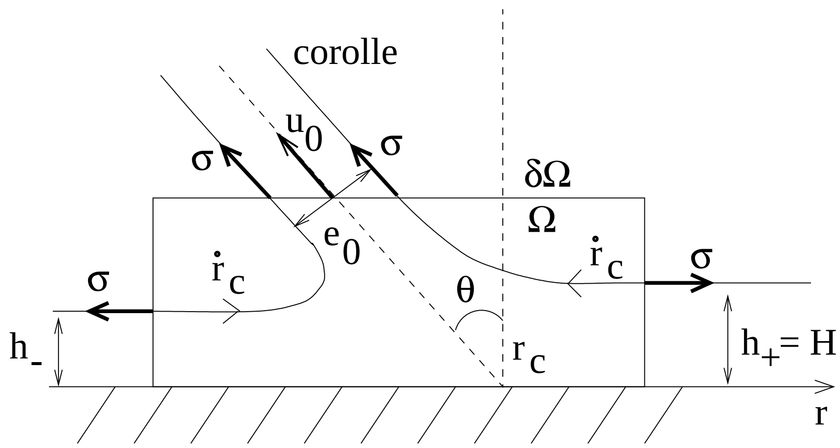


FIG. 5.2 – Dans le référentiel lié à la discontinuité, le problème est équivalent à l'impact de deux jets à vitesses égales à $\dot{r}_c$ en module et de directions opposées.

sens trigonométrique). L'interface de chacun des jets est une ligne de courant. Par ailleurs la pression est uniforme le long de ces lignes, égale à la pression extérieure. A l'aide de l'équation de Bernouilli stationnaire, nous obtenons que la vitesse est conservée le long de ces lignes. D'où

$$u_0 = \dot{r}_c \tag{5.15}$$

Ainsi, dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du fluide à la base de la corolle est égale à

$$V_J = u_0(-sin\theta\mathbf{e}_r + cos\theta\mathbf{e}_z) + \dot{r}_c\mathbf{e}_r = \dot{r}_c(1 - sin\theta)\mathbf{e}_r + \dot{r}_c cos\theta\mathbf{e}_z \tag{5.16}$$

5.2.2 Epaisseur de la base de la corolle

L'équation de conservation de la masse appliquée au volume de contrôle Ω de frontière $\partial\Omega$ s'écrit

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0. \tag{5.17}$$

D'où

$$h_-\dot{r}_c + H\dot{r}_c = u_0 e_0 = \dot{r}_c e_0, \tag{5.18}$$

et finalement

$$e_0 = h_- + H. \tag{5.19}$$

Aux temps longs, h_- tend vers zéro et l'épaisseur e_0 de la base de la corolle est égale à l'épaisseur H du film liquide.

5.2.3 Inclinaison de la corolle par rapport à la verticale

La conservation de la quantité de mouvement dans la direction radiale s'écrit

$$\rho\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\, dS = -2\sigma sin\theta. \tag{5.20}$$

Alors

$$-h_{-}\dot{r}_c^2 + H\dot{r}_c^2 - e_0 u_0^2 sin\theta = -\frac{2\sigma}{\rho} sin\theta \tag{5.21}$$

À l'aide des équations (5.19) et (5.21) nous obtenons

$$sin\theta = \frac{H - h_{-}}{H + h_{-} - 2We^{-1}Ut} \tag{5.22}$$

Ainsi, plus l'épaisseur de la couche liquide est importante, plus la corolle est inclinée vers les r décroissants. A We fini, l'inclinaison diminue lorsque t augmente et la corolle devient verticale. En revanche, lorsque la tension de surface est nulle ($We = \infty$), l'équation (5.22) se simplifie en

$$sin\theta = \frac{H - h_{-}}{H + h_{-}}. \tag{5.23}$$

L'inclinaison vers les r décroissants augmente lorsque t augmente.

5.2.4 Forme de la corolle

L'écoulement dans la corolle est supposé potentiel. Nous supposons par ailleurs que suffisamment loin du bourrelet capillaire à l'extrémité de la corolle, les effets de tension de surface sont négligeables. Comme dans [69], nous considérons alors que le mouvement lagrangien d'une particule de la corolle est balistique. Notons $\mathbf{X}_P(t, t_1)$ la position à l'instant t de la particule notée P qui se trouve à la base de la corolle à l'instant t_1. Alors

$$\partial_t \mathbf{X}_P(t, t_1) = \partial_t \mathbf{X}_P(t_1, t_1) = \mathbf{V}_J(t_1) \tag{5.24}$$

A l'aide de (5.16), l'équation (5.24) intégrée une fois en temps devient

$$\mathbf{X}_P(t, t_1) - \mathbf{X}_P(t_1, t_1) = 2(t - t_1)\sqrt{\frac{UD}{t_1}} \left(\frac{1}{1 + (1 + Bt_1)^2} \mathbf{e}_r + \frac{1}{Bt_1} \mathbf{e}_z \right) \tag{5.25}$$

En écrivant la conservation du volume d'un petit élément noté $\delta V(t, t_1)$ d'épaisseur $e(t, t_1)$ affecté à la particule P (figure 5.3), nous obtenons [11], que l'épaisseur de la corolle se comporte comme

$$e(t, t_1) \sim H(\frac{t_1}{t})^{1/2} \tag{5.26}$$

Ce résultat asymptotique est corroboré par nos simulations numériques [11].

Dans la suite, nous comparons l'ensemble des résultats obtenus dans nos analyses des temps courts et des temps longs de l'impact avec nos simulations numériques axisymétriques.

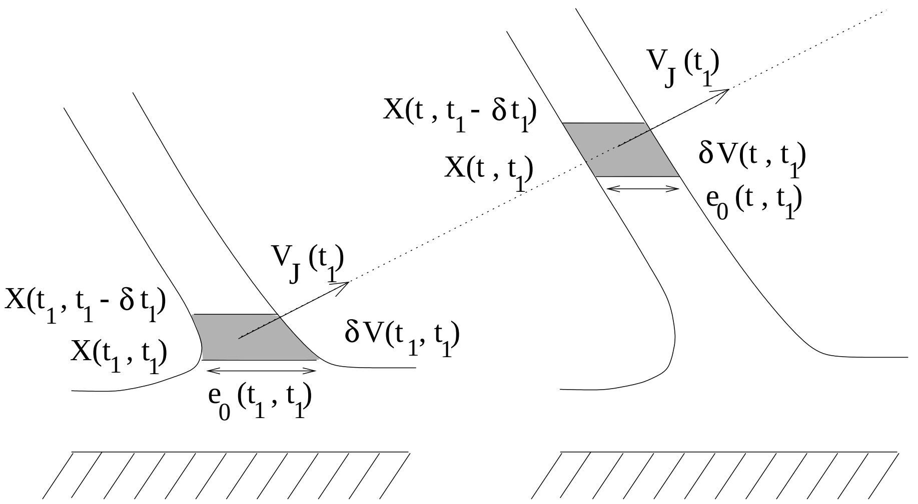


Fig. 5.3 – Mouvement balistique d'un petit volume δV de la corolle.

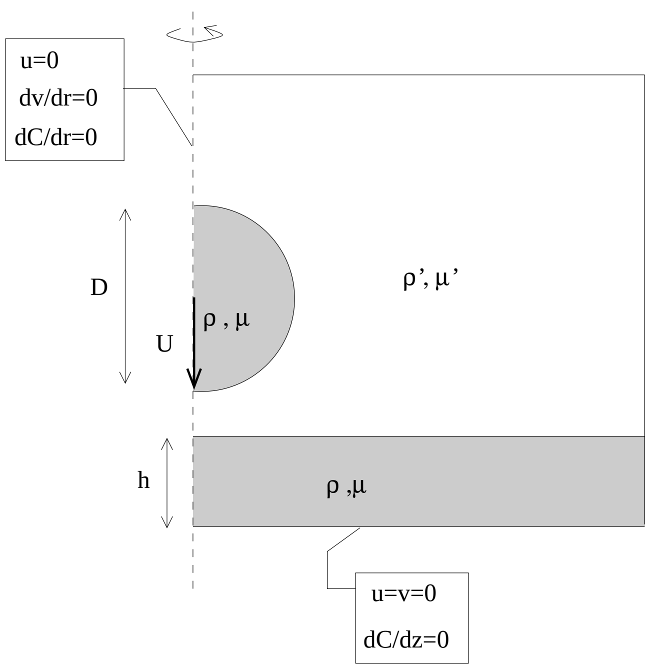


Fig. 5.4 – Géométrie, conditions aux limites et conditions initiales du problème axi-symétrique. La ligne pointillée représente l'axe de symétrie.

5.3 Simulations axisymétriques du phémomène d'impact

5.3.1 Conditions aux limites et conditions initiales

Les simulations sont effectuées dans le domaine carré $\Omega = L \times L$. Nous initialisons une goutte sphérique de densité ρ, de viscosité μ et de diamètre D. La goutte est centrée sur l'axe de symétrie et elle est animée d'une vitesse U. Le film, constitué du même liquide que la goutte, est défini comme le domaine rectangulaire compris entre $z = 0$ et $z = H$. La densité et la viscosité du fluide environnant sont notées respectivement ρ' et μ'. Sur les frontières verticales, en $r = 0$ et en $r = L$, nous imposons les conditions

$$\begin{cases} u_r = 0, \\ \partial_r u_z = 0, \\ \partial_r C = 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

En $z = 0$, en dessous du film liquide, nous imposons des conditions de non-glissement

$$\begin{cases} u_r = u_z = 0, \\ \partial_z C = 0. \end{cases} \tag{5.28}$$

5.3.2 Simulations en l'absence de gravité

L'ensemble des résultats présentés concerne des calculs à grand nombre de Reynolds ($285 \leq Re \leq 2000$), et à grand nombre de Weber ($267 \leq We \leq 1600$), dans lesquels on assiste au rebond d'une corolle liquide. Par ailleurs, nous considérons des situations où le nombre de Bond est très grand devant 1. Ainsi, la gravité influe peu sur la dynamique de la corolle aux temps courts ou intermédiaires ($t \leq U/D$, où l'instant du contact entre la goutte et le film liquide est choisi comme origine des temps). Celle-ci est donc négligée dans cette série de simulations. Pour éviter que des courants parasites n'apparaissent dans l'écoulement, les paramètres physiques sont choisis de telle sorte que le nombre de Ohnesorge soit plus grand que 0.005. Par ailleurs, l'épaisseur H de la couche liquide est choisie de façon à ce que le rapport H/D soit plus petit que 1. Le rapport de densité $\rho/\rho' = 700$ est fixé. De plus, dans toutes les simulations, la résolution du maillage est élevée : le nombre de points de maillage varie entre 256×256 et 512×512.

Les simulations numériques permettent de reproduire qualitativement la séquence de phénomènes observés dans les expériences d'impact (figure 5.5). Au moment du contact, de petites bulles sont formées entre la goutte et la couche liquide. La corolle apparait rapidement après le contact et, aux temps courts, son extrémité est pratiquement horizontale. La corolle se redresse ensuite au fur et à mesure que le bourrelet capillaire se développe. De petites gouttelettes secondaires, issues de reconnexions bidimensionnelles, se détachent parfois de l'extrémité de la corolle. Ces reconnexions sont vraisemblablement dûes à un manque de résolution du maillage.

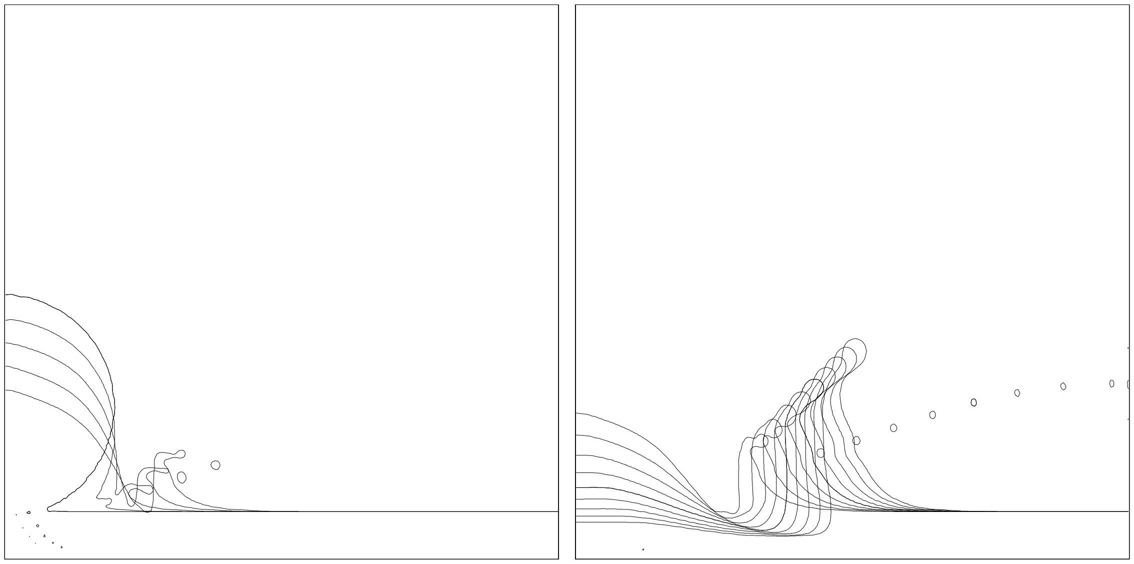


FIG. 5.5 – Superposition de la forme de l'interface à différents instants séparés de $\Delta t = 0.117\, D/U$. $\rho/\rho' = 700$, $H/D = 0.225$, $We = 400$, $Re = 2000$. A gauche : de petites bulles apparaissent dans la région de contact entre la goutte et la couche liquide. Une corolle, dont l'extrémité est pratiquement horizontale, est rapidement créée. Une gouttelette secondaire est formée. A droite : le bourrelet capillaire se rétracte et la corolle se redresse.

A– Simulation de la formation de la corolle

Les simulations permettent d'étudier les premiers instants de la formation de la corolle. Il est nécessaire d'utiliser un maillage très raffiné (512×512 points) pour résoudre les phénomènes à petite échelle. La figure 5.6 montre en détail l'évolution de la zone de contact entre la goutte et le film liquide ainsi que la formation et la croissance de la corolle dans les premiers instants de l'impact. Par ailleurs, la tension de surface influe sur la formation de la corolle. La corolle apparait plus tôt et son épaisseur diminue lorsque la tension de surface est diminuée. La figure 5.7 montre la forme de l'interface dans la région de contact à un instant donné lorsque seule la tension de surface est variée, le reste des paramètres étant fixés. Les simulations permettent de vérifier les prédiction de notre analyse asymptotique des temps courts de l'impact (§ 5.1). D'une part l'épaisseur $e_0(t)$ suit bien une loi en t (trait rouge dans la figure 5.6). Par ailleurs, la figure 5.7 montre que l'épaisseur e_0 à un instant fixé est proportionnelle à We^{-1} pour des We intermédiaires. Par contre la dépendance est visiblement sous-linéaire pour des nombres de Weber soit faibles soit élevés dans la gamme de paramètres étudiée.

B– Influence des effets visqueux et capillaires

Nos calculs permettent de caractériser l'impact de façon quantitative. Nous suivons l'évolution des quantités définies sur la figure 5.8.

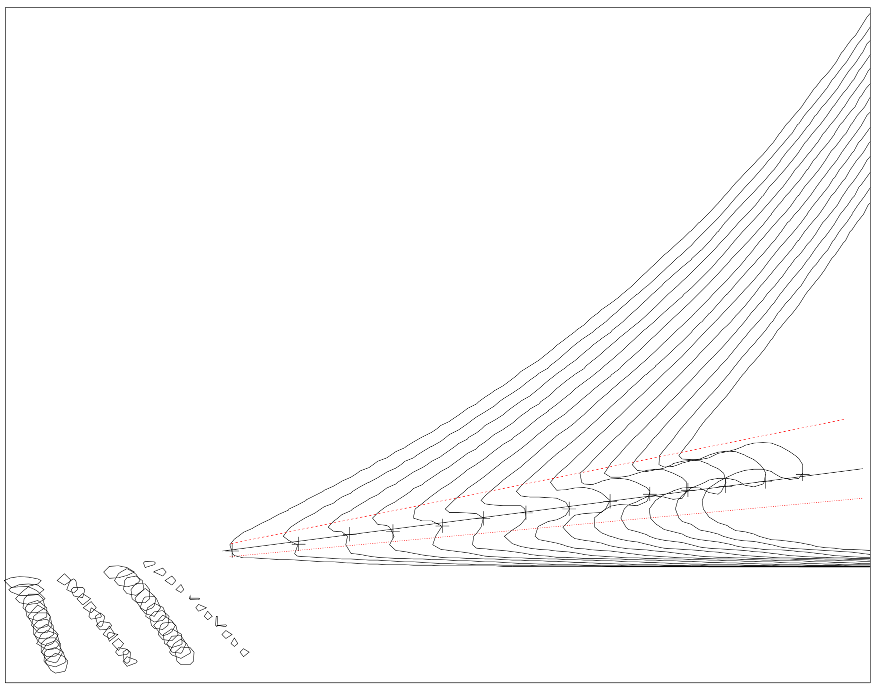


Fig. 5.6 – Simulation de la formation de la corolle. Forme de l'interface entre les instants $t_1 = 0.03\, D/U$ et $t_2 = 0.1275\, D/U$. L'épaisseur de la base de la corolle est proportionelle à t (trait rouge). $Re = 1500$, $We = 600$, $\rho/\rho' = 700$, $D/H = 6.67$, 512^2 points de maillage.

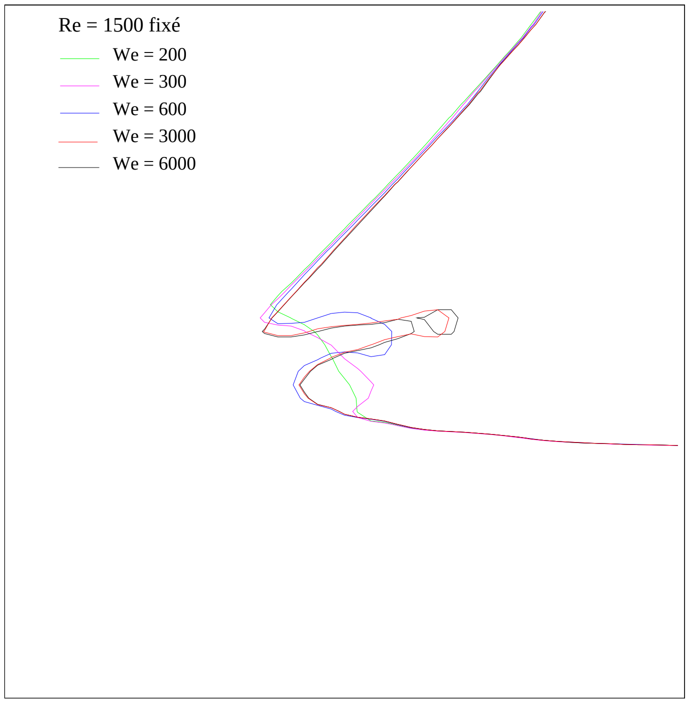


FIG. 5.7 – Influence de la tension de surface sur la formation de la corolle. Forme de l'interface à $t = 0.105\,U/D$ pour différents nombres de Weber. $Re = 1500$, $\rho/\rho' = 700$, $D/H = 6.67$, 512^2 points de maillage.

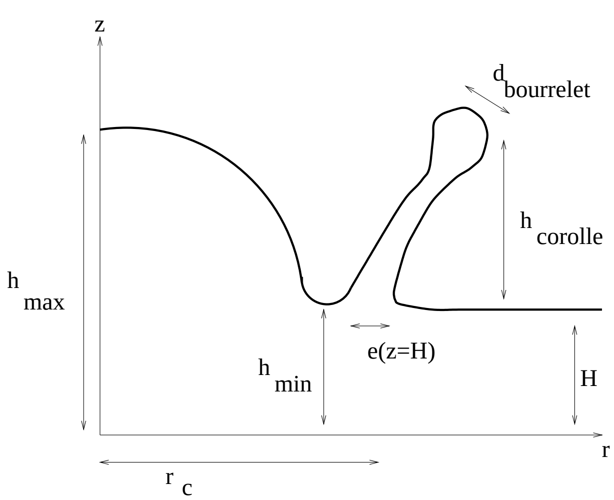


FIG. 5.8 – Quantités mesurées.

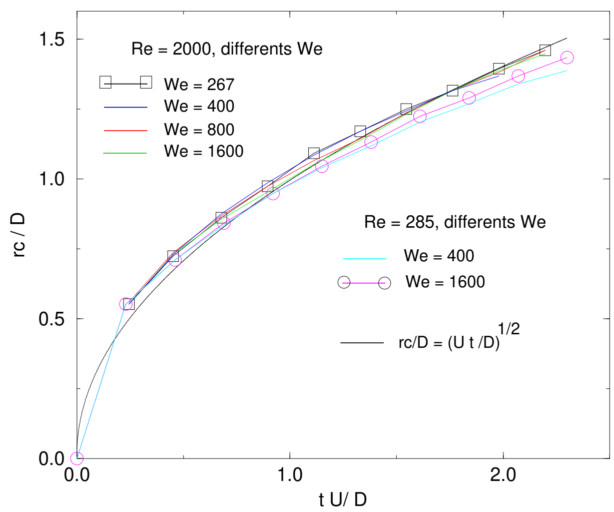


FIG. 5.9 – Evolution de r_c, le rayon de la base de la corolle, pour différents nombres de Reynolds et de Weber. Le rayon r_c dépend très peu du nombre de Reynolds et il est indépendant du nombre de Weber.

Nous observons bien la loi d'échelle en $t^{1/2}$ décrivant l'évolution au cours du temps du rayon r_c de la base de la corolle (fig 5.9). Cette loi, permettant de décrire le mouvement de la discontinuité cinématique décrite dans [110], s'écrit

$$r_c(t) = f(H/D)\,(UDt)^{1/2} \tag{5.29}$$

où $f(.)$ est une fonction universelle. Nous avons vérifié que le rayon r_c ne dépend pas des propriétés physiques du fluide. En revanche, comme dans [85], nous obtenons une valeur du préfacteur qui est plus petite que la valeur $f(H/D) = (2D/3H)^{1/4}$ prédite par Yarin et Weiss. Ceux-ci remarquent eux même dans [110] que l'expression $(2D/3H)^{1/4}$ a tendance à surestimer les valeurs obtenues dans les expériences de Levin et Hobbs [59].

De même, l'évolution de la hauteur d'apex h_{max} est indépendante du nombre de Weber (figure 5.10) et dépend très modérément du nombre de Reynolds dans la gamme de paramètres étudiée. Par ailleurs, nos calculs à nombre de Reynolds intermédiaire ($Re = 357$) sont en très bon accord avec les simulations de l'impact d'une goutte effectuées par Harlow et Shannon [43], dans lesquelles les effets capillaires et les effets visqueux ne sont pas pris en compte. Ceci confirme que la dynamique de l'apex dépend très peu de ces effets.

De surcroît, l'épaisseur de la base de la corolle, notée $e(z = H)$, est pratiquement constante au cours du temps et elle est indépendante du nombre de Weber et de Reynolds. Par ailleurs, en faisant varier l'épaisseur du film liquide nous constatons que $e \sim H$, ce qui confirme nos prédictions théoriques (équation (5.19) au paragraphe 5.2.2).

Par contre, les vitesses étant élevées dans la région de faible épaisseur à l'arrière de la corolle, les effets de dissipation visqueuse à la paroi ont une influence sur l'épaisseur

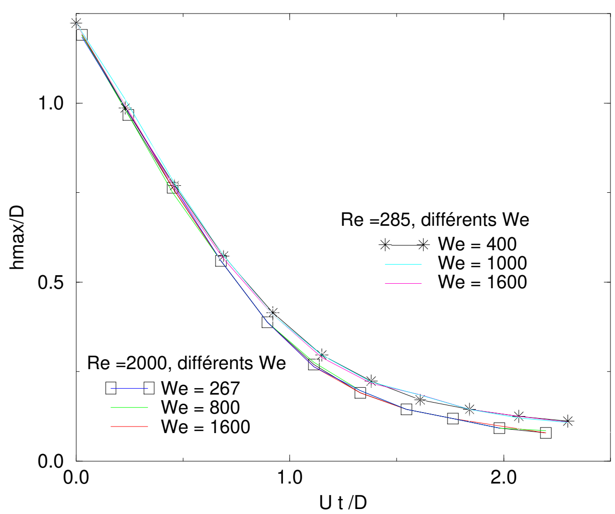


FIG. 5.10 – Évolution de h_{max}, la hauteur de l'apex, pour différents nombres de Reynolds et de Weber. La hauteur h_{max} dépend très peu du nombre de Reynolds et elle est indépendante du nombre de Weber.

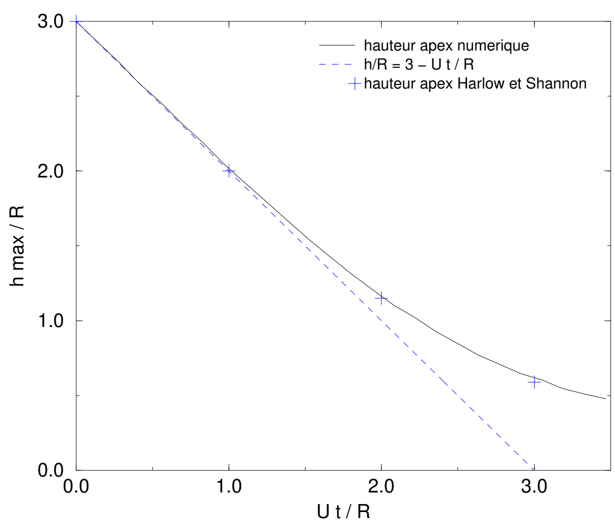


FIG. 5.11 – Évolution de la hauteur de l'apex h_{max}. Comparaison entre nos résultats et les simulations de [43]. Un très bon accord est obtenu. $Re = 357$, $We = 1667$, $\rho/\rho' = 700$, $H/D = 0.5$. $R = D/2$ est le rayon initial de la goutte.

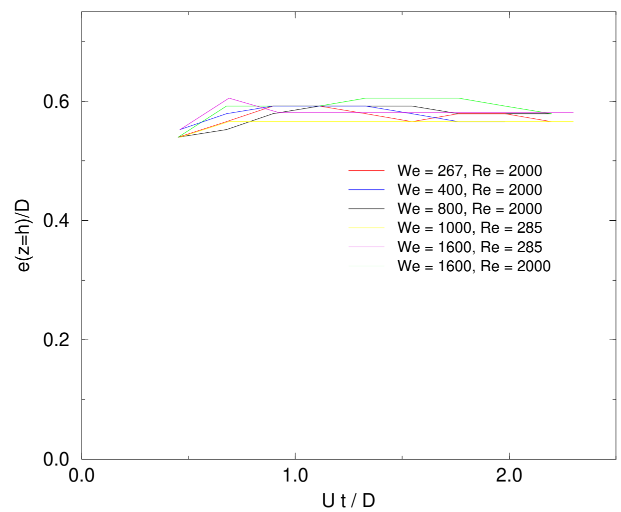


FIG. 5.12 – Évolution au cours du temps de l'épaisseur de la base de la corolle $e(z = H)$ pour différents nombres de Reynolds et de Weber. Cette épaisseur est pratiquement constante au cours du temps et ne dépend ni de Re ni de We.

minimale h_{min}. Cette influence reste cependant assez modeste, voir figure 5.13.

En revanche, les effets visqueux et la tension de surface influent sur la forme de la corolle. La figure 5.14 montre l'évolution de la hauteur de la corolle $h_{corolle}$ à We fixé très grand devant 1, pour différents nombre de Reynolds compris entre 285 et 2000. L'évolution au cours du temps de la hauteur de la corolle dépend fortement des effets visqueux. Lorsque les effets visqueux deviennent négligeables devant l'inertie de la corolle ($Re >> 1$), cette quantité évolue comme t.

Par ailleurs, une augmentation de la tension de surface entraîne une rétraction du bourrelet plus rapide. Ainsi, le diamètre du bourrelet croit plus vite lorsque le nombre de Weber est petit (figure 5.15). A nombre de Reynolds fixé très grand devant 1, le comportement asymptotique de la hauteur $h_{corolle}$ est linéaire en t lorsque le nombre de Weber est augmenté. Ces résultats suggèrent que lorsque $We >> 1$ et $Re >> 1$ le mouvement du fluide dans la corolle est balistique.

Finalement, la tension de surface et les effets viqueux influent beaucoup sur la dynamique de la corolle mais pratiquement pas sur la dynamique de la partie centrale. Les figures 5.17 et 5.18 illustrent l'influence de la tension de surface sur le phénomène d'impact aux temps intermédiaires.

Les simulations numériques permettent d'observer les différents comportements de l'angle de la base de la corolle prévus analytiquement (§ 5.2.3). Ainsi, nous vérifions que la base de la corolle est toujours inclinée vers l'arrière (i.e. en direction des r décroissants), d'autant plus que la tension de surface est faible et que la couche liquide est épaisse. Au

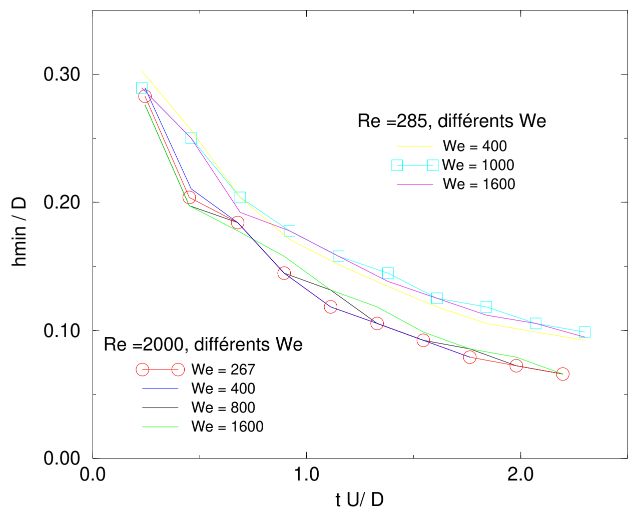


FIG. 5.13 – Évolution au cours du temps de l'épaisseur h_{min}. Cette épaisseur est indépendante du nombre de Weber. En revanche les effets visqueux ont une influence sur l'évolution de cette épaisseur. Cependant la dépendance au nombre de Reynolds reste modeste.

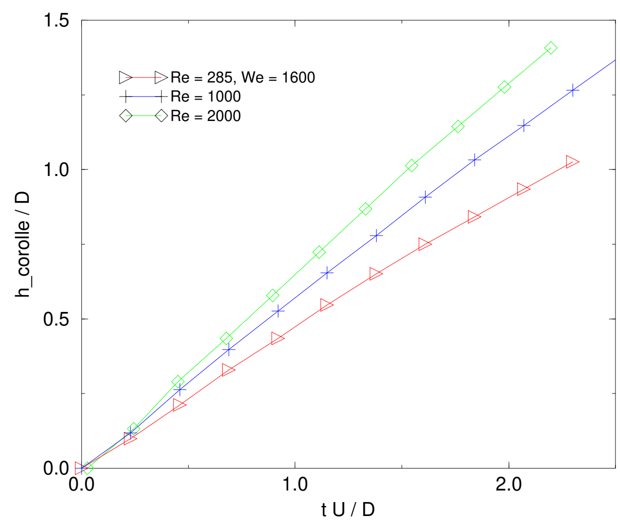


FIG. 5.14 – Évolution au cours du temps de $h_{corolle}$ à fixé ($We = 1600$), pour différents nombres de Reynolds. Lorsque $Re >> 1$, $h_{corolle}$ croit comme t.

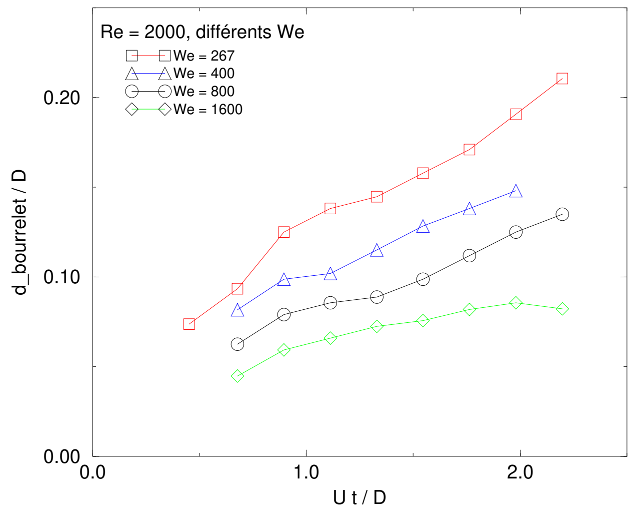


FIG. 5.15 – Évolution au cours du temps du diamètre du bourrelet à $Re = 2000$ fixé, pour différents nombres de Weber.

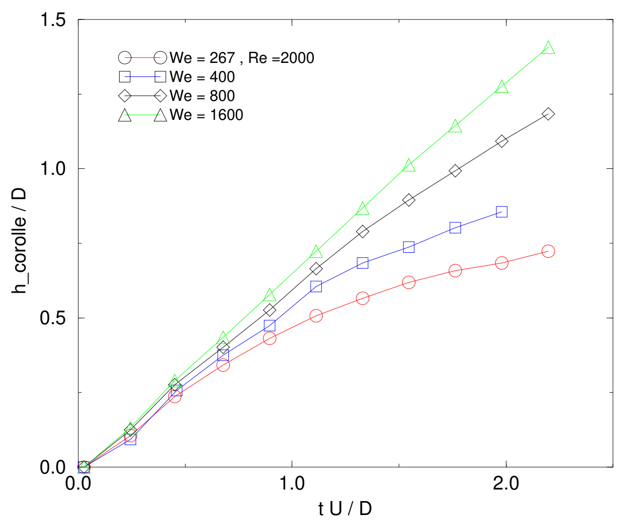


FIG. 5.16 – Évolution au cours du temps de $h_{corolle}$ à $Re = 2000$ fixé, pour différents nombres de Weber. Lorsque $We >> 1$, $h_{corolle}$ croit comme t.

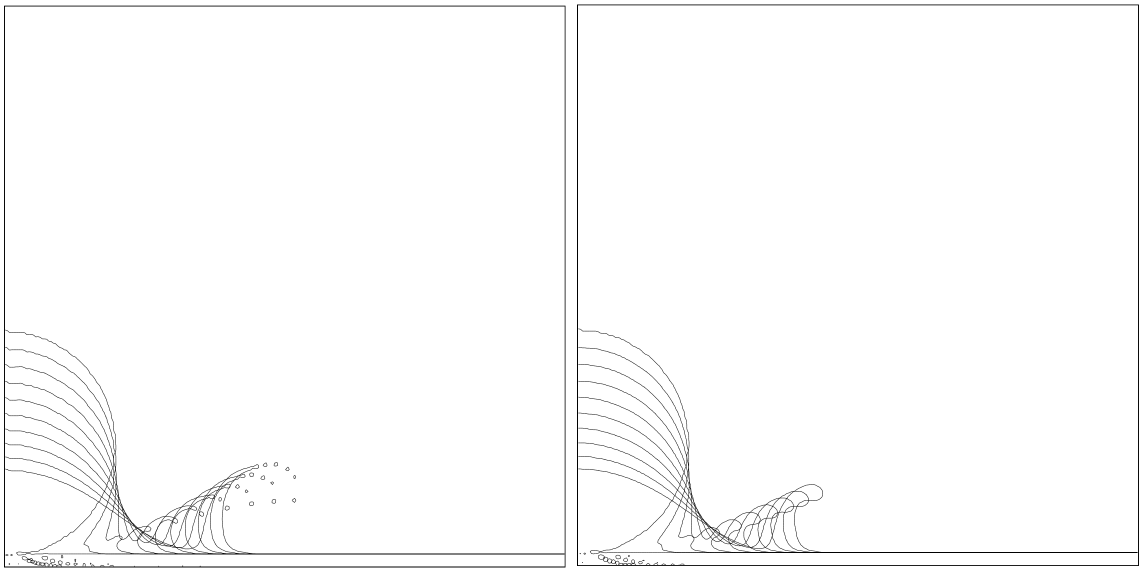


FIG. 5.17 – Influence de la tension de surface sur la forme de la corolle et de la partie centrale. $We = 40000$ (gauche). $We = 400$ (droite). $Re = 290$, $D/H = 13.3$ et $\rho/\rho' = 700$.

cours de l'impact l'angle par rapport à la verticale diminue. Lorsque l'épaisseur est faible, la base de la corolle reste pratiquement verticale pendant tout l'impact quelque soit le nombre de Weber (figure 5.18). Par contre, si la couche liquide est plus épaisse, l'inclinaison augmente avec le nombre de Weber.

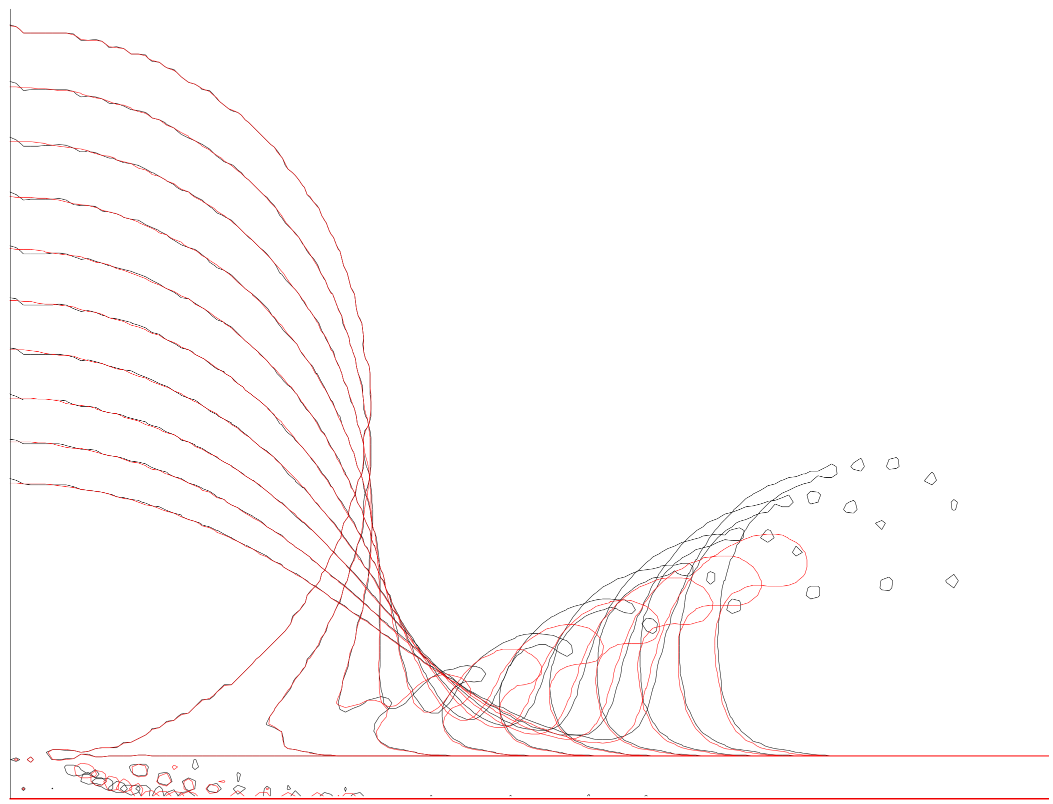


FIG. 5.18 – Superposition des profils de la figure précédente. La tension de surface a une influence sur la forme de la corolle mais pas sur celle de la partie centrale. $Re = 290$, $D/H = 13.3$ et $\rho/\rho' = 700$. $We = 40000$ (noir). $We = 400$ (rouge).

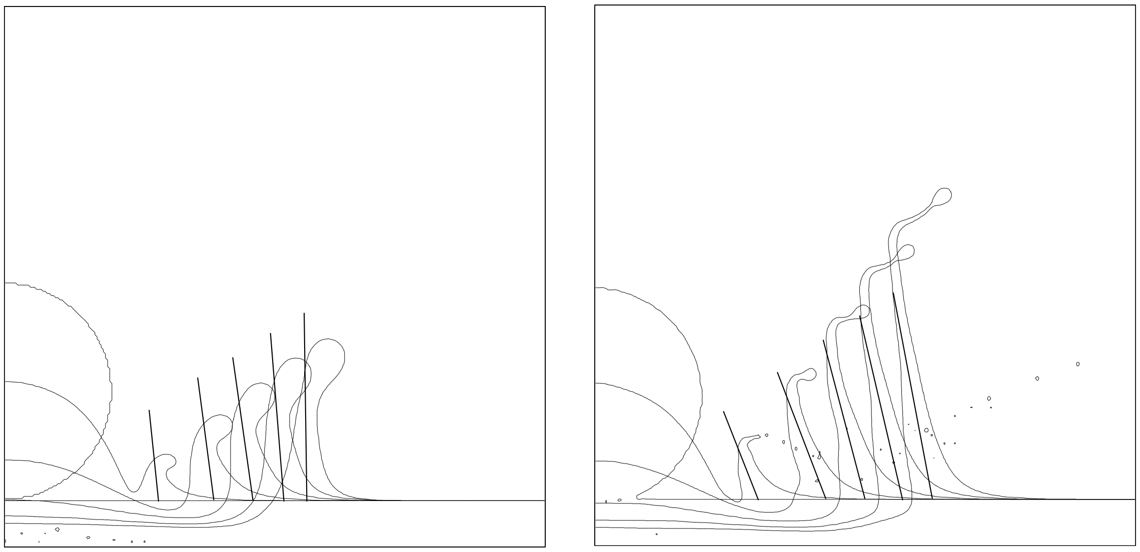


FIG. 5.19 – Inclinaison de la lamelle par rapport à la verticale. $Re = 285$, $D/H = 4.45$. $We = 400$ (gauche). $We = 1600$ (droite).

C– Évolution des champs de vitesse, de vorticité et de pression

Nos simulations permettent de suivre l'évolution de plusieurs champs qui nous renseignent sur la dynamique de l'impact.

Dans les simulations très résolues (512^2 points de maillage), les vitesses dans la corolle en formation atteignent plusieurs fois la vitesse d'impact (figure 5.20). Un fait remarquable est qu'aux temps courts, les vitesses dans la corolle sont pratiquement horizontales. La composante verticale de la vitesse devient plus importante au cours de l'impact et de plus en plus de liquide est drainé dans la corolle.

L'analyse du champ de vorticité met en évidence le développement d'une couche limite au voisinage de la paroi. Le maximum de vorticité se situe dans la région de faible épaisseur à l'arrière de la corolle là où les vitesses près de la paroi sont importantes. En dehors de la couche limite, l'écoulement est pratiquement irrotationnel et peut être considéré comme potentiel.

Par ailleurs, nous observons de forts pics de pression à la base de la corolle en formation (figure**??**). Dans les calculs très résolus, les pressions mesurées sont plus de 7 fois plus importantes que la pression d'impact $\rho U^2/2$. Par ailleurs, l'écoulement dans la région centrale étant pratiquement potentiel, les gradients de pression sont associés aux changements de direction des vitesses imposés par la condition d'incompressibilité. Ainsi, au moment de sa formation, la corolle subit de fortes accélérations $\gamma = -(1/\rho)\,\nabla p$ associées à ces gradients de pression. Ensuite, pendant toute la durée de l'impact, des pics de pression restent présents à la base de la corolle mais leur intensité diminue au cours du temps. Ces pics sont vraisemblablement la trace de la discontinuité cinématique décrite dans [110].

Nous avons observé qu'au niveau de la région de contact, les vitesses et les pressions

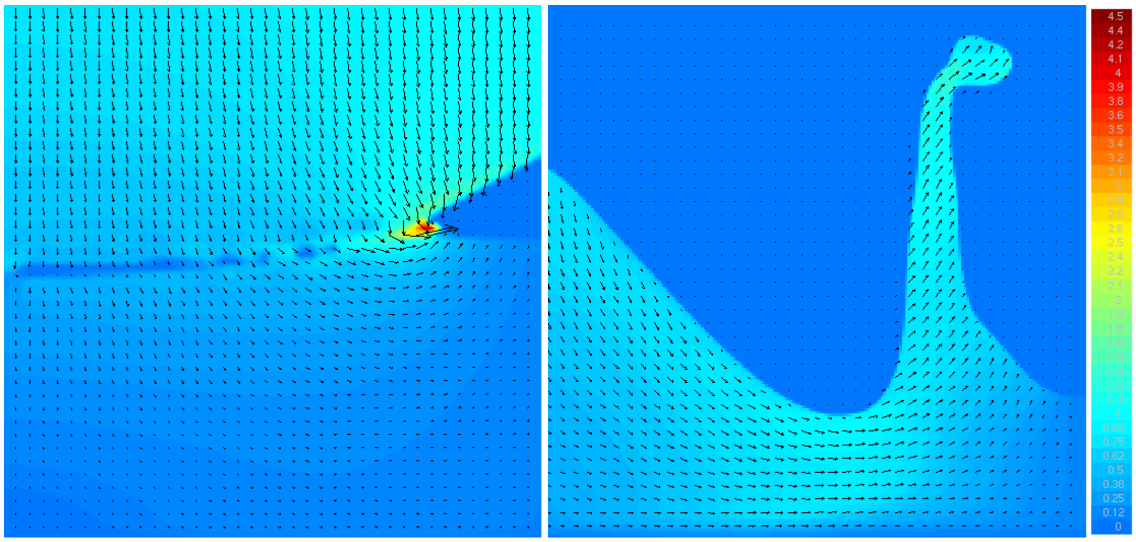


Fig. 5.20 – Vecteurs vitesse (flèche noires) et norme de la vitesse adimensionnée par la vitesse d'impact, au moment de la formation de la corolle à l'instant $t = 0.045U/D$ (gauche) et à l'instant $t = 1.005U/D$ (droite). Les vecteurs vitesse sont moyennés sur 3×3 cellules. Au moment de la formation de la corolle la vitesse maximale est de l'ordre de $4.5\,U$. $Re = 1500$, $We = 600$, $\rho/\rho' = 700$, $D/H = 6.67$, 512^2 points de maillage.

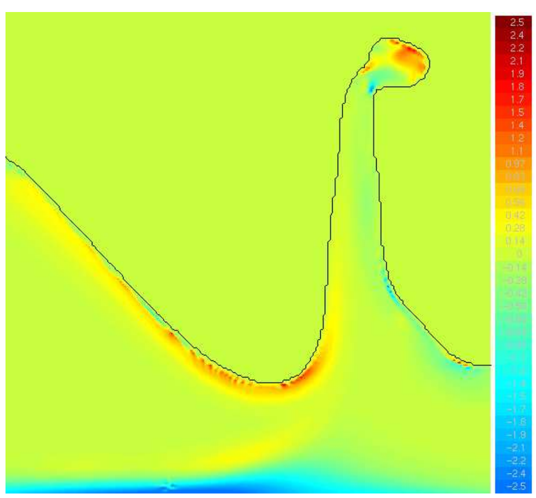


Fig. 5.21 – Champ de vorticité à l'instant $t = 1.005$. Le maximum de vorticité se trouve dans la couche limite, au voisinage de la paroi. $Re = 1500$, $We = 600$, $\rho/\rho' = 700$, $D/H = 6.67$, 512^2 points de maillage.

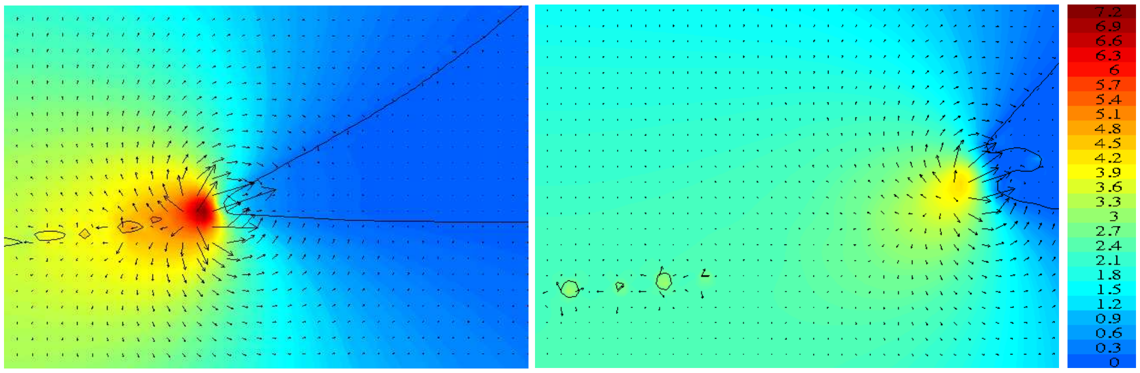


FIG. 5.22 – Champ de pression dans la région du point de contact avant ($t = 0.04D/U$, à gauche) et après la formation de la corolle ($t = 0.085D/U$, à droite) adimensionné par la pression d'impact $p_0 = 1/2\rho U^2$. Les accélérations associées aux gradients de pression $\gamma = -\frac{1}{\rho}\nabla p$ sont représentées par des flèches noires. L'extrémité de la corolle subit une accélération impulsive, puis elle est libre. $Re = 1500$, $We = 600$, $\rho/\rho' = 700$, $D/H = 6.67$, 512^2 points de maillage.

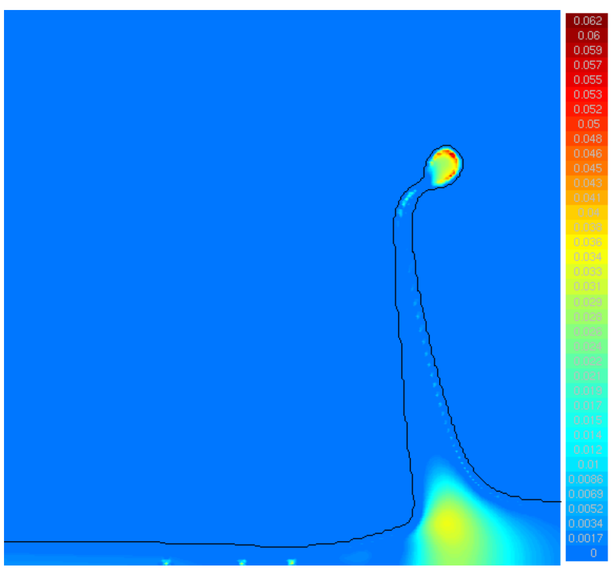


FIG. 5.23 – Champ de pression à la base de la corolle aux temps longs ($t = 2.25D/U$) adimensionné par la pression d'impact $p_0 = 1/2\rho U^2$. La pression maximale est plus de cent fois plus faible que celle qui est observée aux temps courts. $Re = 1500$, $We = 600$, $\rho/\rho' = 700$, $D/H = 6.67$, 512^2 points de maillage.

sont d'autant plus importantes que les simulations sont résolues. Si la taille de maille h est trop grande, l'intensité des maxima de vitesse et de pression diminue, entraînant un retard dans la formation de la corolle. Pour que la corolle apparaisse, il faut aussi que son épaisseur soit résolue par la maille. Le retard dans la formation de la corolle peut aussi se produire pour des raisons physiques. Il pourrait être lié aux effets de compressibilité du liquide ou à la formation de bulles dans la zone de contact. Le mécanisme de formation de ces bulles pourrait être lié à l'existence de fortes surpressions dans le mince film gazeux se trouvant entre la goutte et la surface liquide avant le contact. En effet, ces surpressions peuvent entraîner une diminution des vitesses dans le film gazeux. Une partie du gaz ne peut être expulsée et de petites bulles sont piégées dans la région de contact.

D– Pressions et accélérations impulsives

Au cours de l'impact de toutes sortes de corps liquides ou solides [20], de fortes surpressions apparaissent pendant de très courts instants dans la région de contact. Pour étudier ce type de phénomène, on utilise souvent la notion de pression impulsive. Cette pression, notée P, qui est liée à la pression instantanée par la relation $P(\mathbf{x}) = \int_{\delta t} p(\mathbf{x}, t)\, dt$ où δt est la durée du pic de pression, est introduite par Batchelor [4] pour résoudre le problème de l'impact d'un corps solide cylindrique sur une surface liquide horizontale. Une lame liquide verticale, similaire à la corolle formée au cours de l'impact d'une goutte, est accélérée impulsivement puis remonte le long de la paroi du cylindre à vitesse constante. La vitesse à la paroi est singulière, ce qui signifie que le phénomène d'eclaboussure est d'autand plus violent que l'on se place près de la paroi du cylindre. Des solutions du même type sont obtenues par Cooker et Peregrine [20] dans le cas d'impacts de différents corps liquides sur une surface solide ou liquide.

Intéressons nous au cas de l'impact d'un jet liquide rectangulaire sur une paroi solide, étudié dans [20]. Les champs de vitesse et de pression sont solutions de

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{5.30}$$

Les termes non-linéaires sont supposés être négligéables [4] et l'écoulement est supposé potentiel. Par ailleurs, l'ecoulement est supposé incompressible et P est alors solution d'un problème de Laplace $\nabla^2 P = 0$ [20]. Par ailleurs, en écoulement incompressible, la pression relaxe instantanément. La pression est singulière au moment de l'impact et en calculant la limite $lim_{\delta t \to 0} P(\mathbf{x})/(\delta t)$, nous obtenons

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x})\delta(t), \tag{5.31}$$

dans la limite d'un écoulement incompressible. En pratique, δt dépend des propriétés de relaxation des molécules du liquide (ou du solide dans le cas d'un impact solide/solide).

À l'aide de cette dernière expression et en intégrant deux fois en temps l'équation (5.30), nous obtenons l'équation décrivant l'évolution de la hauteur de l'interface après l'impact :

$$H(x, t) - H_0 = -\frac{t}{\rho} \nabla_z P(x, H_0)\,, \tag{5.32}$$

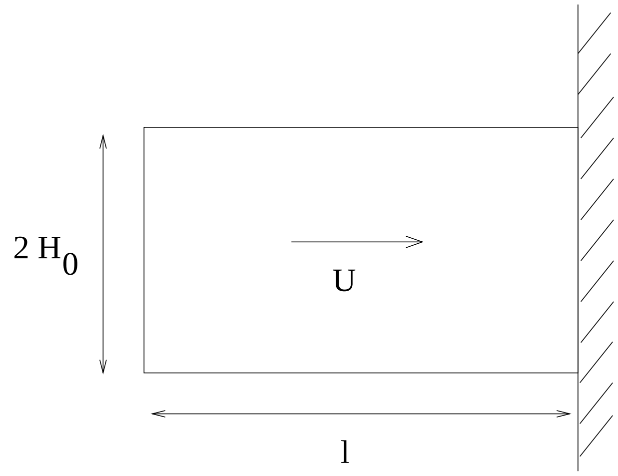


FIG. 5.24 – Impact d'un jet liquide rectangulaire sur une paroi.

avec H_0 l'épaisseur du jet avant l'impact (figure 5.24). Le gradient de la pression impulsive P est singulier au niveau de l'interface en contact de la paroi et donc la vitesse de la lame verticale est singulière.

Pour vérifier ces prédictions, nous simulons l'impact d'un jet liquide rectangulaire bidimensionnel sur le plan d'équation $x = 0$ au niveau duquel nous imposons une condition de glissement libre. Les calculs sont effectués dans le domaine carré $\Omega = l \times l$. Les dimensions du jet sont $H_0 = l/5$ et $L = 9l/10$, et sa vitesse avant l'impact est notée U. Le maillage a une résolution de 256×256 points.

Une lame verticale est formée immédiatement après le contact et son extrémité au voisinage de la paroi (figure 5.25). Par ailleurs, nous vérifions que les gradients de pression accélérant la lame liquide n'existent que pendant des temps très courts et que l'interface a une évolution auto-similaire après l'impact. En effet, la transformation $z \to (z - H_0)/t$ permet d'obtenir une superposition ("collapse") du profil de l'interface à différents instants, voir fig 5.26. L'évolution de l'interface est bien décrite par une loi en t, ce qui confirme que l'accélération subie par le système dans la limite incompressible est bien un Dirac en temps. De plus, nous observons une singularité logarithmique pour les vitesses au voisinage de la paroi, ce qui est en bon accord avec les prédictions de Cooker et Peregrine [20] selon lesquelles la composante verticale de la vitesse au voisinage de la paroi diverge comme

$$V \sim -U log(\frac{\pi x}{H_0}) \quad \text{lorsque } x \to 0 \ . \tag{5.33}$$

Dans les simulations, nous mesurons une vitesse maximale d'environs $3U$ au niveau de la lame en contact avec la paroi. Diminuer la taille de maille h permettrait de mieux résoudre la singularité à la paroi et d'obtenir des vitesses plus importantes. En effet, dans les simulations, il existe une coupure à l'echelle de la maille et et la vitesse maximale de la lame verticale est de l'ordre de

$$V \sim -U log(\pi h) \, . \tag{5.34}$$

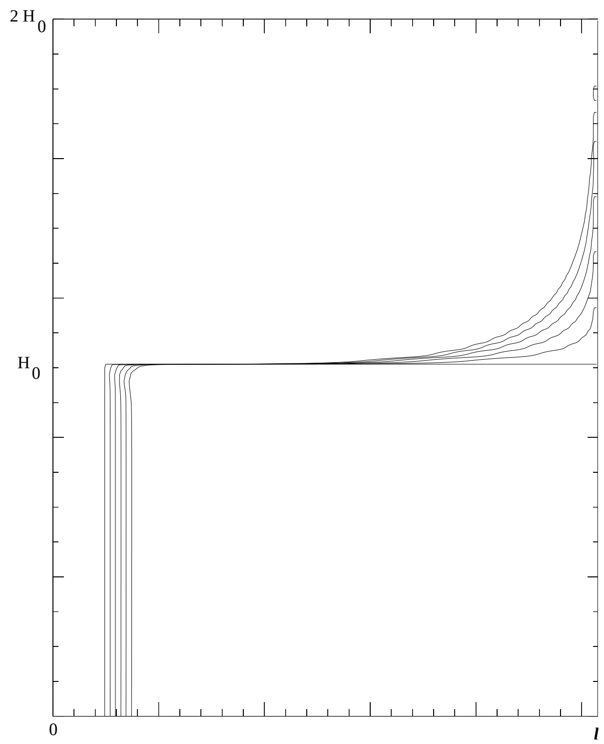


FIG. 5.25 – Impact d'un jet rectangulaire sur une paroi à différents instants. Juste aprés le contact, une lame remonte verticalement le long de la paroi à vitesse constante. $H_0 = l/5$, $L = 9l/10$ et $\Delta t = 0.011 H_0/U$.

Dans le cas de l'impact d'une goutte, la situation est un peu plus complexe, puisque le contact se fait au point de tangence entre la goutte et le film liquide et non sur une région de taille finie. La taille de la région de contact évolue et les surpressions à la base de la corolle persistent tout en diminuant au cours de l'impact. Cependant, la solution incompressible est singulière au moment du contact entre la goutte et le film liquide. La corolle étant accélérée par les gradients de pression, sa vitesse initiale est d'autant plus élevée qu'elle est formée tôt. Dans le paragraphe 5.1, en négligeant l'influence des effets de la viscosité ou de la compressibilité du liquide, nous avons prédit que pour des nombres de Weber élevés, la corolle se forme à l'instant $t = 0$.

Cependant les phénomènes à petite échelle retardent vraisemblablement la formation de la corolle, qui se produit à un instant t_0 très proche de $t = 0$. L'extrémité de la corolle subit une forte accélération pendant un temps caractéristique très court par rapport à la durée de l'impact $\tau_0 = U/D$ et par rapport aux autres temps caractéristiques. C'est

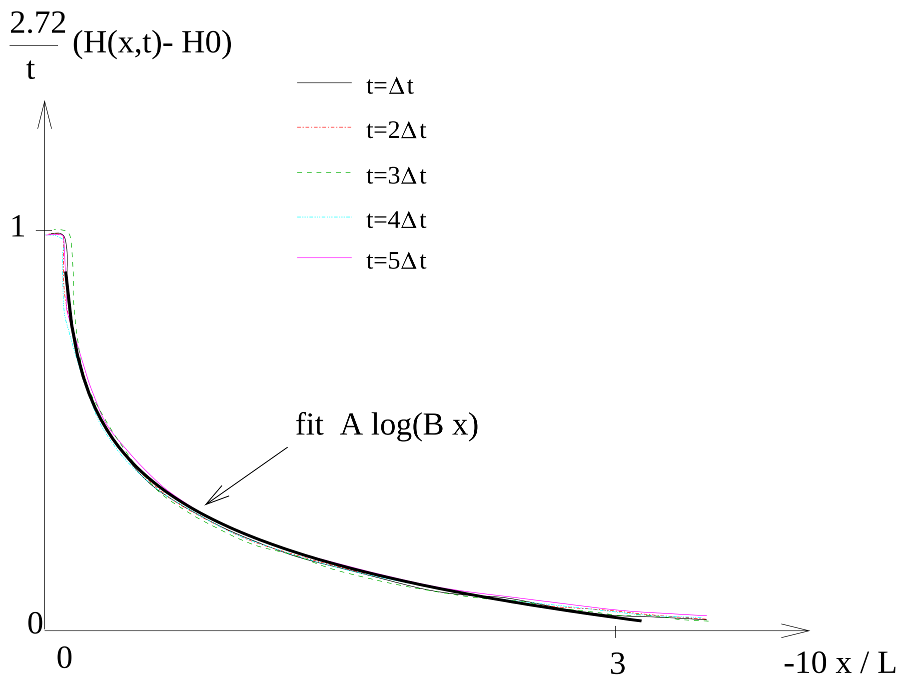


FIG. 5.26 – Les différents profils de la figure précédente se superposent parfaitement lorsqu'on leur fait subir la transformation $z \rightarrow (z - H_0)/t$. Au voisinage de la paroi, la hauteur de l'interface est décrite par une loi logarithmique. On constate qu'une coupure existe à l'echelle de la maille.

pourquoi, nous considérons que cette accélération est impulsive et peut s'écrire sous la forme

$$\gamma_c = \mathbf{V}_c \delta(t)\,, \tag{5.35}$$

où $\delta(t)$ est une distribution de Dirac concentrée en $t = 0$ et $\mathbf{V}_c$ est la vitesse de la corolle au moment de sa formation.

A la suite de cette accélération impulsive, l'extrémité de la corolle est libre. En l'absence de tension de surface et d'effets du fluide environnant, on peut considérer que sa vitesse est constante au cours du temps, égale à sa vitesse initiale $\mathbf{V}_c$. En présence de tension de surface, il faut ajouter à cette vitesse la composante de rétraction du bourrelet.

Dans les simulations, c'est la taille de la maille qui impose une coupure (en particulier, la corolle peut difficilement se former si son épaisseur est inférieure à la taille de la maille h) et détermine l'instant t_0. Nous verrons que cette coupure à l'échelle de la maille a des répercussions sur la formation et la croissance des digitations dans les simulations tridimensionnelles.

Chapitre 6

Simulations tridimensionnelles et formation des digitations

Si de nombreux mécanismes ont été proposés par le passé, l'origine des digitations formant la couronne reste encore mystérieuse. La principale difficulté provient du fait que les échelles de temps impliquées dans ce phénomène sont très courtes, ce qui rend difficile la confirmation expérimentale des différentes théories. Les simulations tridimensionnelles permettent de résoudre ces échelles de temps et peuvent donc contribuer à d'identifier le mécanisme de tridimensionnalisation de la corolle.

6.1 Conditions initiales et conditions aux limites dans les simulations

Les calculs tridimensionnels sont effectués dans le domaine cubique $\Omega = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$. Une condition de non-glissement est imposée sous le film liquide d'épaisseur H. La goutte, de diamètre D, est centrée sur l'axe $x = y = 0$. Ainsi, seul un quart de goutte est simulé (figure 6.2). Les conditions aux limites "miroir" qui sont imposées sur les faces verticales du domaine permettent de simuler le phénomène avec une symmétrie d'ordre 4 autour de l'axe $x = y = 0$.

6.2 Résultats

6.2.1 Simulations en l'abscence de perturbation des conditions initiales

Avec ces conditions initiales, les simulations à nombre de Weber intermédiaires ne permettent pas d'observer la tridimensionnalisation attendue ni la formation de digitations. A nombre de Weber plus élevé, l'épaisseur de la corolle est faible et des reconnexions, liées à un manque de résolution du maillage, se produisent à l'arrière du bourrelet. On observe

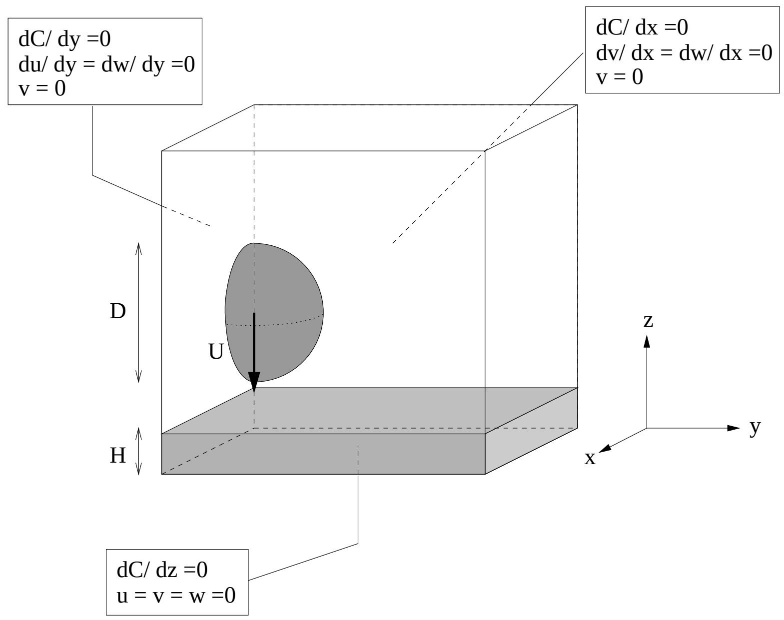


FIG. 6.1 – Conditions initiales et conditions aux limites pour les simulations tridimensionnelles.

alors la formation d'un nuage de goutelettes secondaires mais aucune digitation ne peut être observée (figure ??). Par ailleurs, les calculs tridimensionnels et axisymétriques, pour une même taille de maille et les mêmes paramètres physiques, sont en bon accord (fig. 6.3). En particulier, les reconnexions se produisent pratiquement au même moment dans les deux calculs. Ceci constitue une validation supplémentaire pour ces deux méthodes.

Ces résultats donnent à penser que les digitations sont provoquées par une instabilité de la corolle. Il est nécessaire de briser la symétrie du système pour observer leur formation. Pour ce faire, nous perturbons les conditions initiales dans nos calculs.

6.2.2 Réponse du système à une perturbation des conditions initiales

Dans un premier temps, nous choisissons de perturber l'interface de la goutte. Tout d'abord, nous imposons une perturbation selon un mode unique. La nouvelle équation de la surface en fonction des angles d'Euler θ et Φ s'écrit $r = D(1/2 + \xi_0(cos(n\theta) + cos(n\Phi)))$. L'amplitude ξ_0 est variée entre 0.005 et 0.027.

Avec ces conditions initiales, nous observons la formation des digitations. Les perturbations sont amplifiées en même temps que la corolle rebondit, et continuent à croître tout au long de l'impact. La figure 6.4 montre le cas $n = 12$. Un fait remarquable est que les digitations apparaissent au niveau des creux de la perturbation initiale dans la direction azimuthale, en $\Phi = \pi/n + 2k\pi/n$. La courbure de l'interface est inversée au moment de la formation de la corolle. Nous constatons par ailleurs que la longueur des doigts augmente en proportion du temps au cours de l'impact. De plus, la longueur des doigts à

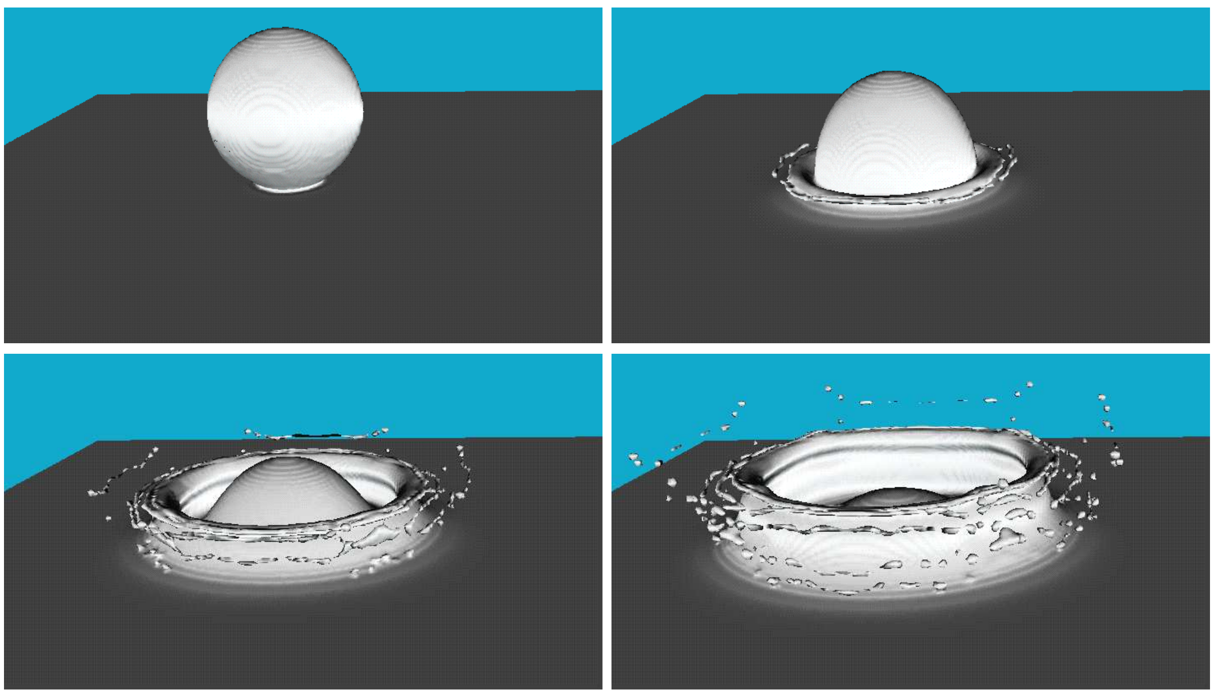


Fig. 6.2 – Simulations tridimensionnelles à grand nombre de Weber. Lorsque la surface du film liquide n'est pas perturbée initialement, même si des gouttelettes secondaires peuvent être éjectées dans le reste de l'écoulement, elles ne sont pas issues de la rupture de digitations liquides. $We = 2000$, $Re = 800$, $D/H = 4.45$ et $\rho/\rho' = 700$. Le domaine de calcul comprend $128 \times 256 \times 256$ points, en tenant compte des symétries.

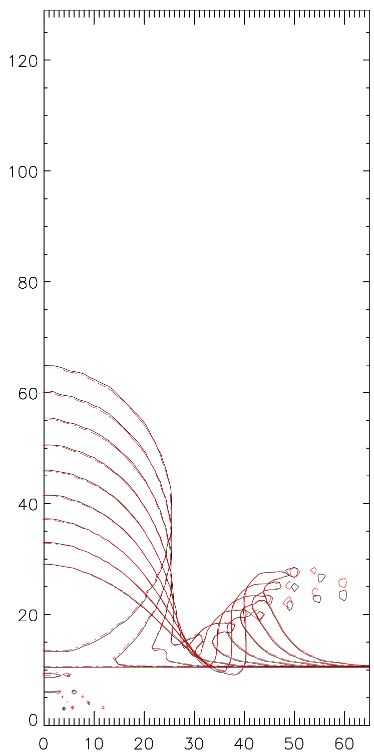


FIG. 6.3 – Comparaison entre deux calculs utilisant les mêmes paramètres, l'un tridimensionnel (noir) et l'autre axisymmétrique (pointillé rouge). Les paramètres utilisés dans les deux simulations sont les mêmes. $We = 1000$, $Re = 500$ and $D/h = 4.45$, $h = 1/128$.

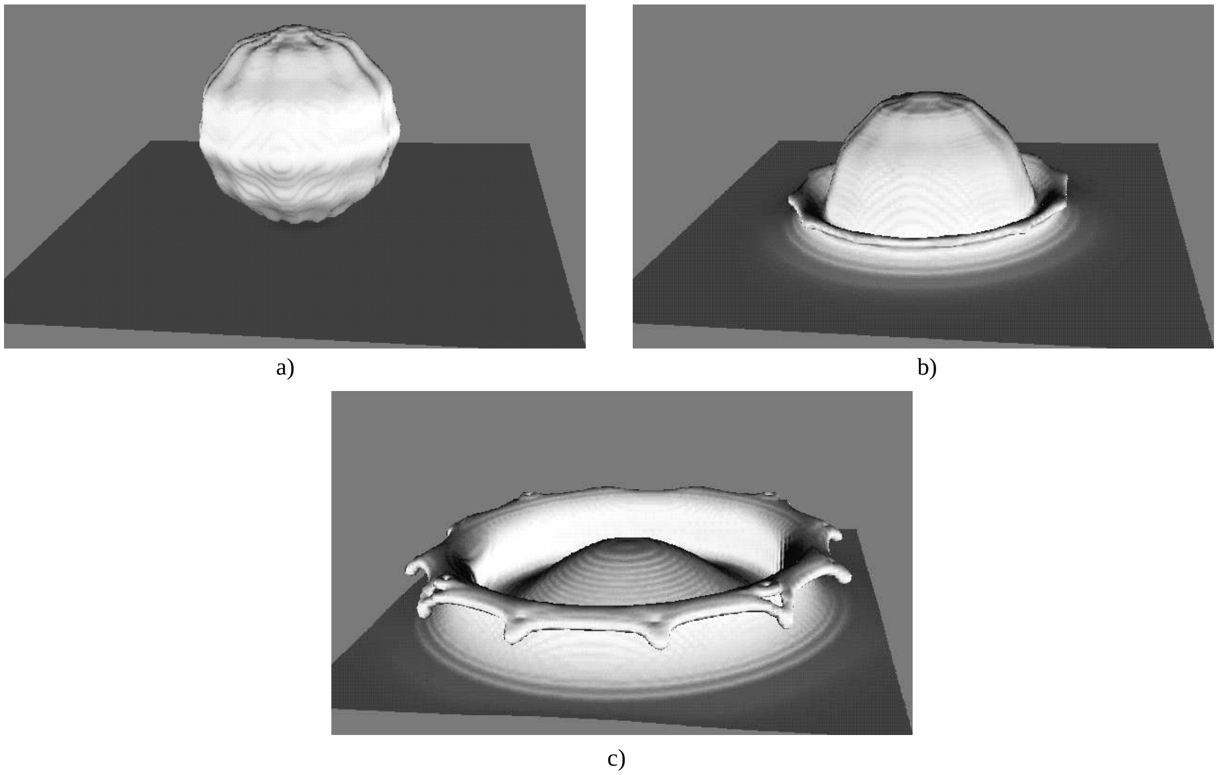


FIG. 6.4 – Formation d'une couronne lors de l'impact d'une goutte perturbée initialement. a) $t = 0$, b) $t = 0.33D/U$, c) $t = 0.72D/U$. $\xi_0 = 0.008$, $We = 1785$, $Re = 278$, $\rho/\rho' = 300$, $D/h = 4.45$.

un instant donné et pour une perturbation harmonique initiale selon un mode donné, est pratiquement proportionnelle à ξ_0 (figure 6.5). En perturbant la goutte uniquement selon l'angle Φ, nous avons pu vérifier de manière certaine qu'une inversion de la courbure de l'interface se produit au début du phénomène.

Par ailleurs, dans la gamme testée de nombres de Reynolds ($300 \leq Re \leq 1000$), de Weber ($600 \leq We = \infty$) et de nombres d'onde ($6 \leq n \leq 12$), les effets visqueux et capillaires influent très peu sur la croissance des digitations. En outre, certains calculs ont été effectués sans tension de surface et ceux-ci ont permis d'observer les digitations. La tension de surface n'est donc certainement pas à l'origine de la formation des digitations dans les simulations que nous présentons.

Nos calculs semblent corroborer l'hypothèse selon laquelle les doigts formés aux temps courts résultent d'un démarrage impulsif de Richmyer-Meshkov. L'inversion de courbure observée dans les simulations serait alors liée au fait que la corolle en formation subit une accélération impulsive dirigée du fluide lourd vers le fluide léger (§5.3.2).

De plus, des résultats similaires sont obtenus en perturbant initialement la surface du film liquide de façon harmonique (figure 6.6). Comme dans les simulations précédentes, les digitations liquides apparaissent aux temps courts de l'impact. Les reconnexions au

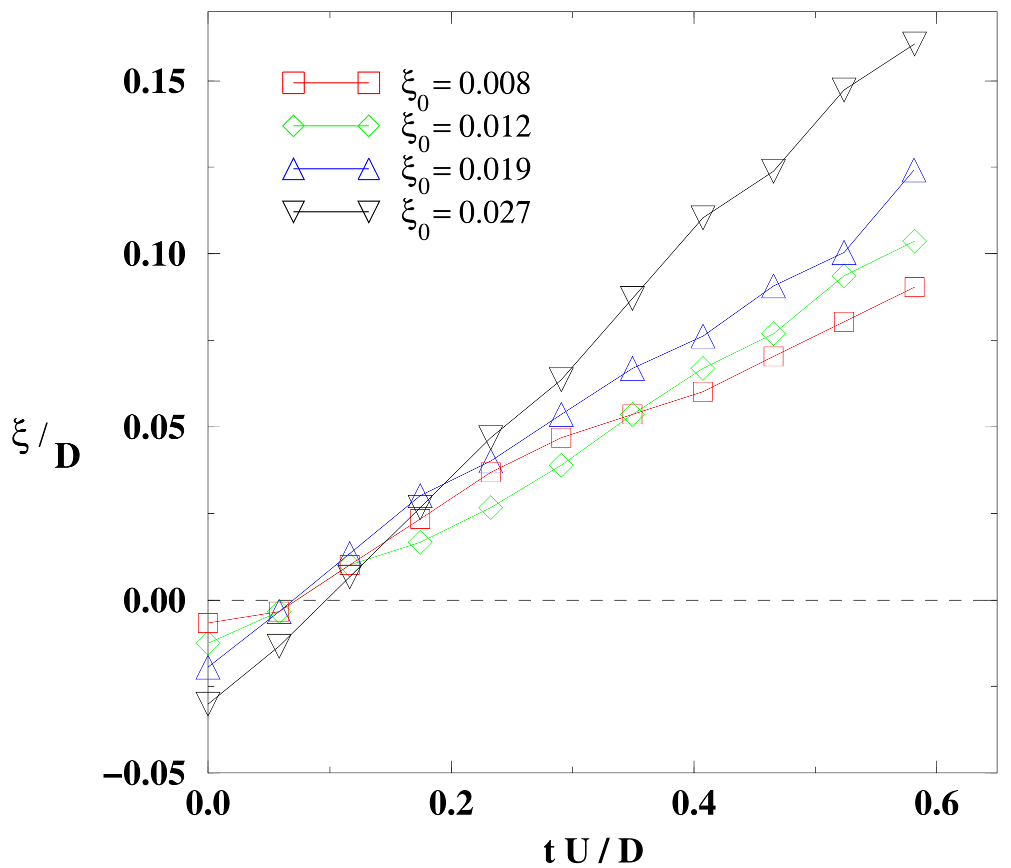


FIG. 6.5 – Evolution de l'amplitude $\xi(t)$ des perturbations pour différentes amplitudes initiales ξ_0 et pour un mode donné $n = 12$. $\xi(t)$ croit proportionnellement au temps et change de signe au moment de l'apparition de la corolle. Par ailleurs, l'amplitude des perturbations à un instant donné est pratiquement proportionnelle à ξ_0. $We = 800$, $Re = 278$, $\rho/\rho' = 290$, $D/h = 4.45$.

voisinage de l'extrémité de la corolle se produisent lorsque l'épaisseur de cette région devient inférieure à la taille de maille.

Un fait remarquable est que dans toutes ces simulations comme dans les photographies expérimentales montrant le phénomène de "prompt splash" (éclaboussure rapide) (voir fig. 1.4), les doigts formés aux temps courts sont pratiquements horizontaux. Dans les expériences, ces doigts liquides se redressent au cours du phénomène, et deviennent pratiquement verticaux aux temps longs. Ainsi, les digitations liquides sont verticales dans les célèbres photographies de la "couronne de lait" [51]. De cette constatation, on peut raisonnablement déduire que ces photographies montrent un instant avancé de l'impact. On peut supposer que le redressement des doigts liquides se produit aux temps longs en même temps que celui de la corolle, voir §5.2. Cependant, il est difficile avec les simulations tridimensionnelles de résoudre à la fois les temps courts et les temps longs de l'impact, et jusqu'à maintenant, nos calculs ne nous ont pas permis d'observer le redressement des doigts liquides.

Pour vérifier nos prédictions, condidérons un problème moins complexe mais tout à fait analogue : celui de l'impact d'un jet liquide sur une paroi. Au cours de ce phénomène, une lame est accélérée impulsivement par les gradients de pression (§5.3.2). A supposer que les accélérations impulsives subies par la corolle sont à l'origine de la formation des digitations au cours de l'impact d'une goutte, alors des structures similaires pourraient apparaître au cours de l'impact d'un jet sur une paroi.

La symétrie du système étudié au paragraphe §5.2 est brisée à l'aide d'une petite perturbation de la surface du jet dans la direction transverse (Oy), voir fig. 6.10. La perturbation initiale est harmonique, si bien que la hauteur de la surface libre du jet est caractérisée par l'équation

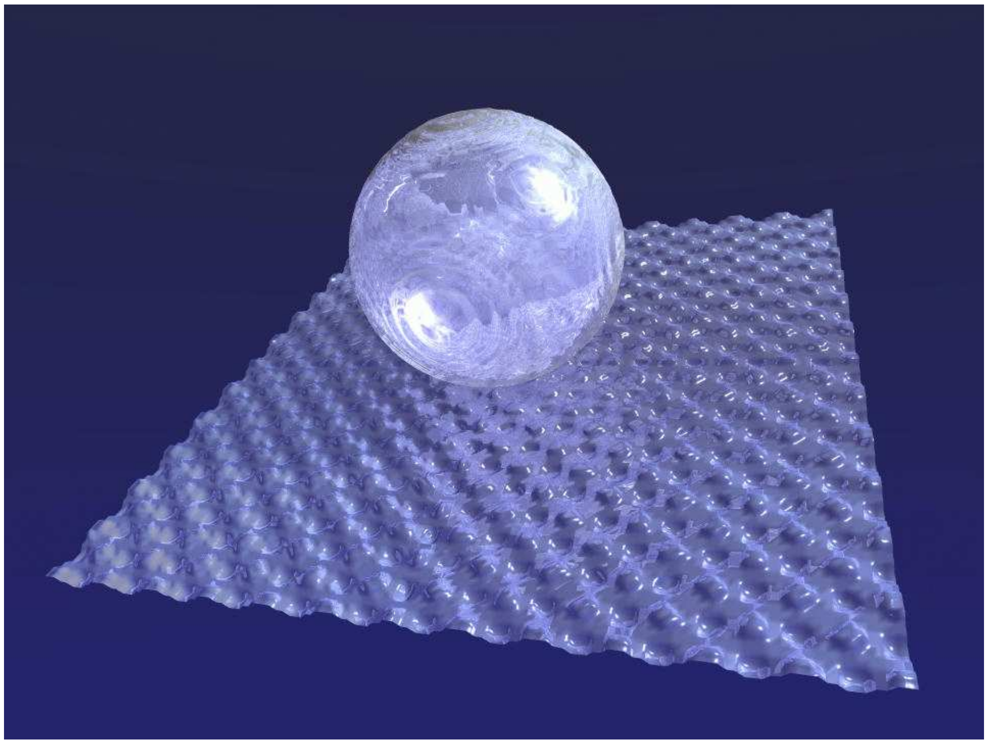
$$z - H_0\,(1 + \xi_0\, cos(2n\pi y/L)) = 0 \tag{6.1}$$

Le jet heurte perpendiculairement l'une des frontières verticales du domaine de calcul au niveau de laquelle nous imposons des conditions aux limites "miroir". D'autre part, sur les parois $y = 0$ et $y = L$, nous imposons des conditions aux limites périodiques. Initialement, la vitesse à l'intérieur du jet perturbé est uniforme et s'écrit sous la forme

$$\mathbf{U} = U\mathbf{e}_x \tag{6.2}$$

De nouveau, nous observons que des doigts liquides sont formés en même temps qu'une lame liquide est éjectée (figure 6.11. Une fois encore, les doigts apparaissent au niveau des creux de la perturbation initiale. Comme dans le cas de l'impact d'une goutte, ce phénomène est sans doute lié aux accélérations singulières dirigées du liquide vers le gaz dans la région de contact entre le jet et la paroi.

Dans toutes les simulations d'impact de goutte ou de jet effectuées, nous avons constaté que pour observer des digitations liquides de longueur significative, l'amplitude de la perturbation initiale doit non seulement être finie mais aussi relativement importante. En effet, il est nécessaire de bien résoudre la singularité au moment du contact. Plus la région au voisinage de la paroi est résolue et moins il est nécessaire de perturber le système pour observer la formation des digitations.



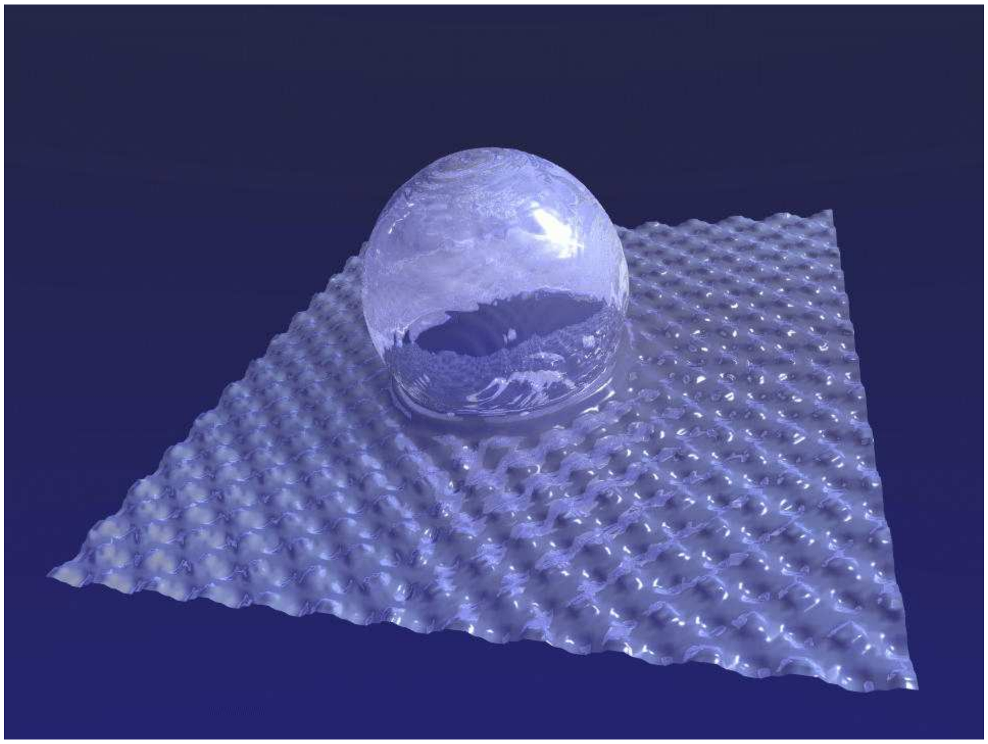


FIG. 6.6 – Impact d'une goutte sur un film liquide dont la surface est perturbée initialement. La figure montre les deux instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 0.1125\, D/U$. La longueur d'onde de la perturbation vaut $L/6$, où L est la taille du domaine de calcul. $We = 1528$, $Re = 306$, $H/D = 0.205$, $\rho/\rho' = 700$.

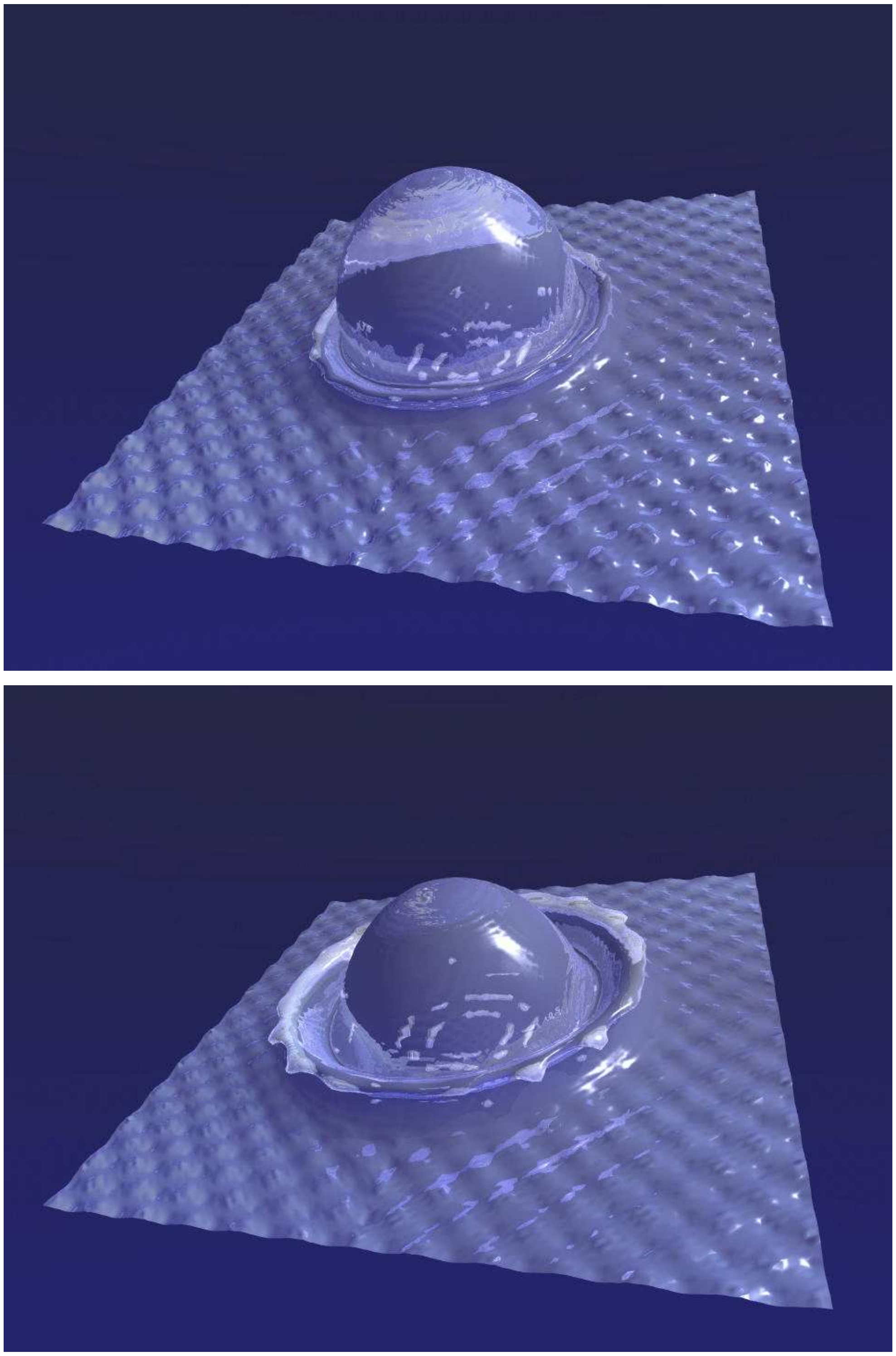


FIG. 6.7 – $t_2 = 0.225\,D/U$, $t_3 = 0.3375\,D/U$.

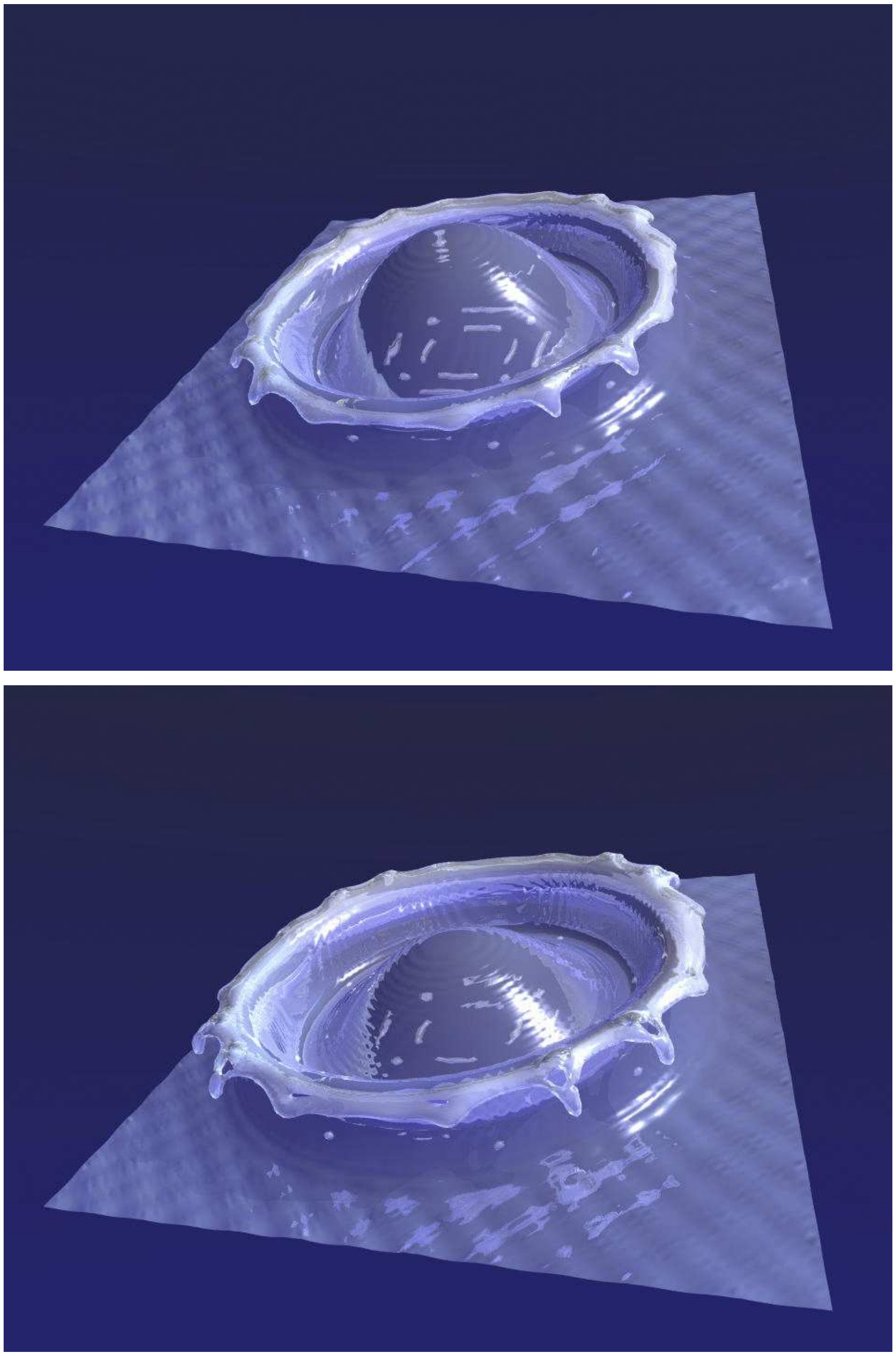


FIG. 6.8 – $t_4 = 0.45\,D/U$, $t_5 = 0.5625\,D/U$.

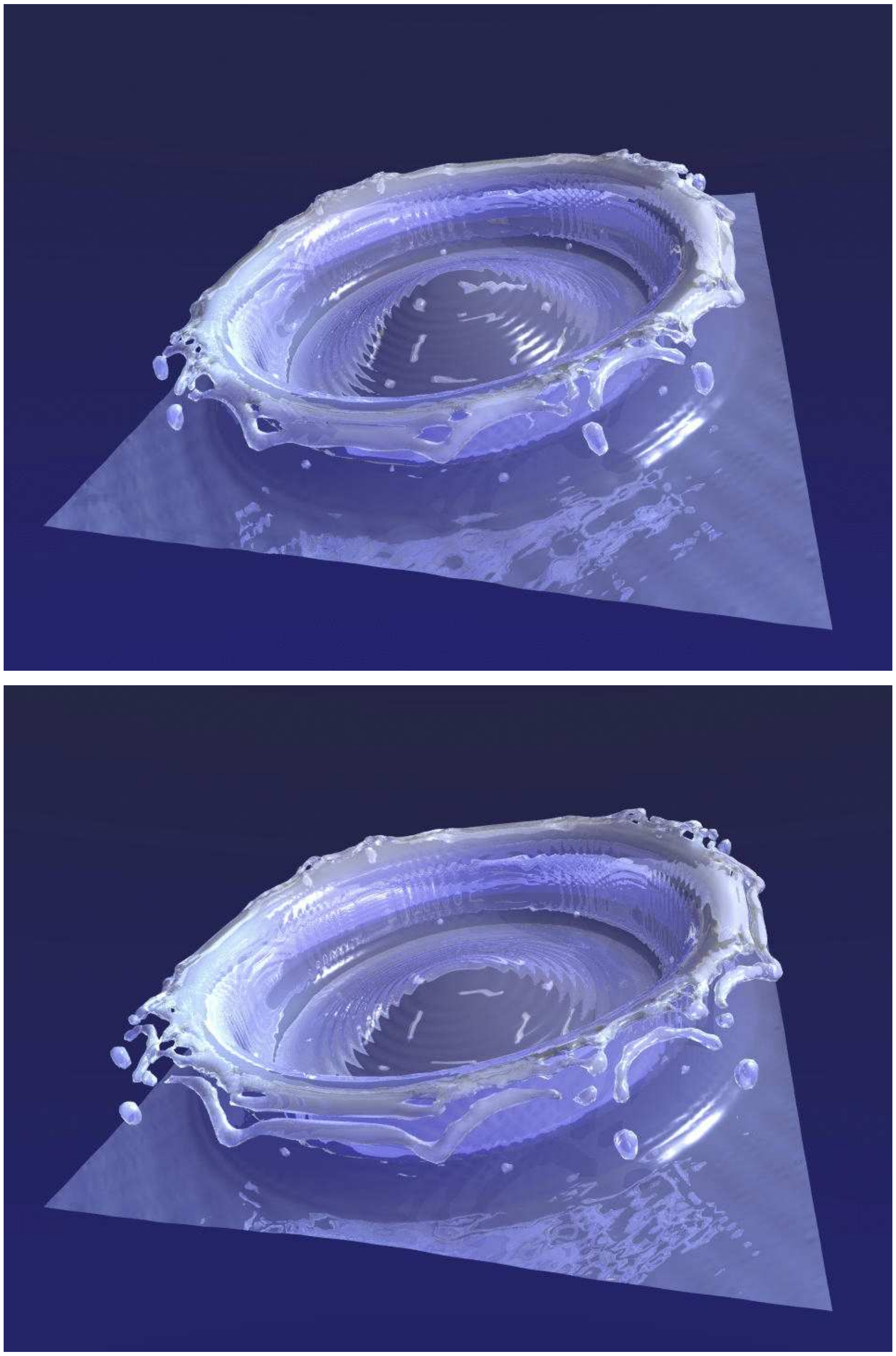


FIG. 6.9 – $t_6 = 0.6750\,D/U$, $t_7 = 0.7875\,D/U$.

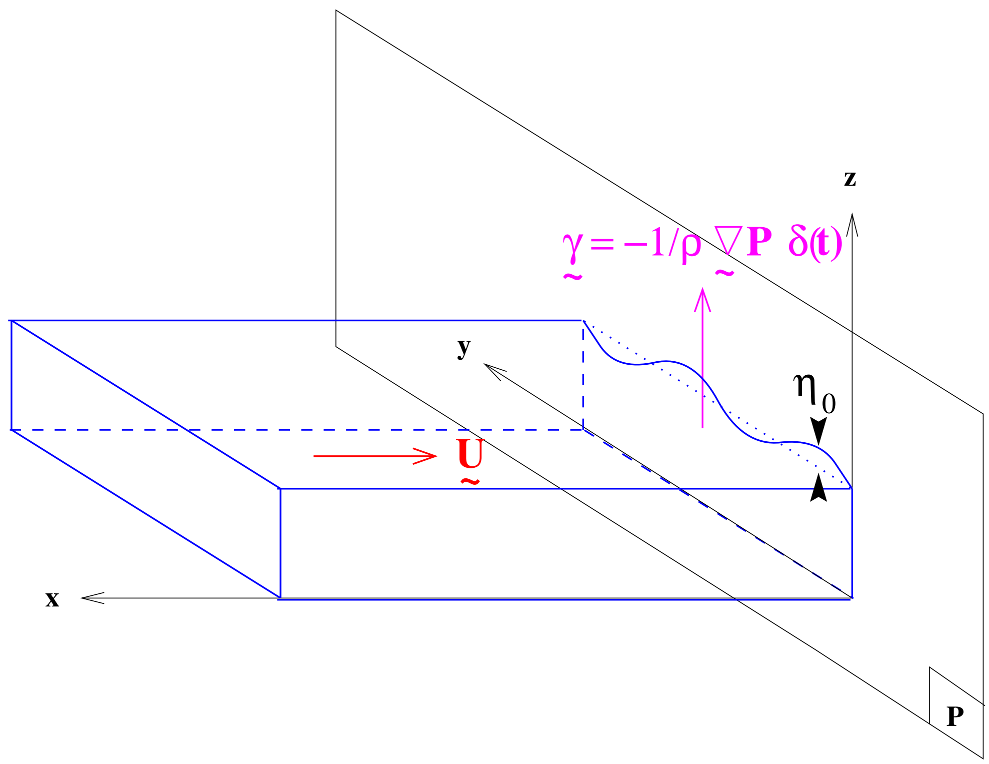


FIG. 6.10 – Impact d'un jet perturbé initialement.

Examinons le cas du jet tridimensionnel perturbé initialement. Supposons par ailleurs que le taux de croissance des digitations peut s'écrire sous la forme

$$\eta(t)/\eta_0 \sim -k\,V\,t\,. \tag{6.3}$$

Nous avons montré (§5.3.2) qu'il existe une coupure à l'echelle de la maille et que la vitesse de la lame éjectée est de l'ordre de $V \sim -U\,logh$. Alors, au bout du temps caractéristique $t_0 = H_0/U$, la longueur des digitations vaut

$$\eta(t_0) \sim -k\,H_0\,\eta_0\,logh. \tag{6.4}$$

Ainsi, plus le maillage est résolu au voisinage de la paroi, plus l'amplitude de la perturbation initiale peut être choisie petite.

De même, dans le cas de l'impact d'une goutte sur un film liquide, plus le maillage est raffiné, plus la singularité à l'instant du contact est résolue et plus la corolle apparait tôt et sa vitesse est élevée. En effet, pour que la corolle se forme à l'instant $t_0(h)$, il faut que son épaisseur soit supérieure à la taille de maille. Ainsi, à l'aide de la loi d'echelle (5.4) dérivée auparavant, nous pouvons estimer $t_0(h)$ en égalant ϵ et $h\,L$

$$t_0(h) \sim We\,h\,L/U. \tag{6.5}$$

Par ailleurs, d'après l'équation (5.9), la vitesse de l'extrémité de la corolle au moment de sa formation à l'instant $t_0(h)$ vaut

$$V_c = We\,(UD/t_0(h))^{1/2}. \tag{6.6}$$

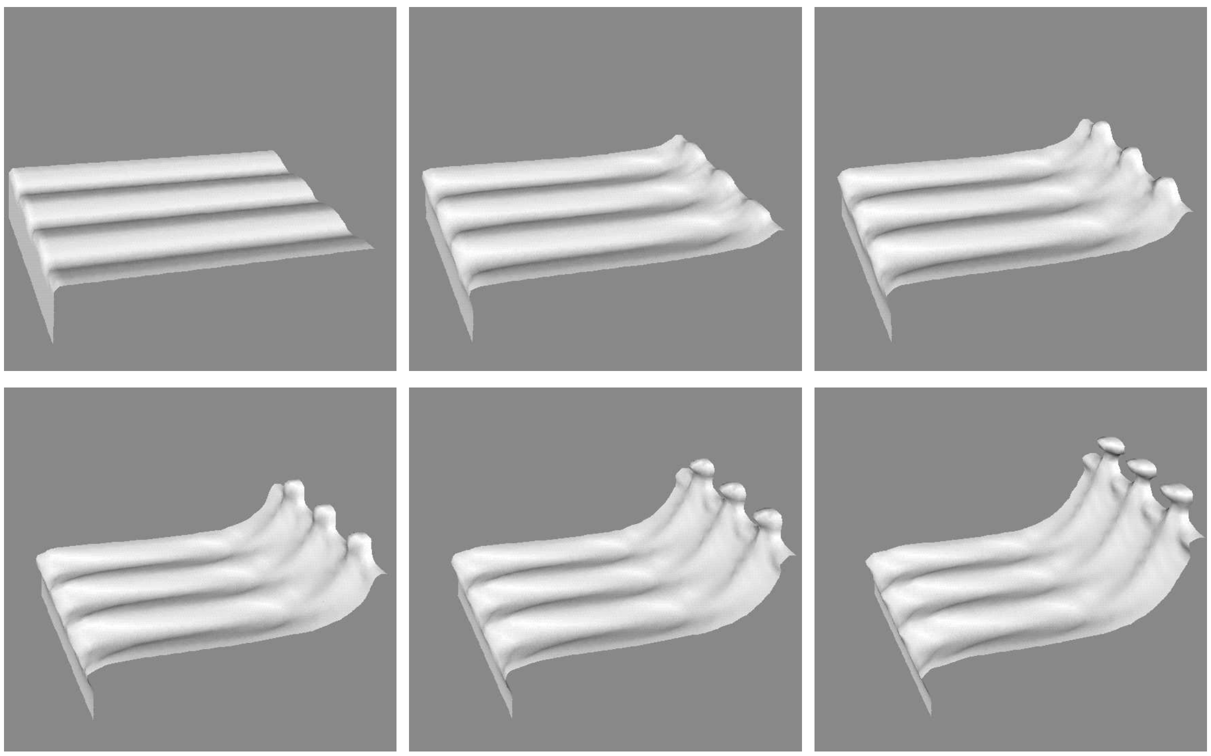


Fig. 6.11 – Impact d'un jet rectangulaire perturbé initialement dans la direction transverse. Des digitations croissent au niveau des creux de la perturbation initiale en même temps que la lame verticale est formée.

Supposons, seulement pendant le temps de ce calcul, que le processus de sélection du nombre de digitations (noté n) se produit à l'instant $t_0(h)$. Alors, la longueur des doigts à un instant t grand devant $t_0(h)$ est de l'ordre de

$$\eta(t) \sim -\eta_0\, k\, V_c\, t = \eta_0 \frac{n}{r_c(t_0)} We\, (\frac{UD}{t_0(h)})^{1/2}\, t = \eta_0\, n\, We \frac{t}{t_0(h)}. \tag{6.7}$$

A l'aide de (6.6), (6.7) et (6.5) on obtient

$$\eta(t) \sim -\eta_0\, n\, \frac{U\,t}{hL}. \tag{6.8}$$

Lorsque h tend vers zéro, la longueur des doigts diverge comme $1/h$.

6.3 Sélection du nombre de digitations dans les simulations

Jusqu'à maintenant, nous avons présenté des calculs dans lesquels les conditions initiales sont perturbées selon un mode unique.

Pour mieux comprendre le mécanisme de sélection du nombre de digitations dans une configuration tridimensionnelle, le film liquide est perturbé selon un bruit multi-mode. En comparant le nombre de doigts observé dans nos calculs à celui qui est mesuré dans les expériences, nous pouvons déterminer si notre méthode numérique est bien à même de simuler la formation des digitations de manière réaliste.

Cette approche, bien que moins systématique, est moins coûteuse dans le cas des simulations tridimensionnelles que l'approche consistant à analyser la réponse du système à une perturbation de longueur d'onde donnée puis à répéter les simulations pour différentes longueurs d'onde. Par contre, nous avons recours à cette deuxième approche qui nous permet d'étudier la réponse à une accélération impulsive d'un système plus simple, celui d'une interface bidimensionnelle séparant deux liquides.

A–Perturbation multimode

Nous effectuons une simulation très résolue ($4\times256\times130\times130$ points de maillage) dans laquelle la couche liquide mince est perturbée autour de sa position d'équilibre selon toutes les sous-harmoniques du mode de longueur d'onde $\lambda_1 = L$ et ce jusqu'au sous-harmonique de longueur d'onde $\lambda_{40} = L/40$. Tous les modes ont initialement la même amplitude, notée η_0. Par ailleurs, nous imposons un déphasage aléatoire entre les différents modes. L'équation de l'interface s'écrit alors

$$h(x,y) = H\left(1 + \eta_0 \sum_{k=1}^{k=40} cos(2\pi kx/L + \phi_k) + cos(2\pi ky/L + \phi'_k)\right) \tag{6.9}$$

Dans cette simulation, nous observons la formation d'environs 14 doigts liquides (fig. 6.15),

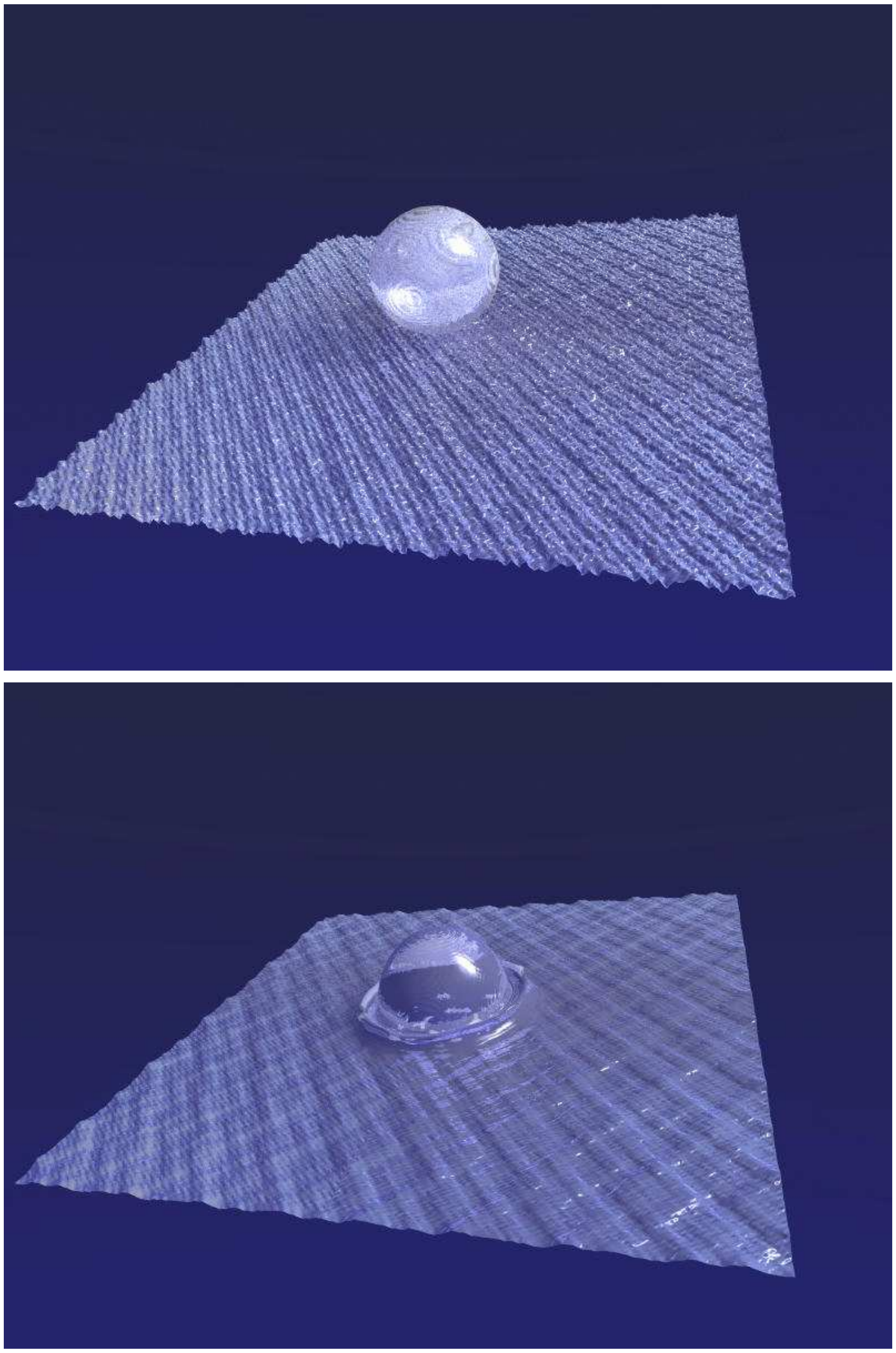


FIG. 6.12 – Impact d'une goutte sur un film liquide perturbé selon un spectre de modes discrets de longueurs d'ondes comprises entre $\lambda_1 = L$ et $\lambda_{40} = L/60$. $We = 1528$, $Re = 306$, $H/D = 0.205$, $\rho/\rho' = 700$. 256^3 points de maillage.

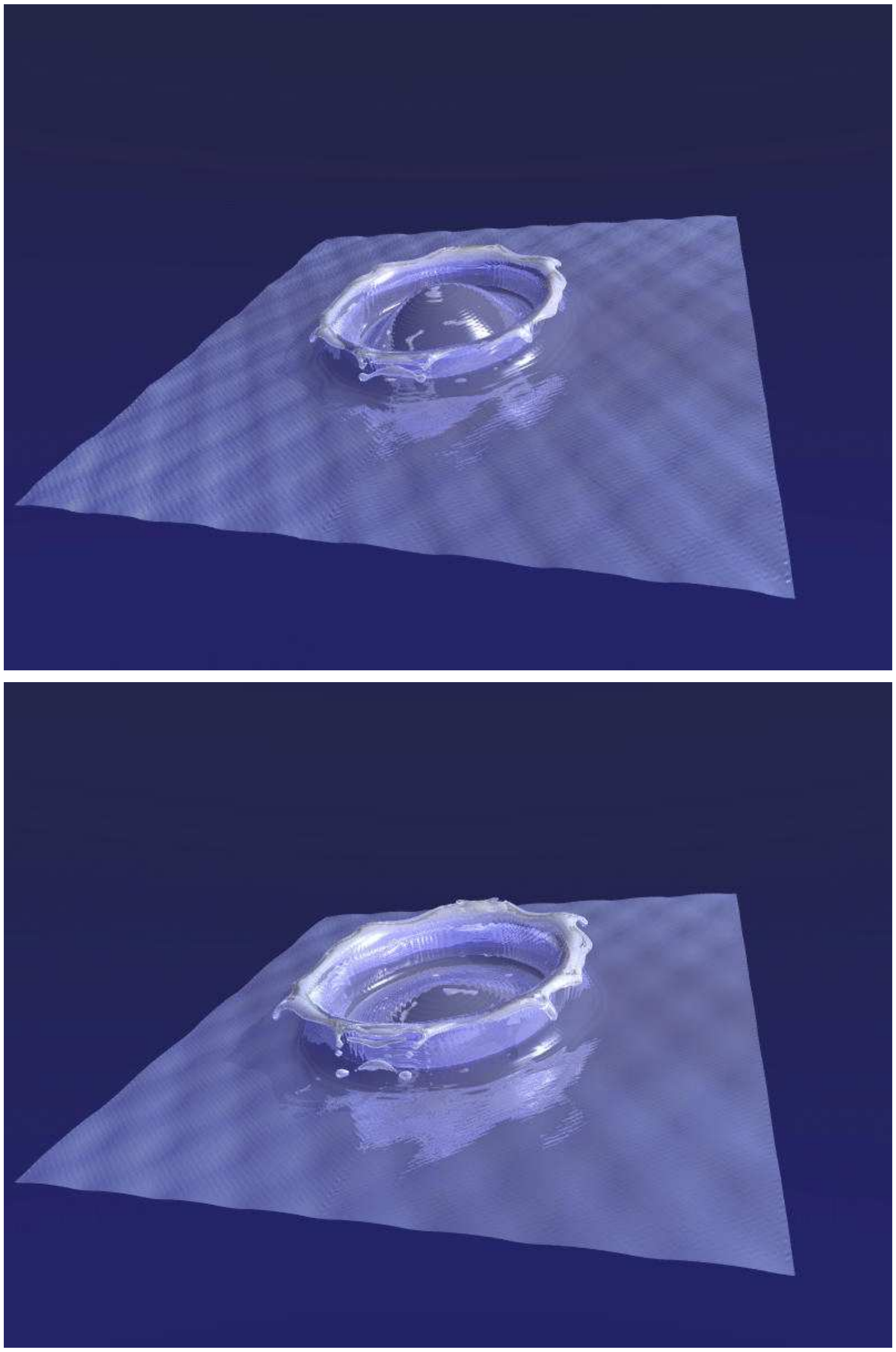


Fig. 6.13 –

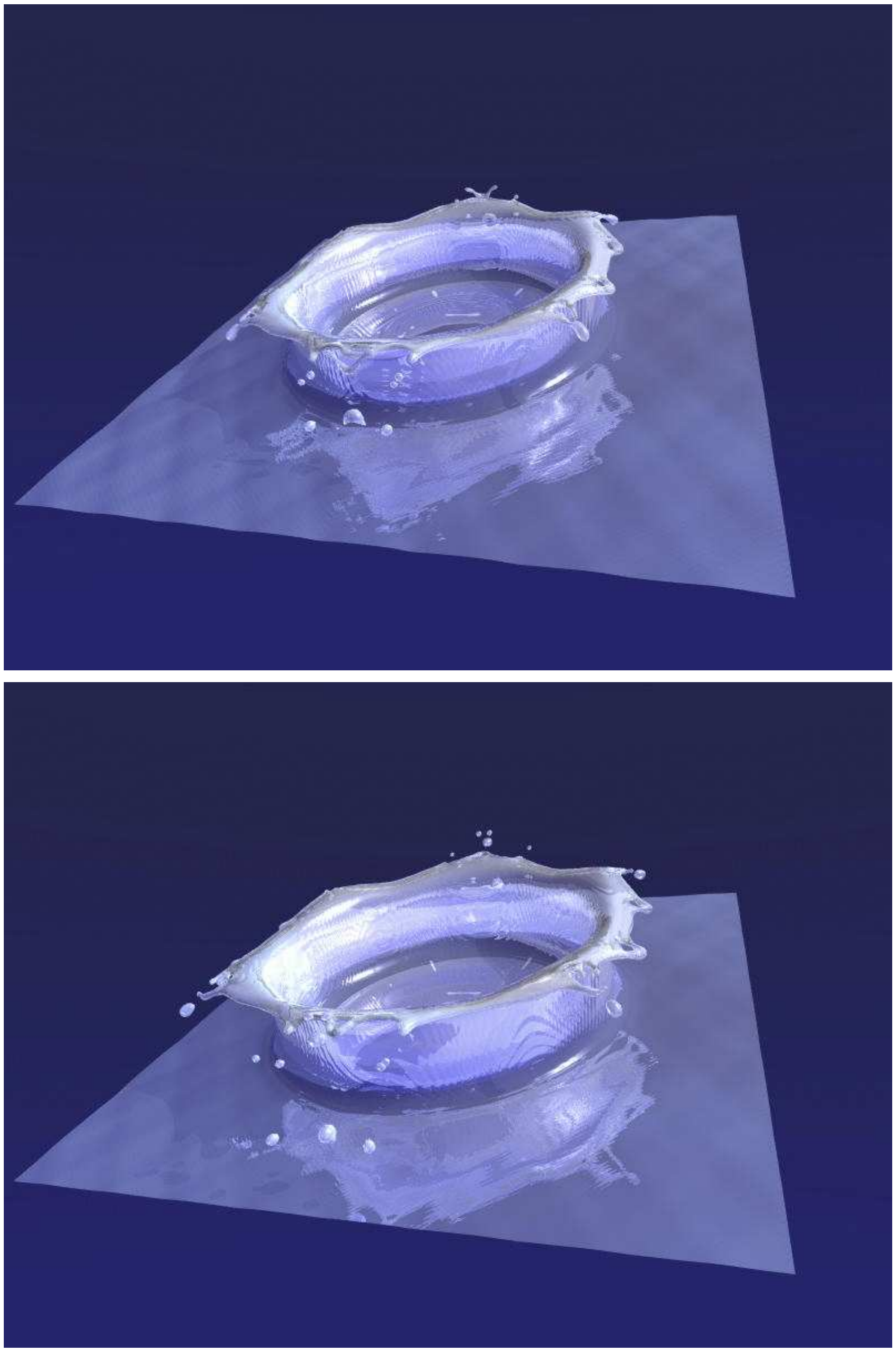


FIG. 6.14 –

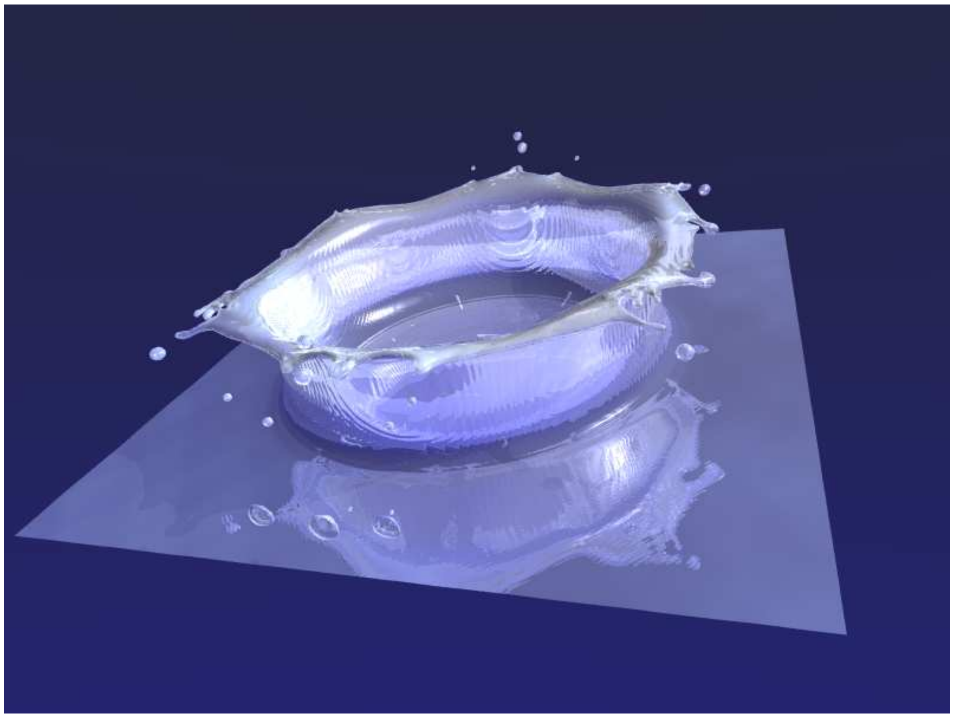


Fig. 6.15 –

ce qui représente un nombre de doigts réaliste mais inférieur à celui qui est observé expérimentalement dans le même régime de paramètres [19].

Malgré tout, il est raisonnable de penser qu'en résolvant mieux temporellement et spatialement la singularité à l'instant du contact, nous pourrions obtenir la formation d'un plus grand nombre de doigts, qui apparaitraient plus tôt et seraient plus fins que ceux que nous observons dans les simulations actuelles.

B– Démarrage impulsif de Richtmyer-Meshkov et mécanismes non-linéairesde selection du mode le plus instable

B.1– Simulations

Pour étudier plus systématiquement la réponse du système à une accélération impulsive, nous considérons une configuration plus simple, celle d'une interface bidimensionnelle séparant deux fluides de densités différentes qui est accélérée impulsivement. Ce système est par ailleurs similaire à celui qui est obtenu lorsqu'on considère une coupe du jet perturbé de la figure (6.10) dans un plan parallèle à (Oyz) proche de la paroi.

Les simulations sont effectuées dans le domaine carré $\Omega = L \times L$. Nous initialisons une interface entre deux fluides perturbée selon une mode de longueur d'onde $\lambda_n = L/n$. Le fluide du dessous a une densité ρ_1 et une viscosité μ_1 et le fluide du dessus une densité ρ_2 et une viscosité μ_2.

Dans toutes les simulations, l'amplitude initiale de la perturbation η_0 est choisie de telle sorte que $\eta_0/L = 0.0003$, avec $L = 3\,mm$. Le rapport des densités ρ_1/ρ_2 vaut 2 et le rapport des viscosités $\mu_1/\mu_2 = 10/3$. La longueur d'onde de la perturbation prend successivement les valeurs L, $2L$ et $4L$. Le système subit une accélération $-g$ pendant un temps δt très court par rapport à tous les autres temps caractéristiques, en particulier par rapport à $((\rho_1 + \rho_2)/(\sigma k^3))^{1/2}$ la période d'oscillation d'une onde capillaire de longueur d'onde $2\pi/k$, de telle sorte que le nombre de Reynolds basé sur la taille de boîte L à l'aide de la vitesse $V = -g\,\delta t$ est égal à 13500 (le nombre de Reynolds basé sur η_0 vaut 4.05) et le nombre de Weber est égal à $6.075\,10^6$ (le nombre de Weber basé sur η_0 vaut 182.25). Nous mesurons l'évolution au cours du temps de l'amplitude $\eta(k,t)$ du mode k.

Comme la théorie linéaire le prévoit, nous observons que $\eta(k,t) \propto kt$ pendant les premiers instants qui suivent le forcage impulsif, et l'amplitude de la perturbation sature rapidemment et ce d'autant plus vite que la longueur d'onde est petite. Alors que la théorie linéaire prévoit que le taux de croissance est d'autant plus élevé que la longueur d'onde de la perturbation est petite, les effets non linéaires provoquent une saturation des modes de petite longueur d'onde et sont ainsi à l'origine d'une forme de sélection du mode. Il n'existe pas de sélection proprement dite d'un mode donné car il n'y a pas de mode le plus instable. Par contre il existe à chaque instant un mode dont l'amplitude est plus élevée que celle de tous les autres modes. A l'instant suivant, c'est un autre mode de plus grande longueur d'onde qui prévaut.

Dans la configuration bidimensionnelle que nous étudions ici, la tension de surface entraine la rétraction complète des doigts liquide (puis l'oscillation du mode) au bout d'un temps fini. Par contre, l'effet de la tension de surface sur les modes de grande longueur d'onde dans le régime non linéaire est encore mal compris. Il faut cependant noter que dans une situation tridimensionnelle, la composante axisymétrique de la tension de surface modifie ce scénario de la façon présentée au paragraphe C.3. En l'absence de tension de surface, on observe une saturation de l'amplitude des structures mais bien évidemment pas d'oscillation.

Ce mécanisme est au rang de ceux qui pourraient expliquer la décroissance continue au cours du temps du nombre de digitations observée dans les expériences d'impact de gouttes sur une surface liquide ou solide [109, 19].

B.2– Théorie faiblement non-linéaire à tension de surface et viscosité nulle

En utilisant les résultats de théorie faiblement non-linéaire de [5], nous tentons de prédire quel est le mode sélectionné pendant la durée de l'impact. En l'abscence de tension de surface et d'effet visqueux, cette théorie prédit le taux d'amplification suivant

$$\eta/\eta_0 = 1 + kV_0t - k^3V_0\eta_0^2\left(\frac{t}{4} + \frac{kV_0t^2}{8} + \frac{5k^2V_0^2t^3}{24}\right) \tag{6.10}$$

où V_0 est la vitesse de la corolle au moment de sa formation. Le terme $1 + kV_0t$ est linéaire mais les termes non-linéaire volumiques suivants provoquent une saturation du taux d'amplification.

Au bout du temps caractéristique $\tau = D/U$, le mode observé est celui pour lequel η/η_0 sature à l'instant $t = \tau$, l'amplitude de tous les autres modes étant plus faible à cet instant. La saturation se produit lorsque $\frac{d(\eta/\eta_0)}{dt} = 0$. Pour un triplet (V_0, η_0, k) donné, cette dérivée s'annule à l'instant

$$t_c = -\frac{1}{5kV_0} + \frac{\sqrt{40\eta_0^2 k^4 V_0^2 - 9\eta_0^4 k^6 V_0^2}}{5\eta_0^2 k^4 V_0^2} \tag{6.11}$$

Si on suppose que les perturbations sont de grande longueur d'onde, alors $\eta_0 k << 1$ et l'équation précédente devient

$$t_c = D/U \simeq \frac{\sqrt{40}}{5\eta_0 k^2 V_0} \tag{6.12}$$

Maintenant, en écrivant d'une part que l'amplitude initiale des perturbations est inférieure au rayon $r_c(t_0) = (UDt_0)^{1/2}$ de la zone de contact à l'instant t_0 auquel la corolle se forme, et d'autre part que $V_0 = (UD/t_0)^{1/2}$, on obtient

$$D/U > \frac{1}{k^2 UD} \tag{6.13}$$

et donc

$$k(\tau) > \frac{1}{D}. \tag{6.14}$$

De plus, à l'instant $\tau = D/U$

$$k(\tau) = N(\tau)/r_c(\tau) = N(\tau)/D \tag{6.15}$$

où $N(\tau)$ est le nombre de digitations à l'instant τ. Finalement, on obtient l'inégalité

$$N(\tau) > 1 \tag{6.16}$$

Il est difficile de prédire avec plus de précision quel est le mode sélectionné pendant le temps caractéristique de l'impact sans faire une hypothèse sur l'origine des perturbations initiales et sur leur amplitude. Ces même phénomènes à petite échelle sont peut-être aussi à l'origine du retard dans la formation de la corolle. Il est fort possible que ce retard soit lié à la compressibilité du fluide. D'autre part, le système considéré dans cette rapide étude de stabilité est bidimensionnel, ce qui n'est pas le cas de la corolle. En particulier les effets de tension de surface tridimensionnels ont certainement un rôle dans la croissance des digitations aux temps longs.

6.3.1 Croissance des digitations aux temps longs

Si un mécanisme d'instabilité de la corolle est à l'origine de la formation des digitations, alors on pourrait s'attendre à ce que leur amplitude sature lorsque le régime non-linéaire est atteint. Cependant, la longueur et le rayon des digitations continuent à croître aux temps longs. Nous présentons un des mécanismes pouvant expliquer le phénomène.

Faisons l'hypothèse que la pression dans le bourrelet est uniforme tout autour de la corolle. Alors, comme on peut l'observer sur les photographies expérimentales, les digitations et le bourrelet ont environ le même rayon. Une goutte formée à l'éxtrémité d'un doigt se rétracte alors à une vitesse qui est de l'ordre de $(2\,\sigma/\rho\, r)^{1/2}$, où $r(t)$ est le rayon du doigt, c'est ‘a dire moins vite que le bourrelet capillaire qui lui se rétracte ‘a la vitesse $(2\,\sigma/\rho\, e)^{1/2}$, avec e l'épaisseur de la corolle. Les doigts ont donc tendance à s'allonger jusqu'à ce que leur longueur atteigne environ $l(t) = \lambda_{max} = 9\, r(t)$ puisqu'ils sont soumis à l'instabilite' de Rayleigh-Eggers. Cette théorie aux temps longs prévoit donc que la longueur des doigts croît proportionellement au rayon du bourrelet.

Chapitre 7

Simulation de l'impact de gouttes en incidence oblique

Au cours de la combustion du propergol solide dans le propulseur MPS 230 de la fusée Ariane 5, il se forme un brouillard de gouttes d'alumine liquide. Ces gouttes interagissent avec le fond arrière du propulseur (FAR) et viennent s'y accumuler pour y former une flaque. Une partie de l'alumine est éjectée dans le col de la tuyère et le reste est piégé au niveau de la flaque.

L'étude des phénomènes d'interactions phase condensée-parois est l'un des thèmes du programme R&T CNES ASSM depuis plusieurs années. Dans le cadre de ce thème, plusieurs expériences d'impact de gouttes sur parois chaudes ont été effectuées au CERT/ ONERA Toulouse dans le Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique (DMAE). Ces expériences ont permis d'identifier des corrélations qui décrivent la transition entre les régimes de rebond, de dépôt et d'éclaboussure et qui tiennent compte de la température de la paroi et des transferts thermiques. Ces corrélations sont ensuite introduites dans des codes de suivi lagrangien des particules.

L'étude de l'impact de gouttes sur une paroi froide fait l'objet d'une nouvelle expérience au CERT/DMAE [52]. La paroi est constituée d'une plaque de cuivre sur laquelle on dirige un jet monodisperse de gouttes d'éthanol, dont les propriétés physiques sont très proches de celles du kérozène. L'angle entre le jet et la paroi est varié entre 0 et $\pi/2$. Par ailleurs, certains essais sont effectués sur une paroi sèche, d'autre sur une paroi recouverte d'un film liquide dont l'épaisseur est comprise entre $100\mu m$ et $500\mu m$. Le diamètre des gouttes incidentes est compris entre $150\mu m$ et $280\mu m$ et leur vitesse est de l'ordre de 2 3 $m.s^{-1}$. L'angle entre la paroi et la trajectoire incidente des gouttes est varié entre 5 et 23 degrés.

Cette expérience permet d'étudier les régimes de dépôt, de rebond, de “splattering” et d'éclaboussure. Au cours du phénomène de “splattering” se produisant au cours d'impacts sur film liquide, une partie du film est arrachée par la goutte, donnant naissance des goutellettes secondaires.

Le régime de rebond d'une goutte sur un film liquide est plus particulièrement étudié dans cette expérience. Le diamètre, la vitesse et l'angle de la goutte réfléchie sont étudiés en fonction des paramètres calculés avant l'impact. Ainsi la goutte réfléchie a un volume légèrement inférieur à celui de la goutte incidente et une partie de l'energie est dissipée au cours du rebond. Par ailleurs, l'angle réfléchi est toujours inférieur à l'angle incident. La transition entre le régime de dépot et de rebond est étudiée à l'aide du paramètre

$$K = OhRe^{5/4} \tag{7.1}$$

le nombre de Reynolds étant basé sur la composante normale à la paroi de la vitesse incidente. Dans l'expérience, la transition entre les régimes de dépôt et de rebond se produit pour $K = K_c \simeq 3$. La valeur de K_c dépend de la fréquence d'impact des gouttes et du fait que la paroi est sèche ou recouverte d'un film.

Dans certaines régions du fond arrière du propulseur, le film liquide s'écoule sous l'action conjuguée de la gravité et du cisaillement.

Nous étudions numériquement ces différents phénomènes et tentons de quantifier les échanges de masse et de quantité de mouvement entre les gouttes et le film liquide dans le but de mieux comprendre le rôle de l'apport de gouttes dans la dynamique du film.

7.1 Simulations numériques

7.1.1 Conditions aux limites et conditions initiales

Nous étudions l'impact d'une goutte de diamètre D sur un film d'épaisseur H. L'angle entre la vitesse incidente de module V et et le film horizontal est noté θ. Les coordonnées du vecteur vitesse sont alors $(0, V cos\theta, -V sin\theta)$ dans le repère de la figure 7.1. Nous initialisons une demi-goutte en contact avec une frontière sur laquelle des conditions aux limites miroir sont imposées. Nous imposons par ailleurs des conditions de non-glissement en dessous du film ($z = 0$) et des conditions périodiques dans la direction longitudinale (Oy) au niveau des frontières $y = 0$ et $y = L$. Les simulations sont effectuées dans un domaine de calcul qui comprend $130 \times 130 \times 66$ points de maillage.

7.1.2 Résultats

Comme dans le cas d'un impact en incidence normale, une corolle est formée peu après le contact entre la goutte et le film liquide. Par contre, la corolle résultant d'un impact en incidence oblique a une forme disymétrique et sa forme qui rappele celle d'un tremplin. Ainsi, la hauteur de la corolle au dessus de la surface du film liquide est plus importante à l'avant (dans la direction longitudinale) qu'à l'arrière de la goutte. De plus, une cavité est formée à l'arrière de la goutte. Sa profondeur dépend de l'angle d'incidence et de l'épaisseur du film liquide. Les figures 7.2 à 7.6 montrent la formation de la corolle et son évolution au cours du temps.

Cette disymétrie de la corolle peut être expliquée à l'aide d'arguments de composition des vitesses.

Ainsi, dans le cas d'un impact en incidence oblique, la vitesse de la discontinuité cinématique $\mathbf{V}'_c$ est simplement la vitesse $\mathbf{V}_c = \dot{r}_c \mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r$ est le vecteur radial des coordonnées polaires dans le plan (Oxy)) de la discontinuité dérivée dans le cas d'un impact

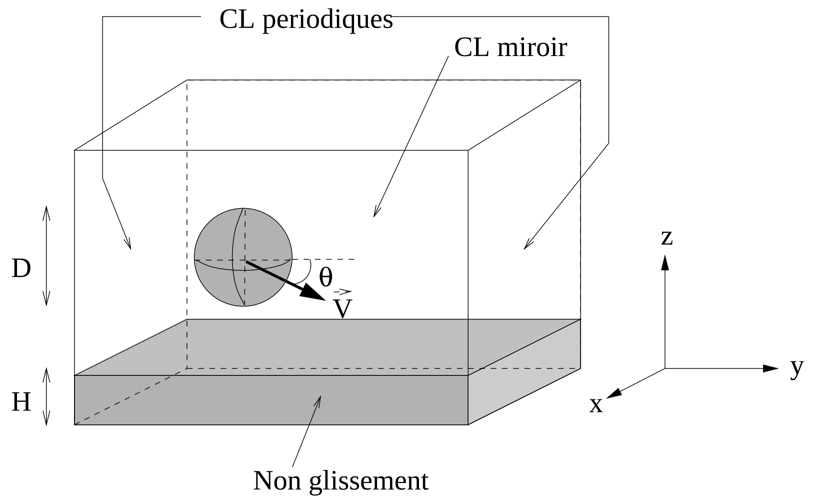


FIG. 7.1 – Conditions initiales et conditions aux limites pour les simulations tridimensionnelles d'impact en incidence oblique.

en incidence normale, à laquelle il faut ajouter la composante horizontale de la vitesse $Vcos(\theta)\mathbf{e}_x$. En écrivant $\mathbf{e_r} = cos\Phi\,\mathbf{e_y} + sin\Phi\,\mathbf{ex}$, nous obtenons

$$\mathbf{V}_{C'} = (Vcos\theta + \dot{r}_c cos\Phi)\mathbf{e_y} + \dot{r}_c sin\Phi\mathbf{ex} \tag{7.2}$$

avec

$$\dot{r}_c = (Vsin\theta Dt)^{1/2}\,. \tag{7.3}$$

D'où

$$\mathbf{V}_{C'} = (Vcos\theta + (Vsin\theta Dt)^{1/2}cos\Phi)\mathbf{e_y} + (Vsin\theta Dt)^{1/2}sin\Phi\mathbf{ex}. \tag{7.4}$$

Nous prédisons donc que la base de la corolle reste circulaire pendant l'impact, ce que nous vérifions dans la plupart des simulations. Par contre, la vitesse du fluide éjecté dans la corolle et la quantité de fluide éjectée dépend de l'angle polaire Φ.

En tenant compte de la vitesse d'entrainement dans l'analyse effectuée précédemment dans le cas axisymétrique (5.2), nous obtenons que la vitesse du fluide à la base de la corolle à l'avant et à l'arrière de la corolle vaut

$$V_J = (sin\Psi + \dot{r}_c + Vcos\theta)\mathbf{e_y} + (\dot{r}_c + Vcos\theta)cos\Psi)\mathbf{e_z} \tag{7.5}$$

où Ψ est l'angle entre la base de la corolle et la verticale

$$u_0 = (\dot{r}_c + \alpha Vcos\theta) \tag{7.6}$$

avec $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(\pi) = -1$. En négligeant les variations de l'angle Ψ avec Φ, nous constatons que la vitesse horizontale et la vitesse verticale des particules à la base de la corolle est plus importante à l'avant de la goutte ($\Phi = 0$) qu'à l'arrière ($\Phi = \pi$) ce qui est en bon accord avec les simulations.

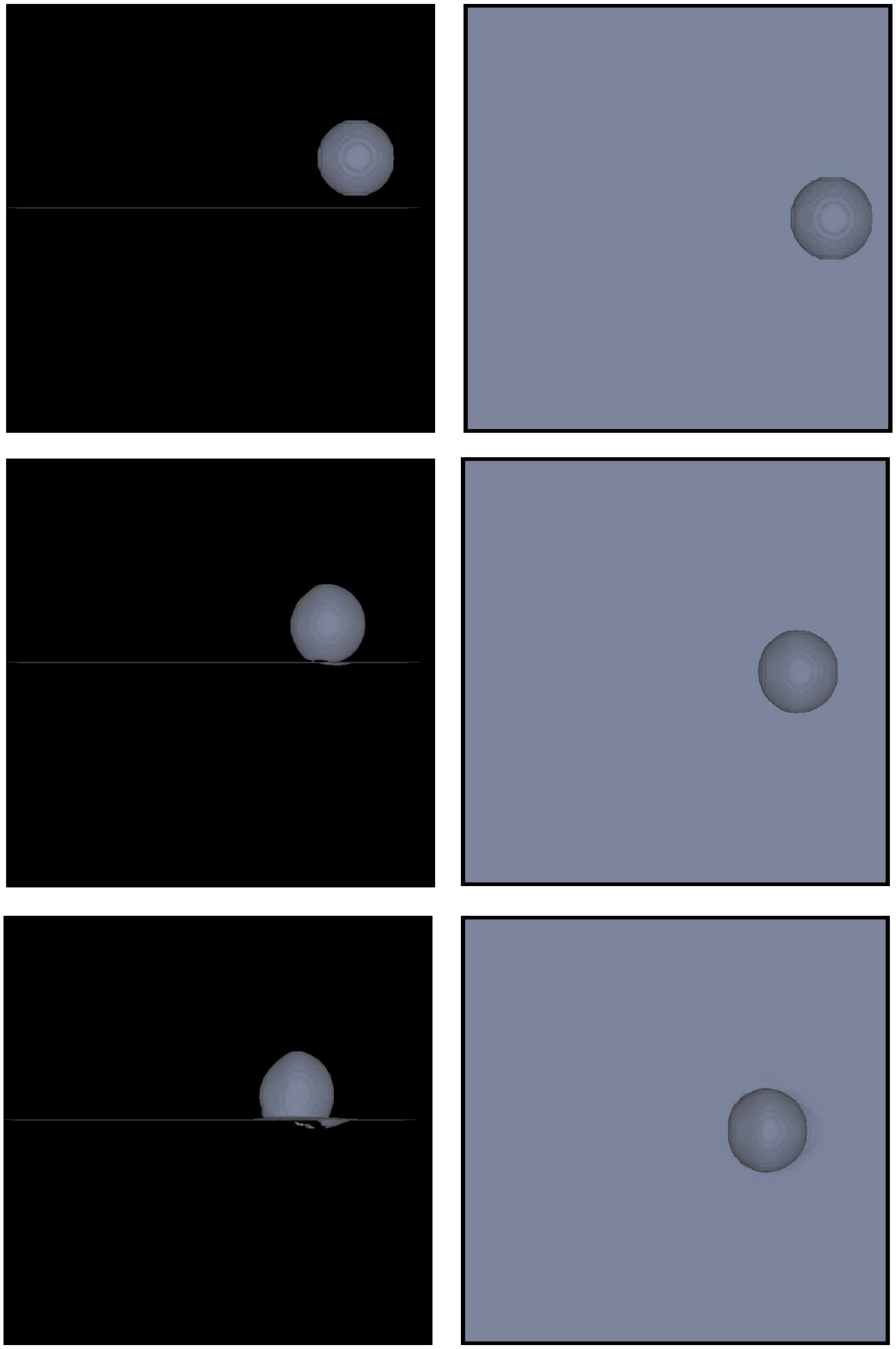


Fig. 7.2 – Impact en incidence oblique à différents instants $t_1 = -0.35D/V$, $t_2 = 0.05D/V$, $t_3 = 0.45D/V$. $\theta = \pi/8$, $Re = 110$, $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\rho/\rho' = 300$.

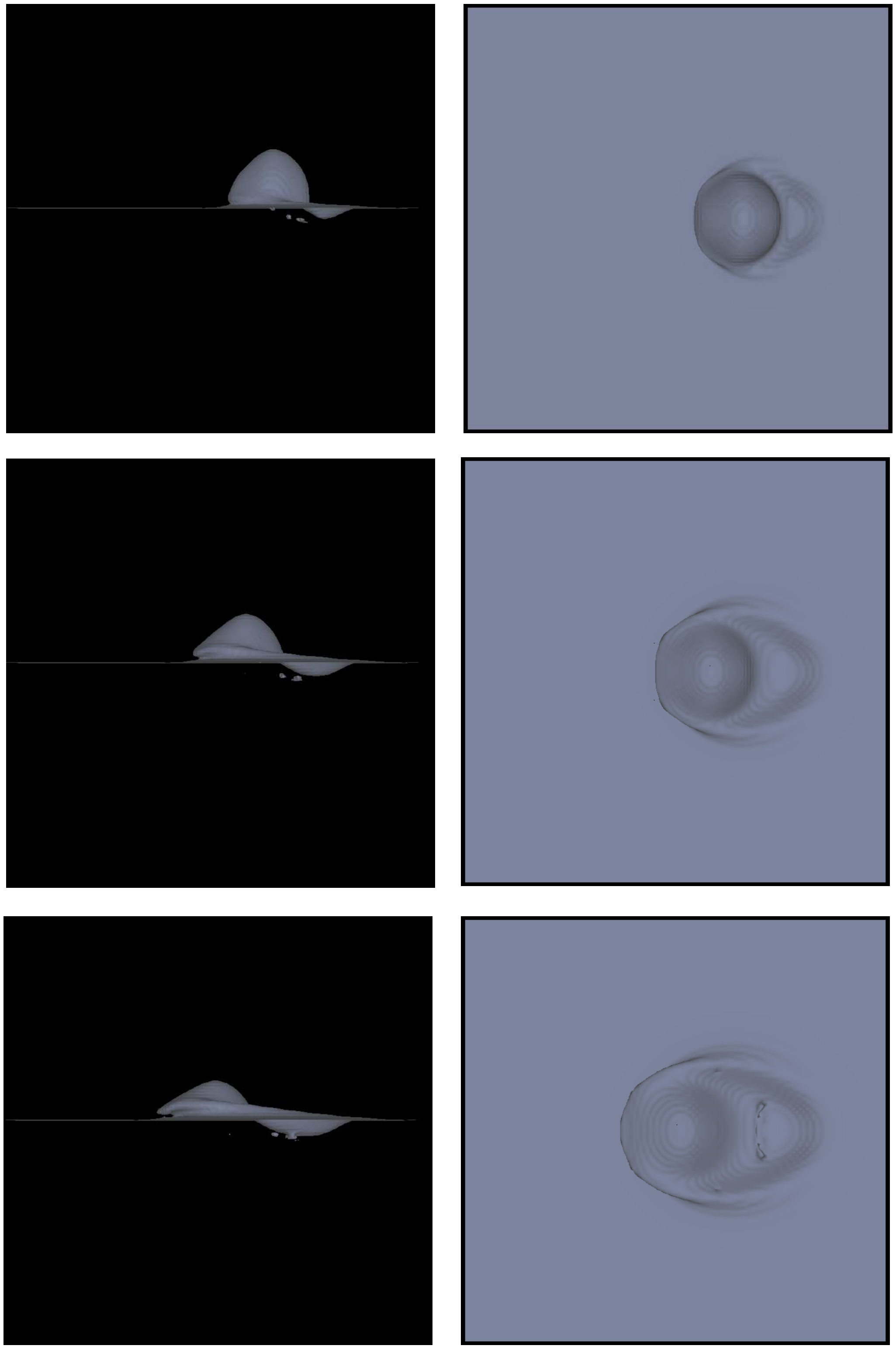


FIG. 7.3 – $t_4 = 0.85D/V$, $t_5 = 1.25D/V$, $t_6 = 1.65D/V$.

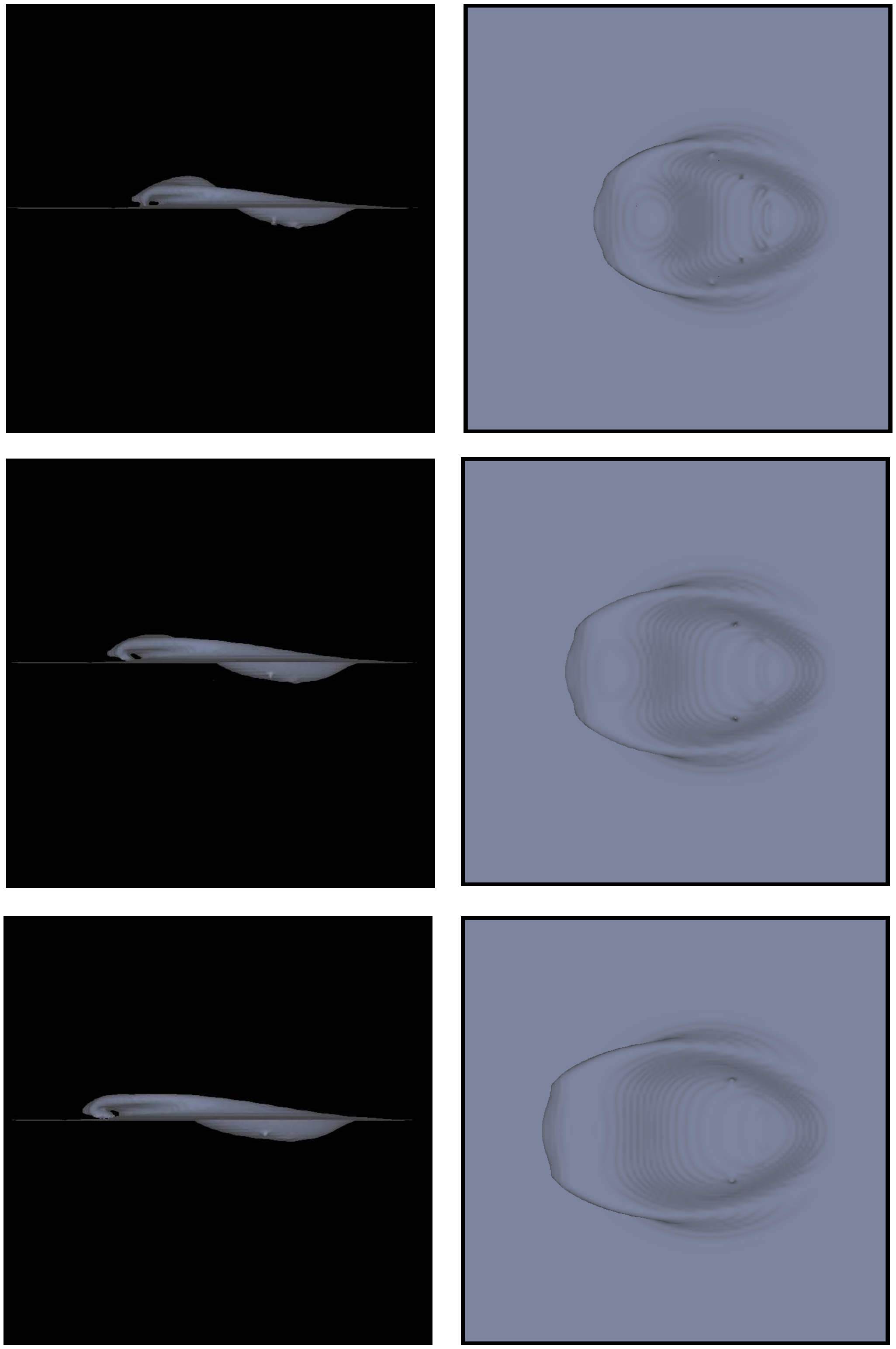


FIG. 7.4 – $t_7 = 2.05D/V$, $t_8 = 2.45D/V$, $t_9 = 2.85D/V$.

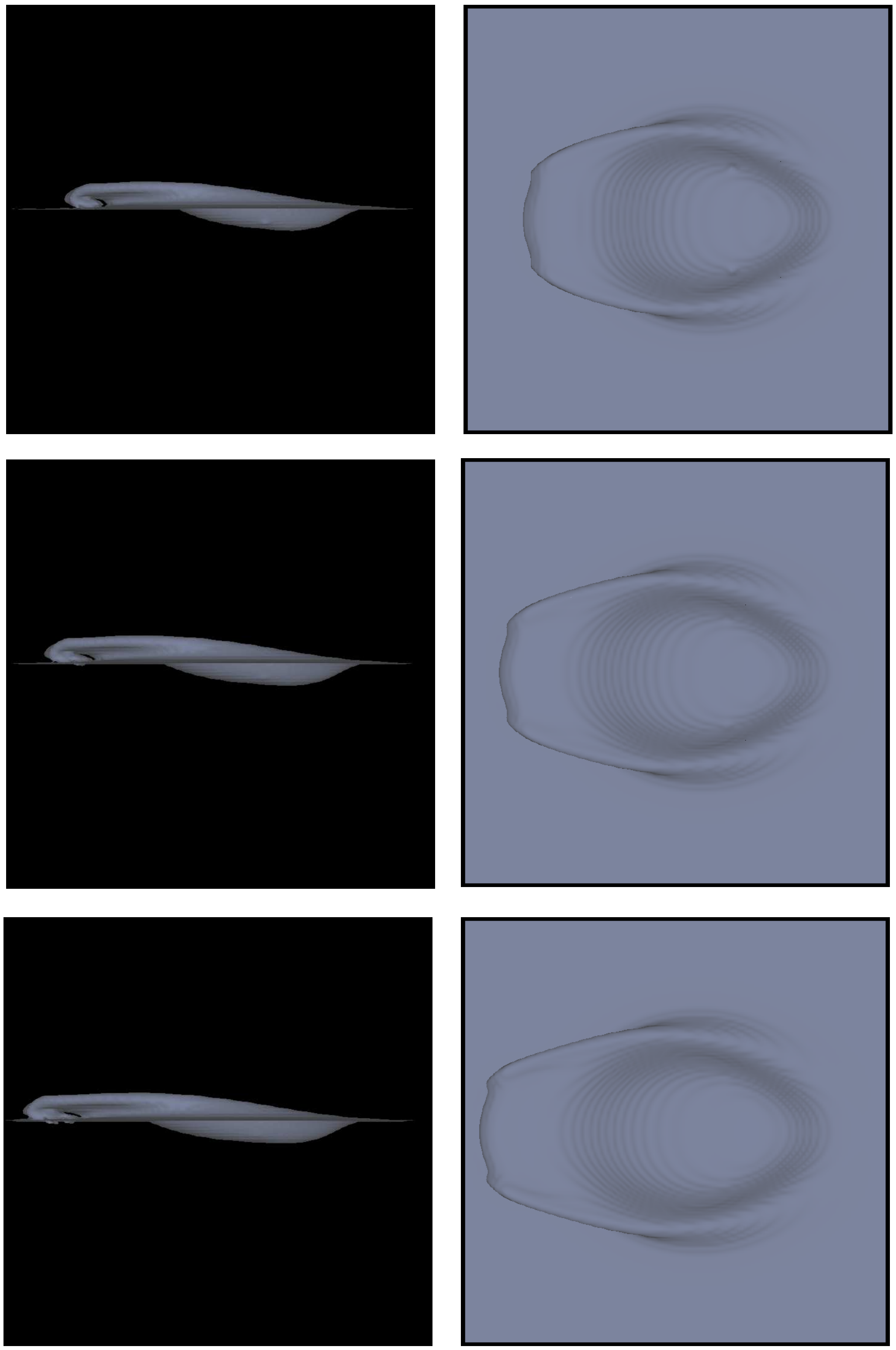


FIG. 7.5 – $t_{10} = 3.25D/V$, $t_{11} = 3.65D/V$, $t_{12} = 4.05D/V$.

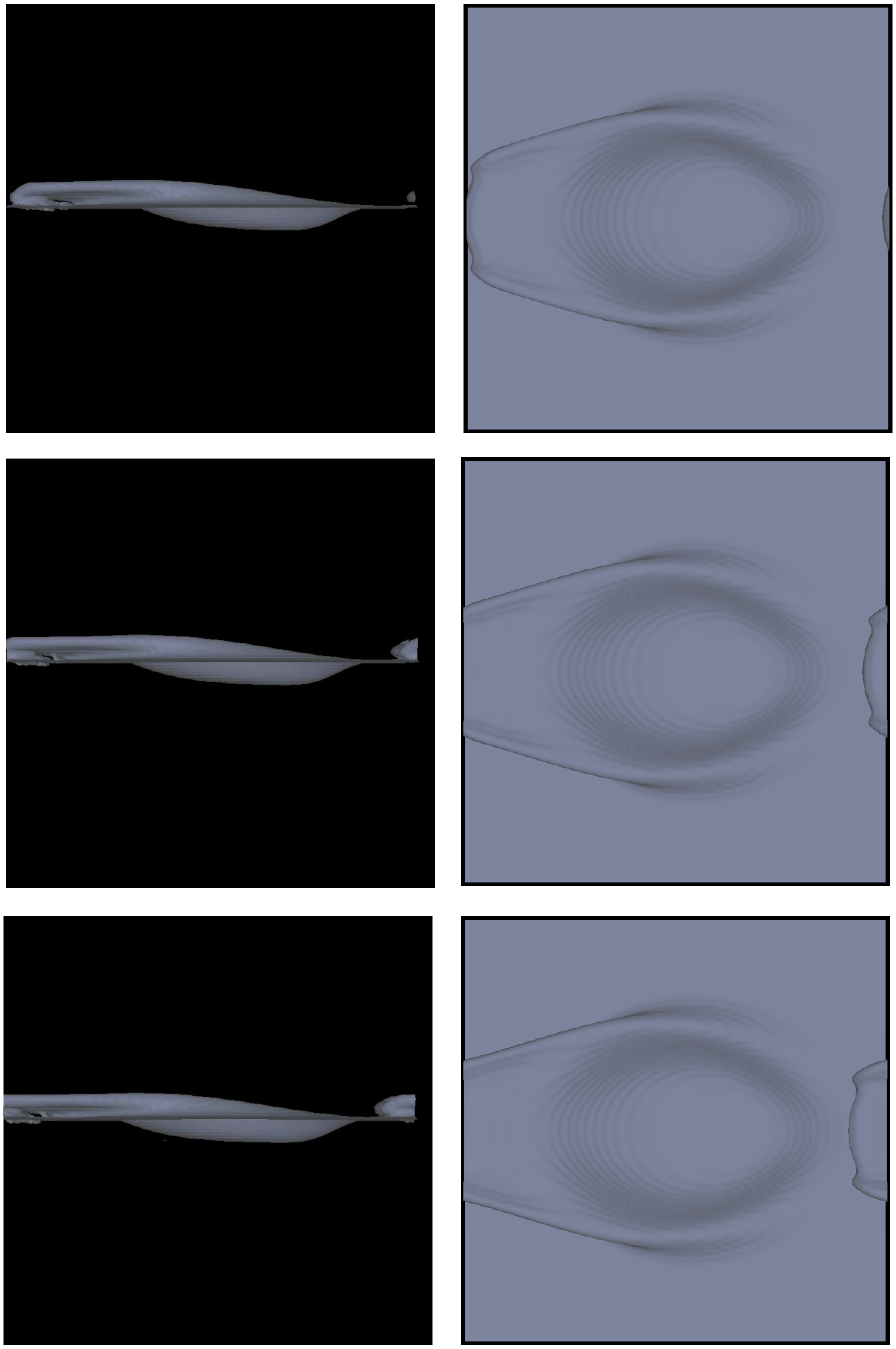


FIG. 7.6 – $t_{13} = 4.45D/V$, $t_{14} = 4.85D/V$, $t_{15} = 5.25D/V$.

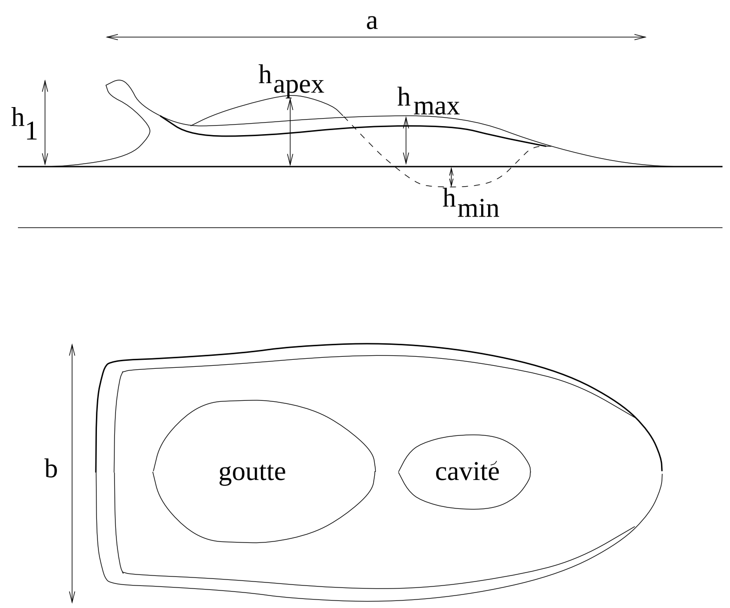


FIG. 7.7 – Quantités mesurées dans les simulations

7.1.3 Influence de l'angle d'incidence sur la dynamique de la corolle et du film

Dans un premier temps, nous fixons les paramètres physiques et le module de la vitesse initiale de la goutte et faisons varier l'angle d'incidence entre 0 et $\pi/2$. Les nombres sans dimension calculés à l'aide du module de la vitesse incidente sont $Re = \rho V D/\mu = 222$, $We = \rho V^2 D/\sigma = 1000$, $H/D = 0.5$ et $\rho/\rho' = 300$.

Tout d'abord, nous avons tenté d'étudier les différents régimes d'interaction entre la goutte et le film liquide. Nous n'avons pu observer le rebond de la goutte même sous des angles d'incidence rasants ($\theta = \pi/16$). Il est possible que physiquement, le rebond de la goutte soit dû à la formation d'un film de lubrification de gaz entre la goutte et la couche liquide. Même si physiquement, une reconnexion peut avoir lieu entre la goutte et le film liquide, l'instant auquel celle-ci se produit influence fondamentalement le rebond. De plus, les propriétés physico-chimiques de l'interface et les phénomènes d'interactions intermoléculaires entre la goutte et le film liquide déterminent l'instant de la reconnexion. Ces phénomènes à l'echelle microscopique ne sont pas pris en compte dans les simulations et la reconnexion se produit automatiquement lorsque l'épaisseur du film gazeux est inférieure à la taille de la maille, c'est à dire en avance par rapport à une reconnexion à l'echelle microscopique. Dans l'ensemble des calculs présentés, nous étudions le phénomène d'éclaboussure et la formation d'une corolle au cours du phénomène d'impact.

Nous mesurons un certain nombre de quantités géométriques qui permettent d'évaluer l'influence des différents paramètres sur l'étalement de la goutte et le rebond de la corolle. Ces quantités sont définies dans la figure 7.7.

L'influence de l'angle d'incidence sur l'évolution de la hauteur de la corolle à l'avant de la goutte est notable (figure 7.8). Plus l'incidence est rasante, moins la corolle rebondit

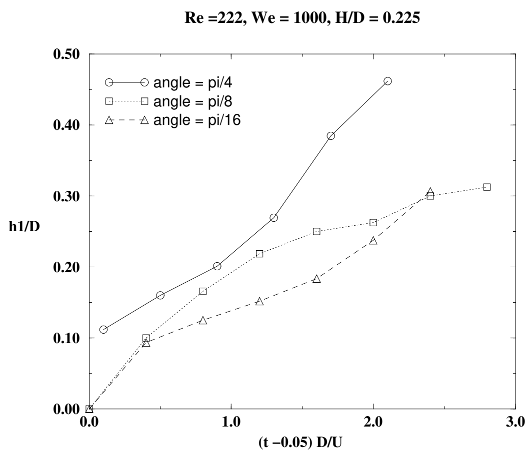


FIG. 7.8 – Évolution au cours du temps de la hauteur de la corolle à l'avant de la goutte pour différents angles d'incidence. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

à l'avant. Cependant, la présence d'un bourrelet capillaire à l'extrémité de la corolle peut modifier cette tendance. En effet, le bourrelet se rétracte d'autant plus vite que l'épaisseur de la corolle est faible. Par ailleurs, des reconnexions, se produisent parfois au niveau de l'extrémité de la corolle et une partie du fluide est éjectée sous forme de gouttelettes. Ces reconnexions provoquent des fluctuations de h_1 au cours du temps.

Comme dans le cas d'un impact en incidence normale, la hauteur d'apex décroit linéairement au cours du temps (figure 7.9). La transformation $h_{apex} \rightarrow (h_{apex}/D - 1)$ permet d'obtenir une bonne superposition des différentes courbes au voisinage de $t = 0$ (figure 7.10). On a donc

$$(h_{apex}/D - 1)/sin\theta \simeq -tV/D\,. \tag{7.7}$$

D'où, pour $t < D/V$

$$h_{apex} \simeq D - V\,t\,sin\theta \tag{7.8}$$

L'angle d'incidence influe d'autre part sur la profondeur de la cavité formée au moment du contact entre la goutte et le film. La profondeur de la cavité augmente avec l'angle d'incidence (voir figure 7.11). Cependant, dans ces calculs, l'épaisseur du film a été fixée à une valeur relativement faible $H = 0.225\,D$. Cette épaisseur, directement liée l'épaisseur de la couche limite au voisinage de la paroi, sature donc d'autant plus rapidemment que le film est mince.

L'étalement de la corolle dans la direction longitudinale dépend peu de l'angle d'incidence (voir figure 7.12). Cette quantité augmente linéairement au cours du temps ce qui corrobore notre théorie selon laquelle l'extrémité de la corolle a une trajectoire balistique à laquelle il faut ajouter la composante liée de rétraction du bourrelet capillaire. Par contre, l'angle d'incidence influe sur l'évolution de l'étalement dans la direction transverse (voir figure 7.13). L'étalement b augmente d'autant plus vite au cours du temps que l'angle d'incidence est important. De même, la hauteur maximale de la corolle au dessus de la surface non perturbée du film liquide augmente avec l'angle d'impact (fig. 7.14).

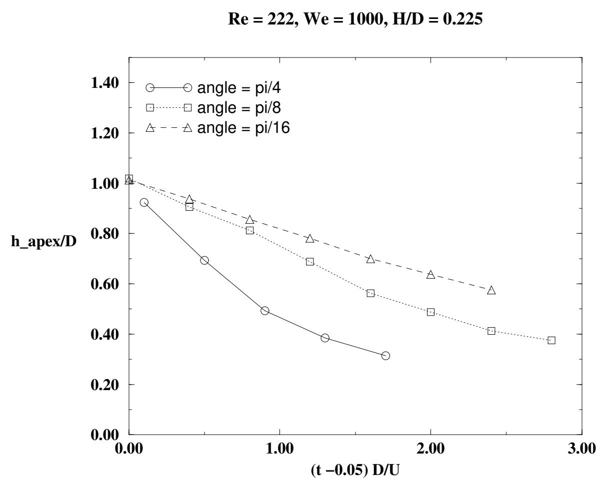


FIG. 7.9 – Evolution au cours du temps de la hauteur d'apex pour différents angles d'incidence. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

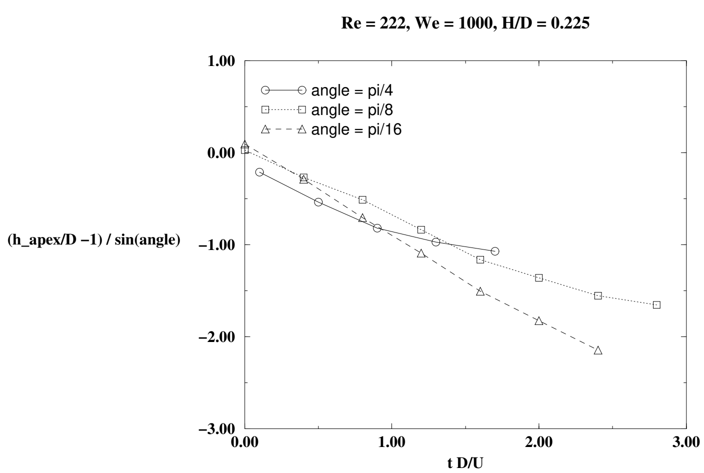


FIG. 7.10 – Les courbes de la figure 7.9 ont subi la transformation $h \to (h/D - 1)/sin\theta$. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

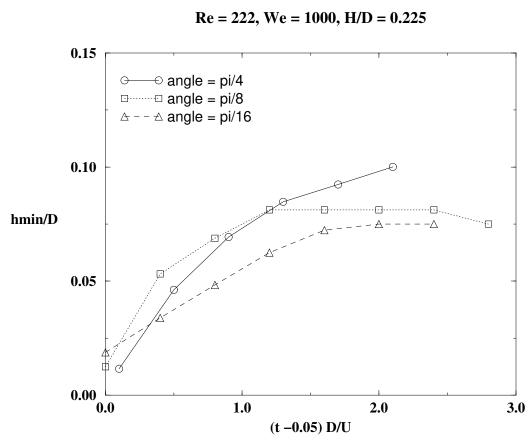


FIG. 7.11 – Évolution au cours du temps de la profondeur de la cavité pour différents angles d'incidence. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

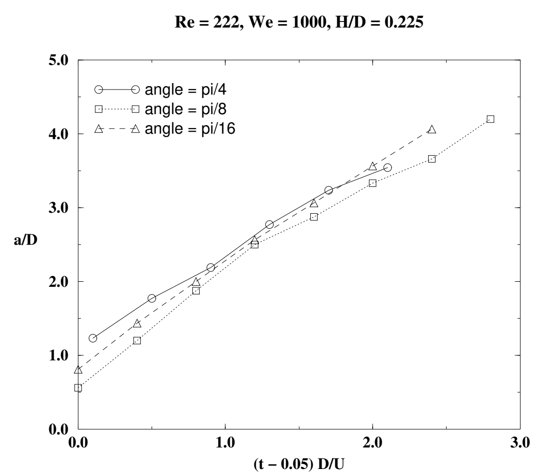


FIG. 7.12 – Évolution au cours du temps du paramètre a pour différents angles d'incidence. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

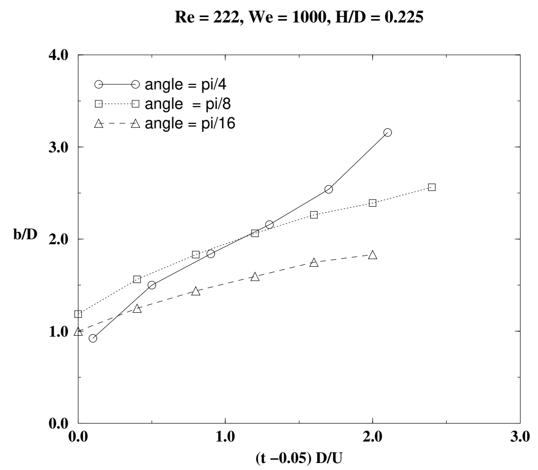


FIG. 7.13 – Évolution au cours du temps du paramètre b pour différents angles d'incidence. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

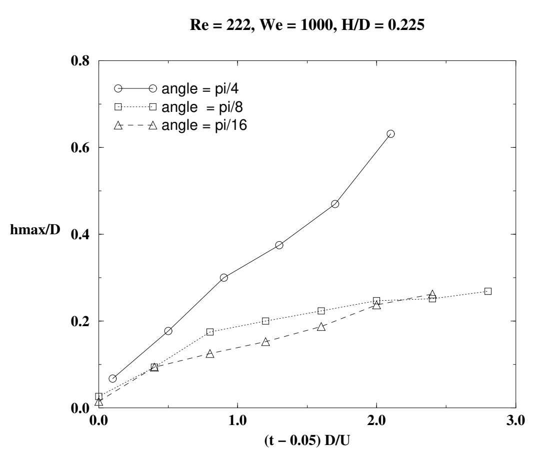


FIG. 7.14 – Évolution au cours du temps de la hauteur maximale de la corolle au dessus du film liquide pour différents angles d'incidence. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

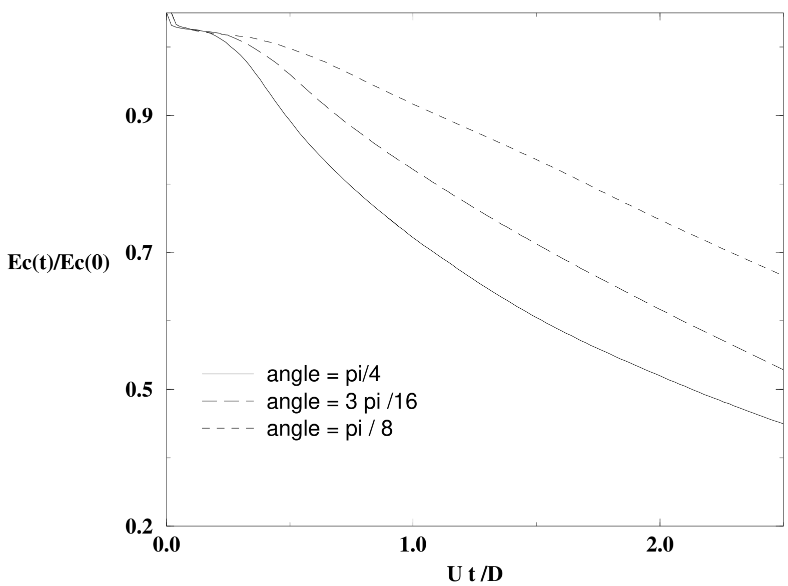


FIG. 7.15 – Influence de l'angle d'incidence sur l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique de l'ensemble du liquide. L'énergie est adimensionée par l'énergie initiale de la goutte. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

L'énergie cinétique totale du liquide est une quantité intégrale qui fluctue moins que les quantités géométriques mesurées précédemment. Cette énergie qui est dissipée rapidement dans la couche limite à la paroi, diminue d'autant plus vite que l'angle d'incidence est élevé (figure 7.15). La transformation $t \to t/(sin^3\theta)^{1/2}$ permet d'obtenir la quasi-superposition aux temps courts des différents profils, chaque adimensionnalisation par $sin\theta$ étant associée à une direction d'espace (figure 7.16).

La figure 7.17 montre l'évolution au cours du temps des différentes composantes de la quantité de mouvement du liquide. En adimensionnant le temps par $D/(Vsin\theta)$ au lieu de D/V et en divisant la quantité de mouvement par $sin\theta$ on obtient une excellente superposition des profils de quantité de mouvement dans les deux deux directions (Oz) et (Ox) pour différents angles d'incidence (figures 7.18 et 7.19). De la même manière, on obtient une bonne superposition des différents profils de quantité de mouvement dans la direction longitudinale (Oy) en adimensionnant le temps par $D/(Vsin\theta)$ et en divisant la quantité de mouvement par $cos\theta$.

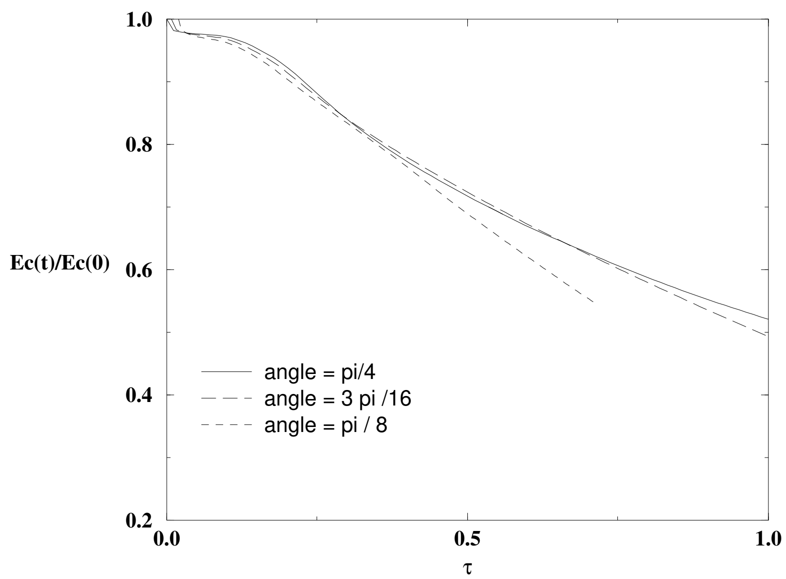


FIG. 7.16 – Les courbes de la figure 7.15 ont subi la transformation $t \rightarrow \tau = t/(sin^3\theta)^{1/2}$. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

7.1.4 Influence des effets visqueux et capillaires

Nous fixons l'angle d'incidence de la goutte à la valeur $\pi/8$ et étudions l'influence des différents paramètres physiques sur les propriétés de l'impact.

Comme auparavant, l'évolution au cours du temps de la hauteur h_1 de la lamelle à l'avant de la goutte est erratique. h_1 augmente avec le nombre de Reynolds (figure 7.21) mais diminue avec le nombre de Weber (figure 7.22), sans doute parce qu'une diminution du nombre de Weber entraine une diminution de l'épaisseur de la corolle et une rétraction plus rapide du bourrelet capillaire. De nouveau, des reconnexions au niveau de l'extrémité de la corolle se produisent, et ce d'autant plus fréquemment que son épaisseur est faible, entraînant des fluctuations de la hauteur de la corolle.

Par contre, dans la gamme de paramètres étudiés, la hauteur d'apex est indépendante des nombres de Reynolds et de Weber comme dans le cas des impacts en incidence normale. Cette quantité décroit linéairement au début de l'impact (figures 7.23 et 7.24).

La tension de surface n'influe pas de manière notable sur la profondeur de la cavité à l'arrière de la goutte (figure 7.25). Par contre cette profondeur dépend fortement du nombre de Reynolds (figure 7.26) et augmente d'autant plus vite que la dissipation est importante. La forme des profils laisse penser qu'une loi du type $1 - erf(x/\sqrt{\nu t})$ correspondant à la solution impulsive de l'équation de diffusion $\partial_t f = \nu \partial_{xx} f$ pourrait permettre de décrire l'évolution au cours du temps de la profondeur de la cavité.

D'autre part, les paramètres d'étalement a et b ne dépendent que très faiblement des nombres de Weber (figures 7.27 et 7.29) et de Reynolds (figures 7.28 et 7.30). De plus, les figures 7.31 et 7.32 en coordonnées log-log suggèrent que les deux paramètres d'étalement suivent une loi d'échelle en $t^{1/2}$ dans ce régime de paramètres.

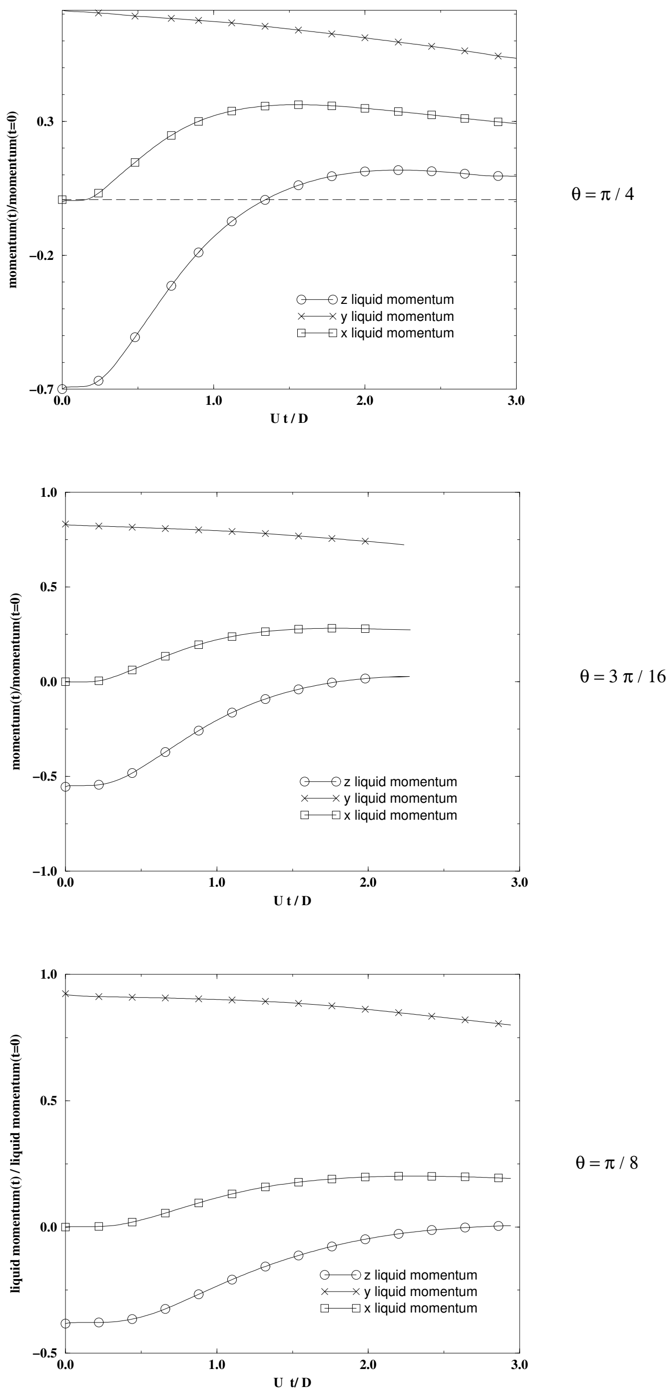


FIG. 7.17 – Influence de l'angle d'incidence sur l'évolution au cours du temps des différentes composantes de la quantité de mouvement de l'ensemble du liquide. Chaque composante est adimensionée par la quantité de mouvement totale de la goutte avant l'impact.

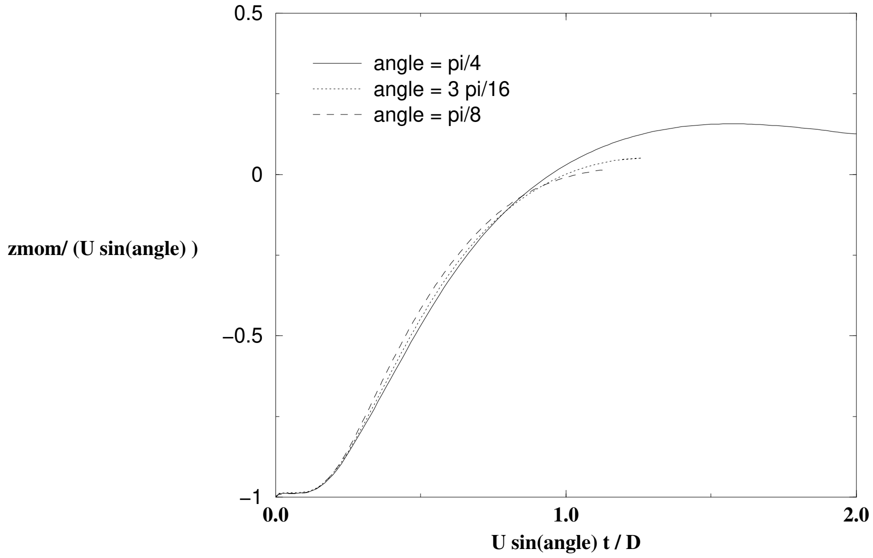


FIG. 7.18 – Profils de quantité de mouvement verticale pour différents angles d'incidence auxquels on a fait subir la transformation ($m_z(t) \rightarrow m_z(t)/(m_z(0) sin\theta)$, $t \rightarrow t\,U\,sin\theta/D$). $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

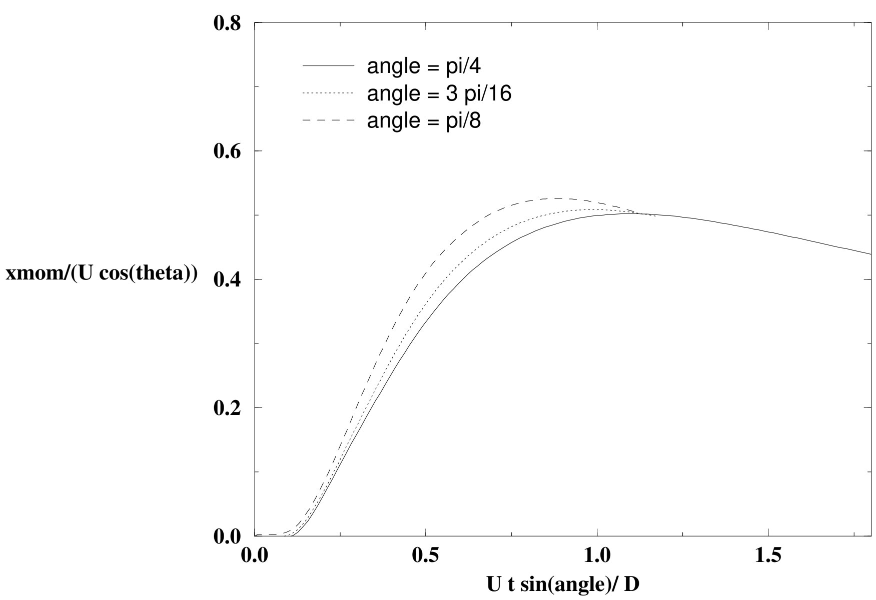


FIG. 7.19 – Profils de quantité de mouvement dans la direction (Ox) pour différents angles d'incidence auxquels on a fait subir la transformation ($m_x(t) \rightarrow m_x(t)/(m_x(0) sin\theta)$, $t \rightarrow t\,U\,sin\theta/D$). $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

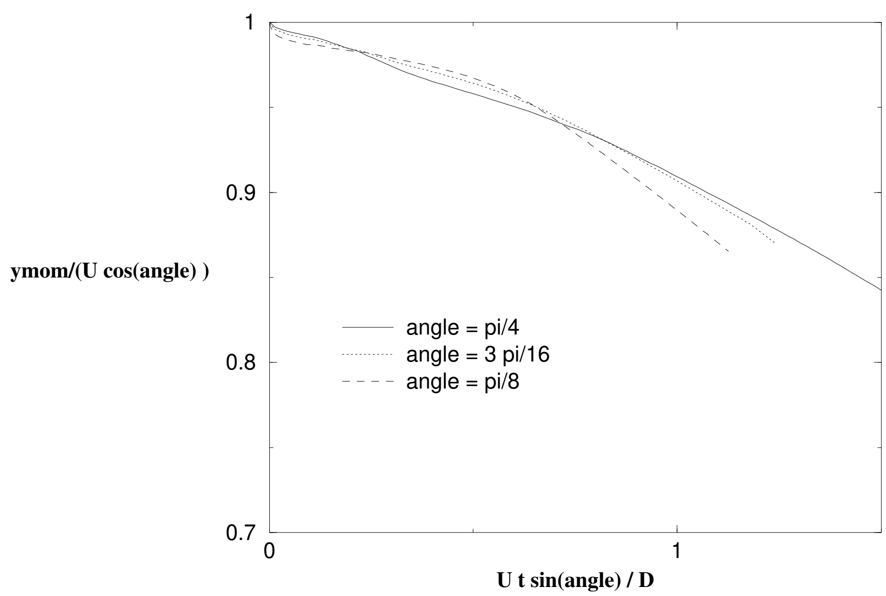


FIG. 7.20 – Profils de quantité de mouvement dans la direction longitudinale (Oy) pour différents angles d'incidence auxquels on a fait subir la transformation $(m_y(t) \rightarrow m_y(t)/(m_y(0)cos\theta),\, t \rightarrow t\,U\,sin\theta/D)$. $Re = 222$, $We = 1000$, $H/D = 0.225$.

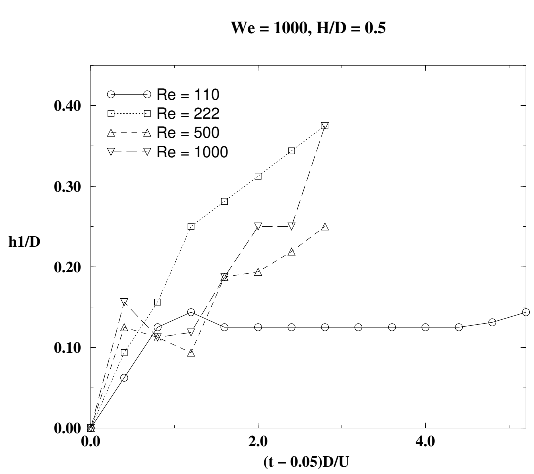


FIG. 7.21 – Evolution au cours du temps de la hauteur de la corolle à l'avant de la goutte pour des nombres de Reynolds variés entre 110 et 1000. $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\theta = \pi/8$.

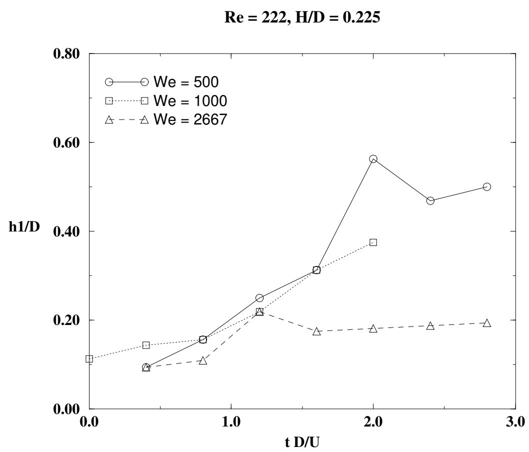


FIG. 7.22 – Evolution au cours du temps de la hauteur de la corolle à l'avant de la goutte pour des nombres de Weber variés entre 500 et 2667. $Re = 222$, $H/D = 0.225$, $\theta = \pi/8$.

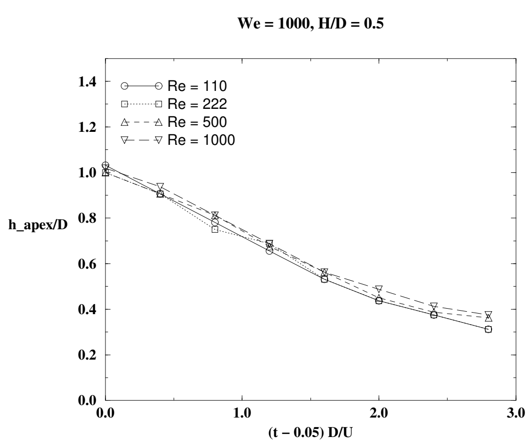


FIG. 7.23 – Evolution au cours du temps de la hauteur d'apex pour des nombres de Reynolds variés entre 110 et 1000. $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\theta = \pi/8$.

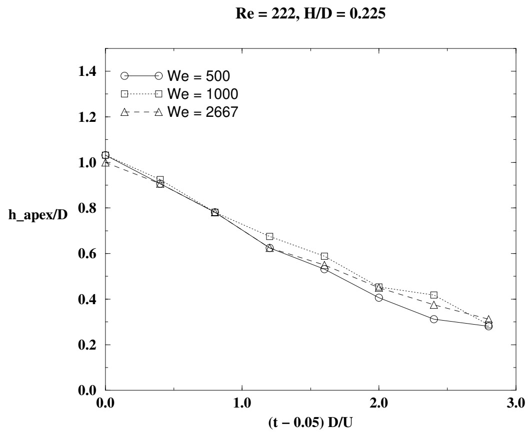


FIG. 7.24 – Evolution au cours du temps de la hauteur d'apex pour des nombres de Weber variés entre 500 et 2667. $Re = 222$, $H/D = 0.225$, $\theta = \pi/8$.

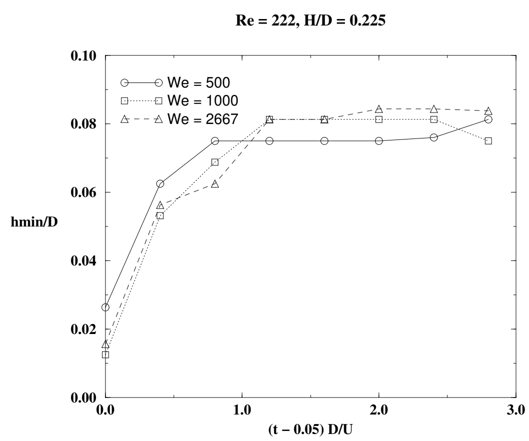


FIG. 7.25 – Evolution au cours du temps de la profondeur de la cavité à l'arrière de la goutte pour des nombres de Weber variés entre 500 et 2667. $Re = 222$, $H/D = 0.225$, $\theta = \pi/8$.

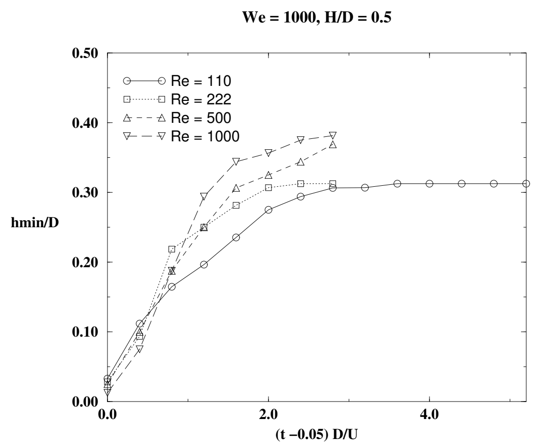


FIG. 7.26 – Evolution au cours du temps de la profondeur de la cavité à l'arrière de la goutte pour des nombres de Reynolds variés entre 110 et 1000. $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\theta = \pi/8$.

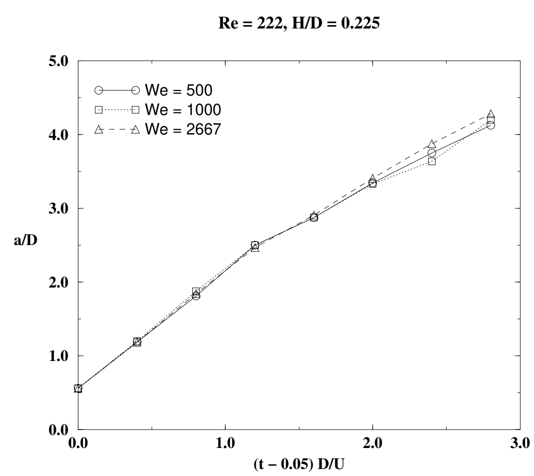


FIG. 7.27 – Evolution au cours du temps du paramètre a pour des nombres de Weber variés entre 500 et 2667. $Re = 222$, $H/D = 0.225$, $\theta = \pi/8$.

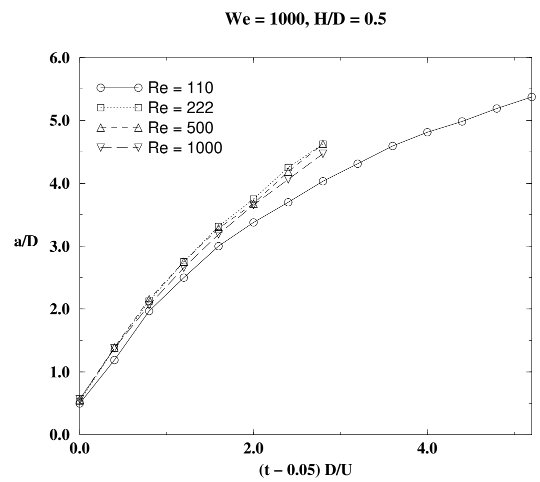


FIG. 7.28 – Evolution au cours du temps du paramètre a pour des nombres de Reynolds variés entre 110 et 1000. $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\theta = \pi/8$.

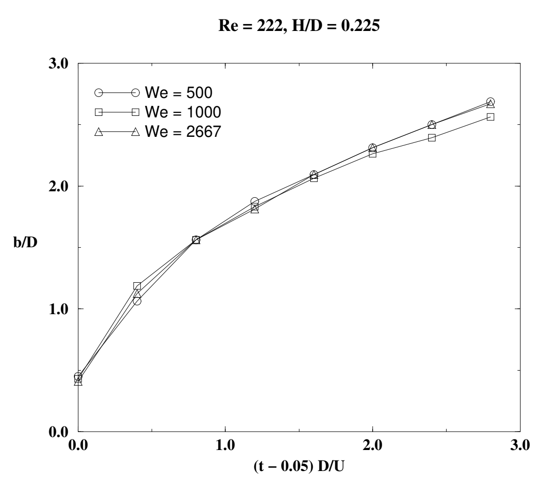


FIG. 7.29 – Evolution au cours du temps du paramètre b pour des nombres de Weber variés entre 500 et 2667. $Re = 222$, $H/D = 0.225$, $\theta = \pi/8$.

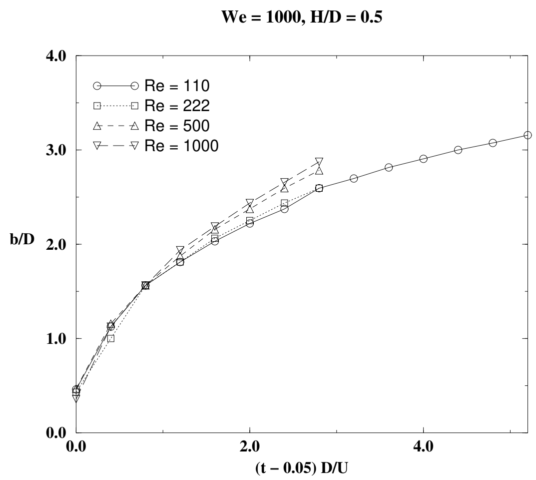


FIG. 7.30 – Evolution au cours du temps du paramètre b pour des nombres de Reynolds variés entre 110 et 1000. $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\theta = \pi/8$.

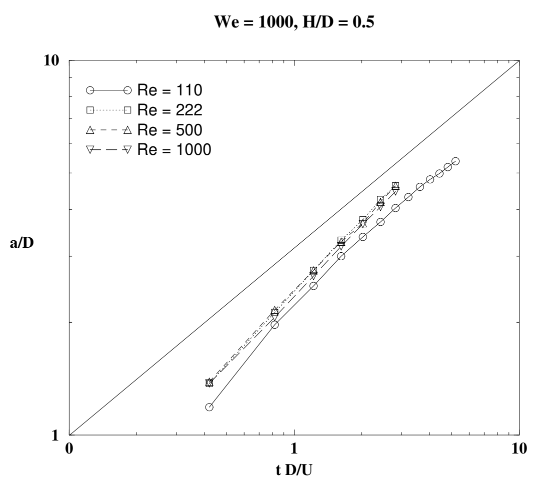


FIG. 7.31 – Evolution au cours du temps du paramètre a pour différents nombres de Reynolds (figure log-log).

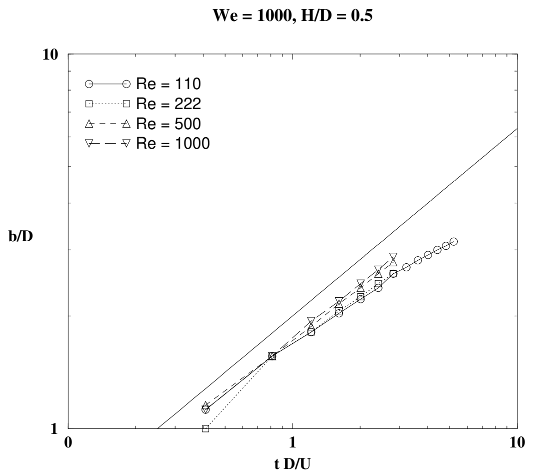


FIG. 7.32 – Evolution au cours du temps du paramètre b pour différents nombres de Reynolds (figure log-log).

L'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique (figure 7.33) est indépendante de la tension de surface. Par contre, les variations de la viscosité du liquide influent considérablement sur l'évolution de l'énergie cinétique qui est dissipée principalement dans la couche limite à la paroi (figure 7.34). L'énergie décroit d'autant plus vite que la viscosité est importante mais la dépendance au nombre de Reynolds est complexe.

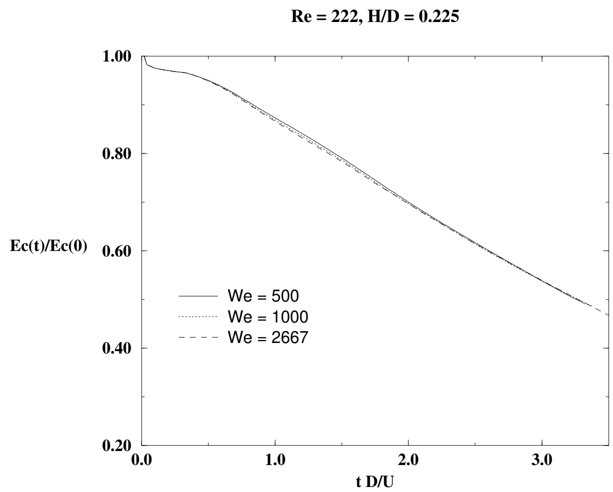


FIG. 7.33 – Evolution au cours du temps de l'énergie cinétique totale du liquide pour des nombres de Weber variés entre 500 et 2667. $Re = 222$, $H/D = 0.225$, $\theta = \pi/8$.

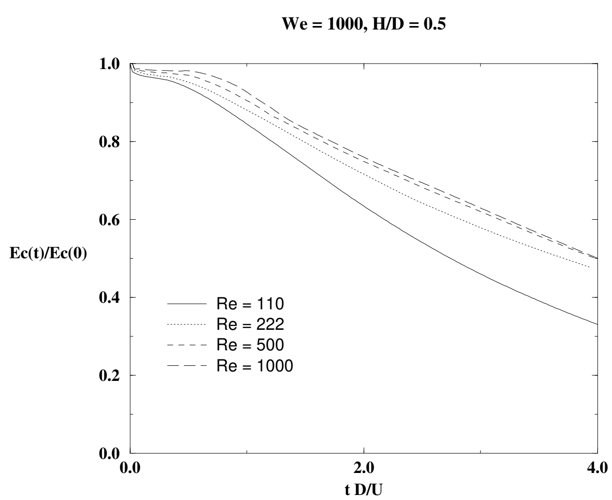


FIG. 7.34 – Evolution au cours du temps de l'énergie cinétique totale du liquide pour différents nombres de Reynolds. $We = 1000$, $H/D = 0.5$, $\theta = \pi/8$.

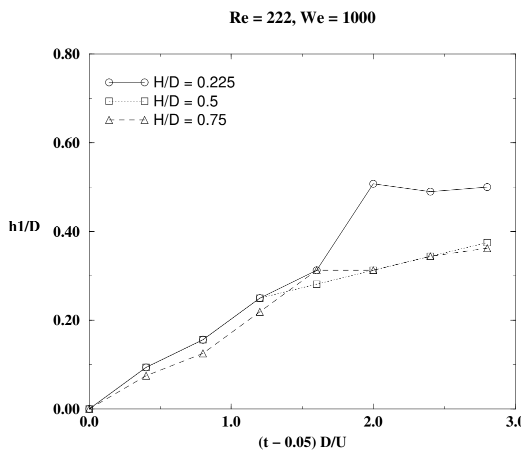


FIG. 7.35 – Evolution au cours du temps de la hauteur de la corolle à l'avant de la goutte pour une épaisseur de film variée entre $H/D = 0.225$ et $H/D = 0.75$. $Re = 222$, $We = 1000$, $\theta = \pi/8$.

7.1.5 Influence de l'épaisseur du film liquide

L'épaisseur du film liquide n'influe que faiblement sur la hauteur de la lamelle à l'avant de la goutte (figure 7.35). Cependant, il est difficile de conclure à cette influence car cette quantité fluctue à chaque fois que des reconnexions se produisent à l'extrémité de la corolle et que des gouttelettes sont éjectées de l'extrémité de la corolle vers le reste de l'écoulement.

L'épaisseur du film n'influe pas sur l'évolution de la hauteur d'apex qui varie linéairement aux temps courts (figure 7.36). Par contre, une augmentation de l'épaisseur du film provoque une forte croissance de la profondeur de la cavité à l'arrière de la goutte (figure 7.37). En effet, si le film est épais, la cavité interagit plus tard avec la couche limite à la paroi et peut donc se développer.

Par ailleurs, un fait notable est que l'allongement de la corolle dans la direction (Oy) ne dépend que faiblement de l'épaisseur du film (figure 7.38). De plus, il est tout aussi remarquable que la largeur de la corolle b évolue indépendamment de l'épaisseur du film (figure 7.39).

Par contre, un amincissement du film liquide augmente les interactions entre les vitesses dans la goutte et la couche limite à la paroi, ce qui a pour effet d'accélérer la dissipation de l'énergie cinétique (figure).

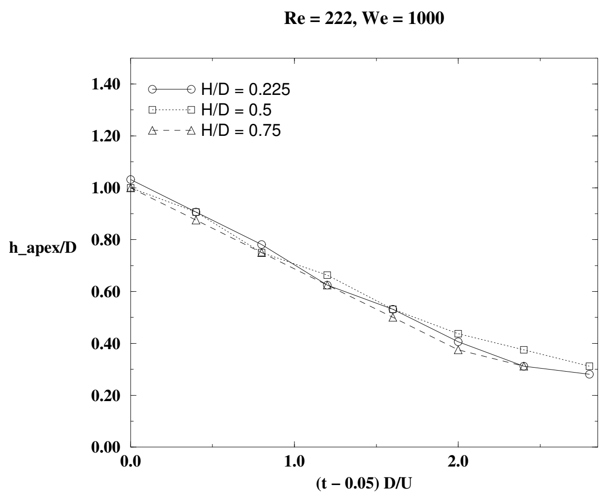


FIG. 7.36 – Influence de l'épaisseur du film sur l'évolution au cours du temps de la hauteur de la corolle à l'avant de la goutte. $Re = 222$, $We = 1000$, $\theta = \pi/8$.

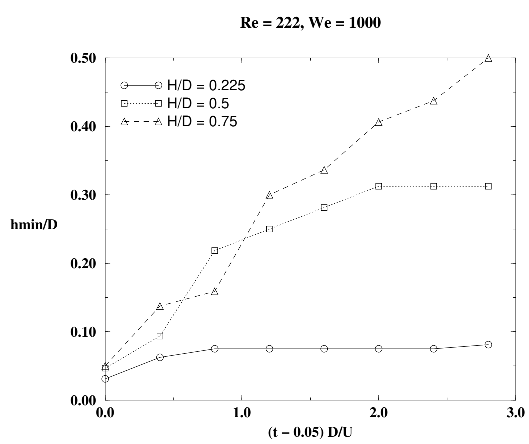


FIG. 7.37 – Influence de l'épaisseur du film sur l'évolution au cours du temps de la profondeur de la cavité. $Re = 222$, $We = 1000$, $\theta = \pi/8$.

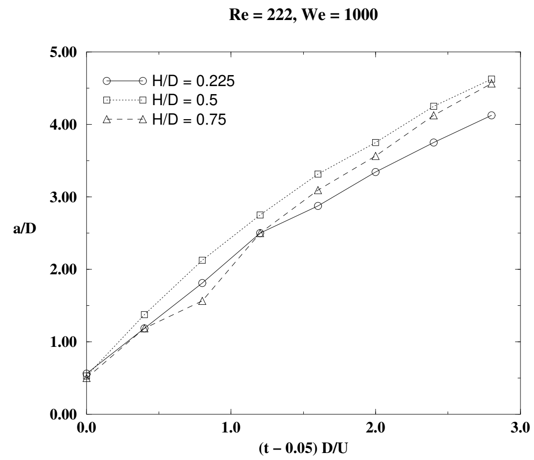


FIG. 7.38 – Influence de l'épaisseur du film sur l'évolution au cours du temps du paramètre a. $Re = 222$, $We = 1000$, $\theta = \pi/8$.

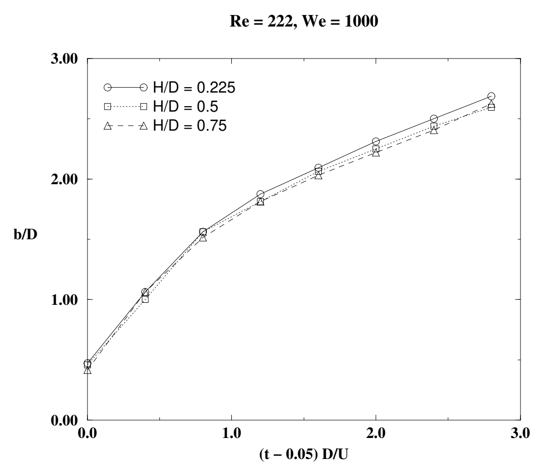


FIG. 7.39 – Influence de l'épaisseur du film sur l'évolution au cours du temps du paramètre b. $Re = 222$, $We = 1000$, $\theta = \pi/8$.

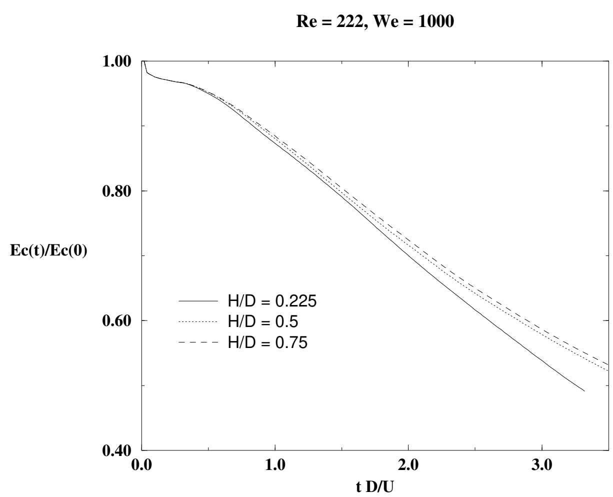


FIG. 7.40 – Influence de l'épaisseur du film sur l'évolution au cours du temps de l'énergie cinétique totale du liquide. $Re = 222$, $We = 1000$, $\theta = \pi/8$.

Chapitre 8

Conclusion

Ce travail a consisté autant à développer ou à améliorer des méthodes numériques pour la simulation des écoulements diphasiques qu'à étudier certains phénomènes physiques mettant en jeu des déformations d'interfaces à l'aide de ces méthodes ou analytiquement.

La première partie de ce manuscrit présente une méthode de Volume de Fluide pour la simulation d'écoulements tridimensionnels. La méthode de suivi d'interface est la généralisation au cas tridimensionnel de la méthode bidimensionnelle CIAM/PLIC. La normale à l'interface est d'abord reconstruite à l'aide d'un schéma aux différence finies centré. Dans chacune des cellules du maillage, l'interface est ensuite approximée par un plan dont la position est ajustée de telle façon que la fraction volumique impartie à chacun des fluides soit respecté. Le plan est ensuite advecté successivement dans chacune des directions d'espace et le volume de fluide en dessous du plan est redistribué dans les cellules adjacentes pour une nouvelle étape de reconstruction.

Le travail décrit dans cette thèse a permis d'améliorer les performances de la méthode mutligrille utilisée pour inverser l'équation de Poisson pour la pression. Quel que soit le rapport de densité entre les deux fluides, la méthode multigrille utilisant des V-cycles classiques s'avère particulièrement efficace. Cet algorithme possède l'avantage d'être très simple. Il peut de plus être initialisé à l'aide de la solution au pas de temps précédent qui représente une bonne approximation de la nouvelle solution. Par ailleurs, en ne sortant de l'algorithme que lorsque le critère de convergence est satisfait, on améliore la convergence au pas de temps suivant, et ce plus particulièrement lorsque l'écoulement est fortement instationnaire.

L'ensemble de la méthode a été validé à l'aide de plusieurs comparaisons entre nos calculs numériques et des résultats expérimentaux ou théoriques connus. En particulier, en comparant nos calculs avec des résultats analytiques pour la sédimentation de gouttes en écoulement de Stokes, nous avons pu déterminer que l'erreur dans le calcul du saut des contraintes visqueuses à travers l'interface se comporte comme $\mathcal{O}(h)$ où h est la taille de maille. Par ailleurs, en simulant les oscillations capillaires de l'interface entre deux fluides superposés et en comparant nos calculs à des théories classiques, nous avons montré la convergence de la méthode CSS. De plus, nous avons comparé nos simulations tridimensionnelles pour le pincement d'une goutte pendante avec des photographies expérimentales et obtenu un excellent accord aussi bien au moment du pincement qu'après que celui-ci se soit produit. De même, nous avons confronté les résultats de nos simulations de la montée de bulles dans un liquide visqueux à des résultats expérimentaux et un excellent accord a été obtenu.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié le phénomène d'impact d'une goutte sur un film liquide. Nous avons tout d'abord présenté une théorie décrivant la formation de la corolle aux temps courts de l'impact. Nous avons obtenu une loi d'échelle pour l'épaisseur de la corolle qui est en bon accord avec nos simulations axisymétriques très résolues des premiers instants du phénomène et un critère pour l'éjection de la corolle liquide. Nous avons par ailleurs effectué une analyse asymptotique des temps longs qui complète celle de Yarin et Weiss. Les lois d'échelle décrivant l'évolution du rayon de la corolle, son épaisseur et sa trajectoire sont observées dans les simulations axisymétriques et nos prédictions concernant l'inclinaison de la corolle par rapport à la verticale sont elles aussi corroborées par les simulations. Nous avons par ailleurs étudié l'influence des effets visqueux et capillaires sur l'évolution de certaines quantités géométriques et montré que la viscosité et la tension de surface influent peu sur la dynamique de la partie centrale de la goutte, la solution sélectionnée étant la solution incompressible. Par contre ces effets à petite échelle ont une influence sur la dynamique de l'extrémité de la corolle.

Par ailleurs, nous avons observé que la vitesse et la pression sont singulières au moment du contact entre la goutte et le film liquide, et ce en raison de l'incompressibilité du fluide. Cependant la divergence des vitesses est vraisemblablement limitée par des effets à petite échelle liés soit à la compressibilité, soit à la viscosité du liquide. Ceci peut provoquer un retard dans la formation de la corolle. Nous avons étudié la singularité de la solution incompressible dans un cas plus simple, celui de l'impact d'un jet sur une paroi, et identifié une solution pour la vitesse verticale de l'interface de la lame ejectée à la paroi s'écrivant $v(x,t) \sim -U\, Log(x)\, \delta(t)$. Nous observons dans les simulations qu'une coupure existe à l'échelle de la maille.

Nous avons pu observer la formation de la corolle dans nos simulations tridimensionnelles lorsque la symétrie du système est brisée à l'aide d'une petite perturbation des conditions initiales. Un mécanisme d'accélération impulsive pourrait expliquer la formation des digitations aux temps courts, i.e. le phénomène d'"éclaboussure rapide" ("prompt splash") observé dans les expériences lorsque la vitesse d'impact est élevée. Nous pensons que ce phénomène est lié à la singularité de la solution incompressible au moment du contact entre la goutte et le film liquide. Nous observons une inversion de la courbure de la perturbation au moment de la formation de la corolle et les digitations apparaissent au niveau des creux de la perturbation initiale et constatons de plus que la longueur de ces digitations croit comme t. Ceci semble cautionner la théorie selon laquelle les digitations résultent d'un mécanisme d'accélération impulsive de Richtmyer-Meshkov. Le même phénomène d'inversion de courbure est observé dans le cas de l'impact d'un jet perturbé initialement autour de sa configuration initiale et les digitations apparaissent au niveau des creux de la perturbation. De nouveau, ce phénomène est lié à la singularité de la solution incompressible au moment du contact entre le jet et la paroi et aux accélérations impulsives qui lui sont associées.

La théorie linéaire ne permet pas de prédire la sélection d'un mode le plus instable. En effet, le taux de croissance est d'autant plus élevé que le mode est instable. Par contre les phénomènes de saturation volumiques non-linéaires ont tendance à provoquer la saturation plus rapide des modes de petite longueur d'onde et favorisent donc au cours de l'instabilité les modes de grandes longueur d'onde. Il n'existe donc pas à proprement parler de sélection d'un mode donné, mais il existe à chaque instant un mode plus instable que les autres modes.

Par ailleurs, nous avons pu étudier de manière systématique le rebond d'une corolle lors de l'impact d'une goutte en incidence oblique. Nous n'avons pu étudier le régime de rebond mais n'avons pas pu observer la transition entre ce régime et le régime de dépôt. Ceci est vraissemblablement lié au manque de résolution dans la région du film de lubrification gazeux compris entre la goutte et le film liquide et il pourrait être avantageux d'utiliser une méthode de marqueurs tridimensionnels pour étudier le phénomène de rebond. Par contre, des lois d'échelle ont pu être identifiées qui décrivent la plupart des quantités géométriques caractéristiques du phénomène de rebond. Nous avons pu en particulier mesurer l'influence des différents paramètres physiques sur l'étalement de la goutte et la formation de la corolle. Nous avons pu caractériser d'autre part les transferts de quantité de mouvement et d'énergie cinétique entre la goutte et le film liquide.

Du point de vue des méthodes numériques, la précision de la méthode de suivi d'interface pourrait être améliorée en utilisant par exemple une méthode de moindres carrés pour le calcul de la normale et une méthode à pas unique pour le transport de l'interface. Cependant d'autres approches plus précises encore pourraient être utilisées comme les méthodes de marqueurs et de splines tridimensionnels. Par ailleurs, la précision avec laquelle la position de l'interface par rapport au maillage est connue a des conséquences sur la précision et la stabilité de la méthode numérique. Ainsi, à l'aide des méthodes de marqueurs, des approches de type volume finis peuvent être utilisées pour résoudre les équations du mouvement dans la région interfaciale. Ce type d'approche a permis de diminuer considérablement les courants parasites à l'interface qui apparaissent lorsque des imprécisions existent dans le calcul du saut des contraintes. Cependant, il est encore difficile avec les méthodes de marqueurs de rompre les interfaces de manière automatique.

D'autre part, pour observer la formation des digitations, il est s'avère nécessaire de bien résoudre la singularité au moment de l'impact. Ainsi, plus la taille de maille h est petite, plus l'amplitude des perturbations peut être diminuée tout en conservant un taux de croissance équivalent pour les digitations à un instant donné. Il pourrait s'avérer utile d'effectuer un rafinnement numérique dans cette zone. Cependant la singularité de la solution incompressible n'existe pas physiquement jusqu'à l'échelle microscopique, car les effets à petite échelle viennent s'opposer à la divergence des quantités comme la pression ou la vitesse et provoquer un retard dans la formation de la corolle. Le rôle que la compressibilité du liquide pourrait jouer dans le retard dans la formation de la corolle et dans le mécanisme de selection du nombre de digitation pourrait être étudié.

Par ailleurs, le rôle des effets capillaires et visqueux dans la sélection du nombre de digitations aux temps courts reste encore analyser. De plus plusieurs mécanismes peuvent expliquer l'instabilité et la croissance des digitations aux temps longs. Nous avons présenté l'un d'eux, mais l'instabilité de Rayleigh pour les bourrelets capillaires est un autre candidat possible qui reste à étudier tenant compte de la croissance au cours du temps du rayon du bourrelet capillaire.

Bibliographie

[1] R. F. Allen. The role of surface tension in splashing. *J. Colloid Interface Sci.*, 51 :350–351, 1975.

[2] M. Vignes-Adler amd B Prunet-Foch, F. Legay, and N. Mourougou. Phénomènes de transport intervenant lors de la projection de particules sur une surface. *Proceeding des Journees SFT/GUT*, 1998.

[3] N. Ashgriz and J. Y. Poo. FLAIR : Flux line-segment model for advection and interface reconstruction. *J. Comput. Phys.*, 93 :449–468, 1991.

[4] G. K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[5] M. Berning and A. M. Rubenchik. *Phys. Fluids*, 10 :1564, 1998.

[6] A. L. Bertozzi and M. P. Brenner. Linear stability and transient growth at driven contact lines. *Phys. Fluids*, March 1997.

[7] A. Blanco. PhD thesis, Univ. Toulouse.

[8] J.U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100 :335–354, 1992.

[9] A. Brandt. *Guide to multigrid development.* Multigrid Methods, Springer Verlag, Berlin, 1982.

[10] M. Brenner, J. R. Lister, and H. A. Stone. Pinching threads, singularities and the number 0.0304... *Phys. Fluids*, 8 :2827–2836, 1996.

[11] A. Breton. *Rapport de DEA, directeur Stéphane Zaleski.* PhD thesis, Université Paris 6, 1999.

[12] W. L. Briggs. *A multigrid tutorial.* SIAM Philadelphia, 1987.

[13] R. K. C. Chan and R. L. Street. A computer study of finite-amplitude water waves. *J. Comp. Phys.*, 6 :68–94, 1970.

[14] G. Chen, C. Kharif, S. Zaleski, and J. Li. Two-dimensional Navier-Stokes simulation of breaking waves. *Phys. Fluids*, 11 :121–133, 1999.

[15] S. Chen, B. Merriman, S. Osher, and P. Smereka. A simple level set method for solving Stephan problems. *J. Comput. Phys.*, 135 :8–29, 1997.

[16] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equation. *Math. Comput.*, 22 :745, 1968.

[17] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, Drops and Particules.* Academic Press, 1978.

[18] A. Coghe, G. Brunello, G.E. Cossali, and M. Marengo. T. *Proccedings of ILASS Europe*, 1999.

[19] A. Coghe, G. Brunello, G.E. Cossali, and M. Marengo. T. *Proccedings of ILASS Europe*, 1999.

[20] M. J. Cooker and D. H. Peregrine. Pressure-impulse theory for liquid impact problems. *J. Fluid Mech.*, 297 :193–214, 1995.

[21] L. Cortelezzi and A. Prosperetti. Small amplitude waves on the surface of a layer of a viscous liquid. *Quaterly Appl. Math.*, 38 :375–388, 1981.

[22] G.E. Cossali, A. Coghe, and M. Marengo. The impact of a single drop on a wetted solid surface. *Exper. in Fluids*, 22(6) :463–472, 1997.

[23] A. V. Coward, Y. Y. Renardy, M. Renardy, and J. R. Richards. Temporal evolution of periodic disturbances in two-layer couette flow. *J. Comput. Phys.*, 132 :346–361, 1997.

[24] F. E. C. Culick. Comments on a ruptured soap film. *J. Appl. Phys.*, 31 :1128, 1960.

[25] B. J. Daly. Numerical study of two-fluid Rayleigh–Taylor instability. *Phys. Fluids*, 10 :297–307, 1967.

[26] B. J. Daly. Numerical study of the effect of surface tension on interface instability. *Phys. Fluids*, 12 :1340–1354, 1969.

[27] P. G. de Gennes. Wetting : statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys*, 57 :827–863, 1985.

[28] P. G. de Gennes and J. Badoz. *Les objets fragiles.* Plon, Paris, 1994.

[29] R. DeBar. Fundamentals of the KRAKEN code. Technical report, 1974.

[30] G. Debregeas. *Drainage, éclatement et étalement de bulles et de gouttes visqueuses.* PhD thesis, Université Paris 6, 1997.

[31] V. Dussan. *Ann. rev. Fluid Mech.*, 11 :371–400, 1979.

[32] J. Eggers. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Mod. Phys.*, 69 :865–929, 1997.

[33] J. Eggers and T. D. Dupont. Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation. *J. Fluid Mech.*, 262 :205–221, 1994.

[34] Jens Eggers. Universal pinching of 3D axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. lett.*, 71 :3458–3461, 1993.

[35] O. G. Engel. *J. Appl. Phys.*, 37, 1966.

[36] O. G. Engel. *J. Appl. Phys.*, 38 :3935–3940, 1967.

[37] T. Erneux and S. H. Davis. Nonlinear rupture of free films. *Phys. Fluids A*, 5 :1117–1122, 1993.

[38] J. Fukai, Z. Zhao, D. Poulikakos, C. M. Megaridis, and O. Miyatake. *Phys. Fluids A*, 5, 1993.

[39] J. M. Fullana and S. Zaleski. Stability of a growing end rim in a liquid sheet of uniform thickness. *Phys. Fluids*, 11 :952–954, 1999.

[40] J. Glimm, O. Mc Bryan, R. Menikoff, and D.H. Sharp. Front tracking applied to Rayleigh-Taylor instability. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7 :230–251, 1986.

[41] D. Gueyffier, A. Nadim, J. Li, R. Scardovelli, and S. Zaleski. Volume of fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *J. Comput. Phys.*, 152 (2) :421–456, July 1999.

[42] D. Gueyffier and S. Zaleski. Formation de digitations lors de l'impact d'une goutte sur un film liquide. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris sér II (b)*, Dec. 1998.

[43] F. H. Harlow and J. P. Shannon. The splash of a liquid drop. *J. Appl. Phys.*, 38 (10) :3855–3866, 1967.

[44] F. H. Harlow and J. E. Welsh. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.

[45] F. Helsot, N. Fraisse, and A. M. Cazabat. *Nature*, 338 :640, 1989.

[46] C. W. Hirt and B. D. Nicholls. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39 :201–225, 1981.

[47] J. G. Hnat and J. D. Buckmaster. Erratum : Spherical cap bubbles and skirt formation. *Phys. Fluids*, 19 :611, 1976.

[48] J. G. Hnat and J. D. Buckmaster. Spherical cap bubbles and skirt formation. *Phys. Fluids*, 19 :182–194, 1976.

[49] T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, and M. J. Shelley. The long-time evolution of vortex sheets with surface tension. *Phys. Fluids*, 9 :1933–1954, 1997.

[50] J. F. Joanny and P. G. de Gennes. *J. Phys.*, 47 :121, 1986.

[51] E. Jussim, G. Kayafas, and G. Hayafas. *Stopping Time : The photographs of Harold Edgerton.* Harry N. Abrams, New York, 1987.

[52] F. Kappei, B. Platet, A. C. Tournayre, and G. Lavergne. Contribution à l'étude de l'impact de gouttes sur paroi et film liquide. Technical report, Janvier.

[53] J. B. Keller. Breaking of liquid films and threads. *Phys. Fluids*, 26 :451, 1983.

[54] J. B. Keller, A. King, and L. Ting. Blob formation. *Phys. Fluids*, 7 :226, 1995.

[55] J. B. Keller and M. J. Miksis. Surface tension driven flows. *SIAM J. Appl. Math.*, 43 :268–277, 1983.

[56] R. Kobayashi. Modeling and numerical simulations of dendridic crystal growth. *Physica D*, 63 :410, 1993.

[57] B. Lafaurie, C. Nardone, R. Scardovelli, S. Zaleski, and G. Zanetti. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comput. Phys.*, 113 :134–147, 1994.

[58] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.

[59] Z. Levin and P.V. Hobbs. Splashing of water drops on solid and wetted surface : hydrodynamics and charge separation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 269 :555, 1971.

[60] J. Li. *Résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes avec reconnexion d'interfaces*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1996.

[61] Jie Li. Calcul d'interface affine par morceaux (piecewise linear interface calculation). *C. R. Acad. Sci. Paris, série IIb, (Paris)*, 320 :391–396, 1995.

[62] K. F. Loehr. *Etalement et eclatement de gouttes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1990.

[63] A. Lukkarinen, K. Kaski, and D. B. Abraham. *Phys. Rev. E*, 1995.

[64] W.F. Noh and P. Woodward. SLIC (simple line interface calculation). In A.I. van de Vooren and P.J. Zandbergen, editors, *Proceedings, Fifth International Conference on Fluid Dynamics*, volume 59 of *Lecture Notes in Physics*, pages 330–340, Berlin, 1976. Springer.

[65] H. N. Oguz and A. Prosperetti. Bubble entrainment by the impact of drops on liquid surfaces. *J. Fluid Mech.*, 203 :143–179, 1990.

[66] H. N. O guz and A. Prosperetti. Dynamics of bubble growth and detatchment from a needle. *J. Fluid Mech.*, 257 :111–145, 1993.

[67] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79 :12–49, 1988.

[68] B. J. Parker and D. L. Youngs. Two and three dimensional eulerian simulation of fluid flow with material interfaces. Technical report, February 1992.

[69] D. H. Peregrine. The fascination of fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 106 :59–80, 1981.

[70] D. H. Peregrine, G. Shoker, and A. Simon. The bifurcation of liquid bridges. *J. Fluid. Mech.*, 212 :25–39, 1990.

[71] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer Verlag, New York/Berlin, 1983.

[72] J. E. Pilliod Jr and E. G. Puckett. Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces. Technical report, Lawrence Berkeley National Laboratory, 1997. No. LBNL-40744, soumis aussi à J. Comput. Phys.

[73] J. Plateau. *Acad. Sci. Bruxelles Mm.*, 23 :5.

[74] S. Popinet. Communication privée.

[75] S. Popinet and S. Zaleski. Coupling of radial and translational motion in small viscous bubbles. In *Proceedings of FEDSM99*, 1999.

[76] S. Popinet and S. Zaleski. A front tracking algorithm for the accurate representation of surface tension. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 1999. à paraitre.

[77] A. Prosperetti. Motion of two superposed viscous fluids. *Phys. Fluids*, 24 :1217–1223, 1981.

[78] N. Provatas, N. Goldenfeld, J. Dantzig, J. C. LaCombe, A. Lupulescu, M. B. Koss, M. E. Glicksman, and R. F. Almgren. Crossover scaling in dendritic evolution at low undercooling. *Phys. Rev. Lett.*, 1999. à paraitre.

[79] E. J. Puckett, A. S. Almgren, J. B. Bell, D. L. Marcus, and W. J. Rider. A second-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows. *soumis au J. Comput. Phys.*, 1994.

[80] Lord J. W. S. Rayleigh. *Proc. London Math. Soc.*, 10 :4.

[81] L. Raynal. *Instabilité et entrainement à l'interface d'une couche de mélange liquide-gaz.* PhD thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble I, 1997.

[82] M. Rein. Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dyn. Research*, 12(2) :61–93, 1993.

[83] R. D. Richtmyer. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 :297–319, 1960.

[84] W. J. Rider and D. B. Kothe. Reconstructing volume tracking. *J. Comput. Phys.*, 141 :112–152, 1998.

[85] M. Rieber and A. Frohn. Numerical simulation of splashing drops. Academic Press, 6-8 July 1998. Proceedings of ILASS98, Manchester.

[86] D. H. Rothman and S. Zaleski. *Lattice-gas cellular automata.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.

[87] G. Ryskin and L. G. Leal. Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. part 2 : Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid. *J. Fluid Mech.*, 148 :19–36, 1984.

[88] A. S. Sangani. Sedimentation in ordered emulsions of drops at low Reynolds numbers. *J. of Appl. Math. and Physics (ZAMP)*, 38 :542–556, July 1987.

[89] F. Savart. *Annal. Chim.*, 53 :337, 1833.

[90] P. Savic and G. T. Boult. *National Research Council of Canada, Rep. No. Mt-26.*

[91] R. Scardovelli, S. Popinet, S. Zaleski, and S. Manservisi. Two algorithms for 2d interface tracking. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation, Pisa, Italy*, 1999.

[92] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *to appear in Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1998.

[93] R. M. S. Schulkes. The evolution and bifurcation of a pendant drop. *J. Fluid Mech.*, 278 :83–100, 1994.

[94] X. D. Shi, M. P. Brenner, and S. R. Nagel. A cascade of structure in a drop falling from a faucet. *Science*, 265 :157–288, 1994.

[95] W. Shyy, H. S. Udaykumar, M. M. Rao, and R. W. Smith. *Computational fluid dynamics with moving boudaries.* Taylor and Francis, London, 1996.

[96] C. D. Stow and M.G. Hadfield. *Proc. Roy. Soc. London A*, 373 :419–441, 1981.

[97] M. Sussman, A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Collela, L. H. Howell, and M. L. Welcome. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.*, 1999.

[98] M. Sussman and P. Smereka. Axisymmetric free boundary problems. *J. Fluid Mech.*, 341 :269–294, 1997.

[99] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114 :146–159, 1994.

[100] G. I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their plane. I. *Proc. Roy. Soc. A*, 201 :192, 1950.

[101] G. I. Taylor. The dynamics of thin sheets of fluid III. Disintegration of fluid sheets. *Proc. Roy. Soc. London A*, 253 :313, 1959.

[102] S. T. Thoroddsen and J. Sakakibara. Evolution of the fingering pattern of an impacting drop. *Phys. Fluids*, 10 :1359–1374, 1998.

[103] L. Ting and J. B. Keller. Slender jets and thin sheets with surface tension. *SIAM J. Appl. Math.*, 50 :1533–1546, 1990.

[104] S. O. Unverdi and G. Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100 :25–37, 1992.

[105] P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods.* Wiley, Chichester, 1992.

[106] A. A. Wheeler, B. T. Murray, and R. J. Schaeffer. Computations of dendrites using a phase field model. *Physica D*, 66 :242–262, 1993.

[107] A. M. Worthington. On the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate. *Proc. London Roy. Soc. London*, page 261, 1876.

[108] A. M. Worthington. A second paper on the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate. *Proc. London Roy. Soc. London*, page 261, 1877.

[109] A. M. Worthington. *A study of Splashes.* Longmans, London, 1908.

[110] A. L. Yarin and D. A. Weiss. Impact of drops on solid surfaces : self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity. *J. Fluid Mech.*, 283 :141–173, 1995.

[111] D.L. Youngs. Time dependent multimaterial flow with large fluid distortion. In K. M. Morton and M. J. Baines, editors, *Numerical methods for fluid dynamics*, pages 27–39, New York, 1982. Academic Press. Institute for Mathematics and its Applications.

[112] S. Zaleski, J. Li, and S. Succi. Two-dimensional Navier-Stokes simulation of deformation and breakup of liquid patches. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :244–247, 1995.

[113] Y. B. Zeldivich, G. I. Barenblatt, V. B. Librovich, and G. M. Makhviladze. *The Mathematical Theory of Combustion and Explosion.* Consultants Bureau, NY, 1985.